

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2010

Fourth Semester

Mathematics

LINEAR ALGEBRA

(CBCS—2008 Onwards)

Duration : 3 Hours

Maximum : 75 Marks

Part - A

(10 × 2 = 20)

Answer **All** the Questions.

All questions carry equal marks.

1. Define a Vector space.

வெக்டர் வெளியின் வரையறை கூறுக.

2. Let V be a vector space over a field F . Then prove that $\alpha \bar{0} = \bar{0} \forall \alpha \in F$

F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த வெக்டர் வெளி V என்க $\alpha \bar{0} = \bar{0} \forall \alpha \in F$ என நிறுவுக.

3. If S and T are subsets of a vector space V .

Prove that $S \subset T \Rightarrow L(S) \subset L(T)$

S, T என்பவை V என்ற வெக்டர் வெளியின் உட்களங்கள் எனில் $S \subset T \Rightarrow L(S) \subset L(T)$ என நிறுவுக.

4. Find the briar transformation $T : V_2(\mathbb{R}) \rightarrow V_3(\mathbb{R})$ determined by the Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ w.r to the standard basis $\{e_1, e_2, e_3\}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியில் (e_1, e_2, e_3) என்ற அடிமானத்தை ஒட்டி காணப்படும் $T : V_2(\mathbb{R}) \rightarrow V_3(\mathbb{R})$ என்ற ஒருப்பு உருமாற்றத்தைக் காண்க.

5. Prove that if W_1 and W_2 are subspaces of V then $W_1 \cap W_2$ is also a subspace of V .

W_1, W_2 என்பவை V என்ற வெக்டர் வெளியின் உள் வெளி எனில் $W_1 \cap W_2$ என்பது V ன் உள்வெளி எனக்கூடுக.

6. Show that $S = \{(1, 0, 0) (0, 1, 0) (1, 1, 1)\}$ is a basis for $V_3(\mathbb{R})$
 $S = \{(1, 0, 0) (0, 1, 0) (1, 1, 1)\}$ என்பது $V_3(\mathbb{R})$ ன் அடிக்கணம் என்று காட்டுக.

7. Show that in an inner product space $\langle \alpha u + \beta u, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle u, w \rangle$

உட்பெருக்கல் வெளியில் $\langle \alpha u + \beta u, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle u, w \rangle$ எனக் காட்டுக.

8. Space that in a real inner product space is $\langle x, y \rangle = 0$ then $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

ஒரு மெய் உட்பெருக்கல் வெளியில் $\langle x, y \rangle = 0$ எனில் $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ எனக் காட்டுக.

9. Define characteristic vector and characheristic equation of a matrix A.

ஒரு அணி Aயின் சிறப்பியல்பு வெக்டர் மற்றும் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு இவற்றை வரையறு.

10. Find the characteristic polynomial for the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் சிறப்பியல்பு கேவையை கண்டுப்பிடி.

Part - B

(5 × 5 = 25)

Answer **all** the Questions

All questions carry equal marks

Choosing either (a) *or* (b) from each.

11a. Examine whether the vectors (1, 2, 1) (2, 1, 0) (1, -1, 2) are linearly independent or not in $V_3(\mathbb{R})$

(1, 2, 1) (2, 1, 0) (1, -1, 2) என்ற வெக்டர்கள் $V_3(\mathbb{R})$ ல் ஒருப்புச் சார்புள்ளவையா என்று சோதித்து அறிக.

(Or)

b. Let V be vector space over a field F and S be any non empty subset of V . Then prove that $L(S)$ is a subspace of V .

F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த வெக்டர்வெளி V என்க. V யின் வெற்றற்ற உட்கணம் S எனில் என்பது $L(S)$ என்பது V யின் உள்வெளி என நிறுவுக.

12a. If A and B are subspace of vector space V over a field F prove that

$$\frac{A+B}{A} \cong \frac{B}{A \cap B}$$

F என்ற களத்தின் மீது உள்ள வெக்டர்வெளி V ன் உள் வெளிகள் A, B எனில்

$$\frac{A+B}{A} \cong \frac{B}{A \cap B} \text{ என நிறுவுக.}$$

(Or)

- b. Let V be a vector space over F . Let $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ and $L(S) = W$. Prove that there exists a binary independent subset S' of S such that $L(S') = W$.

Fன் மீது V ஒரு வெக்டர்வெளி என்க. $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ எனவும் $L(S) = W$ என்க S' என்ற ஒருபடி சாராத உட்களம் S ல் $L(S') = W$ எனக் காணலாம் என நிறுவுக.

- 13a. Find the junior transformation $T : V_3(\mathbb{R}) \rightarrow V_3(\mathbb{R})$ determined by

the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ with respect to the standard

basis $\{e_1, e_2, e_3\}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ என்ற அணியில் $\{e_1, e_2, e_3\}$ என்ற அடிமானத்தை ஒட்டி

கணப்பும். $T : V_3(\mathbb{R}) \rightarrow V_3(\mathbb{R})$ என்ற ஒருபடி உருமாற்றத்தைக் காண்க.

(Or)

- b. Prove that any vector space of dimension n over a field F is isomorphic to $V_n(F)$.

F என்ற களத்தின் மீது அமையும் என்ற ஒரு n பரிமானமுடைய வெக்டர் வெளியும், $V_n(F)$ என்பதன் இயல்முறைமாறா சேந்தலாக இருக்கும் எனக்காட்டுக.

- 14a. If $V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ is continuous}\}$, show that

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ is an inner product on V .

$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ - தொடர்ச்சியானது}\}$ எனில்

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ என்பது V ல் உள்ள உட்பெருக்கம் எனக் காட்டுக.

(Or)

- b. Let V be an innerproduct space $S \subseteq V$ show that S^\perp is a subspace of V .

V என்ற உட்பெருக்கல் வெளியில் $S \subseteq V$ எனில் S^\perp என்பது V ன் உள்வெளி என நிறுபி.

- 15a. If λ is an eigen value of A then Prove that λ^k is an eigen value of A^k where k is any positive integer.

அணி A யின் சிறப்பியல்பு மூலம் λ எனில் A^k யின் சிறப்பியல்பு மூலம் λ^k என நிறுவுக.

(Or)

- b. Find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ என்ற அணியின் எதிர்மாறு காண்க.}$$

Part - C

(3 × 10 = 30)

Answer any **Three** questions

All questions carry equal marks.

16. Let V be a vector space over F and W be a subspace of V prove that V/W is a vector space over F .

F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த வெக்டர்வெளி V என்க. W என்பது V ன் உள்வெளி எனில் V/W என்பது என்ற களத்தின் மீது அமைந்த வெக்டர் வெளி ஆகும் என நிறுவுக.

17. Let V be a finite dimensional vector space over F . If A and B are subspaces of V . Prove that $\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$. If $V = A \oplus B$. Prove that $\dim V = \dim A + \dim B$.

பின் மீது ஒரு முடிவறுபான வெக்டர் வெளி V . $A \mid B$ என்பன அதன் உள்வெளிகள் எனில் $\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$ என நிறுவுக. $V = A \oplus B$ எனில் $\dim V = \dim A + \dim B$ எனக் காட்டுக.

18. Prove that every finite dimensional inner product space has an orthonormal basis.

ஒவ்வொரு முடிவறு பரிமாணமுடைய உட்பெருக்கல் வெளியும் செங்கோடு அடிமானங்களைக் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

19. Test the consistence of the below system of equations and solve them

$$\begin{aligned} x - 4y - 3z &= -16, & 4x - y + 6z &= 16 \\ 2x + 7y + 12z &= 48, & 5x - 5y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் ஒவ்வகத் தன்மையை அறிந்து தீர்க்க.

$$\begin{aligned} x - 4y - 3z &= -16, & 4x - y + 6z &= 16 \\ 2x + 7y + 12z &= 48, & 5x - 5y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

20. Find the characteristic roots and characteristic vectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 24 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 24 & 8 & -6 \end{bmatrix} \text{ என்ற அணியின் சிறப்பியல்பு}$$

மூலங்கள், சிறப்பியல்பு வெக்டர் இவற்றைக் காண்க.

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2010

First Semester

Mathematics

ANALYTICAL GEOMETRY 3D AND VECTOR CALCULUS

(CBCS — 2008 Onwards)

Time : 3 Hours

Maximum : 75 Marks

Part-A (10 × 2 = 20)Answer **all** Questions

1. Find the angle between the planes

$$2x - y + z = 6 \text{ and } x + y + 2z = 7$$

மேலே உள்ள தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

2. Find the direction cosines of the line
- $\frac{2x+1}{3} = \frac{4y-3}{1} = \frac{2z-3}{0}$

மேலே உள்ள கோட்டின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

3. Find the angle between the line
- $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-7}{-1}$
- and the plane
- $4x + 3y + 20z = 5$
- .

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-7}{-1} \text{ என்ற கோட்டிற்கும் } 4x + 3y + 20z = 5 \text{ என்ற}$$

தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

4. Find the equation of the plane which contains the two parallel

$$\text{lines } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} \text{ and } \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} \text{ மற்றும் } \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3} \text{ என்ற}$$

இணைக்கோடுகளைத் தன்னகத்தே கொண்ட தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

5. Find the equation of the sphere which has the line joining the points $(2, 7, 5)$ and $(5, 3, -1)$ as diameter.

$(2, 7, 5), (5, 3, -1)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை விட்டமாக்கக் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

6. Find the equation of the tangent plane at the origin to the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 7y + 3z = 0$$

ஆதியிடத்து $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 7y + 3z = 0$ என்ற கோளத்திற்கு தொடுதளம் காண்க.

7. Show that $\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$

$\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$ எனக் காண்க.

8. Prove that $\text{div curl } \vec{F} = 0$

$\text{div curl } \vec{F} = 0$ என நிரூபி.

9. Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ where $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}$ and C is the curve $y = x^2$ joining $(0, 0)$ and $(1, 1)$

C என்பது $y = x^2$ என்ற வளைவரையில் $(0, 0)$ வையும் $(1, 1)$ யும்

இணைக்கும் எனில் $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}$ க்கு $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ -ஐக் கணக்கிடுக.

10. State Green's theorem.

கிரீனின் தேற்றத்தைக் கூறு.

Part - B

(5 × 5 = 25)

Answer ALL Questions choosing either (a) or (b)

- 11.a. A plane meets the co-ordinate axes at A, B, C such that the centroid of ΔABC is the point (α, β, γ) . Show that the

equation of the plane is $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 3$

ஒரு தளம், ΔABC ன் மையக்கோட்டுச் சந்தி (α, β, γ) என உள்ளவாறு ஆய அச்சுகளை A, B, C யில் சந்திக்கிறது எனில் அதன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 3 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

Or

b. Show that the angle between two diagonals of a cube is

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

ஒரு கன சதுரத்தில் இரண்டு மூலைவிட்டங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

12.a. Find the image of the point $(1, -2, 3)$ under the reflection in the plane $2x - 3y + 2z + 3 = 0$.

$2x - 3y + 2z + 3 = 0$ என்ற தளத்தில் பிரதிபலிக்கும் $(1, -2, 3)$ என்ற புள்ளியின் பிம்பம் காண்க.

Or

b. Show that the lines $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2}$ and $\frac{x-5}{2} = \frac{8-y}{-3} = \frac{7-z}{-2}$ are coplanar and find the equation of the plane containing them.

நேர்க்கோடுகள் $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2}$ மற்றும் $\frac{x-5}{2} = \frac{8-y}{-3} = \frac{7-z}{-2}$

என்பன ஒரு தளக்கோடுகள் எனக் காட்டுக. மேலும் அவை அமையும் தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

13.a. Find the equation of the sphere having the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $x - 2y + 2z = 5$ as a great circle.

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $x - 2y + 2z = 5$ என்ற வட்டத்தினை பெரிய வட்டமாகக் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

Or

- b. Find the equation of the cone whose vertex is origin and guiding curve the circle $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y + 3z - 1 = 0$; $x - y + z + 4 = 0$

ஆதியை முனையாகவும் வழிநடத்தும் வளைவரையாக வட்டம் $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y + 3z - 1 = 0$; $x - y + z + 4 = 0$ ஐக் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாடு காண்க.

- 14.a. Prove that $\text{div}(\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot \text{curl} \bar{u} - \bar{u} \cdot \text{curl} \bar{v}$

$$\text{நீருபிக்க } (\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot \text{curl} \bar{u} - \bar{u} \cdot \text{curl} \bar{v}$$

Or

- b. Find the directional derivative of $\psi = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ at $(1, 1, -1)$ in the direction $2i + 2j + k$

$\psi = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ க்கு $(1, 1, -1)$ புள்ளியிடத்து $2i + 2j + k$ என்ற திசையில் திசை வகைக்கெழு காண்க.

- 15.a. If $\bar{A} = (5xy - 6x^2)\bar{i} + (2y - 4x)\bar{j}$, evaluate $\int_C \bar{A} \cdot d\bar{r}$ where C is the

curve $y = x^3$ in the xy plane from the point $(1, 1)$ to $(2, 8)$.

C என்பது xy தளத்தில் $y = x^3$ வளைவரையில் $(1, 1)$ முதல் $(2, 8)$

வரையுள்ளது. $\bar{A} = (5xy - 6x^2)\bar{i} + (2y - 4x)\bar{j}$ எனில் $\int_C \bar{A} \cdot d\bar{r}$ -ஐக்

கணக்கிடுக.

Or

- b. Evaluate $\int_S \bar{f} \cdot \bar{n} \, dS$ where $\bar{f} = (x + y^2)\bar{i} - 2x\bar{j} + 2yz\bar{k}$ and S is the surface of the plane $2x + y + 2z = 6$ in the first octant.

S என்பது முதல் அரைக்காற்பகுதியாக தளம் $2x + y + 2z = 6$

எனில் $\int_S \bar{f} \cdot \bar{n} \, dS$ -ஐக் கணக்கிடுக $\bar{f} = (x + y^2)\bar{i} - 2x\bar{j} + 2yz\bar{k}$.

Part - C

(3 × 10 = 30)

Answer any THREE Questions

16. Find the equations of the planes bisecting the angles between the planes $x+2y+2z=9$, $4x-3y+12z+13=0$. Specify which bisects the obtuse angle.

$x+2y+2z=9$, $4x-3y+12z+13=0$ என்ற தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணங்களை இரு சமக்கூறிடும் தளங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. அவற்றில் எது விரிகோணத்தை இருசமக் கூறிடுகிறது எனக் குறிப்பிடுக.

17. Find the length and equation of shortest distance between the

$$\text{lines } \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}; \frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$$

மேலே உள்ள, கோடுகளுக்கிடையேயான மீச்சிறு தூரம் மற்றும் அதன் சமன்பாடு காண்க.

18. Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to

$$\text{the line } \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3} \text{ and whose guiding curve is the ellipse}$$

$$x^2 + 2y^2 = 1; z = 3.$$

$$x^2 + 2y^2 = 1; z = 3 \text{ என்ற நீள்வட்டத்தை வழிகாட்டும் வளைவரையாகவும்}$$

$$\text{பிறப்பாக்கிகள் } \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3} \text{ என்ற கோட்டிற்கு இணையாகவும் உள்ள}$$

உருளையின் சமன்பாடு காண்க.

19. Prove that $f = e^x [(2y+3z)\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}]$ is irrotational. Find a

$$\text{function } \phi \text{ such that } f = \text{grad } \phi$$

$$f = e^x [(2y+3z)\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}] \text{ என்பது சுழல் அற்றது என நிறுவுக.}$$

மேலும் $f = \text{grad } \phi$ என உள்ளவாறு ϕ -யினைக் காண்க.

20. Verify Stoke's theorem for $\vec{f} = (2x - y)\vec{i} - yz^2\vec{j} - y^2z\vec{k}$ where S is the upper half surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ and C is its boundary.

S என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ என்ற கோளத்தின் மேல்பகுதி அரைகோணம்,

C என்பது அதன் எல்லைக்கோடு எனில் $\vec{f} = (2x - y)\vec{i} - yz^2\vec{j} - y^2z\vec{k}$ க்கு ஸ்டோக்கின் தேற்றத்தினை சோதித்துப்பார்.

————— *** —————

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2010

Second Semester

Mathematics

INTEGRAL CALCULUS AND FOURIER SERIES

(CBCS / 2008 Onwards)

Duration : 3 Hours

Maximum : 75 Marks

PART - A

(10 × 2 = 20)

Answer ALL Questions

1. If $f(x)$ is an even function, prove that $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

$f(x)$ ஒரு இரட்டை சார்பு எனில் $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ என நிறுவுக.

2. Find the value of $\int_a^b xe^x dx$

$\int_a^b xe^x dx$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. Find $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx$

$\int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx$ -ஐக் காண்க.

4. Find $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^5 x dx$

$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^5 x dx$ -ஐக் காண்க.

5. Evaluate $\int_0^a \int_0^b (x^2 + y^2) dx dy$

$\int_0^a \int_0^b (x^2 + y^2) dx dy$ -ஐக் கணக்கிடுக.

6. Evaluate $\int_0^{2\sqrt{3}} \int_x xy dx dy$

$\int_0^{2\sqrt{3}} \int_x xy dx dy$ -ஐக் கணக்கிடுக.

7. Define Gamma function

காமா சார்பை வரையறு.

8. Prove that $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$

$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$ என நிறுவுக.

9. Define half range cosine series.

அரை வீச்சு கொசைன் தொடரை வரையறு.

10. Find the Fourier coefficient a_0 for the function

$$f(x) \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ \frac{\pi x}{4}, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$f(x) \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ \frac{\pi x}{4}, & 0 < x < \pi \end{cases}$ என்ற சார்புக்கான ஃபூரியர் கெழு a_0 -ஐ காண்க.

PART - B

(5 × 5 = 25)

Answer all the Questions choosing either (a) or (b)

11. a. Prove that $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{3/2} x}{\sin^{3/2} x + \cos^{3/2} x} dx = \frac{\pi}{4}$

$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{3/2} x}{\sin^{3/2} x + \cos^{3/2} x} dx = \frac{\pi}{4}$ என நிறுவுக.

Or

b. Prove that $\int_0^{\pi/2} \log \tan x \, dx = 0$

$\int_0^{\pi/2} \log \tan x \, dx = 0$ என நிறுவுக.

12.a. Establish a reduction formula for $\int x^n e^{ax} \, dx (n \in \mathbb{N})$

$\int x^n e^{ax} \, dx (n \in \mathbb{N})$ க்கு ஒரு ஒருக்க உடம்பாட்டை வருவி.

Or

b. Find a reduction formula for $I_n = \int \operatorname{cosec}^n x \, dx (n \in \mathbb{N})$

$I_n = \int \operatorname{cosec}^n x \, dx (n \in \mathbb{N})$ க்கு ஒரு ஒருக்க உடம்பாட்டை காண்க.

13.a. By changing the order of integration evaluate $\int_0^a \int_0^{\sqrt{ax}} x^2 \, dy \, dx$

தொகையீட்டு வரிசையை மாற்றி $\int_0^a \int_0^{\sqrt{ax}} x^2 \, dy \, dx$ -ன் மதிப்பை காண்க.

Or

b. Prove that $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$

$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$ என நிறுவுக.

14.a. Show that $\frac{\left| \begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \right|} = \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6.....2n}$

$\frac{\left| \begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \right|} = \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6.....2n}$ என நிறுவுக.

Or

b. Prove that $\beta(m,n) = \beta(n,m)$

$\beta(m,n) = \beta(n,m)$ என நிறுவுக.

- 15.a. If $f(x) = |x|, -\pi < x < \pi$ expand $f(x)$ as a Fourier series
 $(-\pi, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = |x|$ -ஐ ஃபூரியர் தொடராக
 விரிவாக்கம் செய்க.

Or

b. Show that $\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2x}{1} + \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 6x}{3} + \dots, 0 < x < \pi$

$0 < x < \pi$ -ல் $\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2x}{1} + \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 6x}{3} + \dots$

என நிறுவுக.

PART - C

(3 × 10 = 30)

Answer any THREE Questions

16. Prove that $\int_0^{\pi} \log(1 + \cos x) dx = \pi \log\left(\frac{1}{2}\right)$

$\int_0^{\pi} \log(1 + \cos x) dx = \pi \log\left(\frac{1}{2}\right)$ என நிறுவுக.

17. If $f(m, n) = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos nx dx$, prove that

$f(m, n) = \frac{m}{m+n} f(m-1, n-1)$. Hence prove that $f(n, n) = \frac{\pi}{2^{n+1}}$

$f(m, n) = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos nx dx$ எனில் $f(m, n) = \frac{m}{m+n} f(m-1, n-1)$

என நிறுவுக. இதிலிருந்து $f(n, n) = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ என நிறுவுக.

18. By changing into polar coordinates evaluate the integral

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

போலார் ஆயத் தொலைகளுக்கு மாற்றி தொகையிடுக

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

19. Prove that $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin \theta} d\theta = \pi$

$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin \theta} d\theta = \pi$ என நிறுவுக.

20. If $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ prove that its Fourier series is

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right] + \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right]$$

Hence prove that $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{n-1})^2}$

$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ எனில் இதன் ஃபூரியர் தொடர்

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right] + \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right]$$

என நிறுவுக. இதிலிருந்து $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{n-1})^2}$ என நிறுவுக.

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2010

Second Semester

Mathematics

THEORY OF EQUATIONS AND THEORY OF NUMBERS

(CBCS—2008 Onwards)

Duration : 3 Hours

Maximum : 75 marks

Part - A

(10 × 2 = 20)

Answer All Questions.

1. Find the equation whose roots are multiplied by 3 the roots of

$$x^4 - 7x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$x^4 - 7x^2 + 4x + 5 = 0 \text{ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களை 3 ஆல்}$$

பெருக்கினால் கிடைப்பவற்றை மூலங்களாக உடைய சமன்பாடு காண்க.

2. Find the equation whose roots are increased by 2 the roots of

$$x^4 + 2x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$x^4 + 2x^2 + 4x - 7 = 0 \text{ ன் மூலங்களில் 2 கூட்ட கிடைக்கும்}$$

சமன்பாட்டினைக் காண்க.

3. Show that the equation $x^5 - 6x^2 - 4x + 5 = 0$ has atleast two imaginary roots.

$$x^5 - 6x^2 - 4x + 5 = 0 \text{ என்ற சமன்பாட்டிற்கு குறைந்தது இரண்டு}$$

கற்பனை மூலங்கள் உண்டு எனக் கூட்டுக.

4. Find the integral roots of $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$

$$x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0 \text{ ன் முழு எண் மூலங்களைக் காண்க.}$$

5. Define a perfect number.
செம்மையான எண். வரையறு.
6. Find the sum of positive integers including unity which are less than 600 and prime to it.
600-ஐ விட குறைவான 600 மற்றும் 600 உடன் மகாஜோடியான எண்களின் கூடுதல் காண்க. (1-ஐ சேர்த்து).
7. State Fermat's theorem.
பெர்மட் தேற்றத்தை கூறு.
8. Find the remainder when 2^{1000} is divided by 17.
 2^{1000} -ஐ 17ல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.
9. State Cauchy's Schwartz inequality.
காச்சி-ஸ்குவார்ட்ஸ் சமனின்மையைக் கூறு.
10. Show that $2ab < a^2 + b^2$ where, a, b are distinct positive numbers.
 a, b என்பன இரண்டு வித்தியாசமான மிகை எண்கள் எனில் $2ab < a^2 + b^2$ எனக் கூட்டுக.

Part - B

(5 × 5 = 25)

Answer **All** Questions choosing either (a) or (b).

11. a. Find the equation whose roots are squares of the roots of $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$
 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ ன் மூலங்களின் வர்க்கங்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(Or)

- b. Show that the sum of the 20th powers of the roots of the equation $x^4 + ax + b = 0$ is $50a^4 b^2 - 4b^5$

$x^4 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் 20வது அடுக்குகளின் கூடுதல் $50a^4 b^2 - 4b^5$ எனக் கூட்டுக.

12. a. State and prove Rolle's theorem.
ரோலின் தேற்றத்தைக் கூறி, நிரூபி.

(Or)

- b. Solve $x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = 0$.
தீர் $x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = 0$.

13. a. Find the smallest number with 18 divisors.

18 வகுப்பான்களுடைய மிகச்சிறிய எண்ணினைக் காண்க.

(Or)

- b. Define amicable numbers, verify whether 220 and 284 are amicable numbers.

நட்பான எண்களை வரையறு 220, 284 இரண்டும் நட்பானவையா என சோதித்துப் பார்.

14. a. Find the remainder obtained in dividing 2^{46} by 47.

2^{46} -ஐ 47 ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

(Or)

- b. Show that $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ is divisible by 7

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ என்பது 7-ஆல் வகுபடக்கூடியது எனக் காட்டுக.

15. a. Find the greatest value of $a^2 b^3 c^8$ when a, b, c all positive quantities whose sum is 30.

a, b, c என்பன கூடுதல் 30-ஐ கொண்ட மிகை எண்கள் எனில்

$a^2 b^3 c^8$ மீப்பெறு மதிப்பினைக் காண்க.

(Or)

- b. State and prove Weierstrass inequalities.

வெய்ஸ்ட்ராஸ் சமனின்மையைக் கூறி நிரூபி.

Part - C

(3 × 10 = 30)

Answer any **Three** Questions.

16. Solve the equation $8x^4 - 90x^3 + 315x^2 - 405x + 162 = 0$ given that the roots are in G. P.

$8x^4 - 90x^3 + 315x^2 - 405x + 162 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன. அதனைத் தீர்.

17. Find the positive root of $x^3 - 7x - 7 = 0$ correct to 2 places of decimel using Horner's method.

ஹார்னரின் முறையில் $x^3 - 7x - 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மிகை மூலத்தை இரண்டு தசம இலக்க சுத்தமாகக் காண்க.

18. Find the number of divisors, sum of divisors and product of divisors of 480.

480ன் வகுப்பான்களின் எண்ணிக்கை. அவற்றின் கூடுதல் மற்றும்

பெருக்கற்பலன் காண்க.

19.(a). Show that every integer which is a perfect cube is of the form $7P$ or $7P \neq 1$.

முப்படி எண் ஒவ்வொன்றும் $7P$ அல்லது $7P \neq 1$ என்ற வடிவில் இருக்கும் எனக் கூட்டுக.

(b) Show that $18!+1$ is divisible by 437.

$18!+1$ என்பது 437-ஆல் வகுபடும் எனக் காண்க.

20. If a, b, c are positive real number, such that $a^2 + b^2 + c^2 = 27$ then show that $a^3 + b^3 + c^3 \geq 81$.

a, b, c என்பன $a^2 + b^2 + c^2 = 27$ என உள்ள மெய்யெண்கள் எனில் $a^3 + b^3 + c^3 \geq 81$ எனக் கூட்டுக.

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2010

Third Semester

Mathematics

SEQUENCE AND SERIES

(CBCS / 2008 Onwards)

Duration : 3 Hours

Maximum : 75 marks

Part - A

(10 × 2 = 20)

Answer All questions.

1. Show that if (a_n) is a monotonic sequence then

$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)$ is also a monotonic sequence.

(a_n) என்பது ஓர் ஒருபோக்குத் தொடர் எனில் $\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)$

என்பதுவும் ஓர் ஒருபோக்குத் தொடரே என நிரூபிக்கவும்.

2. Show that $\text{Lt}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}\right) = \frac{1}{3}$

$\text{Lt}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}\right) = \frac{1}{3}$ எனக் காண்க.

3. Prove that the sequence $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ converges.

$\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ என்னும் தொடர் ஒழுங்கும் தன்மையுடையது என நிரூபி.

4. Show that any Cauchy sequence is a bounded sequence

காஷி தொடர் ஒவ்வொன்றும் ஒரு எல்லைக்குட்பட்ட தொடர் எனக் காண்க.

5. If $\sum a_n$ is a convergent series, show that $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, give an example to show that the converse is false.

$\sum a_n$ என்பது ஓர் ஒருங்கும் தொடர்வரிசை எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ எனக் காண்க. இதன் மறுதலை உண்மையில் என்பதற்கு ஓர் உதாரணம் தருக.

6. Discuss the convergence of the series $\sum \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

$\sum \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ என்ற தொடர் வரிசையின் ஒருங்கல் தன்மையை ஆராய்க.

7. State : (i) D' Alembert's ratio test ii) Raabe's test
(i) டி' ஆலம்பர்ட்-ன் விகித சோதனை. ii) ராபிஸ் -ன் சோதனை
என்பவற்றைக் கூறுக.

8. Test the convergence of the series $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$

$\sum \frac{1}{(\log n)^n}$ என்ற தொடர்வரிசையின் ஒருங்கல்தன்மையை சோதிக்கவும்.

9. State Cauchy's condensation test.
காஷியின் சுருக்குதல் சோதனையைக் கூறவும்.

10. Show that the series $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ converges.

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ என்ற தொடர்வரிசை ஒருங்கல் தன்மையுடையது எனக் காண்க.

Answer **All** questions choosing (a) or (b).

11.a. Show that a sequence cannot converge to two different limits

ஒரு தொடரானது இரு வெவ்வேறு எல்லைகளுக்கு ஒருங்க முடியாது எனக் காண்க.

(Or)

b. Show that $\text{Lt}_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n^2+n}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{Lt}_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n^2+n}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}$ எனக்

காட்டுக.

12.a. State and prove cesaro's theorem

சிசரோவின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபிக்கவும்.

(Or)

b. State and prove Cauchy's general principle of convergence of a sequence of real numbers.

ஒரு மெய்யெண் தொடரின் ஒருங்கல்தன்மைக்கான காஷியின் பொதுக்கோட்பாட்டை எழுதி நிரூபிக்கவும்.

13.a. Discuss the convergence of the series $\sum \left(\frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^4+1} \right)$

$\sum \left(\frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^4+1} \right)$ என்ற தொடர்விசையின் ஒருங்கல்தன்மையை

ஆராய்க.

(Or)

b. Show that $\sum \left(\frac{1}{4n^2 + 1} \right) = \frac{1}{2}$

$$\sum \left(\frac{1}{4n^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} \text{ எனக் காண்க.}$$

14.a. State Gauss' test. Using it test the convergence of the series

$$\sum \left(\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2} \right)$$

காஸ்-ன் சோதனையை எழுதவும். அதனைப் பயன்படுத்தி

$$\sum \left(\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2} \right) \text{ என்ற தொடர் வரிசையின் ஒருங்கல் தன்மையை}$$

சோதிக்கவும்.

(Or)

b. Test the convergence of the series $\sum \left(\frac{n^3 + 1}{2^n + 1} \right)$

$$\sum \left(\frac{n^3 + 1}{2^n + 1} \right) \text{ என்ற தொடர் வரிசையின் ஒருங்கல் தன்மையை சோதிக்கவும்.}$$

15.a. State Cauchy's integral test. Hence show that

$\text{Lt}_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right)$ exists and lies between 0 and 1.

$\text{Lt}_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right)$ ஐ மதிப்பிட இயலும் எனவும் அதன்

மதிப்பு 0,1 ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்டது எனவும் காண்க.

(Or)

b. State Leibnitz test. Hence show that the series

$$\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3}(1+2) + \frac{1}{4^3}(1+2+3) - \frac{1}{5^3}(1+2+3+4) + \dots \text{converges}$$

$$\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3}(1+2) + \frac{1}{4^3}(1+2+3) - \frac{1}{5^3}(1+2+3+4) + \dots \text{ என்ற தொடர்}$$

வரிசை ஒருங்கும் தன்மையுடையது எனக் காண்க.

Part - C

(3 × 10 = 30)

Answer any **Three** of questions.

16.(i) Show that any convergent sequence is a bounded sequence but not conversely.

ஒருங்கும் தொடர் ஒவ்வொன்றும் ஒரு எல்லைக்குட்பட்ட தொடர் எனவும் இதன் மறுதலை உண்மையல்ல எனவும் நிரூபி.

(ii) If $(a_n) \rightarrow a$, $(a \neq 0)$ for all n and $a \neq 0$, then show that

$$\left(\frac{1}{a_n}\right) \rightarrow \frac{1}{a}$$

$(a_n) \rightarrow a$, $(a \neq 0)$ மற்றும் எல்லா n -க்கும் $a \neq 0$, எனில் $\left(\frac{1}{a_n}\right) \rightarrow \frac{1}{a}$

எனக் காண்க.

17. State and prove (i) Cauchy's first limit theorem

(ii) Cauchy's second limit theorem

(i) காஷியின் முதல் எல்லைத் தேற்றம்

(ii) காஷியின் இரண்டாம் எல்லைத் தேற்றம் என்பவற்றை எழுதி

நிரூபிக்கவும்.

18. Show that the harmonic series $\sum \frac{1}{n^p}$ converges if $p > 1$ and diverges if $p \leq 1$.

$\sum \frac{1}{n^p}$ என்னும் இசைத் தொடர்வரிசை $p > 1$ எனில் ஒருங்கும் எனவும் $p \leq 1$ எனில் விரியும் எனவும் காண்க.

19. Test the convergence of the series $\frac{1}{3}x + \frac{1.2}{3.5}x^2 + \frac{1.2.3}{3.5.7}x^3 + \dots$

$\frac{1}{3}x + \frac{1.2}{3.5}x^2 + \frac{1.2.3}{3.5.7}x^3 + \dots$ என்ற தொடர்வரிசையின் ஒருங்கல் தன்மையை சோதிக்கவும்.

- 20.(i). Show that any absolutely convergent series is convergent.
- (ii) Show that in an absolutely convergent series, the series formed by its positive terms alone is convergent and the series formed by its negative terms alone is convergent and conversely.
- (i) எந்த அற ஒருங்குத் தொடரும் ஒருங்கும் எனக் காண்க.
- (ii) ஓர் அற ஒருங்குத் தொடரில் மிகை உறுப்புக்கள் மட்டும் கொண்டு அமைக்கப்படும் தொடர் ஒருங்கும், மற்றும் அதன் குறை உறுப்புக்கள் மட்டும் கொண்டு அமைக்கப்படும் தொடரும் ஒருங்கும் எனக் காண்க. இதன் மறுதலையையும் நிரூபிக்கவும்.

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2010

Third Semester

Mathematics

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ITS APPLICATIONS

(CBCS / 2008 Onwards)

Duration : 3 Hours

Maximum : 75 Marks

Part - A

(10 x 2 = 20)

Answer ALL Questions

1. Verify whether $(a^2 - 2xy - y^2)dx - (x + y)^2 dy = 0$ is exact.

$(a^2 - 2xy - y^2)dx - (x + y)^2 dy = 0$ என்ற வகைக் கெழு சமன்பாடு
பெருத்தமான சமன்பாடா என்று சரிபார்.

2. Solve $y = 2px + y^2 p^3$

தீர் $y = 2px + y^2 p^3$

3. Find the particular integral of $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = e^x$ ன் சிறப்புத் தீர்வைக் காண்க.

4. Solve : $\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$

தீர் : $\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$

5. Verify the condition of integrability of the equation

$$(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)dx + dy + 2zdz = 0$$

$$(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)dx + dy + 2zdz = 0 \quad \text{என்ற சமன்பாட்டின்}$$

தொகையிடுதலின் நிபந்தனையைச் சரிபார்.

6. Solve : $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$

$$\text{தீர் : } x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

7. Eliminate a and b from $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ and find the partial differential equation.

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{என்ற சமன்பாட்டில் } a \text{ மேலும் } b \text{ என்ற மாறிலிகளை நீக்கி,}$$

பகுதி வகைக் கெழு சமன்பாட்டைக் காண்.

8. Eliminate the arbitrary function f from

$$f(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$$

$$f(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0 \quad \text{என்ற சமன்பாட்டில் } f \text{ என்ற சார்பினை நீக்கி}$$

பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாட்டைக் காண்.

9. Find $L(t^2 e^{-3t})$

$$L(t^2 e^{-3t}) \quad \text{ஐக் காண்}$$

10. Find $L\left(\frac{1-e^t}{t}\right)$

$L\left(\frac{1-e^t}{t}\right)$ ஐக் காண்

Part - B

(5 x 5 = 25)

Answer the followings questions choosing either (a) or (b) from each.

11 a. Solve $(y-3x^2)dx - x(1-xy^2)dy = 0$

தீர்: $(y-3x^2)dx - x(1-xy^2)dy = 0$

(Or)

b. Solve $xyp^2 + p(3x^2 - 2y^2) - 6xy = 0$

தீர்: $xyp^2 + p(3x^2 - 2y^2) - 6xy = 0$

12 a. Solve: $\frac{dx}{y-xz} = \frac{dy}{yz+x} = \frac{dz}{x^2+y^2}$

தீர்: $\frac{dx}{y-xz} = \frac{dy}{yz+x} = \frac{dz}{x^2+y^2}$

(Or)

b. Solve: $\cos x \frac{d^2y}{dx^2} + \sin x \frac{dy}{dx} + 4(\cos^3 x)y = 8 \cos^5 x$

தீர்: $\cos x \frac{d^2y}{dx^2} + \sin x \frac{dy}{dx} + 4(\cos^3 x)y = 8 \cos^5 x$

13 a. Solve by method of variation of parameters $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \sec nx$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \sec nx$$

ஐ துணை அலகு மாறுதல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காண்.

(Or)

b. Verify the condition of integrability and solve

$$3x^2 dx + 3y^2 dy - (x^3 + y^3 + e^{2z}) dz = 0$$

$$3x^2 dx + 3y^2 dy - (x^3 + y^3 + e^{2z}) dz = 0$$

என்ற

சமன்பாட்டின்

தொகையிடுதலின் நிபந்தனையை சரிபார்த்து தீர்வு காண்

14 a. Solve : $px(y^2 + z) - qy(x^2 + z) = z(x^2 - y^2)$

$$\text{தீர்: } px(y^2 + z) - qy(x^2 + z) = z(x^2 - y^2)$$

(Or)

b. Solve: $p(1 + q^2) = q(z - 1)$

$$\text{தீர்: } p(1 + q^2) = q(z - 1)$$

15 a. Find $L^{-1} \left[\frac{s+2}{(s^2 + 4s + 5)^2} \right]$

$$L^{-1} \left[\frac{s+2}{(s^2 + 4s + 5)^2} \right] \text{ ஐக் காண்}$$

(Or)

b. Find $L^{-1}\left[\frac{s-3}{s^2+4s+3}\right]$

$L^{-1}\left[\frac{s-3}{s^2+4s+3}\right]$ ஐக் காண்

Part - C

(3 x 10 = 30)

Answer any THREE Questions

16. (a) Solve : $x^2(y - px) = yp^2$

தீர் : $x^2(y - px) = yp^2$

(b) Solve : $z = px + qy + pq$

தீர் : $z = px + qy + pq$

17. Solve : $x^2y'' - xy' + 4y = \cos(\log x) + x \sin(\log x)$

தீர் : $x^2y'' - xy' + 4y = \cos(\log x) + x \sin(\log x)$

18. Solve by the method of parameters $y'' + 3y' + 2y = x^2$

$y'' + 3y' + 2y = x^2$ ஐ துணை அலகு மாறுதல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்.

19. Solve by Charpits method $(p^2 + q^2)y = qz$

சார்பிடல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர் $(p^2 + q^2)y = qz$

20. Solve the equation $t \frac{d^2y}{dt^2} - (2+t) \frac{dy}{dt} + 3y = t-1$ when

$$y(0) = 0.$$

$t \frac{d^2y}{dt^2} - (2+t) \frac{dy}{dt} + 3y = t-1$ ஐ $y(0) = 0$. என்னும் பொழுது
தீர்வுகாண்.

————— *** —————

www.studyguideindia.com

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2010

Fourth Semester

Mathematics

MODERN ALGEBRA

(CBCS—2004 Onwards)

Duration : 3 Hours

Maximum : 75 Marks

Part - A

(10 × 2 = 20)

Answer **all** the Questions.

எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை அளிக்கவும்.

1. Define a cyclic group.

ஒரு வட்ட குலத்தை வரையறை செய்

2. In an abelian group show that $(ab)^2 = a^2b^2$.ஒரு அமீலியன் குலத்தில் $(ab)^2 = a^2b^2$ என நிறுவுக.3. Let G be a group and $a \in G$. Prove that order of a = order of a^{-1} . G ஒரு குலம் $a \in G$ எனில் a -ன் வரிசை = a^{-1} ன் வரிசை என நிறுவுக.4. Prove that the intersection of two normal subgroups of a group G is a normal subgroup of G .

இரு நேர்மை உட்குலத்தின் வெட்டு ஒரு நேர்மை உட்குலம் என நிறுவுக.

5. Define centre of a group.

ஒரு குலத்தின் மையத்தை வரையறுக்க.

6. If H is a subgroup of G prove that $aH = bH \Rightarrow a^{-1}b \in H$.

H என்பது G ன் உட்குலம் எனில் $aH = bH \Rightarrow a^{-1}b \in H$ என நிறுவுக.

7. Define Kernel of a homomorphism.

ஒரு செயல் மாறாக கோர்த்தலின் உட்கருவை வரையறு.

8. Define isomorphism between groups.

குலங்களுக்கிடையேயான ஒரிசை சார்பின் வரையறை தருக.

9. If R is a ring. Prove that $(-a)b = a(-b) = -ab \forall a, b \in R$.

R என்பது ஒரு வளையம் எனில் $(-a)b = a(-b) = -ab \forall a, b \in R$ என நிறுவுக.

10. If R is a ring such that $a^2 = a$ for all $\forall a \in R$ then prove that $a \times a = 0$

ஒரு வளையத்தில் $a^2 = a \forall a \in R$ எனில் $a \times a = 0$ என நிரூபி.

Part - B

(5 × 5 = 25)

Answer **all** the Questions.

எல்லா வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவும்.

11a. Let G be a group and let a be a fixed element of G .

If $H_a = \{H \in G \mid ax = xa\}$ then prove that H_a is a subgroup of G .

G என்ற குலத்தில் a என்பது ஒரு நிலையான உறுப்பு $H_a = \{H \in G \mid ax = xa\}$ எனில் H_a ஆனது G ன் உட்குலம் என நிறுவுக.

(Or)

b. Prove that any cyclic group is abelian.

ஒவ்வொரு வட்டக்குலமும் அபீலியன் குலம் என நிறுவுக.

12a. Show that if a group G has exactly one subgroup H of given order then H is a normal subgroup of G .

G என்ற குலமானது, கொடுக்கப்பட்ட எண்ணை வரிசையாக உடைய உட்குலம் ஒன்றை மட்டுமே பெற்றுள்ளது எனில் அந்த உட்குலம் நேர்மை உட்குலம் என நிறுவுக.

(Or)

b. State and Prove firnats theorem.

பர்மாட் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

13a. If H is a subgroup of G , Prove that $aH = H \Leftrightarrow a \in H$.

H என்பது G ன் உட்குலம் எனில் $aH = H \Leftrightarrow a \in H$ என நிறுவுக.

(Or)

b. Prove that every group of prime order is cyclic.

மகா எண் வரிசை உடைய குலம் ஒரு வட்டக்குலம் என நிறுவுக.

14a. Let G be any group show that $f : G \rightarrow G$ given by $f(x) = x^{-1}$ is an isomorphism by G is abelian.

G என்பது ஒரு குலம் $f : G \rightarrow G$ என்ற சார்பு $f(x) = x^{-1}$ என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. F என்பது இயல் மாறாத் தன்மையுடையதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை G ஒரு அபீலிடன் குலம் எனக் காட்டு.

(Or)

b. Let $f : G \rightarrow G'$ be an isomorphism. If $a \in G$ then prove that order of a is equal to the order of $f(a)$.

$f : G \rightarrow G'$ என்பது குலங்களின் இயல்மாறாக் கோர்த்தல் $a \in G$ எனில் a ன் வரிசையும் $f(a)$ ன் வரிசையும் சமம் என நிறுவுக.

15a. If $F : \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$ then prove that F is a field under usual addition and multiplication of real numbers.

$F : \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$ என்ற கணம் மெய்யெண்களின் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கலைப் பொறுத்து ஒரு களம் என நிறுவுக.

(Or)

- b. Prove that a finite commutative ring R without Zero divisors is a field.

பூச்சிய வகுப்பாளர்கள் இல்லாத முடிவுள்ள பரிமாற்று வளையம் R ஒரு களம் என நிறுவுக.

Part - C

(3 × 10 = 30)

Answer any **three** Questions.

எவையேனும் மூன்று வினாக்களுக்கு விடையளி.

16. Let A and B be two subgroups of a group G Prove that AB is a subgroup of G if $AB = BA$.

G என்ற ஒரு குலத்திற்கு A மற்றும் B என்பன இரண்டு உட்குலங்கள். AB என்பது G ன் உட்குலமாக இருப்பதற்கு தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $AB = BA$ என்பதே என்று நிறுவுக.

17. State and Prove Lagrange's theorem.

லெங்கராஞ்சியின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

18. Let N be a subgroup of G . Prove that the following are equivalent.

- i) N is a Normal subgroup of G .
- ii) $aNa^{-1} = N \quad \forall a \in G$
- iii) $aNa^{-1} \leq N \quad \forall a \in G$
- iv) $aNa^{-1} \in N \quad \forall N \in G \text{ and } a \in G$

N என்பது G ன் ஒரு உட்குலம். கீழ்வருவன அனைத்தும் சமானமானவை என்று நிறுவுக.

அ) N என்பது G ன் ஒரு நேர்மை உட்குலம்

ஆ) அனைத்து $a \in G$ க்கும் $aNa^{-1} = N$

இ) அனைத்து $a \in G$ க்கும் $aNa^{-1} \leq N$

ஈ) அனைத்து $N \in G$ மற்றும் $a \in G$ க்கும் $an a^{-1} \in N$

19. State and Prove Cayler's theorem.

கேய்லியின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

20. Show that (Z, \oplus, \otimes) is a ring where $a \oplus b = a + b - 1$ $a \otimes b = a + b - ab$.

$a \oplus b = a + b - 1$ மற்றும் $a \otimes b = a + b - ab$ எனில் (Z, \oplus, \otimes) என்பது ஒரு வளையம் என்று நிறுவுக.

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2010

First Semester

Mathematics

DIFFERENTIAL CALCULUS AND TRIGONOMETRY

(CBCS — 2008 Onwards)

Duration : 3 Hours

Maximum : 75 marks

Part - A

(10 × 2 = 20)

Answer ALL Questions

- Find the n^{th} differential coefficient of $\sin^3 x$
 $\sin^3 x$ -ன் n ஆவது வகைக் கெழுவைக் காணவும்.
- If $x = \sin \theta$, $y = \cos p \theta$ prove that $(1-x^2)y_2 - xy_1 + p^2y = 0$
 $x = \sin \theta$, $y = \cos p \theta$ எனில் $(1-x^2)y_2 - xy_1 + p^2y = 0$ என நிரூபிக்கவும்.
- Show that for the parabola $y^2 = 4ax$, the subtangent at any point is double the abscissa and the subnormal is constant.
 $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு அதன் எப்புள்ளியிலும் துணைத் தொடுகோடானது அச்சத் தொலைவின் இருமடங்கு எனவும் துணைச் செங்கோடு ஒரு மாறிலி எனவும் நிரூபிக்கவும்.
- Find ϕ for the spiral $r = ae^{\theta \cot \alpha}$
 $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ என்ற சுருளிக்கு ϕ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

5. Show that the radius of curvature at any point of the catenary

$$y = e \cos h\left(\frac{x}{c}\right) \text{ is } \left(\frac{y^2}{c}\right)$$

$y = e \cos h\left(\frac{x}{c}\right)$ என்ற சங்கிலியத்தின் எப்புள்ளியிலும் அதன் வளையாரம்

$$\left(\frac{y^2}{c}\right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

6. Prove that the $(p-r)$ equation of the cardioid $r = a(1-\cos\theta)$

$$\text{is } p^2 = \frac{r^3}{2a}.$$

$r = a(1-\cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளையின் $(p-r)$ சமன்பாடு $p^2 = \frac{r^3}{2a}$

என நிரூபி.

7. Show that $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta \text{ எனக் காண்க.}$$

8. Prove that $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{1}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{1}{3} \text{ என நிரூபிக்கவும்.}$$

9. Show that $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ எனக் காட்டுக.}$$

10. If $x+iy = \cos(u+iv)$, where x, y, u, v are real prove that

$$(1+x)^2 + y^2 = (\cos hv + \cos u)^2$$

$x+iy = \cos(u+iv)$ மற்றும் x, y, u, v என்பவை மெய் எணில்

$$(1+x)^2 + y^2 = (\cos hv + \cos u)^2 \text{ என நிரூபிக்கவும்.}$$

Part - B

(5 × 5 = 25)

Answer all questions choosing either (a) or (b)

11.a. Find the n^{th} derivative of $\sin^2 x \cos^3 x$

$\sin^2 x \cos^3 x$ எனில் n -ஆவது வகைக்கெழுமை கண்டு பிடிக்கவும்.

Or

b. If $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m$, prove that

$$(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$$

$$y = (x + \sqrt{1+x^2})^m \text{ எனில் } (1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$$

என நிரூபி.

12.a. Find the angle of intersection of the curves $r = a \sin 2\theta$ and

$$r = a \cos 2\theta$$

$r = a \sin 2\theta$, $r = a \cos 2\theta$ என்ற வளைவரைகள் வெட்டும்

கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

Or

b. Show that the angle ϕ at which the radius vector cuts the curve $\frac{\ell}{n} = 1 + e \cos \theta$ is $\tan^{-1} \left(\frac{1 + e \cos \theta}{e \sin \theta} \right)$

$\frac{\ell}{n} = 1 + e \cos \theta$ என்ற வளைவரையினை அதன் ஆரை வெட்டும்

கோணமான ϕ -ன் மதிப்பு $\tan^{-1} \left(\frac{1 + e \cos \theta}{e \sin \theta} \right)$ எனக் காட்டுக.

13.a. Show that the envelope of the family of straightlines

$$y + xt = 2at + at^3 \text{ is } 27ay^2 = 4(x - 2a)^3$$

$y + xt = 2at + at^3$ என்ற நேர்க்கோட்டுக் குழுமத்தின் தழுவி

$$27ay^2 = 4(x - 2a)^3 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

Or

b. Prove that the radius of curvature at any point of the cycloid

$$x = a(\theta + \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta) \text{ is } 4a \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

$x = a(\theta + \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ என்ற சைக்ளாய்டின்

எப்புள்ளியிலும் அதன் வளையாரம் $4a \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$ என நிரூபிக்கவும்.

14.a. Find the expansions of $\cos n \theta$ and $\sin n \theta$ in powers of $\sin \theta$ and cosines of θ . Deduce the expansion of $\tan n \theta$

θ -ன் சைன்கள், கொசைன்களின் அடுக்குகளில் $\cos n \theta, \sin n \theta$

என்பவற்றின் விரிவாக்கத்தை கண்டு பிடிக்கவும். அதன்மூலம்

$\tan n \theta$ -ன் விரிவைக் கொணர்க.

Or

b. Expand $\sin^6 \theta$ is a series of cosines of multiples of θ
 $\sin^6 \theta$ வை θ -ன் மடங்குகளின் கொசைன்களில் ஒரு தொடர்வரிசையாக விரிவுபடுத்து.

15.a. Express $\cosh \theta$ interms of hyperbolic cosines of multiples of θ .
 $\cosh \theta$ வை θ ன் மடங்குகளின் அதிபரவளையக் கொசைன்களில் எழுதவும்

Or

b. Show that $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$, Hence expand $\tanh^{-1} x$ as a series in x .

$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ எனக் காட்டுக. அதன் மூலம் $\tanh^{-1} x$ ஐ x ல் ஒரு தொடர்வரிசையாக விரிவுபடுத்து.

Part - C

(3 × 10 = 30)

Answer any THREE of the following

16. Find the maximum and minimum values of $2(x^2 - y^2) - x^4 + y^4$
 $2(x^2 - y^2) - x^4 + y^4$ -ன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

17. Find the asymptotes of

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + 4y^2 + 2xy + y - 1 = 0$$

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + 4y^2 + 2xy + y - 1 = 0$$

-ன் தொலைத் தொடுகோடுகளைக் காண்க.

18. Show that the evolute of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் வளைவு மையப்பாதை

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

19. Prove that the equation $\frac{ab}{\cos\theta} - \frac{bk}{\sin\theta} = a^2 - b^2$ has four roots and that the sum of the four values of θ which satisfy it is equal to an odd multiple of π radians.

$\frac{ab}{\cos\theta} - \frac{bk}{\sin\theta} = a^2 - b^2$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு நான்கு மூலங்கள்

உண்டு எனவும் அதனை நிறைவு செய்யும் θ ன் நான்கு மதிப்புகளின் கூடுதல் π ரேடியனில் ஒற்றை மடங்குகளுக்கு சமம் எனவும் காட்டுக.

20. If $\tan(A + iB) = x + iy$, prove that

(i) $x^2 + y^2 + 2x \cot 2A = 1$

(ii) $x^2 + y^2 + 1 - 2y \coth 2B = 1$

$\tan(A + iB) = x + iy$ எனில்

(i) $x^2 + y^2 + 2x \cot 2A = 1$

(ii) $x^2 + y^2 + 1 - 2y \coth 2B = 1$ எனக் காட்டுக.
