தமிழ்நாடுஅரசு

எட்டாம் வகுப்பு

மூன்றாம் பருவம்

தொகுதி 2

கணக்கு

அறிவியல்

சமூக அறிவியல்

விற்பனைக்கு அன்று

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு இலவசப்பாடநூல்
வழங்கும் திட்டத்தின்கீழ்
வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

© தமிழ்நாடு அரசு

முதல் பதிப்பு – 2012
(பொதுப் பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்ட முப்பருவ நூல்)

பாடநூல் உருவாக்கமும் தொகுப்பும்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி பயிற்சி நிறுவனம்,

கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

அட்டைப்படம், புத்தகவடிவமைப்பு

த. ரகு, மு. விஜயசாரதி

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் கழகம்

கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

இந்நூல் 80 ஜி. எஸ். எம். மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

விலை : ரூ.

ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :

பாடநூல் வலைதளம்

www.textbooksonline.tn.nic.in

பொருளடக்கம்

கணக்கு - (1 - 105)

அத்தியாயம்	தலைப்பு	பக்கம்
1.	வாழ்வியல் கணிதம்	2
2.	வடிவியல்	52
3.	விவரங்களைக் கையாளுதல்	65
4.	செய்முறை வடிவியல்	99
	விடைகள்	103

அறிவியல் - (106 - 174)

அலகு	தலைப்பு	பக்கம்
1.	உயிரினங்களின் பல்வகைத்தன்மை	109
2.	வனங்களையும் வன உயிரிகளையும் பாதுகாத்தல்	127
3.	நிலக்கரியும் பெட்ரோலியமும்	143
4.	ஒளியியல் மற்றும் ஒலியியல்	157

சமூக அறிவியல் - (175 - 252)

பாட எண்	பாடம்	பக்கம்
	வரலாறு	
1.	வில்லியம் பெண்டிங் பிரபு (கி.பி.1828 - கி.பி. 1835)	176
2.	டல்ஹெளசி பிரபு (கி.பி.1848 - கி.பி. 1855)	181
3.	மாபெரும் புரட்சி (கி.பி.1857)	186
4.	தமிழகத்தில் நாயக்கர்கள் ஆட்சி	194
5.	தஞ்சாவூரில் மராத்தியர்கள் ஆட்சி (கி.பி. 1676 - கி.பி. 1856)	202
6.	வேலூர் புரட்சி (கி.பி.1806)	209
	புவியியல்	
	மூன்றாம் நிலைத் தொழில்கள் I	
1.	வணிகம்	213
	மூன்றாம் நிலைத் தொழில்கள் II	
2.	போக்குவரத்து மற்றும் தகவல் தொடர்புகள்	217
3.	மக்கள்தொகை வளர்ச்சி மற்றும் பரவல்	225
4.	மக்கள்தொகையும் வள ஆதாரங்களும்	232
	குடிமையியல்	
1.	சாலைப் பாதுகாப்பு - சட்டங்களும் வரைமுறைகளும்	238
	பொருளாதாரம்	
1.	பணம், சேமிப்பு மற்றும் முதலீடு	247

கணக்கு

எட்டாம் வகுப்பு

மூன்றாம் பருவம்

பாடநூல் குழு

குழுத்தலைவர்

முனைவர் கி. இரவி
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை
தூய நெஞ்சக் கல்லூரி (தன்னாட்சி)
திருப்பத்தூர் (வேலூர் மாவட்டம்) - 635 601.

மேலாய்வாளர்கள்

முனைவர் கி. வாசுதேவன்
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி)
சென்னை - 600 005.

திருமதி. செ. சித்ரா
விரிவுரையாளர் (தே.நி.), கணிதத் துறை
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி)
சென்னை - 600 005.

நூலாசிரியர்கள்

திரு. சி. ப. கார்த்திகேயன்
முதுநிலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
காந்தி நினைவு மேனிலைப்பள்ளி
திருவெண்ணெய்நல்லூர்,
விழுப்புரம் மாவட்டம் - 607 203.

திருமதி. ந. சாந்தி
பட்டதாரி ஆசிரியர்
இரயில்வே இருபாலர் மேனிலைப்பள்ளி
பெரம்பூர்
சென்னை - 600 011.

திரு. தீ. கோ. நாராயணசாமி
பட்டதாரி ஆசிரியர்
அரசு ஆண்கள் மேனிலைப்பள்ளி
பெண்ணாடம்
கடலூர் மாவட்டம் - 606 105.

திருமதி. வி. மெட்டில்டா சொர்ணம் டைட்டஸ்
பட்டதாரி ஆசிரியர்
டவுட்டன் பெண்கள் மேனிலைப்பள்ளி
வேப்பேரி
சென்னை - 600 007.

திரு. மு. தணிகைமணி
பட்டதாரி ஆசிரியர்
அரசு பெண்கள் உயர்நிலைப்பள்ளி
புதுப்பேட்டை, திருப்பத்தூர்
வேலூர் மாவட்டம் - 635 651.

திருமதி. ஹ. லெக்ஷ்மி
பட்டதாரி ஆசிரியர்
அக்ஷயா மெட்ரிக் மேனிலைப்பள்ளி
வேளச்சேரி
சென்னை - 600 042.

ஒளி அச்சுக்கோர்வை & வடிவமைப்பு :

ஷிவ் ஆனந்த், வி.ஜேம்ஸ் ஆப்ரகாம், லஷ்மி ரமேஷ்குமார்

1 வாழ்வியல் கணிதம்

1.1 அறிமுகம்

1.2 இலாபம், நட்டம் தனி வட்டி பற்றிய மீள்பார்வை

1.3 சதவீதம், இலாபம், நட்டம், மேற்படிச்செலவுகள், தள்ளுபடி மற்றும் வரி ஆகியவற்றின் பயன்பாடுகள்

1.4 கூட்டு வட்டி

1.5 கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசம்

1.6 நிரந்தர வைப்புத் தொகை , தொடர் வைப்புத் தொகை

1.7 கலப்பு மாறல்

1.8 காலம் மற்றும் வேலை

ரோஜர் பேகன்

[1214-1294]

ரோஜர் பேகன் திறமையான ஆசிரியர். ஆங்கிலத் தத்துவ மேதை. சோதனை முறைகளை வலியுறுத்தியவர். ஆக்ஸ்போர்டில் கற்றுத் தேர்ந்தவர்.

‘‘கணிதத்தைப் புறக்கணித்தால் அது எல்லா அறிவிற்கும் பாதிப்பை ஏற்படுத்தும்‘‘ எனக் கூறினார்.

கணிதத்தின் முக்கியத்துவம் பொதுவான மனிதனின் அன்றாடத் தேவைகளான வங்கிகள், அங்காடி வளாகம், இரயில்வே, தபால் அலுவலகங்கள், காப்பீட்டுக் கழகங்கள் ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தும் பொழுதும், போக்குவரத்து மற்றும் வியாபாரப் பரிமாற்றங்களான இறக்குமதி, ஏற்றுமதி, வணிகம் மற்றும் வர்த்தகம் ஆகியவற்றில் பயன்படுத்தும் பொழுதும் உணர முடிந்தது என்று கூறுகிறார்.

1.1 அறிமுகம்

மனிதர்கள் அனைவரும் வாழ்நாட்கள் முழுவதும் “வெற்றி–வெற்றி” என்ற உயர்வான இலக்கை அடைய விரும்புகின்றனர். இதற்காகத் தங்கள் நேரத்தைச் செவ்விய வழியில் செலுத்தி அதிகப் பணம் மற்றும் செல்வம் ஆகியவற்றைச் சேர்க்கின்றனர்.

கற்காலம் முதல் தற்காலம் வரை, பண்ட மாற்றிலிருந்து பணப் பரி மாற்றம் வரை, நிலங்களுக்கும் அவற்றிலிருந்து கிடைக்கும் உற்பத்திக்கும், மனிதன் விகித மற்றும் விகிதசம அறிவைப் பயன்படுத்துகின்றான். தாஜ்மகால் போன்ற மாபெரும் நினைவுச் சின்னங்கள், தஞ்சை பிரஹதீஸ்வரர் ஆலயம் போன்ற கலைச்செல்வங்கள் ஆகியன மிக அழகிய தோற்றத்திற்கான எடுத்துக்காட்டுகளாகும். இவையாவும் நம் முன்னோர்கள் விகித அளவை மிகச் சரியாகப் பயன்படுத்தி அழகாகவும், உறுதியாகவும் கட்டியுள்ளனர் என்பதை நமக்குப் புலப்படுத்துகின்றன.

இவ்வுலகில் மழை மற்றும் அறுவடை; உணவு மற்றும் உடல்நலம்; வரவு மற்றும் செலவு போன்றவை காரண காரியத் தொடர்புகளில் அமைந்துள்ளன. எனவே, கலப்பு மாற்றங்கள் என்ற கருத்து எழுந்துள்ளது.

நாம் நம்மைக் காப்பாற்றிக் கொள்ளும் முயற்சியில் பணத்தைக் கடனாகப் பெறுகின்றோம். மேலும் நம்மை வளர்த்துக் கொள்ளும் முயற்சியில் பணத்தை வங்கிகளில் முதலீடு செய்கின்றோம். இச்செயல்பாடுகளில் கூட்டு

வட்டியை முன்னிலைப்படுத்தி ஈடு செய்கின்றோம். நாட்டின் பாதுகாப்பு, சுகாதாரம், கல்வி மற்ற வசதிகள் ஆகியவற்றை அரசாங்கம் பொறுப்பேற்றுச் செயல்படுத்துகின்றது. இவற்றை நமக்கு அளிக்க அரசுக்கு நம் வருமானத்திலிருந்து வரியைச் செலுத்துகின்றோம்.

இந்த அத்தியாயத்தில் நம் நடைமுறை வாழ்வோடு ஒருங்கிணைந்த தலைப்புகளைப் பற்றி காண்போம்.

1.2 இலாபம், நட்டம் தனிவட்டி பற்றிய மீள்பார்வை

முன் வகுப்பில் இலாபம், நட்டம், தனிவட்டி ஆகியவற்றைக் காணும் முறைகளைக் கற்றுள்ளோம். நாம் கற்ற முடிவுகளை நினைவு கூர்வோம்:

இலாபம், நட்டம், தனிவட்டி ஆகியவற்றின் முடிவுகள்

(i)	இலாபம்	=	விற்பனை விலை − அடக்க விலை (விற்பனை விலை > அடக்க விலை)
(ii)	நட்டம்	=	அடக்க விலை − விற்பனை விலை (அடக்க விலை > விற்பனை விலை)
(iii)	இலாப சதவீதம்	=	$\frac{\text{இலாபம்}}{\text{அடக்க விலை}} \times 100$
(iv)	நட்ட சதவீதம்	=	$\frac{\text{நட்டம்}}{\text{அடக்க விலை}} \times 100$
(v)	தனி வட்டி (I)	=	$\frac{\text{அசல்} \times \text{காலம்} \times \text{வட்டி வீதம்}}{100} = \frac{Pnr}{100}$
(vi)	கூட்டுத்தொகை	=	அசல் + வட்டி

1.3 சதவீதம், இலாபம், நட்டம், மேற்படிச் செலவுகள், தள்ளுபடி மற்றும் வரி ஆகியவற்றின் பயன்பாடுகள்

நீவிர் அறிவீரா?

$= \frac{1}{2} = 50\ \%$

$= \frac{1}{4} = 25\ \%$

$= \frac{3}{4} = 75\ \%$

1.3.1 சதவீதத்தின் பயன்பாடுகள்

நாம் முன் வகுப்புகளில் சதவீதங்களைப் பற்றிக் கற்றுள்ளோம். இவற்றைப் பயன்படுத்தும் முறைகள் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) இரண்டு சதவீதம் = $2\% = \frac{2}{100}$

(ii) 600 கிலோ கிராமின் 8% = $\frac{8}{100} \times 600 = 48$ கி.கி.

(iii) $125\% = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

இப்பொழுது, சதவீதங்களைப் பயன்படுத்தி சில கணக்குகளைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.1

2 ரூபாய் 70 பைசாவில் 15 பைசா எத்தனை சதவீதம்?

தீர்வு

$$₹\ 2 \text{ பைசா } 70 = (2 \times 100 \text{ பைசா} + 70 \text{ பைசா})$$
$$= 200 \text{ பைசா} + 70 \text{ பைசா}$$
$$= 270 \text{ பைசா}$$

எனவே, தேவையான சதவீதம் $= \frac{15}{270} \times 100 = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9}\%$.

எடுத்துக்காட்டு 1.2

ஒரு தொகையின் 12% என்பது ₹ 1080 எனில் அத்தொகையைக் காண்க.

தீர்வு

தொகை ₹ x என்க.

தரப்பட்டுள்ளது : அத்தொகையின் 12% = ₹ 1080

$$\frac{12}{100} \times x = 1080$$
$$x = \frac{1080 \times 100}{12} = ₹\ 9000$$

∴ தொகை = ₹ 9000.

எடுத்துக்காட்டு 1.3

25 மாணவர்களில் 72% பேர் கணிதப்பாடத்தில் திறமையானவர்கள். கணிதப் பாடத்தில் திறமையற்றோர் எத்தனை பேர்?

தீர்வு

கணிதத்தில் திறமையானவர்களின் சதவீதம் = 72%

கணிதத்தில் திறமை மிக்க மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 25 மாணவர்களில் 72%

$$= 25 \times \frac{72}{100}$$

= 18 மாணவர்கள்

∴ கணிதப்பாடத்தில் திறமையற்றோர் எண்ணிக்கை = 25 – 18 = 7.

எடுத்துக்காட்டு 1.4

240 ஐ விட 15% குறைவான எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு

240 இல் 15% $= 240 \times \frac{15}{100} = 36$

∴ தேவையான எண் = 240 – 36 = 204.

எடுத்துக்காட்டு 1.5

ஒரு வீட்டின் விலை 15 இலட்சம் ரூபாயிலிருந்து 12 இலட்சம் ரூபாயாகக் குறைந்தது எனில் குறைந்த சதவீதம் காணவும்.

தீர்வு

முதலில், வீட்டின் விலை = ₹ 15,00,000

இப்போதைய விலை = ₹ 12,00,000

விலையில் குறைவு $= 15,00,000 - 12,00,000 = 3,00,000$

$\therefore$ குறைந்த சதவீதம் $= \frac{300000}{1500000} \times 100 = 20\%$

நினைவிற்கொள்க

அதிகரிப்பதின் சதவீதம் $= \frac{\text{அதிகரித்த தொகை}}{\text{முதல் தொகை}} \times 100$

குறைந்ததின் சதவீதம் $= \frac{\text{குறைந்த தொகை}}{\text{முதல் தொகை}} \times 100$

முயற்சி செய்

சரத், பரத் என்போர் 15 மிட்டாய்களை முறையே 20%, 80% என்றவாறு பிரித்துக் கொள்கின்றனர். ஒவ்வொருவரும் பெறும் மிட்டாய்களின் எண்ணிக்கையைக் காணவும்.

செய்து பார்

என் பாட்டி தன்னுடைய குழந்தைப் பருவத்தில் ஒரு கிராம் தங்கத்தின் விலை ₹ 100 என்று கூறுகின்றார். செய்தித்தாளைக் கொண்டு ஒவ்வொரு மாத முதல் தேதியிலும் தங்கத்தின் விலையை காணவும். ஒவ்வொரு மாதத்திலும் ஏற்படும் அதிகரிப்பு சதவீதம் காண்க.

பயிற்சி 1.1

1. சரியான விடையினைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

(i) ஒரு கூடையிலுள்ள 25 பழங்களில் 5 ஆரஞ்சுப் பழங்கள் எனில் ஆரஞ்சுப் பழங்களின் சதவீதம் ....

(A) 5% (B) 25% (C) 10% (D) 20%

(ii) $\frac{2}{25}$ = ... %.

(A) 25 (B) 4 (C) 8 (D) 15

(iii) ஒரு பாட்டிலில் உள்ள மொத்த பிஸ்கட்டுகளின் எண்ணிக்கையில் 15% பிஸ்கட்டுகள் 30 எனில், பிஸ்கட்டுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை ....

(A) 100 (B) 200 (C) 150 (D) 300

(iv) சென்ற ஆண்டு ஒரு ஸ்கூட்டரின் விலை ₹ 34,000. இந்த ஆண்டு இதன் விலை 25% கூடுதலாகின்றது. அக்கூடுதல் தொகை ....

(A) ₹ 6,500 (B) ₹ 8,500 (C) ₹ 8,000 (D) ₹ 7,000

(v) மாத வருமானம் ₹ 20,000 பெறும் நபர் ஒருவர் ஒவ்வொரு மாதமும் ₹ 3,000 ஐ சமிப்பு செய்கின்றார் எனில், அவருடைய மாதச் சேமிப்புச் சதவீதம் ....

(A) 15% (B) 5% (C) 10% (D) 20%

2. (i) ஒரு கொள்கலத்தில் உள்ள 20% ஆனது 40 லிட்டர் எண்ணெய் ஆகும். அக் கொள்கலத்தில் உள்ள எண்ணெயின் மொத்த அளவைக் காணவும்.

(ii) ஒரு பயணத்தில் 25% தொலைவு 5000 கி.மீ எனில் மொத்தப் பயணத் தொலைவு எவ்வளவு?

(iii) ஒரு தொகையில் 3.5% என்பது ₹ 54.25 எனில், அத்தொகையைக் காண்க.

(iv) மொத்த நேரத்தில் 60% என்பது 30 நிமிடங்களாகும் எனில், அந்த மொத்த நேரத்தைக் கணக்கிடவும்.

(v) ஒரு பொருளை விற்றதில் 4% விற்பனை வரி வீதம் ₹ 2 வரி செலுத்தினால், அவர் என்ன விலைக்கு விற்றிருப்பார்?

3. மீனு தன்னுடைய சம்பளத்தில் 5%ஐ அதாவது ₹ 2000 ஐ, பொழுதுபோக்கிற்குச் செலவிட்டால் அவருடைய சம்பளம் என்ன?

4. ஒரு கூடையிலுள்ள மொத்த மாம்பழங்களில் 25% அழுகியவை. அழுகிய மாம்பழங்களின் எண்ணிக்கை 1250 எனில் மொத்தப்பழங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. மேலும் நல்ல மாம்பழங்களின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

5. 12ஆம் வகுப்பு தேர்வில் இராணி பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அம்மதிப்பெண்களைச் சதவீதங்களாகக் கூறவும்.

பாடங்கள்	அதிக மதிப்பெண்கள்	பெற்ற மதிப்பெண்கள்	சதவீதம்
(i) ஆங்கிலம்	200	180	
(ii) தமிழ்	200	188	
(iii) கணக்கு	200	195	
(iv) இயற்பியல்	150	132	
(v) வேதியியல்	150	142	
(vi) உயிரியல்	150	140	

6. ஒரு பள்ளியின் கிரிக்கெட் குழு மற்றொரு பள்ளியின் கிரிக்கெட் குழுவுடன் ஆடிய ஆட்டங்களின் எண்ணிக்கை 20. இவற்றில் முதற் பள்ளி 25% ஆட்டங்களை வென்றது எனில் மொத்தம் வென்ற ஆட்டங்களின் எண்ணிக்கை யாது?

7. ஆண்டொன்றிற்கு 18% தனி வட்டி தரும் குழுமத்தில் ரஹீம் ₹ 10000ஐ முதலீடு செய்தார் எனில், 5 வருடங்களுக்குப் பிறகு அவர் பெறும் வட்டியினைக் காண்க.

8. ஒரு பொம்மையின் குறித்த விலை ₹ 1200. கடைக்காரர் 15% தள்ளுபடி விலையில் கொடுத்தார் எனில், பொம்மையின் விற்பனை விலை என்ன?

9. கணிணிக் குழுமத்தில் நடைபெற்ற நேர்முகத் தேர்வில் 1500 நபர்கள் கலந்து கொண்டனர். இதில் 12% நபர்கள் தேர்வு செய்யப்பட்டனர் எனில், எத்தனை நபர்கள் தேர்வு செய்யப்பட்டனர்? மேலும் எத்தனை நபர்கள் தேர்வு செய்யப்படவில்லை எனக் காண்க.

10. ஒரு உலோகக் கலவையில் 30% தாமிரம், 40% துத்தநாகம், மீதி நிக்கல் உள்ளது. 20 கி.கி உள்ள இந்த உலோகக் கலவையில் நிக்கலின் அளவு யாது?

11. ஊராட்சி உறுப்பினர் தேர்தலில் தாமரை மற்றும் பாண்டியன் ஆகிய இருவர் போட்டியிட்டனர். மொத்த வாக்குகளில் 44% அதாவது 11,484 வாக்குகள் பாண்டியனுக்குக் கிடைத்தன. தாமரைக்கு 36% வாக்குகள் கிடைத்தன.
    (i) இக்கிராமத்தில் பதிவான மொத்த வாக்குகளின் எண்ணிக்கை யாது?
    (ii) போட்டியிட்ட இருவருக்கும் வாக்களிக்காதவர்கள் எத்தனை பேர்?
12. ஒருவர் தம் வருமானத்தில் 40% உணவுக்காகவும், 15% உடைக்காகவும், 20% வீட்டு வாடகைக்காகவும் செலவிடுகின்றார். மீதியைச் சேமிக்கின்றார். அவர் வருமானம் ₹ 34,400 எனில், அவர் எவ்வளவு சேமிக்கின்றார்?
13. ஜோதிகா ஆங்கிலத்தில் 50க்கு 35 மதிப்பெண்களும், கணக்கில் 30க்கு 27 மதிப்பெண்களும் பெற்றார். எப்பாடத்தில் அதிக மதிப்பெண் பெற்றார்? எவ்வளவு அதிகம் பெற்றார்?
14. ஒரு தொழிலாளி ₹ 11,250 ஊக்கத் தொகையாகப் பெறுகின்றார். இத்தொகை அவர் தம் ஆண்டு வருமானத்தில் 15% எனில், அவரின் மாத வருமானம் என்ன?
15. ஓர் ஆடையின் விலை ₹ 2100 லிருந்து ₹ 2520 ஆக அதிகரிக்கின்றது எனில், அதிகரிப்பு சதவீதத்தைக் காண்க.

முயற்சி செய்

1. 40% = 100% – ______ %
2. ஒரு வகுப்பு மாணவர்களில் 25% நடந்தும், 65% பேர் மிதிவண்டியிலும், மீதியுள்ளோர் பள்ளிப் பேருந்திலும் பள்ளிக்கு வருகின்றனர் எனில் பள்ளிப் பேருந்தில் வருகின்றவர்களின் சதவீதம் யாது?
3. ஒரு வகுப்பில் 30% இந்தி, 50% தமிழ், மீதம் உள்ளவர்கள் பிரெஞ்சு ஆகிய மொழிகளை இரண்டாம் பாடமாகத் தேர்ந்தெடுத்தனர் எனில் பிரெஞ்சு மொழியைத் தேர்ந்தெடுத்தோரின் சதவீதம் என்ன?
4. ஒரு நகரில் ஆண்கள் 40% , பெண்கள் 30%, மீதியுள்ளோர் குழந்தைகள் எனில் குழந்தைகளின் சதவீதம் யாது?

செய்து பார்

கணேசன், கோவிந்தன் ஆகிய வியாபாரிகளிடமிருந்து அமுதா பட்டுப் புடவைகளை வாங்குகின்றார். கணேசன் 200கி வெள்ளி நூல் கொண்டும், 100 கி தாமிர நூல் கொண்டும், கோவிந்தன் 300 கி வெள்ளி நூல் கொண்டும், 200 கி தாமிர நூல் கொண்டும் புடவையை நெய்கின்றனர். ஒவ்வொரு புடவையிலும் உள்ள வெள்ளி நூலின் சதவீதம் காண்க. மிகுதியாக வெள்ளி நூல் உள்ள புடவை உயர்தரமானது எனில், இவ்விருவரில் யார் உயர்ந்த தரத்தில் புடவை தருகின்றார்?

1.3.2 இலாப, நட்டங்களின் பயன்பாடுகள்

இப்பகுதியில் இலாப, நட்டங்களைப் பயன்படுத்தி கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணக் கற்றுக் கொள்வோம்.

(i) விற்பனை விலை சூத்திரத்திற்கான விளக்கம் :

இராஜேஷ் ஒரு பேனாவை ₹ 80க்கு வாங்கி அவரின் நண்பருக்கு 5% இலாபத்தில் விற்றார் எனில் அப்பேனாவின் விலை என்ன?

இராஜேஷ் வாங்கிய பேனாவின் அடக்க விலை ₹ 80. இவ்விலையில் 5% இலாபம் கொண்டு விற்கின்றார்.

∴ இலாபம் = அடக்க விலையில் 5% = $80 \times \frac{5}{100}$ = ₹ 4

இலாபம் என்பதினால், விற்பனை விலை வாங்கிய விலையை விட அதிகம்.

விற்பனை விலை = வாங்கிய விலை + இலாபம் = 80 + 4 = ₹ 84.

∴ இராஜேஷ் பேனாவினை ₹ 84க்கு விற்பனை செய்து இருப்பார்.

இதையே சூத்திரம் மூலம் செய்யும் முறையைக் காண்போம்.

$$\text{விற்பனை விலை (வி.வி.)} = \frac{(100 + \text{இலாபம் \%})}{100} \times \text{அடக்க விலை}$$

$$= \frac{(100+5)}{100} \times 80 = \frac{105}{100} \times 80 = ₹\ 84.$$

(ii) அடக்க விலை சூத்திரத்திற்கான விளக்கம் :

கடிகாரக் கடைக்காரர் ஒருவர் ஒரு கைக்கடிகாரத்தை ₹ 540 க்கு, 5% இலாபத்தில் விற்றதாகக் கொள்வோம். இதன் அடக்க விலை என்னவாக இருந்திருக்கும்?

கடைக்காரர் அக்கைக்கடிகாரத்தை 5% இலாபத்தில் விற்கின்றார். நமக்கு அடக்க விலை தெரியாது ஆதலால் நாம் அதை ₹ 100 எனக் கொள்வோம்.

முதலில் நாம் அடக்க விலையில் 5% இலாபத்தைக் கணக்கிடுவோம்.

∴ இலாபம் = அடக்க விலையில் 5%

= $100 \times \frac{5}{100}$ = ₹ 5.

விற்பனை விலை = வாங்கிய விலை + இலாபம்

= 100 + 5 = ₹ 105.

விற்பனை விலை ₹ 105 எனில், அடக்க விலை ₹ 100.

விற்பனை விலை ₹ 540 எனில், அடக்க விலை = $\frac{540 \times 100}{105}$ = ₹ 514.29.

அக்கடைக்காரருக்குக் கைக்கடிகாரத்தின் அடக்க விலை ₹ 514.29 ஆகும்.

மேற்கண்ட கணக்கைச் சூத்திரம் மூலமாகவும் தீர்வு செய்யலாம்.

$$\text{அடக்க விலை (அ.வி.)} = \frac{100}{(100 + \text{இலாபம் }\%)} \times \text{விற்பனை விலை}$$

$$= \frac{100}{100+5} \times 540$$

$$= \frac{100}{105} \times 540$$

$$= ₹\ 514.29.$$

விற்பனை விலை (வி.வி.), அடக்க விலை (அ.வி.) இவற்றைக் காண உதவும் சூத்திரங்களின் தொகுப்பை இங்கு காண்போம் :

1. இலாபம் எனில்

(i) $\text{அ.வி.} = \left(\frac{100}{100 + \text{இலாபம் }\%}\right) \times \text{வி.வி.}$

1. நட்டம் எனில்

(ii) $\text{அ.வி.} = \left(\frac{100}{100 - \text{நட்டம்}\%}\right) \times \text{வி.வி.}$

2. இலாபம் எனில்

(i) $\text{வி.வி.} = \left(\frac{100 + \text{இலாபம் }\%}{100}\right) \times \text{அ.வி.}$

2. நட்டம் எனில்

(ii) $\text{வி.வி.} = \left(\frac{100 - \text{நட்டம்}\%}{100}\right) \times \text{அ.வி.}$

எடுத்துக்காட்டு 1.6

ஹமீது ஒரு வண்ணத் தொலைக்காட்சிப் பெட்டியை ₹ 15,200 க்கு வாங்குகின்றார். இதனை 20% நட்டத்திற்கு விற்றார் எனில், அத்தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் விற்பனை விலை என்ன?

தீர்வு

இராகுல் செய்த முறை :

அடக்க விலையில் நட்ட சதவீதம் 20%

$$= \frac{20}{100} \times 15200$$

$$= ₹\ 3040$$

விற்பனை விலை= அடக்க விலை – நட்டம்

$$= 15,200 - 3,040$$

$$= ₹\ 12,160$$

அல்லது

ரோஷன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திச் செய்தமுறை :

அ.வி. = ₹ 15, 200

நட்டம் = 20%

$$\text{வி.வி.} = \frac{100 - \text{நட்டம்}\%}{100} \times \text{அ.வி.}$$

$$= \frac{100-20}{100} \times 15200$$

$$= \frac{80}{100} \times 15200 = ₹\ 12,160$$

இராகுலும், ரோஷனும் ஒரே விடையைப் பெற்றனர். பெட்டியின் விற்பனை விலை ₹ 12,160.

எடுத்துக்காட்டு 1.7

ஒரு ஸ்கூட்டியை ₹ 13,600க்கு விற்பனை செய்யும்பொழுது 15% நட்டம் ஆகிறது எனில், அதன் அடக்க விலை என்ன?

தேவியும், ரேவதியும் இக்கணக்கினை இரு முறைகளில் செய்தனர்.

தீர்வு

தேவி செய்த முறை :

அடக்க விலை ₹ 100இல், நட்டம் 15% எனில், நட்டம் ₹ 15.

விற்பனை விலை = 100 – 15 = ₹ 85

விற்பனை விலை ₹ 85 எனில், அடக்க விலை ₹ 100.

விற்பனை விலை ₹ 13600 எனில்,

அடக்க விலை

$$= \frac{100 \times 13600}{85}$$

$= ₹\ 16,000$

அல்லது

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி ரேவதி செய்த முறை :

நட்டம் = 15%

வி.வி. = ₹ 13,600

$$\text{அ.வி.} = \frac{100}{100 - \text{நட்டம்}\%} \times \text{வி.வி.}$$

$$= \frac{100}{100-15} \times 13600$$

$$= \frac{100}{85} \times 13600$$

$= ₹\ 16,000$

இருவருக்கும் ஒரே விடையாக அடக்க விலை ₹ 16,000 கிடைத்தது.

முயற்சி செய்

அட்டவணையைப் பூர்த்தி செய்க

பொருள்	அடக்க விலை (ரூபாயில்)	இலாபம் /நட்டம்	விற்ற விலை (ரூபாயில்)
துணி துவைக்கும் இயந்திரம்	16,000	9% இலாபம்	
மைக்ரோ வேவ் ஓவன்	13,500	12% நட்டம்	
மர அலமாரி		13% நட்டம்	6,786
சோபா செட்		12½% இலாபம்	7,000
குளிரூட்டும் சாதனம்	32,400	7% இலாபம்	

எடுத்துக்காட்டு 1.8

11 பேனாக்களின் அடக்கவிலை 10 பேனாக்களின் விற்ற விலைக்குச் சமம் எனில் இலாப அல்லது நட்ட சதவீதத்தைக் காண்க.

தீர்வு

பேனா விற்பனை விலை ₹ x என்க.

∴ 10 பேனாக்களின் விலை = ₹ $10x$

11 பேனாக்களின் அடக்கவிலை = 10 பேனாக்களின் விற்பனை விலை ஆகும்.

= ₹ $10x$

இங்கு, விற்பனை விலை > அடக்க விலை.

∴ இலாபம் = விற்பனை விலை – அடக்க விலை

$= 11x - 10x = ₹\ x$

$$\text{இலாப சதவீதம்} = \frac{\text{இலாபம்}}{\text{அ.வி.}} \times 100 = \frac{x}{10x} \times 100 = 10\%.$$

எடுத்துக்காட்டு 1.9

இரு கைக்கடிகாரங்கள் ஒவ்வொன்றையும் ₹ 594க்கு ஒருவர் விற்றார். இவ்வாறு விற்றதில் ஒன்றில் 10% இலாபமும், மற்றதில் 10% நட்டமும் அவருக்கு ஏற்பட்டது. மொத்தத்தில் அவருக்கு ஏற்பட்ட இலாபம் அல்லது நட்ட சதவீதம் காணவும்.

தீர்வு

முதல் கைக்கடிகாரத்தின் விற்பனை விலை = ₹ 594, இலாப சதவீதம் = 10%

∴ முதல் கைக்கடிகாரத்தின் அடக்க விலை $= \dfrac{100}{100 + \text{இலாபம் } \%} \times$ வி.வி

$$= \frac{100}{(100+10)} \times 594$$

$$= \frac{100}{110} \times 594 = ₹\ 540.$$

இரண்டாவது கைக்கடிகாரத்தை 10% நட்டத்தில் விற்றார் எனில்

அடக்க விலை $= \dfrac{100}{100 - \text{நட்டம் } \%} \times$ வி.வி

$$= \frac{100}{(100-10)} \times 594 = \frac{100}{90} \times 594 = ₹\ 660.$$

நிகர இலாபம் அல்லது நட்டம் உள்ளதா என்பதை தெரிந்துகொள்ள, ஒருங்கிணைந்த அடக்க விலை மற்றும் விற்பனை விலையைக் காண வேண்டியுள்ளது.

இரண்டு கைக்கடிகாரங்களின் மொத்த அடக்க விலை = 540 + 660 = ₹ 1,200.

இரண்டு கைக்கடிகாரங்களின் மொத்த விற்பனை விலை = 594 + 594 = ₹ 1,188.

மொத்த நட்டம் = 1,200 – 1,188 = ₹ 12.

நட்ட சதவீதம் $= \dfrac{\text{நட்டம்}}{\text{அ.வி.}} \times 100$

$$= \frac{12}{1200} \times 100 = 1\%$$

1.3.3 மேற்படிச்செலவுகளைக் காட்டும் பயன்பாடு

ஒரு காற்று குளிரூட்டியை வாங்குவதற்கு மாயா தன் தந்தையுடன் கடைக்குச் சென்றார். அதனை ₹18,000க்கு வாங்கினர். அக்கடை அவர்களின் வீட்டின் அருகில் இல்லை. எனவே அக்குளிரூட்டியை எடுத்துச் செல்வதற்கு ஒரு வண்டி வேண்டியுள்ளது. அதன் வாடகை ₹ 500 எனில் அக்குளிரூட்டியின் அடக்க விலை, கடையில் வாங்கிய விலையுடன் ₹ **500** அதிகமாயிற்று. எனவே அதன் அடக்க விலை என்பது வாங்கிய விலை ₹ 18,000 உடன் வண்டி வாடகை ₹ 500ஐயும் சேர்க்க வேண்டியுள்ளது. இதைத்தான் நாம் மேற்படிச்செலவு என்கின்றோம். இப்பொழுது

காற்றுக் குளிரூட்டியின் அடக்க விலை = அதன் உண்மை விலை + வண்டி வாடகை

= 18,000 + 500 = ₹ 18,500

மற்றொரு உதாரணத்தை இங்கு காண்போம்.

கிஷோரின் தந்தை ஒரு பழைய மாருதி காரை ₹ 2,75,000 க்குச் சென்னையிலுள்ள ஒரு மொத்த விற்பனையாளரிடம் இருந்து வாங்கினார். அதற்கு வண்ணம் தீட்ட ₹ 25,000 செலவு செய்தார். பின்பு அக் காரினை தன் சொந்த ஊருக்குக் கொண்டு செல்ல மேலும் ₹ 2,000 செலவழித்தார் எனில் பின்வரும் வினாக்களுக்கு உங்களால் விடையளிக்க இயலுமா?

(i) காரின் மொத்த அடக்க விலை என்ன?

(ii) காரின் உண்மையான அடக்க விலை என்ன?

(iii) இங்கு கூறப் பெற்ற மேற்படிச்செலவினங்கள் எவை?

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் வண்ணம் தீட்ட செலவு மற்றும் வண்டியைச் சொந்த ஊருக்குக் கொண்டு செல்ல செலவு ஆகியவை மேற்படிச் செலவுகளாகும்.

∴ காரின் அடக்கவிலை = உண்மையான அடக்க விலை + மேற்படிச் செலவுகள்

= 2,75,000 + (25,000 + 2,000)

= 2,75,000 + 27,000 = ₹ 3,02,000.

இதிலிருந்து கீழ்க்கண்ட முடிவிற்கு வருகின்றோம்.

சில சமயங்களில் ஒரு பொருளை வாங்குகின்ற போது அல்லது விற்பதற்கு முன்பு கூடுதல் செலவுகள் ஏற்படும். இந்தச் செலவுகளை அடக்க விலையுடன் கூட்டிக்கொள்ள வேண்டும். இந்தச் செலவினங்களை மேற்படிச்செலவினங்கள் என்கின்றோம். பழுதை நீக்க ஆகும் செலவு, வண்டி வாடகை, மற்றும் இதர வகைகளை மேற்படிச்செலவினங்களில் சேர்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.10

இராசு ₹ 36,000க்கு ஒரு மோட்டார் சைக்கிளை வாங்கி, அதன் தோற்றப் பொலிவு நன்கு அமையவும் மேலும் நன்முறையில் இயங்கவும் சில இதர பாகங்களைப் பொருத்தினார். பின்பு அம்மோட்டார் சைக்கிளை ₹ 44,000க்கு 10% இலாபத்தில் விற்கின்றார் எனில் இதர பாகங்கள் வாங்க எவ்வளவு செலவு செய்தார்?

தீர்வு

அடக்க விலை ₹ 100 என்க.

இலாபம் = 10%, விற்பனை விலை = ₹ 110

விற்பனை விலை ₹ 110 எனில் அடக்க விலை ₹ 100.

விற்பனை விலை ₹ 44,000 எனில் அடக்க விலை = $\frac{44000 \times 100}{110}$ = ₹ 40,000

∴ மொத்த செலவினங்கள் = 40,000 – 36,000 = ₹ 4,000.

பயிற்சி 1.2

1. அடக்க விலை அல்லது விற்பனை விலையைக் காண்க.

அடக்க விலை	விற்பனை விலை	இலாபம்	நட்டம்
(i) ₹ 7,282		₹ 208	
(ii)	₹ 572	₹ 72	
(iii) ₹ 9,684			₹ 684
(iv)	₹ 1,973	₹ 273	
(v) ₹ 6,76,000			₹ 18,500

2. விடுப்பட்ட கட்டங்களில் நிரப்பவும்.

அடக்க விலை	விற்பனை விலை	இலாபமும், இலாப சதவீதமும்	நட்டமும், நட்ட சதவீதமும்
(i) ₹ 320	₹ 384		
(ii) ₹ 2,500	₹ 2,700		
(iii) ₹ 380	₹ 361		
(iv) ₹ 40			₹ 2 நட்டம்
(v) ₹ 5,000		₹ 500 இலாபம்	

3. பின்வரும் கணக்குகளில் 5% இலாபம் எனில் பொருட்களின் விற்பனை விலையைக் காண்க.
   (i) மிதிவண்டி ₹ 700 உடன் மேற்படிச்செலவு ₹ 50.
   (ii) ஒரு கணினி மேசை ₹ 1150க்கு வாங்கி, எடுத்து வர வண்டிச் செலவு ₹ 50.
   (iii) ஒரு மேசை மீது அமையும் மாவு அரைக்கும் இயந்திரத்தை ₹ 2,560க்கு வாங்கி அதன் பழுது நீக்கும் செலவு ₹ 140.
4. வியாபாரி ஒருவர் ₹ 1320க்கு ஒரு மேசையை 10% இலாபத்தில் விற்றார் எனில் அதன் அடக்க விலையைக் காணவும்.
5. 16 நோட்டுப் புத்தகங்களின் அடக்க விலை, 12 நோட்டு புத்தகங்களின் விற்பனை விலைக்குச் சமம். இதன் இலாப சதவீத்தைக் காணவும்.
6. ஒருவர் இரு பொருட்களை ஒவ்வொன்றையும் ₹ 375க்கு விற்கின்றார். முதல் பொருளை 25% இலாபத்திற்கும் மற்றதை 25% நட்டத்திற்கும் விற்கின்றார் எனில் மொத்த வியாபாரத்தில் ஏற்பட்ட இலாபம் அல்லது நட்டம் எவ்வளவு? இலாபம் அல்லது நட்ட சதவீதத்தையும் காணவும்.

7. அன்பரசன் ஒரு வீட்டை ₹ 17,75,000 க்கு வாங்கினார். பின்பு உட்புறங்களை ₹ 1,25,000 க்கு அழகுபடுத்தி அதை 20% இலாபத்திற்கு விற்றார் எனில் விற்பனை விலையைக் காண்க.

8. அமலா ஒரு வீட்டினை வாங்கி அதன் கட்டட அமைப்பினை மாற்ற ₹ 60,000 செலவு செய்தார். பின்னர் அவ்வீட்டை 20% இலாபத்தில் விற்றார். அதன் விற்பனை விலை ₹ 42,00,000 எனில் அவ்வீட்டை வாங்குவதற்கு அவர் செய்த செலவு யாது?

9. ஜெயக்குமார் புறநகரில் ₹ 21,00,000க்கு வீடு கட்ட இடம் வாங்கினார். இதனைச் சுற்றி சுவர் எழுப்ப ₹ 1,45,000 செலவு செய்தார். ₹ 25,00,000க்கு அவ்விடத்தினை விற்க ₹ 5,000 கொடுத்து செய்தித்தாளில் விளம்பரம் செய்தார் எனில் அவருக்குக் கிடைக்கும் இலாப சதவீதம் என்ன?

10. ஒருவர் தன்னிடமுள்ள ஒரு வகை நாயினை 15% இலாபத்தில் ₹3605க்கும், வேறு ஒரு வகை நாயினை 9% நட்டத்தில் ₹3605 க்கும் விற்றார் எனில், மொத்த இலாபம் அல்லது மொத்த நட்டம் காண்க.
(குறிப்பு : ஒவ்வொன்றின் அடக்க விலையையும் காண்க)

1.3.4 தள்ளுபடிகளின் பயன்பாடுகள்

பொங்கல் பண்டிகைக்காகப் புதிய துணி வாங்க நேற்று பூஜா தன் பெற்றோர்களுடன் ஒரு துணிக்கடைக்குச் சென்றார். வழியில் பல கடைகளில் தள்ளுபடி 10%, தள்ளுபடி 20%, தள்ளுபடி 25%, தள்ளுபடி 50% ஆகிய விளம்பரங்களைக் கண்டார். இதன் பொருள் அவருக்கு ஒன்றும் புரியவில்லை. இந்த ஐயத்துடன் ஒரு கடையினுள் நுழைந்து ஒரு சட்டையை வாங்கினார்.

அச்சட்டையின் மீது ஒரு சிறு துண்டு அட்டையில் ₹ 550 என்றிருந்தது. அதனைக் குறித்த விலை என்பர். பூஜா கடைக்காரருக்கு ₹ 550 கொடுத்தார். ஆனால் கடைக்காரரோ ஒரு தொகையை திரும்பக் கொடுத்து இதற்கு 20% தள்ளுபடி உண்டு என்றார்.

இங்கு 20% தள்ளுபடி என்பது குறித்த விலையில் 20% தள்ளுபடி என்று பொருள்படும்.

தள்ளுபடி $= 550 \times \frac{20}{100} =$ ₹ 110.

தள்ளுபடி என்பது **குறித்த விலையில்** அல்லது **பட்டியலில் உள்ள விலையை விடக் குறைத்து கொடுக்கும் விற்பனை விலை ஆகும்.**

ஒரு பொருளின் மேல் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் துண்டு அட்டையில் தள்ளுபடிக்கு முன் எழுதப்பட்டிருக்கும் விலையை குறித்த விலை (கு.வி.) அல்லது பட்டியல் விலை என்போம்.

பூஜா கடைக்காரரிடம் கொடுத்த தொகை ₹ 550

விற்பனை விலை = ₹ 550 – ₹ 110

= குறித்த விலை – தள்ளுபடி

இதிலிருந்து நாம் அறிவன :

தள்ளுபடி	=	குறித்த விலை – விற்பனை விலை
விற்பனை விலை	=	குறித்த விலை – தள்ளுபடி
குறித்த விலை	=	விற்பனை விலை + தள்ளுபடி

விழாக்காலங்களிலும், தமிழ் மாதமான ஆடியிலும் 10%, 20%, 50% என்பன போன்ற தள்ளுபடிகள் வழங்குவதன் மூலம் கோ–ஆப்டெக்ஸ், காதி போன்ற பல கடைகள் வாடிக்கையாளர்களை ஈர்த்து தங்கள் வியாபாரத்தைப் பெருக்கிக் கொள்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

ஒரு மிதிவண்டியின் விலை ₹ 1500 என்று குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இதனை ₹ 1350க்கு விற்றால், தள்ளுபடி சதவீதம் என்ன?

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை : குறித்த விலை = ₹ 1500, விற்பனை விலை ₹ 1350

தள்ளுபடி = கு.வி. – வி.வி.

= 1500 – 1350 = ₹ 150

₹ 1500க்குத் தள்ளுபடி = ₹ 150.

எனவே, ₹ 100க்குத் தள்ளுபடி = $\frac{150}{1500} \times 100$

∴ தள்ளுபடி சதவீதம் = 10%.

தள்ளுபடி குறித்த, விலையின் மேல் அமைவதால், நாம் குறித்த விலையையே அடிப்படையாகக் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.12

ஓர் உடையின் பட்டியல் விலை ₹ 220. அதன் விற்பனையில் 20% தள்ளுபடி என்று அறிவிக்கப்பட்டுள்ளது. உடையின் மேல் தள்ளுபடி எவ்வளவு? அதன் விற்பனை விலை என்ன?

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை: குறித்த விலை = ₹ 220, தள்ளுபடி வீதம் = 20%

தள்ளுபடி = $\frac{20}{100} \times 220$

= ₹ 44

∴ அதன் விற்பனை விலை = குறித்த விலை – தள்ளுபடி

= 220 – 44

= ₹ 176.

எடுத்துக்காட்டு 1.13

ஓர் அலமாரி 5% தள்ளுபடியில் ₹ 5,225க்கு விற்கப்படுகின்றது. அதன் குறித்த விலையைக் காண்க.

தீர்வு

கிருஷ்ணா பயன்படுத்திய முறை :

தள்ளுபடி சதவீதத்தில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. எனவே, குறித்த விலை ₹ 100 என்க.

தள்ளுபடி சதவீதம் = 5%

தள்ளுபடி = $\frac{5}{100} \times 100$ = ₹ 5

வி.வி. = கு.வி. – தள்ளுபடி

= 100 – 5 = ₹ 95.

விற்பனை விலை ₹ 95 எனில், குறித்த விலை ₹ 100.

விற்பனை விலை ₹ 5225 எனில்,

குறித்த விலை = $\frac{100}{95} \times 5225$ = ₹ 5500

∴ அலமாரியின் குறித்த விலை = ₹ 5500.

அல்லது

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி விக்னேஷ் செய்த முறை :

விற்பனை விலை = ₹ 5225

தள்ளுபடி = 5%

கு.வி. = ?

கு.வி. = $\frac{100}{100 - \text{தள்ளுபடி}\ \%} \times$ வி.வி

$= \left(\frac{100}{100-5}\right) \times 5225$

$= \frac{100}{95} \times 5225$

= ₹ 5,500.

எடுத்துக்காட்டு 1.14

ஒரு கடைக்காரர் தன் வாடிக்கையாளர்களுக்கு 10% தள்ளுபடி தந்தும், 20% இலாபம் அடைகின்றார். ஒரு பொருளின் உண்மை விலை ₹ 450 எனில், அப்பொருளின் குறித்த விலையைக் காண்க.

தீர்வு

வனிதா பயன்படுத்திய முறை:

குறித்த விலை ₹ 100 என்க.

தள்ளுபடி = குறித்த விலை மீது 10%

$= \frac{10}{100} \times$ குறித்த விலை $= \frac{10}{100} \times 100$

= ₹ 10

வி.வி. = கு.வி. – தள்ளுபடி

= 100 – 10 = ₹ 90

இலாபம் = அடக்க விலையின் மீது 20%

$= \frac{20}{100} \times 450$ = ₹ 90

வி.வி. = அடக்க விலை + இலாபம்

= 450 + 90 = ₹ 540.

அல்லது

விமல் பயன்படுத்திய முறை:

தள்ளுபடி = 10%, இலாபம் = 20%

அ.வி. = ₹ 450, கு.வி. = ?

குறித்த விலை

$= \frac{100 + \text{லாபம்}\ \%}{100 - \text{தள்ளுபடி}\ \%} \times$ அ.வி

$= \frac{(100+20)}{(100-10)} \times 450$

$= \frac{120}{90} \times 450$

= ₹ 600

விற்பனை விலை ₹ 90 எனில்,

குறித்த விலை ₹ 100

விற்பனை விலை ₹ 540 எனில்,

குறித்த விலை = $\frac{540 \times 100}{90}$ = ₹ 600.

∴ அப்பொருளின் குறித்த விலை ₹ 600.

எடுத்துக்காட்டு 1.15

ஒரு புத்தகத்தின் விலையில் 10% தள்ளுபடி செய்தாலும் ஒரு வியாபாரிக்கு 10% இலாபம் கிடைக்கின்றது. அப்புத்தகத்தின் குறித்த விலை ₹ 220 எனில், அதன் அடக்க விலை யாது?

தீர்வு

சுகந்தன் பயன்படுத்திய முறை :

குறித்த விலை = ₹ 220.

தள்ளுபடி = குறித்த விலையில் 10%

$= \frac{10}{100} \times 220 =$ ₹ 22.

வி.வி. = கு.வி. – தள்ளுபடி

= 220 – 22 = ₹ 198.

அடக்க விலை ₹ 100 எனக் கொள்க

இலாபம் = அடக்க விலையில் 10%

$= \frac{10}{100} \times 100 =$ ₹ 10.

வி.வி. = அ.வி. + இலாபம்

= 100 + 10 = ₹ 110.

₹ 110 வி.வி. எனில், அ.வி. ₹ 100.

₹ 198 விற்பனை விலை எனில்,

அடக்க விலை = $\frac{198 \times 100}{110}$ = ₹ 180.

அல்லது

முகுந்தன் பயன்படுத்திய சூத்திர முறை :

தள்ளுபடி = 10%

இலாபம் = 10%

குறித்த விலை = ₹ 220

அடக்க விலை = $\frac{100 - \text{தள்ளுபடி } \%}{100 + \text{இலாபம் } \%}$ × குறித்த விலை

$= \frac{100 - 10}{100 + 10} \times 220$

$= \frac{90}{110} \times 220 =$ ₹ 180.

எடுத்துக்காட்டு 1.16

தொடர் தள்ளுபடிகள் முறையே 10%, 20% என்றவாறு ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டி ₹ 14,400க்கு விற்கப்பட்டது எனில் அதன் குறித்த விலை என்ன?

தீர்வு

விற்பனை விலை = ₹ 14,400

குறித்த விலை ₹ 100 என்க.

முதல் தள்ளுபடி = 10% = $\frac{10}{100} \times 100 =$ ₹ 10.

முதல் தள்ளுபடிக்கு பின் விற்பனை விலை = 100 – 10 = ₹ 90.

இரண்டாம் தள்ளுபடி = 20% = $\frac{20}{100} \times 90 =$ ₹ 18.

இரண்டாம் தள்ளுபடிக்குப் பின் விற்பனை விலை = 90 – 18 = ₹ 72.

விற்பனை விலை ₹ 72 எனில், குறித்த விலை ₹ 100.

விற்பனை விலை ₹ 14,400 எனில் குறித்த விலை

$$= \frac{14400 \times 100}{72} = ₹\ 20,000.$$

$\therefore$ குறித்த விலை = ₹ 20,000.

எடுத்துக்காட்டு 1.17

ஒரு வியாபாரி ஒரு பொருளை ₹ 1200க்கு வாங்கினார். பின்பு அதன் அடக்க விலைக்கு மேல் 30% உயர்த்தி, குறித்த விலை ஆக்கினார். இதற்கு 20% தள்ளுபடி கொடுத்து விற்றார் எனில், விற்பனை விலை மற்றும் இலாப சதவீதம் காண்க.

தீர்வு

அப்பொருளின் அடக்க விலை ₹ 100 என்க.

குறித்த விலை = அடக்க விலையைவிட 30% அதிகம்

$\therefore$ குறித்த விலை = ₹ 130.

அடக்க விலை ₹ 100 எனில் குறித்த விலை ₹ 130.

அடக்க விலை ₹ 1200 எனில், குறித்த விலை $= \frac{1200 \times 130}{100} = ₹\ 1560$

தள்ளுபடி = 1560 இல் 20% $= \frac{20}{100} \times 1560 = ₹\ 312.$

விற்பனை விலை = குறித்த விலை – தள்ளுபடி

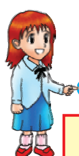
= 1560 – 312 = ₹ 1248.

இலாபம் = விற்பனை விலை – அடக்க விலை

= 1248 – 1200 = ₹ 48.

$$\therefore \text{இலாப சதவீதம்} = \frac{\text{இலாபம்}}{\text{அடக்க விலை}} \times 100\%$$

$$= \frac{48}{1200} \times 100 = 4\%.$$



நீவிர் அறிவீரா?

ஒரு கடையில் பொருள்களின் விலையில் 20% தள்ளுபடி நிர்ணயிக்கப்பட்டுள்ளது எனில், கீழ்க்காணும் பொருள்களின் விற்ற விலை என்ன?

(i) ஒரு ஆடையின் குறித்த விலை ₹ 120

(ii) ஒரு பையின் குறித்த விலை ₹ 250

(iii) ஒரு சோடி காலணியின் குறித்த விலை ₹ 750

1.3.5 வரியின் பயன்பாடுகள்

குழந்தைகளே! செய்தித்தாள்கள் மற்றும் தொலைக் காட்சிகளில் வரிகளைக் குறித்த காலத்திற்குள் செலுத்துமாறு விளம்பரம் செய்வதை நாம் கண்டுள்ளோம். வரி என்றால் என்ன? அரசு பொதுமக்களிடம் இருந்து வரியை ஏன் வசூலிக்க வேண்டும்?

நம் நாடு ஒரு சிறந்த நாடாக அமைய சாலைகள், இரயில்கள், நீர் பாசன வசதி, குடிநீர் வசதி, மின்சார வசதி போன்றவை மக்களுக்கு மிகவும் அவசியமாக அமைய வேண்டும். இத்திட்டங்களைச் செயல்படுத்த தேவையான பணத்தை அரசு பொது மக்களிடம் வரி மூலமாக வசூலிக்கின்றது.

வரிகள் இருவகைப்படும். அவையாவன :

1. நேர்முக வரி 2. மறைமுக வரி.

1. நேர்முக வரி

வருமான வரி, சொத்து வரி, தொழில் வரி, தண்ணீர் வரி போன்ற வரிகள் நேர்முக வரிகளாகும். இவை பொது மக்களால் அரசுக்கு நேரடியாகச் செலுத்தும் வரிகளாகும்.

2. மறைமுக வரி

சில வரிகள் நேரடியாக மக்களால் செலுத்த முடியாது. அவ்வரி மறைமுக வரி எனப்படும். இவற்றை இங்கு விவரிப்போம்.

கலால் வரி

இவ்வரி நம் நாட்டில் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற பொருள்கள் சிலவற்றின் மீது விதிக்கப்படுகின்றது. இது நடுவண் அரசுக்குச் செல்லுகின்றது.

பணி வரி

உணவு விடுதிகள், திரையரங்குகள், வணிகக் கணக்காளர்களின் பணிகள், தொலைபேசிக் கட்டணம் போன்றவற்றிற்கு விதிக்கும் வரிகள் பணி வரிகள் ஆகும். இவ்வரிகள் நமக்குப் பணி செய்பவர்கள் மூலமாக அரசுக்குச் செல்கின்றது.

வருமான வரி

அரசின் மிக முக்கியமான வருமானத்தின் ஆதாரம் வருமான வரியாகும். இதனை ஆண்டு வருமானம் குறிப்பிட்ட அளவிற்கு மேல் உள்ளவர்களிடமிருந்து வசூலிக்கப்படுகின்றது. நம் நாட்டின் சிறந்த குடிமகனாக இருக்க வேண்டுமெனில், நம் கடமையை உணர்ந்து வரியினை குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் செலுத்த வேண்டும்.

விற்பனை வரி / மதிப்புக்கூட்டு வரி

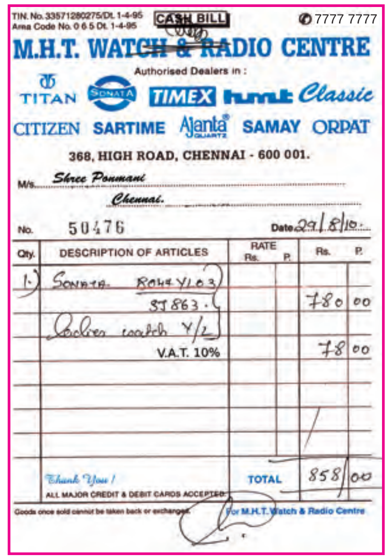
விற்பனை வரி

ஒரு கடைக்காரர் ஒரு பொருளை விற்கும்போது விதிக்கப்படும் வரியே விற்பனை வரியாகும். பொருளை வாங்கும் பொழுது பொருள்களின் விலையுடன் இவ்வரியைச் சேர்த்துச் செலுத்துவர்.

> விற்பனை வரி ஒரு பொருளின் விற்பனை மேல் அரசால் விதிக்கப்படுகிறது.

மதிப்புக் கூட்டு வரி (VAT)

இது மாநில அரசின் முக்கியமான வரியாகும். அண்மைக் காலத்தில் நாம் கடைகளில் வாங்கும் பொருள்களின் விலையுடன் வரியையும் சேர்த்து, மதிப்புக் கூட்டு வரி என்ற வரியை வசூலிக்கின்றனர்.


TIN. No. 33571280275/Dt. 1-4-95 CASH BILL 7777 7777
Area Code No. 0 6 5 Dt. 1-4-95
M.H.T. WATCH & RADIO CENTRE
Authorised Dealers in :
TITAN SONATA TIMEX HMT Classic
CITIZEN SARTIME Ajanta SAMAY ORPAT
368, HIGH ROAD, CHENNAI - 600 001.
M/s. Shree Ponmani Chennai.
No. 50476 Date 29/8/10

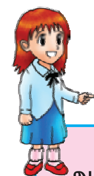
Qty.	DESCRIPTION OF ARTICLES	RATE Rs.	RATE P.	Rs.	P.
1	Sonata Ladies watch			780	00
	V.A.T. 10%			78	00
	TOTAL			858	00

Thank You!
ALL MAJOR CREDIT & DEBIT CARDS ACCEPTED
Goods once sold cannot be taken back or exchanged
For M.H.T. Watch & Radio Centre

செய்து பார்

2011-ஆம் ஆண்டிற்கான பின்வரும் பொருள்களின் மீதான விற்பனைவரியைக் காண்க.

1. மின் கருவிகள் .... %
2. பெட்ரோல் .... %
3. டீசல் .... %
4. வீட்டு உபயோகப் பொருள்கள் .... %
5. இரசாயனப் பொருள்கள் .... %



நீவிர் அறிவீரா?

அரிசி, சர்க்கரை, பால், உப்பு, பேனா, பென்சில்கள், புத்தகங்கள் ஆகியவற்றுக்கு அரசு விற்பனை வரியிலிருந்து விலக்கு அளிக்கப்பட்டுள்ளது.

விற்பனை வரியைக் கணக்கிடுதல்

$$\text{விற்பனை வரித் தொகை} = \frac{\text{விற்பனை வரி விகிதம்}}{100} \times \text{பொருளின் விலை}$$

$$\text{விற்பனை வரி விகிதம்} = \frac{\text{விற்பனை வரித் தொகை}}{\text{பொருளின் விலை}} \times 100$$

$$\text{செலுத்த வேண்டிய தொகை} = \text{பொருளின் விலை} + \text{விற்பனை வரித் தொகை}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.18

வினோத் ₹ 12,000க்கு இசைக்கருவிகளை வாங்கினார். விற்பனை வரி விகிதம் 8% எனில், அவர் செலுத்த வேண்டிய விற்பனை வரி, மொத்த தொகை ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

இசைக்கருவிகளின் மதிப்பு = ₹ 12,000

விற்பனை வரி விகிதம் = 8%

விற்பனை வரித்தொகை $= \frac{8}{100} \times 12000$

= ₹ 960

வினோத் செலுத்த வேண்டிய மொத்தத் தொகை = 12,000 + 960

= ₹ 12,960

எடுத்துக்காட்டு 1.19

விற்பனை வரியுடன் ஒரு குளிர்சாதனக் கருவியின் மொத்த விலை ₹ 14,500. குளிர்சாதனக் கருவியின் விலை ₹ 13,050 எனில் விற்பனை வரி விகிதத்தைக் காணவும்.

தீர்வு

விற்பனை வரி = பட்டியலில் விலை – பொருளின் விலை

= 14,355 – 13,050 = ₹ 1,305

விற்பனை வரி விகிதம் = $\frac{\text{விற்பனை வரித்தொகை}}{\text{பொருளின் விலை}} \times 100\%$

$= \frac{1305}{13050} \times 100 = 10\%$

எடுத்துக்காட்டு 1.20

பிரியா ₹ 2730க்கு ஒரு சூட்கேஸ் வாங்கினார். இதன் மீது மதிப்பு கூட்டு வரி 5% ஆகும். மதிப்பு கூட்டு வரியைச் சேர்க்கும் முன்னர் அப்பெட்டியின் விலை என்ன? மதிப்பு கூட்டு வரி எவ்வளவு எனவும் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : மதிப்புக் கூட்டு வரி 5%

மதிப்புக் கூட்டு வரி இல்லாத போது பொருளின் விலை ₹ 100 எனில், மதிப்புக் கூட்டு வரியுடன் அதன் விலை ₹ 105 என்றாகின்றது.

மதிப்புக் கூட்டு வரியுடன் ஒரு பொருளின் விலை ₹ 105 எனில், அதன் அசல் விலை ₹ 100.

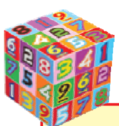
மதிப்புக் கூட்டு வரியுடன் ஒரு பொருளின் விலை ₹ 2730 எனில் அதன் அசல் விலை

$= \frac{100}{105} \times 2730 =$ ₹ 2,600

அப்பெட்டியின் அசல் விலை = ₹ 2,600

∴ மதிப்புக் கூட்டு வரி = 2,730 – 2,600

= ₹ 130.



முயற்சி செய்

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொருள்களின் விலைகளுடன் 5% விற்பனை வரியைச் சேர்த்து விற்கப்படுகின்றது எனில், அப்பொருள்களின் விற்பனை விலையைக் காண்க:
   (i) ஒரு தலையணையின் விலை ₹ 60.
   (ii) இரு சோப்புக் கட்டிகள் ஒவ்வொன்றின் விலையும் ₹ 25.
2. கீழ்க்கண்ட பொருள்களின் விலையுடன் 8% மதிப்புக் கூட்டு வரியைச் சேர்த்த பின் அவற்றின் அடக்க விலைகளைக் காண்க.
   (i) ஒரு மின்சார நீர் சூடேற்றி ₹ 14,500க்கு வாங்கப்பட்டது.
   (ii) சிறு தட்டுகளுடன் கூடிய கோப்பைகள் போன்றவை ₹ 200க்கு வாங்கப் பட்டன.

பயிற்சி 1.3

1. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

(i) தள்ளுபடி என்பது .... யின் மீது கணக்கிடப்படுவதாகும்.

(A) குறித்த விலை (B) அடக்க விலை

(C) விற்பனை விலை (D) வட்டி

(ii) ஒரு பொருளின் குறித்த விலை ₹ 140. விற்பனை விலை ₹ 105 எனில் தள்ளுபடி ....

(A) ₹ 245 (B) ₹ 25 (C) ₹ 30 (D) ₹ 35

(iii) .... = குறித்த விலை – தள்ளுபடி.

(A) அடக்க விலை (B) விற்பனை விலை

(C) பட்டியல் விலை (D) சந்தை விலை

(iv) ஒரு பொருளின் மதிப்புடன் சேர்க்கும் வரி ....

(A) விற்பனை வரி (B) மதிப்புக்கூட்டு வரி (C) கலால் வரி (D) பணி வரி

(v) ஒரு பொருளின் விற்ற விலை ₹ 240, தள்ளுபடி ₹ 28 எனில், குறித்த விலை ....

(A) ₹ 212 (B) ₹ 268 (C) ₹ 228 (D) ₹ 258

2. ஒரு புத்தகத்தின் மீது அதன் விலை ₹ 450 குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. ஒரு புத்தகக் கண்காட்சியில் கடைக்காரர் அப்புத்தகத்தின் மீது 20% தள்ளுபடி கொடுக்கின்றார். அப்புத்தகத்தின் விற்பனை விலை என்ன?

3. ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டி 10%, 20% ஆகிய தொடர் தள்ளுபடிகள் கொடுத்த பின் ₹ 5,760 க்கு விற்கப்படுகின்றது எனில் இதன் குறித்த விலை என்ன?

4. சேகர் ஒரு கணினியை ₹ 38,000 க்கும் அதற்குரிய அச்சு இயந்திரத்தை ₹ 8000க்கும் வாங்கினார். இப்பொருட்களுக்குரிய விற்பனை வரி 7% எனில், அவர் இவ்விரு பொருட்களுக்கும் கொடுக்க வேண்டிய தொகை எவ்வளவு?

5. மதிப்புக் கூட்டு வரியுடன் ஒரு சமையல் சாதனத்தின் விலை ₹ 19,610. அதன் மதிப்புக் கூட்டு வரி 6% எனில், அதன் அடக்க விலை எவ்வளவு?

6. ரிச்சர்டு ஒரு முழு ஆடைத்தொகுதியை வாங்கும்போது 10% தள்ளுபடி கிடைத்தது. அதன் குறித்த விலை ₹ 5000. அவர் இப்பொருளின் வாங்கிய விலையில் 10% விற்பனை வரி செலுத்தினால், அவர் அதை என்ன விலைக்கு வாங்கினார்?

7. ஒரு குளிர்சாதனப் பெட்டியின் மீது 9% விற்பனை வரி வீதம் விற்பனை வரி ₹ 1170 எனில் அதன் அடக்க விலை என்ன?

8. ஒரு வியாபாரி ஒரு பொருளை வாங்கி அதன் விலையில் 40% உயர்த்திக் குறித்தார். அதை 5% தள்ளுபடி செய்து விற்றார். அவருக்குக் கிடைத்த இலாப அல்லது நட்ட சதவீதம் என்ன?

9. குறித்த விலை ₹ 11,500 உள்ள ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் மீது 10% தள்ளுபடி செய்து விற்கப்படுகிறது. விழாக்காலம் ஆனதால் கடைக்காரர் மேலும் 5% தள்ளுபடி கொடுத்து விற்கின்றார். அதன் விற்ற விலையைக் காண்க.

10. ₹ 3500 என்ற விலை குறிப்பிடப்பட்ட ஒரு குளிரூட்டியை ₹ 2800 க்கு வாங்கினார். கொடுக்கப்பட்ட தள்ளுபடி சதவீதம் காணவும்.

11. ஒவ்வொன்றும் ₹ 1200 விலையுள்ள 15 சட்டைகளைத் தீபா வாங்கினார். அவற்றை 5% லாபத்திற்கு விற்றார். வாடிக்கையாளர் 4% விற்பனை வரி செலுத்த வேண்டுமெனில் இவ் வாடிக்கையாளருக்கு ஒரு சட்டையின் விலை என்ன ஆகின்றது?

12. தள்ளுபடி, தள்ளுபடி வீதம், விற்பனை விலை மற்றும் குறித்த விலை ஆகியவற்றை உரிய இடங்களில் பூர்த்தி செய்க.

வ. எண்.	பொருள்கள்	குறித்த விலை	தள்ளுபடி வீதம்	தள்ளுபடி	விற்பனை விலை
(i)	புடவை	₹ 2,300	20%	.....	.....
(ii)	பேனா செட்	₹ 140	.....	.....	₹ 105
(iii)	சாப்பாட்டு மேஜை	.....	20%	.....	₹ 16,000
(iv)	துவைக்கும் இயந்திரம்	₹ 14,500	.....	.....	₹ 13,775
(v)	சமைக்க உதவும் செட்	₹ 3,224	12½%	.....	.....

முயற்சி செய்

எது சிறந்த சலுகை? 20%, 5% என்ற அடுத்தடுத்த தள்ளுபடியா ஒரே நேரத்தில் 25% தள்ளுபடியா? தகுந்த காரணத்தைக் கூறவும்.

1.4 கூட்டு வட்டி

நாம் ஏழாம் வகுப்பில் தனி வட்டி கணக்கிடுவது பற்றி கற்றுள்ளோம். தனி வட்டி மேலும் கூடுதல் காண உதவும் சூத்திரங்களையும் கற்றுள்ளோம். இந்த அத்தியாயத்தில் கூட்டு வட்டி பற்றிய கருத்தையும், கூட்டு வட்டியை எவ்வாறு கணக்கிடுதல், கூடுதல் எவ்வாறு காணுதல் என்பன பற்றியும் (ஒரு குறிப்பிட்ட காலக் கெடுவிற்குள்) அறிந்து கொள்வோம்.

ஒரு வங்கியில் வினய் ₹ 50,000 ஆண்டு வட்டி வீதம் 4%இல் இரண்டு ஆண்டுகளுக்குக் கடனாகப் பெறுகிறார்.

முதல் ஆண்டு வினய் செலுத்த வேண்டிய வட்டி,

$$\text{தனிவட்டி} = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$= \frac{50000 \times 1 \times 4}{100} = ₹\ 2,000$$

அவர் முதலாம் ஆண்டு வட்டி ₹ 2000த்தைக் கட்டத் தவறியதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது இந்த வட்டியான ₹ 2000த்தைப் பழைய அசலாகிய ₹ 50,000 உடன் சேர்த்து புதிய அசலாக ₹ 52,000 என எடுத்துக் கொள்வர். இந்த அசலுக்கு இரண்டாம் ஆண்டு வட்டி கணக்கிடுவர்.

நீ அறிவாயா?

அசலுக்கு மட்டும் வட்டி காணுதலை தனி வட்டி என்கிறோம். ஆனால் ஒவ்வொரு முறை பெற்ற வட்டியையும் அசலுடன் சேர்த்து வட்டி காணுதலை கூட்டு வட்டி என்கிறோம்.

இந்த இரண்டாம் ஆண்டிற்கான வட்டி,

$$\text{தனி வட்டி} = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$= \frac{52000 \times 1 \times 4}{100} = ₹\ 2,080$$

எனவே வினய் இரண்டாம் ஆண்டு அதிக வட்டியைக் கட்ட வேண்டி வரும். இவ்வாறு வட்டி காணும் முறைக்குக் கூட்டு வட்டி காணுதல் என்று பெயர்.

பொதுவாக வங்கிகள், காப்பீட்டுக் குழுமங்கள், அஞ்சல் அலுவலகங்கள் முதலியவற்றில் பணத்தை முதலீடு செய்ய அல்லது கடன் வாங்க நேரிடும். இந்தக் குழுமங்களில் வட்டியைக் கணக்கிடும்போது கூட்டு வட்டிக் கணக்கிடும் முறையைப் பயன்படுத்துகிறார்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 1.21

இராம்லால் என்பவர் ₹ 8000ஐ, 15% கூட்டு வட்டி தரும் ஒரு நிதி நிறுவனத்தில் முதலீடு செய்தார் எனில், மூன்று ஆண்டுகளில் அவருக்கு என்ன கூடுதல் தொகை கிடைக்கும்? மேலும் அவருக்குக் கிடைக்கும் வட்டி தொகை என்ன?

தீர்வு

படி 1 : முதலாம் ஆண்டு அசல் = ₹ 8,000

$$\text{முதலாம் ஆண்டு வட்டி} = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$= \frac{8000 \times 1 \times 15}{100} = ₹\ 1,200$$

முதலாண்டு இறுதியில் கூடுதல் = $P + I = 8,000 + 1,200 = ₹\ 9,200$

படி 2 : முதலாம் ஆண்டு இறுதியில் கூடுதல் என்பது இரண்டாமாண்டு துவக்கத்தில் அசல் ஆகின்றது.

இரண்டாம் ஆண்டு அசல் = ₹ 9,200

இரண்டாம் ஆண்டு வட்டி $= \frac{P \times n \times r}{100}$

$= \frac{9200 \times 1 \times 15}{100} = ₹\ 1,380$

இரண்டாம் ஆண்டு இறுதியில் கூடுதல் $=$ P + I = 9,200 + 1,380 = ₹ 10,580

படி 3: இரண்டாம் ஆண்டு இறுதியில் கூடுதல் ஆனது மூன்றாம் ஆண்டு துவக்கத்தில் முதலீடாகின்றது.

மூன்றாம் ஆண்டு அசல் = ₹ 10,580

மூன்றாம் ஆண்டு வட்டி $= \frac{P \times n \times r}{100}$

$= \frac{10580 \times 1 \times 15}{100} = ₹\ 1,587$

மூன்றாம் ஆண்டு முடிவில் கூடுதல் = P + I

= 10,580 + 1,587 = ₹ 12,167

மூன்று ஆண்டுகள் முடிவில், ராம்லால் பெறும் கூட்டு வட்டி

= 12,167 - 8,000 = ₹ 4,167.

கூட்டு வட்டி காணும் சூத்திரத்தைப் பெறுதல்

கால அளவு அதிகரிக்கும் போது, மேற்கண்ட முறை நீண்டதாகவும், கடினமாகவும் ஆகின்றது. எனவே, கூட்டு வட்டி முறைப்படி கூடுதலையும், வட்டியையும் காண ஒரு சூத்திரத்தைப் பெறுவோம்.

அசல் ₹ P, ஆண்டு வட்டி வீதம் r %, காலம் 'n' ஆண்டுகள் என்றவாறு கூட்டு வட்டி காண உதவும் சூத்திரம் அமைப்போம்.

படி 1: முதலாண்டு முதல் = ₹ P

முதலாண்டு வட்டி $= \frac{P \times n \times r}{100}$

$= \frac{P \times 1 \times r}{100} = \frac{Pr}{100}$

முதலாண்டு இறுதியில் கூடுதல் = P + I

$= P + \frac{Pr}{100}$

$= \mathbf{P\left(1 + \frac{r}{100}\right)}$

படி 2: இரண்டாம் ஆண்டு துவக்க அசல் $= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)$

இரண்டாம் ஆண்டு வட்டி $= \frac{P\left(1 + \frac{r}{100}\right) \times 1 \times r}{100}$

(தனி வட்டி காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தவும்)

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\frac{r}{100}$$

இரண்டாம் ஆண்டு இறுதியில் கூடுதல் $= P + I$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)+P\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\frac{r}{100}$$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$= \mathbf{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2}$$

படி 3 : மூன்றாம் ஆண்டுத் தொடக்கத்தில் அசல் $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

மூன்றாம் ஆண்டு வட்டி $= \dfrac{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times 1\times r}{100}$

(தனி வட்டி காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தவும்)

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times\frac{r}{100}$$

மூன்றாம் ஆண்டு இறுதியில் கூடுதல் $= P + I$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2+P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times\frac{r}{100}$$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$= \mathbf{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^3}$$

இவ்வாறு 'n' ஆவது ஆண்டு இறுதியில், கூட்டுத் தொகை

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

∴ கூட்டு வட்டி $= A - P$

'n' ஆவது ஆண்டுகள் முடிவில் கூட்டு வட்டி $= C.\,I. = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - P$

கூட்டு வட்டி கணக்கிடுதல்

வகை 1: ஆண்டுக்கு ஒரு முறை கணக்கிடல்

ஒவ்வொரு ஆண்டு இறுதியிலும் வட்டியை அசலுடன் கூட்டுவதையே, ஆண்டு முறையில் கணக்கிடல் என்றாகும்.

இங்கு கூட்டுத் தொகை $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$; கூட்டு வட்டி $= A - P$

வகை 2: அரையாண்டுக்கு ஒரு முறை கணக்கிடல்

இம்முறையில் கணக்கிடும்பொழுது, ஓர் ஆண்டில் இரண்டு ஆறு மாதங்கள் உள்ளன. ஆதலால் இரண்டு (அசல்) மாற்றுக் காலங்கள் உள்ளன. அரையாண்டு வட்டி வீதம் $\left(\frac{r}{2}\right)$.

இப்பொழுது, கூட்டுத் தொகை $A = P\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$; கூட்டு வட்டி $= A - P$

வகை 3: கால் ஆண்டுக்கு ஒரு முறை கணக்கிடல்

இம்முறையில் கணக்கிடும்போது ஓர் ஆண்டில், நான்கு கால் ஆண்டுகள் உள்ளன. ஆதலால் 4 (அசல்) மாற்று காலங்கள் உள்ளன. எனவே, காலாண்டு வட்டி வீதம் $\left(\frac{r}{4}\right)$ ஆகும்.

இப்பொழுது, கூட்டுத் தொகை $A = P\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{4n}$; கூட்டு வட்டி = A – P

வகை 4: காலம் ஆண்டுகளின் பின்னமாக அமைதல்

கூட்டு வட்டி ஆண்டு முறையில் கணக்கிடலில் ஆண்டுகளுடன் ஆண்டின் பின்னமும் அமையலாம்.

உதாரணமாகக் கூட்டு வட்டி வீதம் ஆண்டொன்றுக்கு '$r\%$', அசல் ₹ P, காலம் $5\frac{1}{4}$ ஆண்டுகள் என்க. கூட்டுத் தொகை,

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^5\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]$$; கூட்டு வட்டி = A – P

↓ 5 ஆண்டுகள்   ↓ ¼ ஆண்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1.22

₹ 15,625 க்கு ஆண்டு வட்டி 8% வீதம் எனில், 3 ஆண்டுகளுக்குக் கூட்டு வட்டி காணவும்.

தீர்வு

3 ஆண்டுகள் முடிவில் கூட்டுத் தொகை $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$

$= 15625\left(1+\frac{8}{100}\right)^3$

$= 15625\left(1+\frac{2}{25}\right)^3$

$= 15625\left(\frac{27}{25}\right)^3$

$= 15625\times\frac{27}{25}\times\frac{27}{25}\times\frac{27}{25}$

= ₹ 19,683

எனவே, கூட்டு வட்டி = A – P = 19,683 – 15,625

= ₹ 4,058

கூட்டு வட்டி முறையில் ஆண்டுக்கு ஒரு முறையில் அல்லது அரை ஆண்டுக்கு ஒரு முறையில் கணக்கிடுதலை ஒப்பிடுவோம்.

₹ 100ஐ இவ்விரு முறைகளிலும் முதலீடு செய்தால் கூட்டுத் தொகை, கூட்டு வட்டி என்ன கிடைக்கும் என்பதைக் காண்போம்.

எண்	ஆண்டுக்கு ஒரு முறை	அரையாண்டுக்கு ஒரு முறை
1	P = ₹ 100, 10% கூட்டு வட்டி ஆண்டுக்கு ஒரு முறை	P = ₹ 100, 10% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டி அரையாண்டுக்கு ஒரு முறை
2	காலம் 1 ஆண்டு	காலம் 6 மாதங்கள் அதாவது ½ ஆண்டு.
3	$I = \frac{100\times10\times1}{100}$ = ₹ 10	$I = \frac{100\times10\times 1/2}{100}$ = ₹ 5
4	A = 100 + 10 = ₹ 110	½ ஆண்டு முடிவில் கூடுதல் = 100 + 5 = ₹ 105 அடுத்த ½ ஆண்டுக்கு முதல் ₹ 105
		$I = \frac{105\times10\times 1/2}{100}$ = ₹ 5.25 ∴ A = 105 + 5.25 = ₹ 110.25
5	A = ₹ 110	A = ₹ 110.25

இவ்வாறாக அரையாண்டுக்கு ஒருமுறை வட்டி அசலுடன் சேருவதாக இருப்பின், இரு தடவை வட்டியையும், வட்டி வீதம் ஆண்டு வீதத்தில் பாதியாகவும் கொள்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.23

அரை ஆண்டுக்கு ஒரு முறை வட்டி அசலுடன் சேர்க்கப்பட்டால் ₹ 1000க்கு ஆண்டு வட்டி வீதம் 10% வீதப்படி, 18 மாதங்களுக்குக் கூட்டு வட்டி காணவும்.

தீர்வு

P = ₹ 1000, r = 10% ஆண்டுக்கு

n = 18 மாதங்கள் = $\frac{18}{12}$ வருடங்கள் = $\frac{3}{2}$ வருடங்கள் = $1\frac{1}{2}$ வருடங்கள்

∴ 18 மாதங்கள் இறுதியில் கூட்டுத்தொகை

$$A = P\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$$

$$= 1000\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{10}{100}\right)\right]^{2\times\frac{3}{2}}$$

$$= 1000\left(1+\frac{10}{200}\right)^{3}$$

$$= 1000\left(\frac{21}{20}\right)^{3}$$

$$= 1000\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}$$

= ₹ 1157.625

= ₹ 1157.63

கூட்டு வட்டி = A – P

= 1157.63 – 1000

= ₹ 157.63

முயற்சி செய்

8% ஆண்டு வட்டி வீதத்தில், ஒரு தொகையை, 3 மாதங்களுக்கு ஒரு முறை, வட்டியை அசலுடன் சேர்க்கும் முறையில் எத்தனை முறை வட்டி கணக்கிடப்படும்?

எடுத்துக்காட்டு 1.24

₹ 20,000க்கு 15% ஆண்டு வட்டி வீதத்திற்கு $2\frac{1}{3}$ ஆண்டுகளுக்குக் கூட்டு வட்டியைக் காண்க.

தீர்வு

P = ₹ 20,000, r = ஆண்டொன்றுக்கு 15%, $n = 2\frac{1}{3}$ ஆண்டுகள்

$2\frac{1}{3}$ ஆண்டுகள் இறுதியில் கூட்டுத் தொகை

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{r}{100}\right)\right]$$

$$= 20000\left(1+\frac{15}{100}\right)^2\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{15}{100}\right)\right]$$

$$= 20000\left(1+\frac{3}{20}\right)^2\left(1+\frac{1}{20}\right)$$

$$= 20000\left(\frac{23}{20}\right)^2\left(\frac{21}{20}\right)$$

$$= 20000\times\frac{23}{20}\times\frac{23}{20}\times\frac{21}{20}$$

= ₹ 27, 772.50

C.I. = A – P

= 27,772.50 – 20,000

= ₹ 7,772.50

கூட்டு வட்டி முறையில் எதிர்மாறிக் கணக்குகள்

$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$, என்ற சூத்திரத்தை ஏற்கனவே நாம் கற்றுள்ளோம்.

இங்கு A, P, r, n என்ற 4 மாறிகள் உள்ளன. இவற்றுள் ஏதேனும் 3 மாறிகள் தெரியுமானால் நான்காவது மாறியை நாம் கணக்கிட இயலும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.25

₹ 640 ஆனது இரண்டு ஆண்டுகளில் கூட்டுத்தொகை ₹ 774.40 ஆகும். கூட்டு வட்டி வீதம் காண்க. (வட்டி ஆண்டிற்கு ஒரு முறை அசலுடன் சேருகின்றது)

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: P = ₹ 640, A = ₹ 774.40, காலம் = 2 ஆண்டுகள், r = ?

$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ என நாம் அறிவோம்.

$$774.40 = 640\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{774.40}{640} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{77440}{64000} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{121}{100} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\left(\frac{11}{10}\right)^2 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{11}{10} = 1+\frac{r}{100}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{11}{10} - 1$$

$$\frac{r}{100} = \frac{11-10}{10}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{1}{10}$$

$$r = \frac{100}{10} = 10\%$$

∴ கூட்டு வட்டி வீதம் ஆண்டொன்றுக்கு 10%.

எடுத்துக்காட்டு 1.26

₹ 1600 ஆனது 5% ஆண்டு கூட்டு வட்டி வீதம் கொண்டு எத்தனை ஆண்டுகளில் ₹ 1852.50 ஆகும்?

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: P = ₹ 1600, A = ₹ 1852.20, r = 5% ஆண்டொன்றுக்கு, n = ?

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$1852.20 = 1600\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$$

$$\frac{1852.20}{1600} = \left(\frac{105}{100}\right)^n$$

$$\frac{185220}{160000} = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$$\frac{9261}{8000} = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$$\left(\frac{21}{20}\right)^3 = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$\therefore n$ = 3 ஆண்டுகள்

முயற்சி செய்

காலவரைகளையும் வட்டி வீதங்களையும் காண்க.

1. அரையாண்டுக்கு ஒருமுறை வட்டியுடன் அசலுடன் சேருகின்ற முறையில், இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு, 8% ஆண்டு வட்டி வீதம்.
2. அரையாண்டுக்கு ஒரு முறை வட்டியுடன் அசலுடன் சேருகின்ற முறையில், 1½ ஆண்டுகளுக்கு, 4% ஆண்டு வட்டி வீதம்.

1.5 கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசம்

அசல் P க்கு r % வட்டிவீதம் எனில் இரண்டு ஆண்டுகளுக்குக் கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசம் $= P\left(\frac{r}{100}\right)^2$

எடுத்துக்காட்டு 1.27

₹ 8000க்கு 10% வட்டி வீதம் எனில் இரண்டு ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசத்தைக் காண்க.

தீர்வு

P = ₹ 8000, $n = 2$ ஆண்டுகள், $r = 10\%$ ஆண்டொன்றுக்கு

இரண்டு ஆண்டுகளுக்குக் கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசம்

$$= P\left(\frac{r}{100}\right)^2$$

$$= 8000\left(\frac{10}{100}\right)^2 = 8000\left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$= 8000 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = ₹\ 80$$

பயிற்சி 1.4

1. பின்வருவனவற்றிக்குக் கூடுதலையும், கூட்டு வட்டிகளையும் காணவும் :

எண்	முதல் (₹ இல்)	ஆண்டு வட்டி வீதம்	காலம் (ஆண்டுகளில்)
(i)	1000	5%	3
(ii)	4000	10%	2
(iii)	18,000	10%	$2\frac{1}{2}$

2. சங்கீதா ₹ 8000 ஐ அலெக்ஸிடம் 12½ % கூட்டு வட்டி வீதத்தில் 2 ஆண்டுகளுக்குக் கடன் வாங்கினார். சங்கீதா அலெக்ஸிற்குத் தர வேண்டிய வட்டி எவ்வளவு?

3. மரியா ₹ 80,000 ஐ ஒரு வியாபாரத்தில் முதலீடு செய்தார். இதற்கு 5% ஆண்டுக்கு ஒருமுறை வட்டி சேர்க்கும் முறையில் கூட்டு வட்டி கிடைக்கும் எனில் (i) இரண்டாம் ஆண்டு முடிவில் அவர் பெயரில் எவ்வளவு இருக்கும் (ii) மூன்றாம் ஆண்டு வட்டி என்ன?

4. அரையாண்டிற்கு ஒரு முறை வட்டி கூட்டும் முறையில் ₹ 24,000 க்கு ஆண்டொன்றுக்கு 10% வட்டி வீதம் 1½ ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் கூட்டு வட்டி எவ்வளவு?

5. அரையாண்டிற்கு ஒரு முறை வட்டி கூட்டும் முறையில் திராவிட் ₹ 8192 ஐ, 18 மாதங்களுக்கு, 12½% ஆண்டு வட்டி வீதம் கொடுப்பதில் முதலீடு செய்தார். அவருக்குக் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகை எவ்வளவு?

6. ₹ 15,625 ஐ 9 மாதங்களுக்கு 16% ஆண்டு வட்டி வீதத்தில் முதலீடு செய்தால், வட்டி காலாண்டுக்கு ஒருமுறை சேர்க்கப்பட்டால், கூட்டு வட்டியைக் காண்க.

7. 4% ஆண்டு வட்டி வீதப்படி 2 ஆண்டுகளில் ₹ 1632 கூட்டு வட்டி தரும் அசலைக் காணவும்.

8. விக்கி ஒரு ஸ்கூட்டரை வாங்க ஒரு வங்கியில் ₹ 26,400 ஐக் கடனாகப் பெற்றார். ஆண்டு வட்டி 15% வீதம், ஆண்டொன்றுக்கு வட்டியைச் சேர்த்தால் 2 ஆண்டுகள் 4 மாதங்கள் ஆன பின் தன் கடனை அடைக்க அவர் எவ்வளவு செலுத்த வேண்டும்?

9. அரீப் என்பவர் ஒரு வங்கியில் ₹ 80,000 கடன் வாங்கினார். ஆண்டு ஒன்றுக்கு 10% வட்டி வீதம் 1 ½ ஆண்டுகளில் (i) ஆண்டொன்றுக்கு வட்டி சேர்க்கும் முறையில் (ii) அரையாண்டிற்கு ஒருமுறை வட்டி சேர்க்கும் முறையில் கணக்கிடப்பட்டால் தொகைகளில் வித்தியாசம் காணவும்.

10. ₹ 2400க்கு 5% ஆண்டு வட்டி வீதம் 2 ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசம் காண்க.

11. ₹ 6400க்கு 6¼ % ஆண்டு வட்டி வீதம் 2 ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசம் காண்க.

12. ஒரு கடன் தொகை மீது 2 ஆண்டுகளில் 5% ஆண்டு வட்டி வீதம் 2 ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசம் ரூபாய் 5 எனில் அத்தொகையைக் காணவும்.

13. சுஜா ₹ 12,500ஐ ஆண்டொன்றுக்குத் தனி வட்டி வீதம் 12% வீதம் 3 ஆண்டுகளில் செலுத்த கடன் வாங்கினார். ராதிகா அதே தொகையை அதே காலத்திற்கு ஆண்டொன்றுக்கு 10% கூட்டு வட்டி வீதம் கடன் வாங்கினார். அதிக வட்டி செலுத்துபவர் யார்? எவ்வளவு?

14. அரை ஆண்டுக்கு ஒருமுறை வட்டியைச் சேர்க்கும் முறையில் ஒரு தொகையை ஆண்டு வட்டி 4% வீதம் தருவதில் 1½ ஆண்டுகளுக்கு முதலீடு செய்தார். முடிவில் ₹ 1,32,651 பெற்றார் எனில் அவர் முதலீடு எவ்வளவு?

15. காயத்திரி ₹ 12,000ஐ 5% ஆண்டு கூட்டு வட்டி தரும் ஒரு வங்கியில் 'n' ஆண்டுகளுக்கு முதலீடு செய்தார். அவர் முடிவில் ₹ 13,230 பெற்றார். 'n' இன் மதிப்பு என்ன?

16. அரையாண்டிற்கு ஒரு முறை வட்டி சேர்க்கும் முறையில் 1 ½ ஆண்டுகளில் ₹ 2000 ஆனது ₹ 2315.25 ஆகிறது எனில் ஆண்டு கூட்டு வட்டி வீதம் காண்க.

1.5.1 மதிப்பு கூடுதலும் குறைதலும்

அ) மதிப்பு கூடுதல்

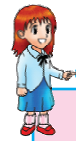
மக்கள் தொகை, பாக்டீரியாவின் வளர்ச்சி, சொத்தின் மதிப்பு, விலை கூடுதலாக உள்ள சில பொருள்கள் இவை அனைத்திற்கும் ஆண்டுதோறும் மதிப்புகள் கூடுகின்றன.

இதைக் காண $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

ஆ) மதிப்பு குறைதல்

சில இயந்திரங்களின் மதிப்பு, வண்டிகளின் மதிப்பு, சில பொருள்களின் விலைகள், கட்டடங்களின் மதிப்பு ஆகியவை ஆண்டுதோறும் குறைகின்றன.

இதைக்காண $A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.



நீவிர் அறிவீரா?

உலக மக்கள் தொகை

ஆண்டு	மக்கள் தொகை
1700	600,000,000
1800	900,000,000
1900	1,500,000,000
2000	6,000,000,000

கடந்த மூன்று நூற்றாண்டுகளில் மக்கள் தொகை பத்து மடங்காக பெருகியுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 1.28

ஒரு கிராமத்தின் மக்கள் தொகை ஆண்டொன்றுக்கு 7% வீதம் அதிகரிக்கின்றது. இப்பொழுது மக்கள் தொகை 90,000 எனில் 2 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அக்கிராமத்தின் மக்கள் தொகை என்னவாக இருக்கும்?

தீர்வு

தற்போதைய மக்கள் தொகை P = 90,000, அதிகரிப்பு விகிதம் $r = 7\%$,

$n = 2$ ஆண்டுகள்.

இரண்டு ஆண்டுகளில் மக்கள் தொகை $= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

$= 90000\left(1 + \frac{7}{100}\right)^2 = 90000\left(\frac{107}{100}\right)^2$

$= 90000 \times \frac{107}{100} \times \frac{107}{100}$

$= 103041$

இரண்டு ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அக்கிராமத்தின் மக்கள் தொகை = 1,03,041

எடுத்துக்காட்டு 1.29

ஒரு இயந்திரத்தின் மதிப்பு ஒவ்வொரு ஆண்டும் 5% குறைகிறது. ஒருவர் இதை வாங்குவதற்கு ₹ 30,000 கொடுத்தார். மூன்று ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு இதன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு

இயந்திரத்தின் தற்போதைய மதிப்பு P = ₹ 30,000, குறைவு வீதம் $r = 5\%$,

காலம் = 3 ஆண்டுகள்.

மூன்று ஆண்டுகளுக்குப் பின் இயந்திரத்தின் மதிப்பு $= P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$

$= 30000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3$

$= 30000\left(\frac{95}{100}\right)^3$

$= 30000 \times \frac{95}{100} \times \frac{95}{100} \times \frac{95}{100}$

= ₹ 25721.25

மூன்று ஆண்டுகளுக்குப் பின் அந்த இயந்திரத்தின் மதிப்பு ₹ 25,721.25

எடுத்துக்காட்டு 1.30

ஒரு கிராமத்தின் மக்கள் தொகை ஒரே சீராக ஒவ்வொரு ஆண்டும் 5% வீதத்தில் கூடிக் கொண்டு செல்கிறது. இப்பொழுது அதன் மக்கள் தொகை 1,04,832 எனில் இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு முன் என்னவாக இருந்திருக்கும்?

தீர்வு

இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு முன் மக்கள் தொகை P என்க.

$$\therefore P\left(1+\frac{5}{100}\right)^2 = 104832$$

$$P\left(\frac{105}{100}\right)^2 = 104832$$

$$P\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100} = 104832$$

$$P = \frac{104832\times100\times100}{105\times105}$$

$$= 95085.71$$

$= 95,086$ (முழு எண் திருத்தமாக)

∴ இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு முன் மக்கள் தொகை **95,086.**

பயிற்சி 1.5

1. ஒரு பள்ளியில் மாணவர் சேர்க்கை எண்ணிக்கை 2000. இச்சேர்க்கை ஒவ்வொரு ஆண்டும் 5% வீதத்தில் கூடுகின்றது, இரண்டு ஆண்டுகளுக்குப் பின் அப்பள்ளியில் எத்தனை மாணவர்கள் இருப்பார்கள்?

2. ஒரு மோட்டார் இயந்திரத்தின் விலை ₹ 3,50,000. இதன் மதிப்பு ஒவ்வொரு ஆண்டிலும் 10% வீதம் குறைகின்றது. மூன்று ஆண்டுகளுக்குப் பின் அதன் மதிப்பு எவ்வளவாக இருக்கும்?

3. ஒருவர் மோட்டார் சைக்கிளை ₹ 50,000க்கு வாங்கினார். இதன் மதிப்பு ஒவ்வொரு ஆண்டும் 8% வீதம் குறைகின்றது, ஓராண்டிற்குப் பின் இதன் மதிப்பு எவ்வளவாக இருக்கும்?

4. ஒரு ஆய்வகத்தில், ஓர் ஆராய்ச்சியில் ஒரு வகை பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை ஒரு மணிக்கு 2.5% வீதம் அதிகரிக்கின்றது. தொடக்கத்தில் 5,06,000 பாக்டீரியாக்கள் இருந்தால், 2 மணி நேரத்திற்கு பிறகு அதன் எண்ணிக்கை என்ன?

5. வேலையில்லாத் திண்டாட்டத்தினால் ஒரு கிராமத்திலுள்ள மக்கள் அண்மையிலுள்ள நகரங்களுக்கு இடம் பெயர்ந்தனர். இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு முன் அக்கிராமத்தின் மக்கள் தொகை 6,000. இடம் பெயர்ந்தோரின் எண்ணிக்கை ஆண்டொன்றுக்கு 5% எனில் தற்போதைய மக்கள் தொகை என்ன?

6. ஒரு எண்ணெய் இயந்திரத்தின் தற்போதைய மதிப்பு ₹ 14,580. இதன் மதிப்பு ஒவ்வொரு ஆண்டும் 10% ஆகக் குறைந்தால் மூன்று ஆண்டுகளுக்கு முன்னர் இதன் மதிப்பு எவ்வளவாக இருந்திருக்கும்?

7. வேலை வாய்ப்பு அதிகமுள்ளதால் ஒரு கிராமத்தில் உள்ள மக்கள் தொகை ஆண்டொன்றுக்கு 9% அதிகரித்தது. இப்போது அதன் மக்கள் தொகை 11,881 எனில் இரண்டாண்டுகளுக்கு முன்னர் அதன் மக்கள் தொகை என்னவாக இருந்திருக்கும்?

1.6 நிரந்தர வைப்புத் தொகை, தொடர் வைப்புத் தொகை

பொதுமக்களை வங்கிகள், அஞ்சல் அலுவலகங்கள், பல நிதி நிறுவனங்கள் ஆகியவை வேறுபட்ட வீதத்தில் பணத்தை முதலீடு செய்யக் கோருகின்றன. மக்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் வருமானம் பெற பணத்தை இந்நிறுவனங்களில் முதலீடு செய்கின்றனர்.

இந்நிறுவனங்கள் பணத்தைச் சேமிக்கப் பலவகைத் திட்டங்களை வைத்துள்ளனர். அவற்றுள் சில :

(i) நிரந்தர வைப்புத் திட்டம் (ii) தொடர் வைப்புத் திட்டம் ஆகியனவாகும்.

(i) நிரந்தர வைப்புத் திட்டம் (Fixed Deposit)

ஒரு தொகையை ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்கு மக்கள் இம்முறையில் முதலீடு செய்கின்றனர். இத்திட்டத்தை நிரந்தர வைப்புத் திட்டம் (நிலை வைப்புத் திட்டம்) என்பர் (F.D).

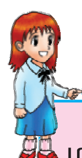
குறிப்பு : இக்கால அளவு குறுகியதாகவோ நீண்டதாகவோ இருக்கலாம். வைப்புத் தொகையின் காலத்திற்கேற்ப வட்டி வீதம் அதிகரிக்கும்.

(ii) தொடர் வைப்புத் திட்டம் (Recurring Deposit)

நிரந்தர வைப்புக்கு முற்றிலும் மாறானது தொடர் வைப்பாகும்.

இத்திட்டத்தில் ஒவ்வொரு மாதமும் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையை ஒருவர் தன் வருவாய்க்கேற்ப குறிப்பிட்ட ஆண்டுகளுக்கு தொடர்ச்சியாக இடலாம்.

வங்கிகள் அல்லது அஞ்சலகங்கள் அந்தக் கால முடிவில், பணம் செலுத்தியவருக்கு அவர் அதுவரை முதலீடு செய்த அசல் தொகையுடன் வட்டியையும் சேர்த்துக் கொடுக்கின்றன இத்திட்டத் திற்குத் தொடர் வைப்புத் திட்டம் (R.D.) என்று பெயர்.



நீவிர் அறிவீரா?

மாதத் தவணையை அம்மாதத்திற்குள் எந்த நாளில் வேண்டுமானாலும் செலுத்தலாம்

குறிப்பு : தொடர் வைப்பு முறையில் கணக்கிடப்படும் வட்டி, தனி வட்டி வழியில் கணக்கிடப்படுகின்றது.

தொடர் வைப்புத் திட்ட முறையில் வட்டி, கால முடிவில் கிடைக்கும் தொகை ஆகியவற்றைக் காண உதவும் சூத்திரத்தைக் காண்போம்:

வட்டி வீதம் r % க்கு மாதந்தோறும் செலுத்தும் அசல் தொகை ₹ P ஐ 'n' மாதங்களுக்குச் செலுத்துவதாகக் கொள்வோம்.

வட்டி = $\frac{PNr}{100}$, இங்கு $N = \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ ஆண்டுகள்.

'n' மாதங்கள் முடிவில் கிடைக்கும் மொத்த தொகை $A = Pn + \frac{PNr}{100}$

எடுத்துக்காட்டு 1.31

தருண் என்பவர் இரண்டு லட்ச ரூபாயை 5 ஆண்டுகளுக்கு ஒரு வங்கியில் நிரந்தர வைப்புத் திட்டத்தில் முதலீடு செய்கின்றார். அவ்வங்கி ஆண்டொன்றுக்கு 8% தனி வட்டி தருகின்றது எனில் 5 ஆண்டுகள் முடிவில் அவருக்குக் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகை எவ்வளவு?

தீர்வு

அசல் P = ₹ 2,00,000, n = 5 ஆண்டுகள், r = 8% (ஆண்டொன்றுக்கு)

வட்டி $= \frac{Pnr}{100}$

$= 200000 \times 5 \times \frac{8}{100}$ = ₹ 80, 000

∴ 5 ஆண்டுகள் முடிவில் அவர் பெறும் மொத்த தொகை

= 2,00,000 + 80,000 = ₹ 2,80,000.

எடுத்துக்காட்டு 1.32

வைதீஷ் என்பவர் ₹ 500ஐ ஒவ்வொரு மாதத் தொடக்கத்திலும் ஓர் அஞ்சலகத்தில் 5 ஆண்டுகளுக்குச் செலுத்துகின்றார். வட்டி வீதம் 7.5% எனில் 5 ஆண்டுகள் முடிவில் அவர் பெறும் தொகை எவ்வளவு?

தீர்வு

ஒவ்வொரு மாதமும் செலுத்தப்பெறும் தொகை, P = ₹ 500

மாதங்களின் எண்ணிக்கை, n = $5 \times 12 = 60$

வட்டி வீதம், r % = $7\frac{1}{2}\% = \frac{15}{2}\%$

மொத்தம் செலுத்திய தொகை = $Pn = 500 \times 60$ = ₹ 30,000

தொடர் வைப்புக்காலம், N = $\frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ ஆண்டுகள்

$= \frac{1}{24} \times 60 \times 61 = \frac{305}{2}$ ஆண்டுகள்

வட்டி, I = $\frac{PNr}{100}$

$= 500 \times \frac{305}{2} \times \frac{15}{2 \times 100}$

= ₹ 5,718.75

5 ஆண்டுகளின் முடிவில் அவர் பெறும் தொகை = $Pn + \frac{PNr}{100}$

= 30,000 + 5,718.75 = ₹ 35,718.75

எடுத்துக்காட்டு 1.33

விஷால் ஒவ்வொரு மாதத் துவக்கத்திலும் ₹ 200ஐ ஓர் அஞ்சலகத்தில் 5 ஆண்டுகளுக்குச் செலுத்தி வந்தார். முடிவில் அவர் ₹ 13,830 பெற்றார் எனில், வட்டி வீதம் என்ன?

தீர்வு

முதிர்வுத்தொகை A = ₹ 13,830, தொடர் வைப்புத் தொகை P = ₹ 200,

$n = 5 \times 12 = 60$ மாதங்கள்

காலம், N $= \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ ஆண்டுகள்

$= \frac{1}{12} \times 60 \times \frac{61}{2} = \frac{305}{2}$ ஆண்டுகள்

மொத்தம் செலுத்திய தொகை = Pn $= 200 \times 60 =$ ₹ 12,000

இறுதியில் கிடைக்கும் முதிர்வுத் தொகை $= Pn + \frac{PNr}{100}$

$13{,}830 = 12000 + 200 \times \frac{305}{2} \times \frac{r}{100}$

$13830 - 12000 = 305 \times r$

$1830 = 305 \times r$

$\therefore r = \frac{1830}{305} = 6\%$

$\therefore$ வட்டி வீதம் = 6%

1.6.1 வாடகைக் கொள்முதல் திட்டம் மற்றும் தவணை முறைத்திட்டம்

இன்றைய நுகர்வோருக்கு வங்கிகள் மற்றும் நிதி நிறுவனங்கள் வாடகைக் கொள்முதல் திட்டம் மற்றும் தவணை முறைத் திட்டம் போன்றவற்றை அறிமுகம் செய்துள்ளன.

வாடகைக் கொள்முதல் திட்டம் : இத்திட்டத்தின் கீழ், பொருள் வாங்குவோருக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குச் சொந்தமாகாது. அவர் அப்பொருளின் விலையை வட்டியுடன் கட்டினால் அப்பொருள் அவருக்குச் சொந்தமாகும்.

தவணை முறைத்திட்டம் : பொருளின் விலை, வட்டி மற்றும் இதரச் செலவுகள் ஆகியவற்றைச் சேர்த்து மொத்தத் தொகையாகின்றது. குறிப்பிட்ட காலக் கெடுவுக்குள் உள்ள மாதங்களின் எண்ணிக்கையால் இக்கடன் தொகையை வகுத்துப் பெறுவர். இவ்வாறு கிடைத்த சிறு தொகையைத் தவணை என்பர்.

சமப்படுத்தப்பெற்ற மாதத் தவணை முறைத்திட்டம் (ச.மா.த.) (E.M.I.)

இது தவணைமுறைத் திட்டத்திற்கு இணையானது. இத்தவணை முறைத் திட்டம் பகுதி குறைவுத் திட்டமாகும். நாம் வாங்கிய கடன், இதன் மீது வட்டி, மேலும் சில குறிப்பிட்ட

கட்டணங்களுடன் வரும் மொத்தத் தொகையைச் செலுத்த வேண்டிய காலத்தை மாதங்களாக்கி, அத்தொகையைச் சமமாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு மாதமும் ஒரு தொகையைச்செலுத்த வேண்டும். இத்தொகையைச் சமப்படுத்தப் பெற்ற மாதத் தவணைகள் (ச.மா.த) என்பர்.

$$\text{ச.மா.த.} = \frac{\text{அசல்} + \text{வட்டி}}{\text{மாதங்களின் எண்ணிக்கை}}$$

பல்வேறுபட்ட தவணை முறைத்திட்டங்கள்

1. 0% வட்டித் திட்டம்:

குழுமங்கள் 4 அல்லது 5 முன் தவணைகளுடன் சில நடைமுறைச் செலவுக்கான தொகையையும் முதலிலேயே எடுத்துக் கொள்கின்றன.

2. 100% கடன் திட்டம்:

குழுமங்கள் அசலுடன், வட்டி, நடைமுறைச் செலவுகள் ஆகியவற்றைக் கூட்டிக் கணக்கிடும்.

3. தள்ளுபடி விற்பனை:

குழுமங்கள் வியாபாரத்தைப் பெருக்கிக் கொள்ள தவணை முறையில் கழிவு கொடுக்கும்.

4. முன் பணம் செலுத்துதல்:

ஒரு பொருளின் விலையில் ஓர் பகுதியை அப்பொருள் வாங்குவதற்கு முன் செலுத்த வேண்டும். அதை முன் பணம் செலுத்திப் பெறுதல் என்று அழைக்கப்பெறும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.34

ஒரு துணி துவைக்கும் இயந்திரத்தின் அடக்க விலை ₹ 18,940 ஆகும். இதனை வாங்குவதற்கான தவணை முறைத் திட்டங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எண்	தவணை முறைத் திட்டங்கள்	விற்கும் விலை (₹)	முதலில் கொடுக்கப்படும் பணம்	வட்டி வீதம்	சேவைக் கடன்	காலம்
(i)	75% நிதிக் கடன் திட்டம்	18,940	25%	12%	1%	24 மாதங்கள்
(ii)	100% நிதிக் கடன் திட்டம்	18,940	இல்லை	16%	2%	24 மாதங்கள்
(iii)	0% நிதிக் கடன் திட்டம்	18,940	4 ச.மா.த. முன் பணம்	இல்லை	2%	24 மாதங்கள்

மேற்குறித்த திட்டங்களின் ச.மா.த மற்றும் மொத்தத் தொகையையும் காண்க.

தீர்வு

(i) 75% கடன் திட்டம்

P = ₹ 18,940, முதலில் கொடுக்கப்படும் பணம் = 25%, வட்டி வீதம் = 12%, சேவைக் கட்டணம் = 1%

சேவைச் செலவு = ₹ 18,940 இல் 1%

$= \frac{1}{100} \times 18940 = ₹\ 189.40 \simeq ₹\ 189$

முதலில் கொடுக்க வேண்டிய பணம் = ₹ 18,940 இல் 25%

$= \frac{25}{100} \times 18940 = ₹\ 4,735$

கடன் தொகை = 18,940 – 4,735 = ₹ 14,205

வட்டி $= \frac{14205 \times 12 \times 2}{100}$

= ₹ 3,409.20 ≃ ₹ 3,409

ச.மா.த. $= \frac{\text{கடன் தொகை + வட்டி}}{\text{மொத்த மாதங்கள்}}$

$= \frac{14205 + 3409}{24} = \frac{17614}{24}$

= ₹ 733.92 ≃ ₹ 734

∴ செலுத்த வேண்டிய மொத்தத் தொகை = 4,735 + 14,205 + 3,409 + 189

= ₹ 22,538

(ii) 100% கடன் திட்டம்

சேவைக் கட்டணம் = ₹ 18,940 இல் 2%

$= \frac{2}{100} \times 18940$

= ₹ 378.80 ≃ ₹ 379

வட்டி வீதம் = 16%

வட்டி $= 18940 \times \frac{16}{100} \times 2$

= ₹ 6060.80 ≃ ₹ 6,061

ச.மா.த. $= \frac{\text{கடன் தொகை + வட்டி}}{\text{மொத்த மாதங்கள்}}$

$= \frac{18940 + 6061}{24} = \frac{25001}{24}$

= ₹ 1,041.708

≃ ₹ 1,042

செலுத்தப்பட வேண்டிய மொத்தத் தொகை = 6,061 + 18,940 + 379 = ₹ 25,380

(iii) 0% வட்டித் திட்டம்

நடைமுறைச் செலவு = ₹ 18,940 இல் 2%

$= \frac{2}{100} \times 18940$

= ₹ 378.80 ≃ ₹ 379

$$\text{ச.மா.த.} = \frac{\text{மொத்தத் தொகை}}{\text{மொத்த மாதங்கள்}}$$

$$= \frac{18940 + 0}{24} = \frac{18940}{24}$$

$$= ₹\ 789.166 \simeq ₹\ 789$$

செலுத்த வேண்டிய மொத்தத் தொகை = 18,940 + 3,156 + 379 = ₹ 22,475

4 மாத முன் தவணை = ₹ 789 × 4 = ₹ 3,156

எனவே, 0% வட்டித்திட்டம் மிகச் சிறந்ததாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.35

ஒரு கணினியின் விலை ₹ 20,000. ஒரு நிறுவனம் இத்தொகையை 10% வட்டியுடன் 36 மாதத் தவணையாகத் தரலாம் என்கின்றது. இதை வாங்குபவர் செலுத்த வேண்டிய மாதத் தவணை எவ்வளவு?

தீர்வு

கணினியின் விலை = ₹ 20,000, வட்டி ஆண்டொன்றுக்கு = 10%

காலம் = 36 மாதங்கள் (3 ஆண்டுகள்).

$$\text{மொத்த வட்டி} = 20000 \times \frac{10}{100} \times 3$$

$$= ₹\ 6,000$$

$$\therefore \text{செலுத்த வேண்டிய மொத்தத் தொகை} = 20,000 + 6,000$$

$$= ₹\ 26,000$$

$$\text{மாதத் தவணை} = \frac{\text{மொத்தத் தொகை}}{\text{மொத்த மாதங்கள்}}$$

$$= \frac{26000}{36}$$

$$= ₹\ 722.\ 22$$

$$\simeq ₹\ 722$$

பயிற்சி 1.6

1. பொன்மணி ஆண்டு வட்டி வீதம் 4% தரும் ஒரு வங்கியில் ₹ 25,000ஐ 2 ஆண்டுகளுக்கு நிரந்தர வைப்புத்திட்டத்தில் முதலீடு செய்தார். அது முடிவடையும்போது அவருக்குக் கிடைக்கும் முதிர்வுத் தொகை என்ன?
2. சிவா ஆண்டொன்றுக்கு 5% வட்டி கொடுக்கும் ஒரு வங்கியில் ₹ 75,000ஐ 3 ஆண்டுகளுக்கு நிரந்தர வைப்புத்திட்டத்தில் முதலீடு செய்தார் எனில், அவருக்குக் கிடைக்கும் முதிர்வுத் தொகை என்ன?

3. இம்ரான் ஓர் அஞ்சலகத்தில் 12% வட்டியில் ஒவ்வொரு மாதமும் ₹ 400ஐ 2 ஆண்டுகளுக்குச் செலுத்தி வந்தார். இரண்டு ஆண்டுகள் முடிவில் அவருக்குக் கிடைக்கும் தொகையைக் காணவும்.

4. ஒரு மைக்ரோவேவ் ஓவனின் விலை ₹ 6000. பூரணி இதை 5 தவணைகளில் வாங்க நினைக்கிறாா். அக்குழுமம் ஆண்டு தனி வட்டி 10% வீதத்தில் அதை விற்றால், பூரணி செலுத்த வேண்டிய மாதாந்திரத் தவணை யாது?

5. ஒரு குளிர்சாதனப் பெட்டியின் விலை ₹ 16,800. இரஞ்சித் இதை 0% வட்டித் திட்டத்தில் வாங்க விரும்புகின்றார். 3 மாத முன் தவணைகளையும் தருகின்றார். நிறுவனம் 3% நடைமுறைச் செலவு எடுத்துக் கொள்கின்றது எனில், 24 மாதங்களுக்கு அவர் செலுத்த வேண்டிய மாதத் தவணையைக் காணவும். அவர் செலுத்த வேண்டிய மொத்தத் தொகையையும் காணவும்.

6. ஓர் உணவு மேசையின் அடக்க விலை ₹ 8400. குழுமம் ஒன்று ஆண்டொன்றுக்கு 5% தனி வட்டி வீதத்தில் விற்கிறது. வெங்கட் இம்மேசையை 10 மாதத் தவணைகளில் பெற நினைக்கின்றார். அவர் செலுத்த வேண்டிய மாதத் தவணையும் மொத்தத் தொகையையும் காணவும்.

1.7 கலப்பு மாறல்

நாம் முன் வகுப்புகளில் நேர் மாறல், எதிர் மாறல் பற்றிக் கற்றுள்ளோம். இவற்றை நாம் இப்பொழுது நினைவு கூர்வோம்.

நேர்மாறல்

இரண்டு அளவுகள் ஒரே சீராக அதாவது ஒன்று அதிகமாகும்போது மற்றொன்றும் அதிகமாகி, அல்லது ஒன்று குறையும்போது மற்றொன்றும் குறைந்து இருந்தால், அவை இரண்டும் நேர் மாறலில் உள்ளன என்பர்.

நேர்மாறலுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள்

1. ஒரு குறித்த வேகத்தில் பயணம் செய்தால், தொலைவும், காலமும் நேர்மாறலாகும். ஏனெனில் தொலைவு கூடுமானால் காலம் கூடும்.
2. அசலும், வட்டியும் நேர்மாறலாக அமைகிறது. ஏனெனில் அசல் கூடினால் வட்டியும் கூடும்.
3. பொருள்களை வாங்குதலும் அவற்றின் விலைகளும் நேர்மாறலாகும். ஏனெனில் பொருள்கள் மிகுதியாக வாங்கும்போது அதன் விலையும் கூடும்.

எதிர்மாறல்

இரு அளவுகளில் ஒன்று கூடும்போது மற்றொன்று அதற்கேற்ப குறைந்தும், ஒன்று குறையும் போது மற்றொன்று அதற்கேற்ப கூடுமானால் அவ்விரண்டு அளவுகளும் எதிர் மாறலில் அமைந்துள்ளன என்கிறோம்.

எதிர்மாறலுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள்

1. வேலை செய்வோரின் எண்ணிக்கையும், காலமும் எதிர் மாறலாகும். ஏனெனில் ஆட்கள் அதிகரித்தால், அவர்கள் வேலை செய்து முடிக்க வேண்டிய காலம் குறையும்.
2. ஒரு குறிப்பிட்ட தொலைவில் வேகமும் காலமும் எதிர்மாறலாக அமையும். ஏனெனில் வேகத்தைக் கூட்டினால் ஒரு குறிப்பிட்ட தொலைவை அடையும் காலம் குறைகின்றது.
3. மக்கள் தொகை பெருகினால் ஓர் இருப்பில் உள்ள உணவு அளவு குறையும். எனவே உணவின் அளவும் மக்கள் தொகையின் அளவும் எதிர் மாறலாகும்.

கலப்பு மாறல்

ஒரு சில கணக்குகளில் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறல்கள் வரும். இவ்வாறு அமைவதைக் கலப்பு மாறல் என்பர்.

இரு மாறல்கள் கலந்து வரும் அமைப்புகளைப் பின்வரும் அட்டவணையில் குறிப்பிடப் பெற்றுள்ளன:

மாறல் I	மாறல் I I
நேர்மாறல்	நேர்மாறல்
எதிர்மாறல்	எதிர்மாறல்
நேர்மாறல்	எதிர்மாறல்
எதிர்மாறல்	நேர்மாறல்

கலப்பு மாறல்களைப் பற்றி அறிந்து கொள்ள சில கணக்குகளைச் செய்து பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.36

20 ஆட்கள் 6 நாட்களில் 112மீ நீளமுள்ள சுவரை கட்டி முடித்தால் 25 ஆட்கள் 3 நாட்களில் எவ்வளவு நீளச் சுவரைக் கட்டி முடிப்பர்?

தீர்வு

முறை 1: இக்கணக்கில் 3 அமைப்பு மாறிகள் உள்ளன. ஆட்களின் எண்ணிக்கை, நாட்கள், சுவரின் நீளம்.

ஆட்களின் எண்ணிக்கை	நாட்கள்	சுவரின் நீளம் (மீட்டரில்)
20	6	112
25	3	x

படி 1 : ஆட்களின் எண்ணிக்கையையும், சுவரின் நீளத்தையும் எடுத்துக் கொள்வோம். ஆட்களின் எண்ணிக்கை 20லிருந்து 25 ஆக உயரும் பொழுது கட்டப்படும் சுவரின் நீளமும் கூடும். எனவே இது நேர் மாறலில் உள்ளது.

எனவே, $20 : 25 :: 112 : x$ ...... (1)

படி 2 : நாட்களையும், சுவரின் நீளத்தையும் எடுத்துக் கொள்வோம். நாட்கள் 6 லிருந்து 3 ஆக குறையும் பொழுது, சுவரின் நீளம் குறையும். எனவே இது நேர் மாறலாகும்.

எனவே, $6 : 3 :: 112 : x$ ..... (2)

(1) ஐயும், (2) ஐயும் இணைத்துப் பின்வருமாறு அமைக்கலாம்.

$$\left.\begin{array}{r}20:25\\6:3\end{array}\right\}::112:x$$

ஓர் விகித சமத்தில், கோடி (கடைசி) உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன், இடை உறுப்புகளின் பெருக்கற் பலனுக்குச் சமம் என்று நாம் அறிவோம்.

கோடி உறுப்புகள்		இடை உறுப்புகள்		கோடி உறுப்புகள்
20	:	25 :: 112	:	x
6	:	3		

எனவே, $20 \times 6 \times x = 25 \times 3 \times 112$

$$x = \frac{25 \times 3 \times 112}{20 \times 6} = 70 \text{ மீட்டர்.}$$

முறை 2

ஆட்களின் எண்ணிக்கை	நாட்கள்	சுவரின் நீளம் (மீட்டரில்)
20	6	112
25	3	x

படி 1: ஆட்களின் எண்ணிக்கையையும், சுவரின் நீளத்தையும் கருத்தில் கொள்வோம். ஆட்களின் எண்ணிக்கை 20லிருந்து 25ஆக கூடும் போது, சுவரின் நீளமும் கூடும். எனவே இது நேர்மாறலாகும்.

இதற்குப் பெருக்கற்காரணி $= \frac{25}{20}$

படி 2: நாட்களின் எண்ணிக்கையையும், சுவரின் நீளத்தையும் கருத்தில் கொள்வோம். நாட்களின் எண்ணிக்கை 6லிருந்து 3ஆகக் குறையும் போது, சுவரின் நீளமும் குறையும். எனவே இது நேர்மாறலாகும்.

இதற்குப் பெருக்கற்காரணி $= \frac{3}{6}$

$$\therefore x = \frac{25}{20} \times \frac{3}{6} \times 112 = 70 \text{ மீட்டர்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.37

6 ஆண்கள் ஒரு வேலையை நாளொன்றுக்கு 10 மணி நேரம் வேலை செய்து, 24 நாட்களில் முடிப்பர். 9 ஆண்கள், நாளொன்றுக்கு 8 மணி நேரம் வேலை செய்தால், எத்தனை நாட்களில் அவ்வேலையை முடிப்பர்?

தீர்வு

முறை 1: இக்கணக்கில் 3 அமைப்பு மாறிகள் உள்ளன. ஆண்களின் எண்ணிக்கை, ஒரு நாளில் வேலை செய்யும் நேரம் மற்றும் நாட்கள்

ஆண்களின் எண்ணிக்கை	ஒரு நாளில் வேலை செய்யும் நேரம்	நாட்கள்
6	10	24
9	8	x

படி 1 : ஆண்களின் எண்ணிக்கையையும், நாட்களையும் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்வோம். ஆண்களின் எண்ணிக்கை 6லிருந்து 9 ஆக கூடும்பொழுது, நாட்களின் எண்ணிக்கை குறையும். எனவே இது எதிர் மாறல் ஆகும்.

எனவே இதன் விகித சமம் $9 : 6 :: 24 : x$ ..... (1)

படி 2 : ஒரு நாளில் வேலை செய்யும் நேரத்தையும், நாட்களையும் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்வோம். ஒரு நாளில் வேலை செய்யும் நேரத்தின் கால அளவு 10லிருந்து 8ஆக குறையும்பொழுது, நாட்களின் எண்ணிக்கை கூடும். இது எதிர் மாறலில் அமைந்துள்ளது.

எனவே இதன் விகித சமம் $8 : 10 :: 24 : x$ ..... (2)

(1) ஐயும், (2) ஐயும் இணைத்துப் பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$\left.\begin{matrix} 9:6 \\ 8:10 \end{matrix}\right\} :: 24 : x$$

கோடி உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் இடை உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமம் என்பதை நாம் அறிவோம்.

கோடி உறுப்புகள்		இடை உறுப்புகள்		கோடி உறுப்புகள்
9	:	6 : : 24	:	x
8	:	10		

எனவே, $9 \times 8 \times x = 6 \times 10 \times 24$

$$x = \frac{6 \times 10 \times 24}{9 \times 8}$$

$= 20$ நாட்கள்.

குறிப்பு : 1. எதிர் மாறலை கீழ் நோக்கிய அம்புக்குறியால் (↓) குறிக்கிறோம் .
2. நேர் மாறலை மேல் நோக்கிய அம்புக்குறியால் (↑) குறிக்கிறோம் .
3. பெருக்கற் காரணிகளை, அம்புக்குறிகளைப் பயன்படுத்தி எழுதலாம். அம்புக்குறியின் தலைகளில் உள்ள எண்களைத் தொகுதியாகவும், வால் பகுதியில் உள்ள எண்களைப் பகுதியாகவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

முறை 2க்கு மேற்கண்ட குறிப்புகளைப் பயன்படுத்துவோம்

முறை 2 :

ஆண்களின் எண்ணிக்கை	ஒரு நாளில் வேலை செய்யும் நேரம்	நாட்கள்
6	10	24
9	8	x

படி 1 : ஆண்களின் எண்ணிக்கையையும், நாட்களையும் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்வோம். வேலை செய்யும் ஆண்களின் எண்ணிக்கை 6லிருந்து 9 ஆக உயரும்பொழுது, நாட்களின் எண்ணிக்கை குறையும். இது எதிர்மாறலில் உள்ளது.

$$\text{பெருக்கற்காரணி} = \frac{6}{9}$$

படி 2 : ஒரு நாளில் வேலை செய்யும் காலத்தையும், நாட்களையும் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்வோம். ஒரு நாளில் வேலை செய்யும் காலத்தின் அளவு 10லிருந்து 8ஆக குறையும் பொழுது, நாட்களின் எண்ணிக்கை கூடும். இது எதிர்மாறலில் உள்ளது.

$$\text{பெருக்கற்காரணி} = \frac{10}{8}$$

$$\therefore x = \frac{6}{9} \times \frac{10}{8} \times 24 = 20 \text{ நாட்கள்.}$$

பயிற்சி 1.7

1. 12 தச்சர்கள் நாளொன்றுக்கு 10 மணி நேரம் வேலை செய்து சில மர வேலைகளை 18 நாட்களில் செய்து முடிக்கின்றனர். இதே வேலையை 15 தச்சர்கள் நாளொன்றுக்கு 6 மணி நேரம் வேலை செய்தால் எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பர்?
2. 80 தானியங்கி இயந்திரங்கள் ஒரே மாதிரியான 4800 கைப்பேசிகளை 6 மணியில் தயாரிக்கின்றன. ஒரு தானியங்கி இயந்திரம், ஒரு மணி நேரத்தில் எத்தனை கைப்பேசிகளை தயாரிக்கும்? 25 தானியங்கி இயந்திரங்கள் 5 மணி நேரத்தில் எத்தனை கைப்பேசிகளை தயாரிக்கும்?
3. 14 அச்சுக் கோர்ப்பவர்கள், 5 மணி நேரத்தில் ஒரு புத்தகத்தின் 70 பக்கங்களை முடிப்பர். 10 மணி நேரத்தில், 100 பக்கங்களை முடிக்க எத்தனை அச்சுக் கோர்ப்பவர்கள் தேவை?
4. 2400 ச.மீ நிலத்தை 12 வேலையாட்கள் 10 நாட்களில் உழுது முடிப்பர். 5400 ச.மீ நிலத்தை 18 நாட்களில் உழுவதற்கு எத்தனை வேலையாட்கள் தேவை?

5. சுவாதி ஒரு நாளுக்கு 4 மணி நேரம் வேலை செய்து, 5 சேலைகளுக்கு 18 நாட்களில் எம்பிராய்டரி வேலை செய்து முடிப்பார். அவர் 10 சேலைகள் எம்பிராய்டரி செய்வதற்கு நாள்தோறும் 6 மணி நேரம் வேலை செய்தால், எத்தனை நாட்களில் வேலையைச் செய்து முடிப்பார்?
6. ₹ 2500ஐ வங்கியில் 6 மாதங்களுக்குச் செலுத்தினால் வங்கி ₹ 100ஐ வட்டியாகத் தருகின்றது. ₹ 3200ஐ அதே வட்டி வீதத்தில், 9 மாதங்கள் செலுத்தினால், கிடைக்கும் வட்டி என்னவாக இருக்கும்?

1.8 காலம் மற்றும் வேலை

ஆட்கள் பலர் செய்யும் வேலையை நாம் ஒப்பிடும்பொழுது, அவர்கள் ஒரு நாளில் செய்யும் வேலையை அறிய வேண்டியுள்ளது. காலமும் வேலையும் எதிர்மாறலாகும். எனவே மிகுதியான ஆட்கள் ஒரு வேலையைச் செய்யும் பொழுது அவ்வேலை சீக்கிரம் முடியும், இங்குள்ள கணக்குளைத் தீர்க்கும் பொழுது நாம் பின்வருவனவற்றை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

1. ஒருவர் ஒரு வேலையை 'n' நாட்களில் முடித்தால், ஒரு நாளில் '$\frac{1}{n}$' வேலையை முடிப்பார். எடுத்துக்காட்டாக, ஒருவர் ஒரு வேலையை 4 நாட்களில் முடித்தால், அவர் ஒரு நாளில் அவ்வேலையில் $\frac{1}{4}$ பாகம் செய்து முடிப்பார்.
2. ஒருவர் ஒரு நாளில் முடிக்கும் வேலையின் பகுதி கொடுக்கப் பெற்றால்,

   அவ்வேலை முடிக்க ஆகும் மொத்த நாட்கள் = $\frac{1}{\text{ஒரு நாளின் வேலை}}$

   எடுத்துக்காட்டாக, ஒருவர் ஒரு நாளில் $\frac{1}{10}$ பாகம் வேலை செய்தால், அவர்

   அவ்வேலையை $= \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)} = 1 \times \frac{10}{1} = 10$ நாட்களில் முடிப்பார்.

எடுத்துக்காட்டு 1.38

A என்பவர் ஒரு வேலையை 20 நாட்களிலும், B என்பவர் அதே வேலையை 30 நாட்களிலும் செய்து முடிப்பார்கள். அவ்விருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையைச் செய்து முடிக்க எத்தனை நாட்கள் ஆகும்?

தீர்வு

ஒரு நாளில் A செய்யும் வேலை = $\frac{1}{20}$; ஒரு நாளில் B செய்யும் வேலை = $\frac{1}{30}$

ஒரு நாளில் A, B இருவரும் சேர்ந்து செய்யும் வேலை $= \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$

$= \frac{3+2}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ பகுதி வேலை

$\therefore$ A, B இருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையை, $\frac{1}{1/12} = 12$ நாட்களில் செய்து முடிப்பர்.

எடுத்துக்காட்டு 1.39

ஒரு வேலையை A, B இருவரும் சேர்ந்து 8 நாட்களில் முடிப்பர். A மட்டும் அவ்வேலையை 12 நாட்களில் முடிப்பார். B மட்டும் அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் முடிப்பார்?

தீர்வு

A, B இருவரும் சேர்ந்து ஒரு நாளில் முடிக்கும் வேலை $= \frac{1}{8}$ பாகம்

ஒரு நாளில் A மட்டும் செய்யும் வேலை $= \frac{1}{12}$ பாகம்

ஒரு நாளில் B மட்டும் செய்யும் வேலை $= \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{3-2}{24} = \frac{1}{24}$

B மட்டும் அவ்வேலையைச் செய்து முடிக்க ஆகும் காலம் $= \frac{1}{1/24} = 24$ நாட்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 1.40

A ஒரு வேலையை 12 நாட்களில் செய்து முடிப்பார். B அதே வேலையை 20 நாட்களில் செய்து முடிப்பார். A, B இருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையை 3 நாட்கள் செய்தனர். பின் A சென்று விட்டார். மீதி வேலையை B எத்தனை நாட்களில் முடிப்பார்?

தீர்வு

A ஒரு நாளில் முடிக்கும் வேலை $= \frac{1}{12}$

B ஒரு நாளில் முடிக்கும் வேலை $= \frac{1}{20}$

A, B இருவரும் சேர்ந்து ஒரு நாளில் முடிக்கும் வேலை $= \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

$= \frac{5+3}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$

A, B இருவரும் சேர்ந்து 3 நாளில் முடிக்கும் வேலை $= \frac{2}{15} \times 3 = \frac{2}{5}$ பாகம்

மீதமுள்ள வேலை $= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ பாகம்

மீதமுள்ள வேலையை B முடிக்க ஆகும் நாட்கள் $= \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{20}} = \frac{3}{5} \times \frac{20}{1} = 12$ நாட்கள்

$\therefore$ மீதமுள்ள வேலையை 12 நாட்களில் B செய்து முடிப்பார்.

எடுத்துக்காட்டு 1.41

A, B இருவரும் ஒரு வேலையை 12 நாட்களில் செய்து முடிப்பர். B, C அதே வேலையை 15 நாட்களில் செய்து முடிப்பர். C, A அதே வேலையை 20 நாட்களில் செய்து முடிப்பர். மூவரும் சேர்ந்து மற்றும் தனித்தனியாகவும் அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பர்?

தீர்வு

A, B ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை $= \frac{1}{12}$ பாகம்

B, C ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை = $\frac{1}{15}$ பாகம்

C, A ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை = $\frac{1}{20}$ பாகம்

ஒரு நாளில் (A+B)+(B+C)+(C+A) செய்யும் வேலை = $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}$

ஒரு நாளில் (2A + 2B + 2C) செய்யும் வேலை = $\frac{5+4+3}{60}$

ஒரே நாளில் 2(A + B + C) செய்யும் வேலை = $\frac{12}{60}$ பாகம்

ஒரே நாளில் A, B, C முடிக்கும் வேலை = $\frac{1}{2}\times\frac{12}{60}=\frac{1}{10}$ பாகம்

∴ மூவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையை 10 நாட்களில் முடிப்பர்.

A ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை

அதாவது [(A + B + C)களின் 1 நாள் வேலை – (B + C) களின் 1 நாள் வேலை]

$$= \frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{3-2}{30}=\frac{1}{30}$$

∴ A அவ்வேலையைத் தனியே 30 நாட்களில் முடிப்பார்.

B ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை

அதாவது [(A + B + C)களின் 1 நாள் வேலை – (C + A) களின் 1 நாள் வேலை]

$$= \frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{2-1}{20}=\frac{1}{20}$$

∴ B அவ்வேலையை 20 நாட்களில் முடிப்பார்.

C ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை

அதாவது [(A + B + C)களின் 1 நாள் வேலை – (A + B) களின் 1 நாள் வேலை]

$$= \frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{6-5}{60}=\frac{1}{60}$$

∴ C அவ்வேலையை 60 நாட்களில் முடிப்பார்.

எடுத்துக்காட்டு 1.42

A ஒரு வேலையை 10 நாட்களிலும், B அதை 15 நாட்களிலும் செய்து முடிப்பர். இருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையைச் செய்து ₹ 1500ஐ ஈட்டினால், அத்தொகையை எவ்வாறு பிரித்துக் கொள்வர்?

தீர்வு

A ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை $= \frac{1}{10}$ பாகம்

B ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை $= \frac{1}{15}$ பாகம்

எனவே அவர்களின் வேலைத்திறன்களின் விகிதம் $= \frac{1}{10} : \frac{1}{15} = 3:2$

மொத்தத் தொகை $=$ ₹ 1500

A இன் பங்கு $= \frac{3}{5} \times 1500$

$=$ ₹ 900

B இன் பங்கு $= \frac{2}{5} \times 1500$

$=$ ₹ 600

எடுத்துக்காட்டு 1.43

ஒரு தொட்டியை இரு குழாய்கள் தனித்தனியே முறையே 30 நிமிடங்கள், 40 நிமிடங்களில் நிரப்புகின்றது. மற்றொரு குழாய் நீர் நிரம்பிய தொட்டியை 24 நிமிடங்களில் காலி செய்யும். தொட்டி காலியாக இருந்து இம்மூன்று குழாய்களும் ஒரே சமயத்தில் திறந்து விடப்பட்டால், அத்தொட்டி எத்தனை நிமிடங்களில் நிரம்பும்?

தீர்வு

முதல் குழாய் 1 நிமிடத்தில் அத்தொட்டியை நிரப்பும் பாகம் $= \frac{1}{30}$

இரண்டாம் குழாய் 1 நிமிடத்தில் அத்தொட்டியை நிரப்பும் பாகம் $= \frac{1}{40}$

மூன்றாம் குழாய் 1 நிமிடத்தில் நீர் நிரம்பிய தொட்டியை காலி செய்யும் பாகம் $= \frac{1}{24}$

ஒரே சமயத்தில் இம்மூன்று குழாய்களையும் திறந்து விட்டால், 1 நிமிடத்தில் தொட்டியில் நிரம்பும் பாகம்

$$= \frac{1}{30} + \frac{1}{40} - \frac{1}{24}$$

$$= \frac{4+3-5}{120}$$

$$= \frac{7-5}{120}$$

$$= \frac{2}{120}$$

$$= \frac{1}{60}$$

எனவே, அத்தொட்டி நிரம்பும் காலம் $= \frac{1}{1/60}$

$=$ 60 நிமிடங்கள்

$=$ 1 மணி

பயிற்சி 1.8

1. ஓர் ஆண் ஒரு வேலையை 4 நாட்களில் செய்து முடிப்பார். ஆனால் ஒரு பெண் அதே வேலையை 12 நாட்களில் செய்து முடிப்பார். இவ்விருவரும் சேர்ந்து வேலை செய்தால், அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பர்?

2. இரண்டு சிறுவர்கள் ஒரு வேலையைச் சேர்ந்து செய்யும் பொழுது, 10 நாட்களில் முடிப்பர். முதல் சிறுவன் அவ்வேலையைத் தனியே 15 நாட்களில் முடித்தால், இரண்டாம் சிறுவன் தனியே அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பார்?

3. A, B, C என்ற மூவர் ஒரு வேலையை முறையே 8, 12, 16 நாட்களில் முடிப்பார்கள். A, B இருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையை 3 நாட்களுக்கு செய்தனர். பின்னர் B விலகுகின்றார், C சேருகின்றார் எனில், A, C ஆகிய இருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் முடிப்பார்கள்?

4. A என்ற குழாய் ஒரு பெரிய பாத்திரத்தைத் தனியே 10 நிமிடங்களில் நிரப்பும். B என்ற குழாய் அதே பாத்திரத்தைத் தனியே 20 நிமிடங்களில் நிரப்பும். நீர் நிரப்பியுள்ள அப்பாத்திரத்தை C என்ற குழாய் 15 நிமிடங்களில் காலி செய்யும். ஆரம்பத்தில் பாத்திரம் காலியாக இருந்து, இம்மூன்று குழாய்களையும் திறந்தால், அப்பாத்திரம் நிரம்ப எவ்வளவு நேரமாகும்?

5. A ஒரு வேலையை 20 நாட்களிலும், B அதே வேலையை 30 நாட்களிலும் முடிப்பர். இருவரும் சேர்ந்து வேலை செய்து, அவ்வேலையை முடித்து ₹ 600ஐ தங்கள் வருவாயாகப் பெற்றனர் எனில் அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் பெறும் தொகை எவ்வளவு?

6. A, B, C என்பர் ஒரு வேலையை முறையே 12, 24, 8 நாட்களில் முடிப்பார்கள். இம்மூவரும் சேர்ந்து ஒரு நாள் வேலை செய்தனர். பின் C விலகி விடுகிறார் எனில், A, B இருவரும் மீதமுள்ள வேலையை முடிக்க ஆகும் நாட்கள் எத்தனை?

7. ஒரு குழாய் காலியாக உள்ள தொட்டியை 15 நிமிடங்களில் நிரப்பும். மற்றொரு குழாய் நீர் நிரம்பியுள்ள அத்தொட்டியை 20 நிமிடங்களில் காலி செய்யும். ஆரம்பத்தில் தொட்டி காலியாக இருந்து, இரு குழாய்களும் ஒரே நேரத்தில் திறந்து விடப்பட்டால், அத்தொட்டி எவ்வளவு நிமிடங்களில் நிரம்பும்?

சுருக்கக் குறியீடு: அ.வி. = அடக்க விலை, வி.வி. = விற்பனை விலை,
கு.வி. = குறித்த விலை,
P = அசல், r = வட்டி வீதம், n = கால அளவு,
A = கூடுதல், C. I. = கூட்டு வட்டி

கருத்துச் சுருக்கம்

- சதவீதம் என்பது நூற்றுக்கு என்று பொருள்படும். 100ஐப் பகுதியாக கொண்ட பின்னம் சதவீதம் எனப்படும்.
- இலாபம் கிடைக்கும் சூழ்நிலையில்

  இலாபம் = வி.வி. − அ.வி.; இலாப சதவீதம் = $\frac{\text{இலாபம்}}{\text{அ.வி.}} \times 100\%$

  வி.வி. = $\left(\frac{100 + \text{இலாப } \%}{100}\right) \times$ அ.வி.; அ.வி. = $\left(\frac{100}{100 + \text{இலாப } \%}\right) \times$ வி.வி.
- நட்டம் ஆகின்ற சூழ்நிலையில்

  நட்டம் = அ.வி. − வி.வி; நட்ட சதவீதம் = $\frac{\text{நட்டம்}}{\text{அ.வி.}} \times 100\%$

  வி. வி. = $\left(\frac{100 + \text{நட்டம் } \%}{100}\right) \times$ அ.வி.; அ.வி. = $\left(\frac{100}{100 + \text{நட்டம் } \%}\right) \times$ வி.வி.
- குறித்த விலையின் மீது தான் தள்ளுபடி செய்யப்படும்.
- குறித்த விலையிலிருந்து தள்ளுபடியைக் கழித்துக் கிடைக்கும் தொகை விற்ற விலையாகும்.
- தள்ளுபடி = கு.வி. − வி.வி.
- கு.வி. = $\frac{100}{100 - \text{தள்ளுபடி } \%} \times$ வி.வி. ; வி.வி. = $\frac{100 - \text{தள்ளுபடி } \%}{100} \times$ கு.வி.
- அ.வி. = $\frac{100 - \text{தள்ளுபடி } \%}{100 + \text{இலாபம்}\%} \times$ கு.வி. ; கு.வி. = $\frac{100 + \text{இலாபம்}\%}{100 - \text{தள்ளுபடி } \%} \times$ அ.வி.
- தள்ளுபடி சதவீதம் = $\frac{\text{தள்ளுபடி}}{\text{கு.வி.}} \times 100\%$

  (குறிப்பு : அ.வி. = அடக்க விலை, வி.வி. = விற்பனை விலை, கு.வி. = குறித்த விலை)
- (i) ஆண்டொன்றுக்கு வட்டி சேர்க்கும் முறையில், $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

  (ii) அரையாண்டுக்கு ஒருமுறை வட்டி சேர்க்கும் முறையில், $A = P\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$

  (iii) காலாண்டுக்கு ஒரு முறை வட்டி சேர்க்கும் முறையில், $A = P\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{4n}$

  (குறிப்பு: P = அசல், r = வட்டி வீதம், n = கால அளவு, A = கூடுதல், C. I. = கூட்டு வட்டி)
- வளர்ச்சி, $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$; வீழ்ச்சி, $A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$
- இரண்டு ஆண்டுகளில் கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும்

  உள்ள வித்தியாசம் = $P\left(\frac{r}{100}\right)^2$
- A இன் ஒரு நாள் வேலை = $\frac{1}{\text{அவ்வேலையை முடிக்க A எடுத்துக் கொள்ளும் நாட்கள்}}$
- 'x' நாட்களில் முடிக்கும் வேலை= ஒரு நாள் வேலை × x.

2

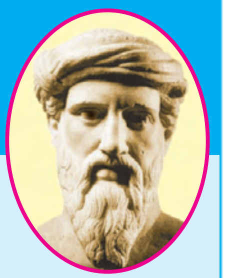
வடிவியல்

2.1 அறிமுகம்

2.2 முக்கோணத்தின் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள்

2.3 பிதாகரஸ் தேற்றம்

2.4 வட்டங்கள்



பிதாகரஸ்

சுமார்

கி.மு. 582 – கி.மு. 497

இவர் ஒரு மிகச்சிறந்த, காலத்தை வென்ற கிரேக்கக் கணித மேதை. செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் இடையேயுள்ள தொடர்பு இவர் பெயரைத் தாங்கியுள்ளது. இதன்மூலம் இவர் பெயர் நன்கு அறியப்படுகிறது.

2.1 அறிமுகம்

வடிவியலைக் கிறிஸ்து பிறப்பதற்கு 1000 ஆண்டுகளுக்கு முன்பே எகிப்தியர்கள் உருவாக்கிப் பயன்படுத்தி உள்ளனர். அவர்கள் வடிவியலில் தேவையான அடிப்படைக் கோட்பாடுகளை உருவாக்கித் தர்க்க வழியாகப் பல நிரூபணங்களைக் கண்டறிந்தனர்.

வடிவியல், அன்றாட வாழ்வில் பல இடங்களில் முக்கியமாகப் பங்காற்றுகிறது. குறிப்பாக முக்கோணங்கள் பல வகைகளில் பயன்படுகின்றன.

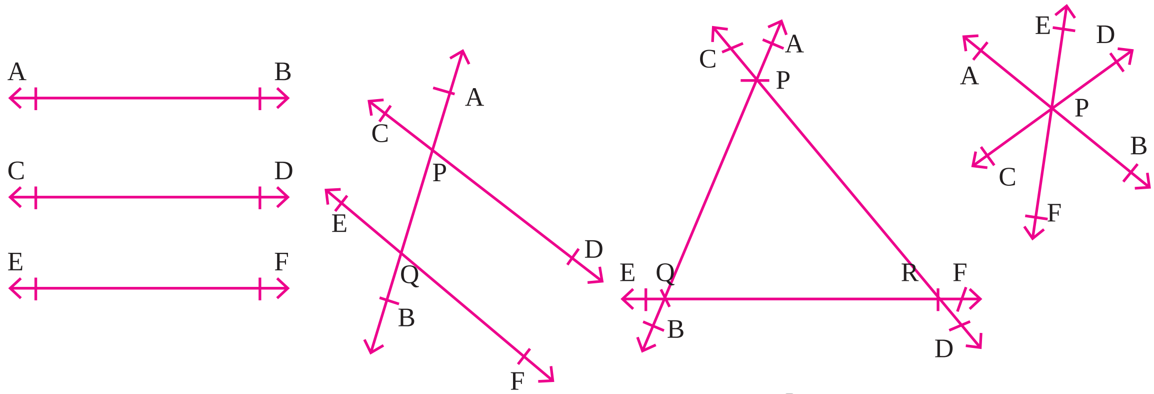
பலவடிவ நிலங்களின் பரப்பளவு காண அந்நிலத்தினை பல முக்கோணங்களாகப் பிரித்து பரப்பளவு கண்டு பின் அவற்றின் கூடுதலைக் காணுதலின் மூலம் அறியலாம். குறிப்பாக அந்நிலங்களைச் செங்கோண முக்கோணங்களாகப் பிரிப்பதன் மூலம் பரப்பளவை எளிதாக அறியமுடியும் அல்லது முக்கோணத்தின் ஒரு முனைக்கு அடிப்பக்கத்தில் இருந்து வரையப்படும் குத்துக்கோட்டின் நீளம் காண்பதன் மூலம் முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காணலாம்.

இங்கு ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் பற்றியும் அதன் பண்புகள் சிலவற்றையும் காணலாம்.

2.2 முக்கோணத்தின் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள்

ஒரு தளத்தில் மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகளை வரைந்தால் அவற்றை என்னென்ன வழிகளில் வரையலாம்?

மூன்று கோடுகள் வரையப்படும் விதங்கள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



(அ) (ஆ) (இ) (ஈ)

படம் (அ) இல், AB, CD மற்றும் EF ஆகிய கோடுகள் இணை கோடுகளாகவும், ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக் கொள்ளாமலும் செல்கின்றன.

படம் (ஆ) இல், AB யும் CD யும் P யிலும், AB யும் EF யும் Q யிலும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

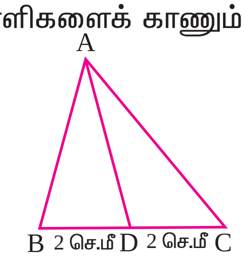
படம் (இ) இல், AB, CD மற்றும் EF ஆகிய கோடுகள் P, Q, R என்ற மூன்று புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

படம் (ஈ) இல், AB, CD மற்றும் EF ஆகிய கோடுகள் P என்ற ஒரே புள்ளியில் மட்டும் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

ஒரு தளத்தில் மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழியே சென்றால் அவை ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் எனப்படும். அவற்றின் பொதுப்புள்ளி, சந்திக்கும் புள்ளி எனப்படும்.

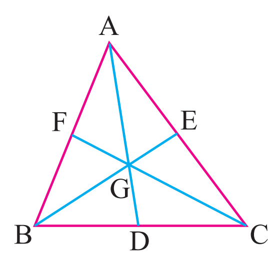
ஒரு முக்கோணத்தில் நடுக்கோட்டு மையம், செங்கோட்டு மையம், உள் மற்றும் சுற்று வட்ட மையம் என்ற சில சிறப்புப் புள்ளிகள் உள்ளன. நாம் அப்புள்ளிகளைக் காணும் முறையைப் பற்றி கற்க உள்ளோம்.

2.2.1 முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம்



அருகில் உள்ள படத்தில் உள்ள ΔABC இல், BC இன் மையம் D. AD ஐ இணை. இங்கு AD என்பது முக்கோணம் ABC இன் நடுக் கோடுகளில் ஒன்று.

ஒரு முக்கோணத்தின் ஓர் உச்சியிலிருந்து அதன் எதிர்ப்பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியை இணைக்கும் கோடு நடுக்கோடு எனப்படும்.

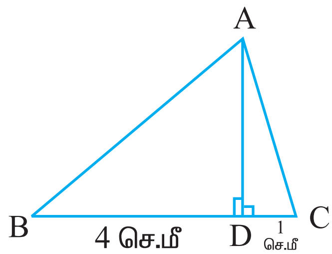


அருகில் உள்ள படத்தில், AD, BE, CF ஆகியன நடுக்கோடுகள் ஆகும். அவை சந்திக்கும் புள்ளி G. G என்பது நடுக்கோட்டு மையம் ஆகும்.

எனவே ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியானது, அம்முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் எனப்படும். இது G என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.

குறிப்பு: (i) நடுக்கோட்டு மையம், நடுக்கோடுகளை 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.
(ii) நடுக்கோட்டு மையம் அம்முக்கோணத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் ஆகும்.

2.2.2 ஒரு முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம்



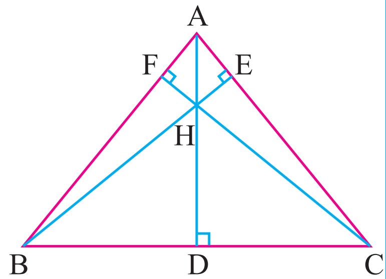
அருகில் உள்ள படம் ΔABC இல்,

A இலிருந்து BC க்குச் செங்குத்துக் கோடு வரைக.

$\therefore AD \perp BC$

$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$.

இங்கு D, BC இன் மையமாக அமையவேண்டிய அவசியமில்லை. மேலும் AD உச்சி A வழியே செல்லும் ஒரு செங்கோடு ஆகும்.



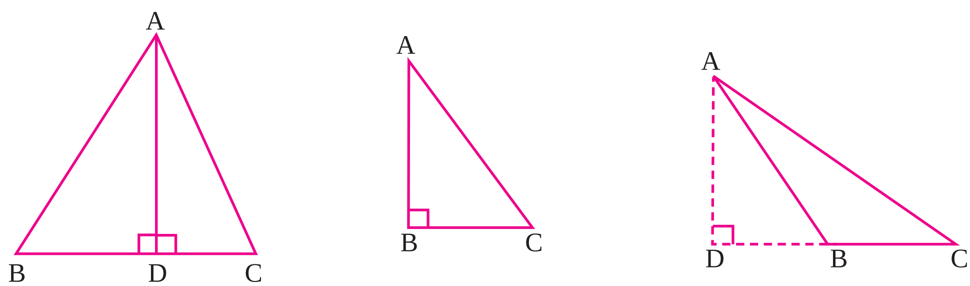
ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து அதன் எதிர்ப் பக்கத்திற்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் கோட்டிற்குச் செங்கோடு என்று பெயர்.

அருகிலுள்ள முக்கோணம் ABCயில் AD, BE, CF ஆகியவை செங்கோடுகள் ஆகும்.அவை சந்திக்கும் புள்ளி H.

இப்புள்ளி H ஐச் செங்கோட்டு மையம் எனலாம்.

எனவே முக்கோணத்தின் மூன்று குத்துக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி அம்முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையமாகும்.

செங்கோட்டு மையத்தின் அமைவிடங்கள்



(a) (b) (c)

நிலை (i) : படம் (a) இல், ΔABC ஒரு குறுங்கோண முக்கோணம். இங்கு செங்கோட்டு மையம் முக்கோணத்தின் உட்புறத்தில் அமைந்துள்ளது.

நிலை (ii) : படம் (b) இல், ΔABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம். இங்கு செங்கோட்டு மையம் செங்கோணம் அமையும் உச்சியின் மீது அமைந்துள்ளது.

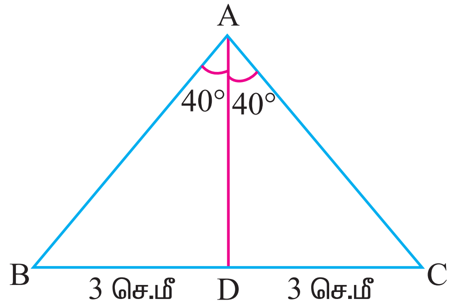
நிலை (iii) : படம் (c) இல், ΔABC ஒரு விரிகோண முக்கோணம். இங்கு செங்கோட்டு மையம் முக்கோணத்தின் வெளிப்புறத்தில் அமைந்துள்ளது.

2.2.3 முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம்

அருகில் தரப்பட்டுள்ள ΔABC இல், $\angle A$, AD என்ற கோட்டுத் துண்டால் இரு சமக் கூறிடப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $\angle BAD = \angle DAC$.

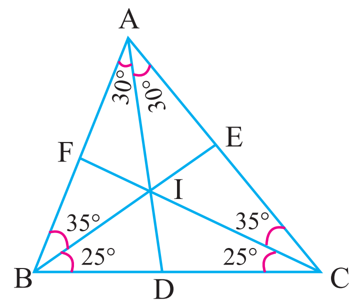
இங்கு, AD என்பது கோண இருசம வெட்டி ஆகும்.



ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு கோணத்தின் இருசம வெட்டி என்பது அக்கோணத்தை இருசமக் கூறிடும் கோட்டுத்துண்டு ஆகும்.

அருகில் உள்ள ΔABC இல் AD, BE, CF ஆகியன கோண இருசம வெட்டிகள் ஆகும்.

இவை I என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. இப்புள்ளி I உள்வட்ட மையம் எனப்படும்.



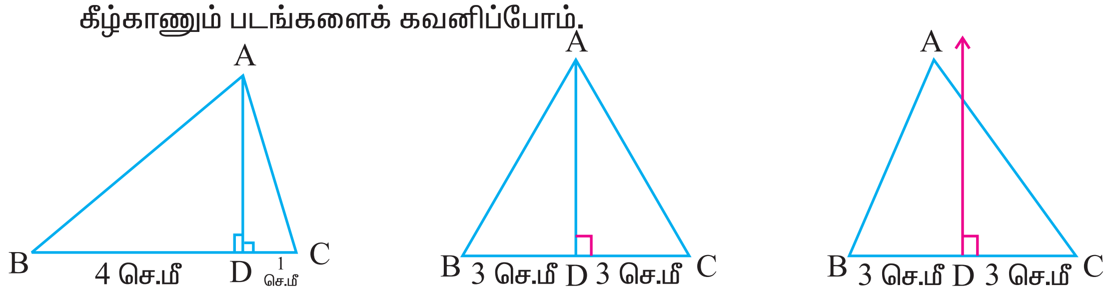
ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் இருசம வெட்டிகள் சந்திக்கும் புள்ளி அம்முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம் எனப்படும்.

2.2.4 முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம்

நாம் மையக்குத்துக் கோடு பற்றி சென்ற வகுப்பில் கற்று அறிந்துள்ளோம்.

ஒரு முக்கோணத்தின் மையக்குத்துக்கோடு என்றால் என்ன?

கீழ்காணும் படங்களைக் கவனிப்போம்.



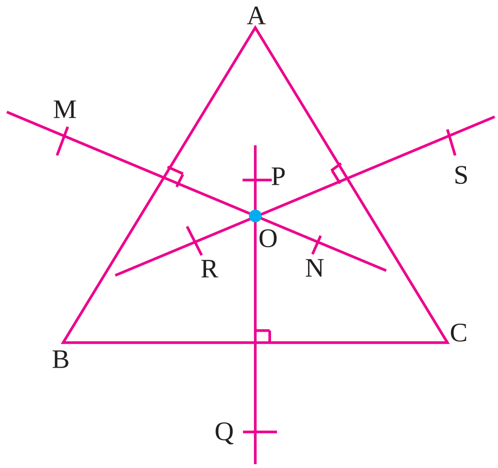
(a) (b) (c)

படம் (a) : AD, BC க்குச் செங்குத்து. ஆனால் D, BC இன் மையம் அன்று.

படம் (b) : AD, BC க்குச் செங்குத்து மற்றும் AD, BC ஐ இருசமக் கூறிடுகிறது. எனவே, BD = DC.

படம் (c) : XD, BCஐ இருசமக் கூறிடுகிறது. XD, BC க்குச் செங்குத்து மேலும் XD உச்சி A வழியே செல்ல வேண்டிய அவசியம் இல்லை.

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கத்தின் மையக்குத்துக் கோடு என்பது அப்பக்கத்திற்குச் செங்குத்தாகவும், அதே சமயம் அப்பக்கத்தை இரு சமப் பாகங்களாகவும் பிரிக்கும் கோடு ஆகும்.



மேலுள்ள படத்தைக் கருத்தில் கொள்வோம்.

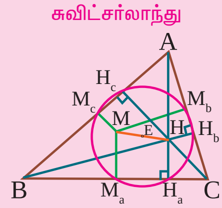
இங்கு PQ, RS, MN ஆகியன BC, AC மற்றும் AB இன் மையக்குத்துக் கோடுகள் ஆகும். இவை O வில் சந்திக்கின்றன.O சுற்று வட்ட மையம் எனப்படும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் மையக்குத்துக் கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளி சுற்று வட்ட மையம் எனப்படும்.

குறிப்பு : (i) முக்கோணம் ABC இல் சுற்றுவட்ட மையம் (O), நடுக்கோட்டு மையம் (G), செங்கோட்டு மையம் (H) ஆகியன ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும். அக்கோடு ஆய்லர் கோடு என்றழைக்கப்படுகிறது. மேலும் OG : GH = 1 : 2 ஆகும்.

(ii) சமபக்க முக்கோணத்தில் சுற்றுவட்ட மையம் (O) நடுக்கோட்டு மையம் (G), செங்கோட்டு மையம் (H) , உள்வட்ட மையம் (I) ஆகியன ஒரே புள்ளியில் அமையும்.

ஆய்லர் (1707–1783)
சுவிட்சர்லாந்து



2.3 பிதாகரஸ் தேற்றம்

2..3.1 பிதாகரஸ் தேற்றம்

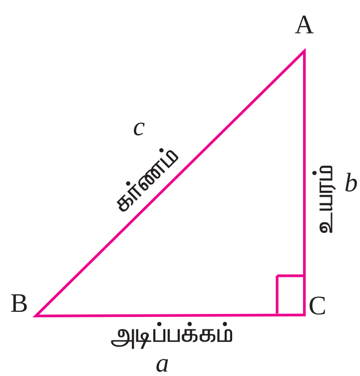
ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் வர்க்கமானது மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

செங்கோண ΔABC இல் $\angle C = 90^\circ$.

$BC = a, CA = b$ மற்றும் $AB = c$ என்க.

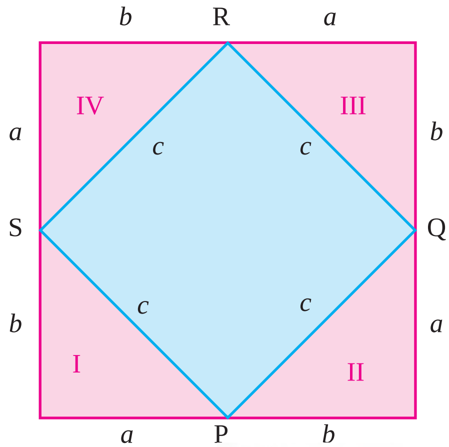
பிதாகரஸ் தேற்றப்படி, $a^2 + b^2 = c^2$.

இச்சமன்பாட்டைப் பல கணிதவியலாளர்கள் பல வழிகளில் நிரூபித்துள்ளனர். நாம் இங்கு எளிய வழியில் பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் நிரூபணத்தைக் காண்போம்.



பக்க அளவு $(a + b)$ உள்ளவாறு ஒரு சதுரத்தை அமைப்போம். இதனைப் பயன்படுத்தி $a^2 + b^2 = c^2$ என நிறுவலாம்.

சதுரத்தின் பரப்பு பக்க அளவின் வர்க்கம் என்பதை நாம் அறிவோம்.



படத்திலிருந்து, $(a + b)$ என்ற பக்கத்தைக் கொண்ட சதுரத்தின் பரப்பு $= (a + b)^2$

= முக்கோணம் I, II, III, IV இன் பரப்புகள் + சதுரம் PQRS இன் பரப்பு.

$(a + b)^2$ = 4 (செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பு) + (சதுரம் PQRS இன் பரப்பு)

$$(a + b)^2 = 4\left(\frac{1}{2} \times a \times b\right) + c^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

எனவே, பிதாகரஸ் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

செய்து பார்

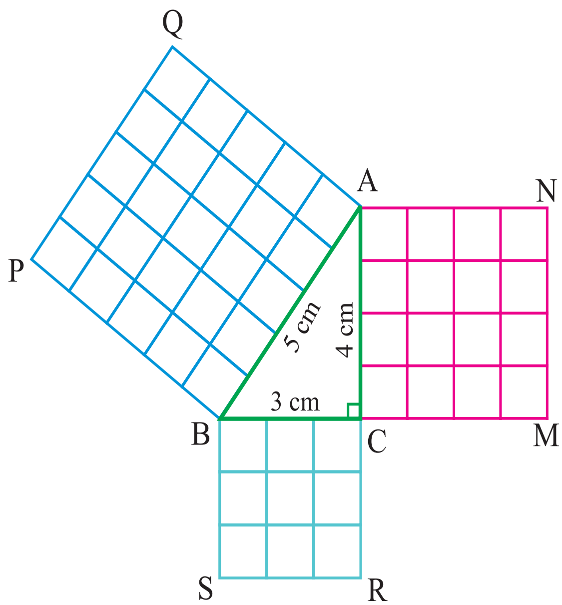
பிதாகரஸ் தேற்றம்

$\angle C = 90^\circ$, AB = 5 செ.மீ., AC = 4 செ.மீ. மற்றும் BC = 3 செ.மீ. என்று உள்ளவாறு செங்கோண ΔABC ஐ வரைக.

இந்த முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகளைப் பக்கமாகக் கொண்ட சதுரங்களை வரைக.

சதுரங்களை 1 ச.செ.மீ. அளவுள்ள சிறு சதுரங்களாகப் பிரிக்கவும்.

சிறு சதுரங்களை எண்ணிப் பார்த்தால் பிதாகரஸ் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டுவிடும்.



ABPQ இல் உள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை = 25

BCRS இல் உள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை = 9

ACMN இல் உள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை = 16

ABPQ இல் உள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை = BCSR இல் உள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை + ACMN இல் உள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை

பிதாகரஸ் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யும் எண்களுக்குப் பித்தாகரஸின் மூன்றன் தொகுதி என்று பெயர்.

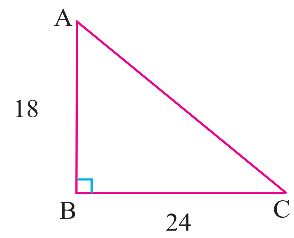
எடுத்துக்காட்டு 2.1

ΔABC இல் $\angle B = 90°$, AB = 18 செ.மீ. மற்றும் BC = 24 செ.மீ. எனில் AC இன் நீளம் காண்க.

தீர்வு

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= 18^2 + 24^2$$
$$= 324 + 576$$
$$= 900$$
$$\therefore AC = \sqrt{900} = 30 \text{ செ.மீ.}$$



எடுத்துக்காட்டு 2.2

சதுரத்தின் சுற்றளவு 40 செ.மீ எனில் அதன் மூலை விட்டங்களின் நீளங்களின் கூடுதல் என்ன?

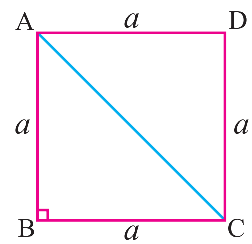
தீர்வு

சதுரத்தின் பக்க அளவை 'a' என்க. AC மூலைவிட்டம்.

சதுரம் ABCDஇன் சுற்றளவு = $4a$ அலகுகள்

$4a$ = 40 செ.மீ. [தரவு]

$a = \frac{40}{4} = 10$ செ.மீ.



சதுரத்தின் ஒவ்வொரு கோணமும் 90^o மற்றும் மூலை விட்டங்கள் சமம்.

ΔABC இல், $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$

$\therefore AC = \sqrt{200} = \sqrt{2 \times 100} = 10\sqrt{2}$

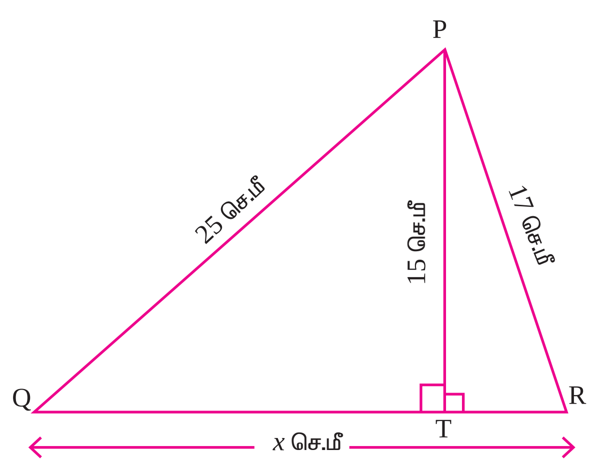
$= 10 \times 1.414 = 14.14$ செ.மீ.

மூலைவிட்டம் AC = மூலைவிட்டம் BD

எனவே, மூலைவிட்டங்களின் நீளங்களின் கூடுதல் = 14.14 + 14.14 = 28.28 செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 2.3

படத்தில் ΔPQR இல், PT செங்கோடு. மேலும் PQ = 25 செ.மீ., PR = 17 செ.மீ. மற்றும் PT = 15 செ.மீ., QR = x செ.மீ. எனில் x இன் மதிப்பு காண்க.



தீர்வு

படத்திலிருந்து, QR = QT + TR.

செங்கோணம் முக்கோணம் PTQ இல், $\angle PTQ = 90°$ [PT செங்கோடு]

இப்போது QT, TR இன் மதிப்புகளைக் காண்போம்.

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$

$$\therefore PQ^2 - PT^2 = QT^2$$

$$\therefore QT^2 = 25^2 - 15^2$$

$$= 625 - 225 = 400$$

$QT = \sqrt{400} = 20$ செ.மீ. .....(1)

செங்கோண முக்கோணம் PTR இல்,

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி, $PR^2 = PT^2 + TR^2$

$$\therefore TR^2 = PR^2 - PT^2$$

$$= 17^2 - 15^2 = 289 - 225$$

$$TR^2 = 64$$

$TR = \sqrt{64} = 8$ செ.மீ.. ..... (2)

(1), (2) இலிருந்து $QR = QT + TR = 20 + 8$

$QR = 28$ செ மீ.

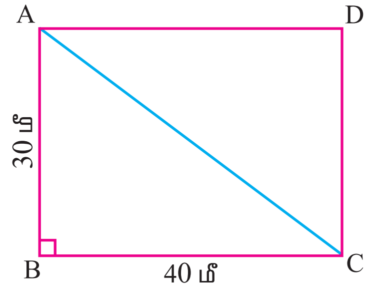
எடுத்துக்காட்டு 2.4

செவ்வக வடிவ வயலின் நீள அகலங்கள் முறையே 40மீ, 30மீ மூலைவிட்டத்தின் வழியே ஒரு மூலையிலிருந்து மற்றொரு மூலையை அடைந்தால் மீதப்படுத்தப்படும் தூரம் எவ்வளவு?

தீர்வு

தரவு : செவ்வக வயல் ABCD இன் நீளம் = 40 மீ, அகலம் = 30 மீ, $\angle B = 90^\circ$

செங்கோண முக்கோணம் ABC இல்,



பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 30^2 + 40^2$$

$$= 900 + 1600$$

$$= 2500$$

$$\therefore AC = \sqrt{2500}$$

$= 50$ மீ

A இலிருந்து C க்கு B வழியே,

தூரம் $= 30 + 40$

$= 70$ மீ

மீதப்படுத்தப்படும் தூரம் $= 70 - 50$

$= 20$ மீ.

பயிற்சி 2.1

1. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

(i) முக்கோணத்தின் மையக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி ....

(A) உள் வட்ட மையம் (B) வட்ட மையம்

(C) செங்கோட்டு மையம் (D) நடுக்கோட்டு மையம்

(ii) முக்கோணத்தின் குத்துக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி ....

(A) உள் வட்ட மையம் (B) வட்டம் மையம்

(C) செங்கோட்டு மையம் (D) நடுக்கோட்டு மையம்

(iii) முக்கோணத்தின் கோண இரு சம வெட்டிகள் சந்திக்கும் புள்ளி ....

(A) உள் வட்ட மையம் (B) வட்டம் மையம்

(C) செங்கோட்டு மையம் (D) நடுக்கோட்டு மையம்

(iv) முக்கோணத்தின் மையக் குத்துக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி ....

(A) உள் வட்ட மையம் (B) சுற்று வட்ட மையம்

(C) செங்கோட்டு மையம் (D) நடுக்கோட்டு மையம்

2. இருசம பக்க முக்கோணம் ABC இல் $AB = AC$ மற்றும் $\angle B = 65^\circ$ எனில் குறைந்த நீளமுடைய பக்கம் எது?

3. செங்கோண முக்கோணம் PQR இல், $PQ = 10$ செ.மீ. மற்றும் $PR = 24$ செ.மீ. எனில் QR இன் நீளம் காண்க? ($\angle P = 90^\circ$)

4. கீழே கொடுக்கப்பட்ட பக்க அளவுகள் செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்குமா? $AB = 25$ செ.மீ., $BC = 24$ செ.மீ., $AC = 7$செ.மீ.

5. ΔPQR இல் $\angle P = 25^\circ$, $\angle Q = 65^\circ$ எனில் ΔPQR செங்கோண முக்கோணம் ஆகுமா? மேலும் $PQ = 4$ செ.மீ., $PR = 3$ செ.மீ. எனில் QR இன் நீளம் காண்க.

6. 15 மீ நீளமுள்ள ஒரு ஏணி சுவற்றில் 12 மீ உயரத்தில் உள்ள சன்னலைத் தொடுகிறது எனில் சுவற்றிற்கும் ஏணிக்கும் இடையே தரையில் உள்ள தொலைவைக் காண்க?

7. 10 செ.மீ. நீளமுள்ள சமபக்க முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டின் நீளம் என்ன?

8. 12, 5, 13 என்ற எண்கள் பிதாகரஸின் மூன்றன் தொகுதியாக அமையுமா?

9. ஒரு ஏணி 16 அடி உயரத்தில் உள்ள இரண்டாவது மாடி சன்னலின் கீழ்ப் பகுதியைத் தொடுமாறு உள்ளது. ஏணியின் அடிப்பாகம் தரையில் 12 அடி தொலைவில் உள்ளது. வண்ணம் பூசுபவர் வண்ணங்களைக் கலக்கும்போது பக்கத்து வீட்டுக்காரரின் நாய் ஏணியைத் தள்ளி விடுவதால் ஏணி மேலும் 2 அடி தொலைவு நகர்கிறது எனில் ஏணி தொடும் உயரத்தைக் காண்க.

கணக்கு

2.4 வட்டங்கள்

கீழ்க்காணும் பொருட்களை நீங்கள் அறிந்திருப்பீர்கள். அவற்றின் வடிவங்களைக் கூற இயலுமா?

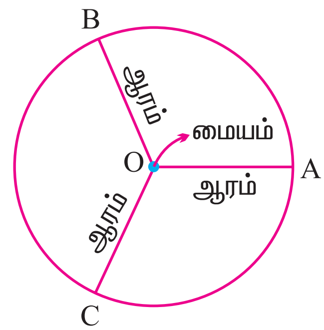
(அ) மிதி வண்டியின் சக்கரம்

(ஆ) தேசியச் சின்னத்திலுள்ள அசோகச் சக்கரம்

(இ) முழு நிலவு

ஆம். உங்களின் விடை வட்டம். ஏனெனில், ஒரு தளத்தில் ஒரு நிலையான புள்ளிக்கும் சம தொலைவில் நகரும் புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் மாறாமலிருப்பதால் அதை ஒரு வட்டம் என அறியலாம்.

வட்டத்தின் வரையறை



வட்டம் என்பது ஒரு தளத்தில் உள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து சம தொலைவில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை ஆகும்.

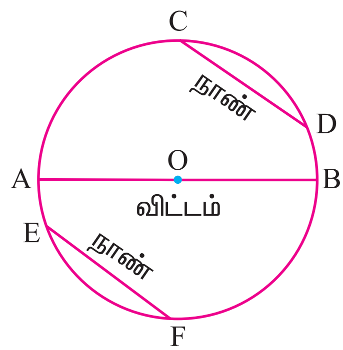
நிலையான புள்ளி வட்ட மையம் எனப்படும். சம தொலைவு ஆரம் எனப்படும்.

படத்தில் O என்பது வட்ட மையம். மேலும் OA, OB, OC ஆகியன ஆரங்கள்.

இங்கு, OA = OB = OC = r ஆகும்.

> குறிப்பு: ஒரு வட்டத்தில் உள்ள அனைத்து ஆரங்களும் சம நீளமுடையவை.

நாண்



வட்டத்தின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டு நாண் எனப்படும்.

படத்தில் CD, AB, EF ஆகியன நாண்கள் ஆகும்.

இங்கு நாண் AB, வட்ட மையம் O வழியே செல்கிறது.

விட்டம்

வட்ட மையத்தின் வழியே செல்லும் நாண் விட்டம் எனப்படும். வட்டத்தில் வரையப்படும் மிகப் பெரிய நாண் விட்டம் ஆகும்.

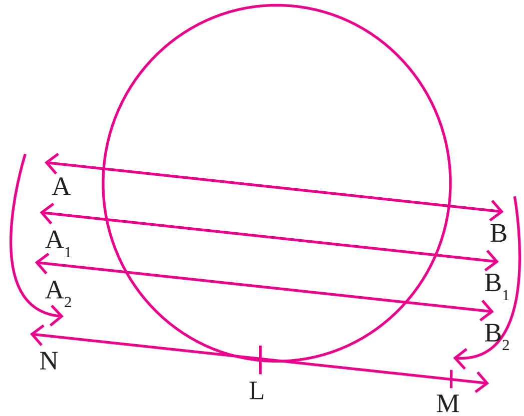
படத்தில், AOB என்பது ஒரு விட்டம். AB இன் மையம் O. OA = OB = ஆரம் ஆகும்.

எனவே, விட்டம் = 2 × ஆரம் (அல்லது) ஆரம் = (விட்டம்) ÷ 2

> குறிப்பு: (i) ஒவ்வொரு விட்டத்தின் மையமும் வட்ட மையம் ஆகும்.
> (ii) வட்டத்தில் வரையப்படும் அனைத்து விட்டங்களும் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளாகும். அவை சந்திக்கும் புள்ளி, வட்ட மையம் ஆகும்.

ஒரு வட்டத்தின் வெட்டுக் கோடுகள்

ஒரு வட்டத்தின் இரு புள்ளிகளை வெட்டிக் கொண்டு செல்லும் கோடு வெட்டுக் கோடு எனப்படும்.



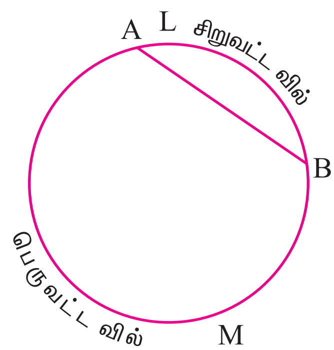
தரப்பட்டுள்ள படத்தில், AB ஒரு வெட்டுக் கோடு. இது வட்டத்தை A, B எனும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொண்டு செல்கிறது. தற்போது AB எனும் வெட்டுக் கோட்டைக் கீழ்ப்புறமாக நகர்த்து.அது A_1B_1, A_2B_2, ..., என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொண்டே செல்லும்.

கீழே நகர்த்தும் போது Aக்கும் Bக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவு குறைந்து கொண்டே செல்லும். ஒரு நிலையில், வெட்டுக் கோடு AB, வட்டத்தை L என்ற ஒரு புள்ளியில் மட்டும் தொட்டுச் செல்லும். இந்நிலையில், LM என்ற கோடு தொடுகோடாக மாறுகிறது. இது வட்டத்தை ஒரு புள்ளியில் தொட்டுச் செல்லும்.

தொடுகோடு

தொடுகோடு என்பது வட்டத்தினை ஒரு புள்ளியில் மட்டும் தொட்டுச் செல்லும் கோடு ஆகும். தொட்டுச் செல்லும் அப்புள்ளியைத் தொடுபுள்ளி என அழைக்கிறோம்.

வட்ட வில்



படத்தில் AB நாண். இந்த நாண் வட்டத்தை இரண்டாகப் பிரிக்கிறது.

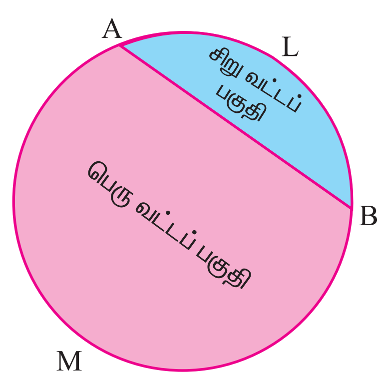
வளைந்த பகுதிகள் ALB மற்றும் AMB ஆகியன வட்ட வில் எனப்படும்.

வட்ட வில் ‘ $\frown$ ’ என்ற குறியால் குறிப்பிடப்படும்.

இங்கு சிறிய வில் $\overset{\frown}{ALB}$ சிறு வட்ட வில் என்றும்

பெரிய வில் $\overset{\frown}{AMB}$ பெருவட்ட வில் என்றும் அழைக்கப்படும்.

வட்டப் பகுதி

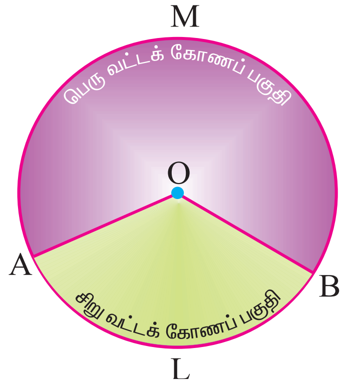


வட்டத்தை ஒரு நாண் இரண்டு பகுதியாகப் பிரிக்கிறது. ஒவ்வொரு பகுதியும் வட்டப் பகுதி எனப்படும்.

சிறிய வட்ட வில்லைக் கொண்ட பகுதி சிறு வட்டப் பகுதி ஆகும்.

பெரு வட்ட வில்லைக் கொண்ட பகுதி பெரு வட்டப் பகுதி எனப்படும்.

வட்டக் கோணப் பகுதி



ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு ஆரங்களாலும், அதன் வட்ட வில்லாலும் அடைபடும் பகுதியே வட்டக் கோணப் பகுதி எனப்படும்.

இவ்வட்டத்தில், சிறு பரப்பு OALB சிறு வட்டக் கோணப் பகுதி என்றும், பெருபரப்பு OAMB பெரு வட்டக் கோணப் பகுதி என்றும் அழைக்கப்படும்.

பயிற்சி 2.2

1. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

(i) .... என்பது வட்ட மையத்திற்கும் வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிக்குமுள்ள தூரம் ஆகும்.

(A) பகுதி (B) நீளம் (C) விட்டம் (D) ஆரம்

(ii) விட்டத்திற்கும் ஆரத்திற்குமுள்ள தொடர்பு ....

(A) ஆரம் = 2 × விட்டம் (B) ஆரம் = விட்டம் + 2

(C) விட்டம் = ஆரம் + 2 (D) விட்டம் = 2 × ஆரம்

(iii) வட்டத்தின் மிகப் பெரிய நாண் ....

(A) ஆரம் (B) வெட்டுக் கோடு

(C) விட்டம் (D) தொடுகோடு

2. வட்டத்தின் இரு விட்டங்களின் நீளங்களின் கூடுதல் 200 மி.மீ. எனில் அவ்வட்டத்தின் ஆரத்தினை செ.மீ. இல் காண்க.

3. வரையறு: வட்டப் பகுதி, வட்டக் கோணப் பகுதி, வட்ட வில்.

4. வரையறு: தொடுகோடு மற்றும் வெட்டுக்கோடு.

கருத்துச் சுருக்கம்

- நடுக்கோட்டு மையம் : ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியானது, அம்முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் ஆகும்.
- செங்கோட்டு மையம் : ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் குத்துக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியானது , அம்முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் எனப்படும்.
- உள் வட்ட மையம் : ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் இருசம வெட்டிகள் சந்திக்கும் புள்ளி அம்முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம் எனப்படும்.
- சுற்று வட்ட மையம் : ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் மையக்குத்துக் கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளி சுற்று வட்ட மையம் எனப்படும்.

- வட்டம் : வட்டம் என்பது தளத்தில் உள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து சம தொலைவில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை ஆகும்.
- நாண் : வட்டத்தின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டு நாண் எனப்படும்.
- விட்டம் : வட்ட மையத்தின் வழியே செல்லும் நாண் விட்டம் எனப்படும்.
- வெட்டுக் கோடு : வட்டத்தின் இரு புள்ளிகளை வெட்டிக் கொண்டு செல்லும் கோடு வெட்டுக் கோடு எனப்படும்.
- தொடுகோடு : தொடுகோடு என்பது வட்டத்தினை ஒரு புள்ளியில் மட்டும் தொட்டுச் செல்லும் கோடு ஆகும். தொட்டுச் செல்லும் அப்புள்ளியைத் தொடுபுள்ளி என அழைக்கிறோம்.
- வட்டப் பகுதி : வட்டத்தை ஒரு நாண் இரண்டு பகுதியாகப் பிரிக்கிறது. ஒவ்வொரு பகுதியும் வட்டப் பகுதி எனப்படும்.
- வட்டக் கோணப் பகுதி : ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு ஆரங்களாலும், அதன் வட்ட வில்லாலும் அடைபடும் பகுதியே வட்டக் கோணப் பகுதி எனப்படும்.

கணித மன்றச் செயல்பாடு

பிதாகரஸின் மூன்றன் தொகுதியைக் கண்டறிதல்

m^2+n^2, m^2-n^2, $2mn$ இங்கு $m > n$; $m, n \in \mathbb{N}$ என்ற நிபந்தனைப்படி நாம் பிதாகரஸின் பல்வேறு மூன்றன் தொகுதிகளைக் கண்டறியலாம்.

$m = 2$ மற்றும் $n = 1$ எனில் ,

$m^2+n^2 = 2^2+1^2 = 5$, $m^2-n^2 = 2^2-1^2 = 3$, $2mn = 2\times2\times1 = 4$

5, 3, 4 ஆகியவை பிதாகரஸின் மூன்றன் தொகுதிகளாகும்.

எந்தவொரு பிதாகரஸின் மூன்றன் தொகுதியின் மடங்குகளும் பிதாகரஸின் மூன்றன் தொகுதியாகவே இருக்கும்.

உதாரணமாக 5, 3, 4 இன் மடங்குகளான (10, 6, 8), (15, 9, 12) , (20, 12, 16) , ... போன்ற அனைத்தும் பிதாகரஸின் மூன்றன் தொகுதியாகும்.

இவ்வாறு மேலும் பல பிதாகரஸின் மூன்றன் தொகுதியைக் கண்டறிக?

விவரங்களைக் கையாளுதல்

3

3.1 அறிமுகம்

3.2 நிகழ்வெண்பட்டியல் அமைப்பதை நினைவு கூர்தல்

3.3 தொகுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம், நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைதல்

3.4 எளிய வட்ட விளக்கப்படம் வரைதல்

3.5 மைய நிலைப் போக்கு அளவைகள்

R. A . ஃபிஷர்

(17பிப்ரவரி 1890 – 29 ஜுலை 1962)

பிழைக் கொள்கைகளில் R.A. ஃபிஷர் மிகுந்த ஆர்வமுடையவராக இருந்தார். இதனால் அவர் புள்ளியியல் தொடர்பான கணக்குகளைச் சோதனை செய்ய நேரிட்டது. 1915 – 1919 இடைப்பட்ட காலத்தில் அவர் கணித ஆசிரியராகவும், இயற்பியல் ஆசிரியராகவும் விளங்கினார். உலகம் முழுவதும் பயன்படுத்தப்படும் பரவல்படிப் பகுப்பாய்வு மற்றும் சம வாய்ப்புச் சோதனை மாதிரிகளை ஆராய்ந்தார். அவர் ‘நவீனப் புள்ளியியலின் தந்தை’ என அழைக்கப் படுகிறார்.

3.1 அறிமுகம்

செய்தித்தாள்கள் மற்றும் செய்தித் தொடர்புச் சாதனங்கள் வாயிலாகப் பல்வேறுபட்ட தகவல்கள் நமக்குத் தினமும் கிடைக்கின்றன. இவை எல்லாம் எண்கள் வடிவங்களாகத்தான் நமக்குத் தெரிய வருகின்றன.

நம் நாட்டின் உணவு உற்பத்தி, உலகின் மக்கள்தொகை, பல்வேறு நாடுகளின் ஏற்றுமதி, இறக்குமதி விவரங்கள், நம் மாநிலத்தில் பள்ளிப்படிப்பில் இடையில் நின்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை, விபத்தில் இறப்போர் எண்ணிக்கை போன்ற பல தகவல்களை நாம் அறிய நேரிடுகிறது.

இப்படிப்பட்ட எல்லாத் தகவல்களிலும், நாம் எண்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். இந்த எண்களை நாம் விவரங்கள் என்கின்றோம். இவ்விவரங்கள் முடிவுகளை எடுக்க நமக்குப் பயன்படுகின்றன. ஒவ்வொரு குடிமகனின் வாழ்விலும் இவை சிறப்பிடம் வகிக்கின்றன. ஆதலால், பொருத்தமான மற்றும் சரியான தகவல்களை இப்படிப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு அறிய வேண்டியது இன்றியமையாதது.

பொதுவாக, கணக்கீடு செய்யப்பட்ட விவரங்கள் படிக்க, புரிந்து கொள்ள மற்றும் ஆய்வு செய்ய உகந்ததல்ல. இவ்விவரங்களைக் கவனத்துடன் கையாளுவதன் மூலம் அவற்றைப் பல்வேறு வடிவங்களில் அளிக்க முடியும். இதன் மூலம் எந்த ஒரு சராசரி மனிதனும் புரிந்து கொள்ளும் வகையிலும், பார்த்தவுடன் அறிந்து கொள்ளும் வகையிலும் இவ்விவரங்களைப் பற்றிய செய்திகளைப் பெற முடியும்.

3.2 நிகழ்வெண்பட்டியல் அமைப்பதை நினைவு கூர்தல்

ஒரு நிகழ்வெண் பட்டியல் அமைக்கும் முறையை நாம் ஏழாம் வகுப்பில் கற்றுள்ளோம். அம்முறையை இங்கு நினைவு கூர்வோம்.

3.2.1 தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கு நிகழ்வெண் பட்டியல் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 3.1

பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வெண் பட்டியல் தயார் செய்க :

15, 17, 17, 20, 15, 18, 16, 25, 16, 15,

16, 18, 20, 28, 30, 27, 18, 18, 20, 25,

16, 16, 20, 28, 15, 18, 20, 20, 20, 25.

தீர்வு

மேற்குறிப்பிட்ட விவரங்களுக்குக் கீழ்க்கண்டவாறு நிகழ்வெண்பட்டியலை அமைக்கலாம்.

எண் (x)	நேர்க்கோட்டுக் குறிகள் (Tally Marks)	நிகழ்வெண் *(frequency)*
15	||||	4
16	~~||||~~	5
17	||	2
18	~~||||~~	5
20	~~||||~~ ||	7
25	|||	3
27	|	1
28	||	2
30	|	1
	மொத்தம்	**30**

3.2.2 தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு நிகழ்வெண்பட்டியல் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 3.2

ஒரு கணிதத் தேர்வில் 50 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் (100க்கு) பின்வருமாறு :

43, 88, 25, 93, 68, 81, 29, 41, 45, 87, 34, 50, 61, 75, 51, 96, 20, 13, 18, 35,
25, 77, 62, 98, 47, 36, 15, 40, 9, 25, 39, 60, 37, 50, 19, 86, 42, 29, 32, 61,
45, 68, 41, 87, 61, 44, 67, 30, 54, 8.

மேற்கண்ட விவரங்களுக்குப் பிரிவு இடைவெளிகளுடன் ஒரு நிகழ்வெண் பட்டியலைத் தயார் செய்க.

தீர்வு

இங்குக் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பெண்களின் எண்ணிக்கை = 50

வீச்சு = மீப்பெரு மதிப்பு – மீச்சிறு மதிப்பு

= 98 – 8 = 90

இதை 10 பிரிவு இடைவெளிகளாகப் பிரிப்போம்.

$\therefore$ பிரிவு இடைவெளியின் நீளம் $= \dfrac{\text{வீச்சு}}{\text{பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை}}$

$= \dfrac{90}{10} = 9$

கணிதத் தேர்வில் 50 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் நிகழ்வெண் பட்டியல், கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவாறு அமைக்கப்படுகிறது.

பிரிவு இடைவெளி (Class Interval)	நேர்க்கோட்டுக் குறிகள் (Tally Marks)	நிகழ்வெண் (*frequency*)
0 - 10	||	2
10 - 20	||||	4
20 - 30	~~||||~~ |	6
30 - 40	~~||||~~ ||	7
40 - 50	~~||||~~ ||||	9
50 - 60	||||	4
60 - 70	~~||||~~ |||	8
70 - 80	||	2
80 - 90	~~||||~~	5
90 - 100	|||	3
	மொத்தம்	**50**

இவ்வாறாகப் பெறப்பட்ட விவரங்கள் அனைத்தும் தொகுக்கப்பட்டு கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளன:

பிரிவு இடைவெளி (C.I)	0-10	10-20	20- 30	30-40	40- 50	50- 60	60- 70	70- 80	80-90	90-100
நிகழ்வெண் (*f*)	2	4	6	7	9	4	8	2	5	3

3.3 தொகுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைதல்

புள்ளி விவரங்களைப் படங்கள் அல்லது வடிவக் கணிதப் படங்கள் மூலமாகக் குறிப்பிடலாம். பொதுவாக இப்படங்கள் ‘வரைபடங்கள்’ என்று அழைக்கப்படும். இவ்வரைபடங்களின் வாயிலாக விவரங்கள் ஆர்வத்துடன் படிக்க ஏதுவாகவும், குறுகிய காலத்தில் எளிதாகப் புரிந்து கொள்ளும்படியாகவும் உள்ளன. இவ்வரைபடங்களைப் பல வழிகளில் குறிப்பிடலாம். இந்த அத்தியாயத்தில் பின்வரும் வரைபடங்களின் வகைகளைப் பற்றி நாம் கற்போம்.

(i) நிகழ்வுச் செவ்வகம் (Histogram)

(ii) நிகழ்வுப் பலகோணம் (Frequency Polygon)

3.3.1 நிகழ்வுச் செவ்வகம் (Histogram)

தொடர்ச்சியான நிகழ்வெண் பரவலை இரு பரிமாண வரைபடத்தில் குறிக்கும் அமைப்பை நிகழ்வுச் செவ்வகம் என்பர்.

ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தில், செவ்வகங்கள் ஒன்றின் பக்கத்தில் ஒன்றாக இடைவெளியின்றித் தொடர்ச்சியாக வரையப்படுகின்றன. அதாவது, செவ்வகங்கள் பிரிவு இடைவெளிகள் மீது வரையப்படுகின்றன. இச்செவ்வகங்களின் பரப்புகள் நிகழ்வெண்களுக்கு நேர் விகிதத்தில் அமைகின்றன.

3.3.1 (அ) தொடர்ச்சியான நிகழ்வெண் பரவலுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைதல்

செய்முறை

படி 1 : தொடர்ச்சியற்ற நிலையில் (விலக்கும் அமைப்பு) நிகழ்வெண் பரவல் இருப்பின் அதைத் தொடர்ச்சியான நிலைக்கு (சேர்க்கும் அமைப்பு) மாற்றி அமைக்கவும்.

படி 2 : பிரிவு இடைவெளிகளை வரைபடத்தில் X – அச்சின் மீது ஒரு சீரான அளவுத் திட்டத்தில் எடுத்துக் கொள்க.

படி 3 : சீரான அளவுத் திட்டத்துடன் Y– அச்சின் மீது நிகழ்வெண்களைக் குறிக்கவும்.

படி 4 : பிரிவு இடைவெளிகளை அடிப்பக்கங்களாகவும், அதற்குரிய நிகழ்வெண்களை உயரங்களாகவும் கொண்ட செவ்வகங்களை வரையவும்.

மேற்கூறிய முறையில் நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரையும் முறை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டில் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

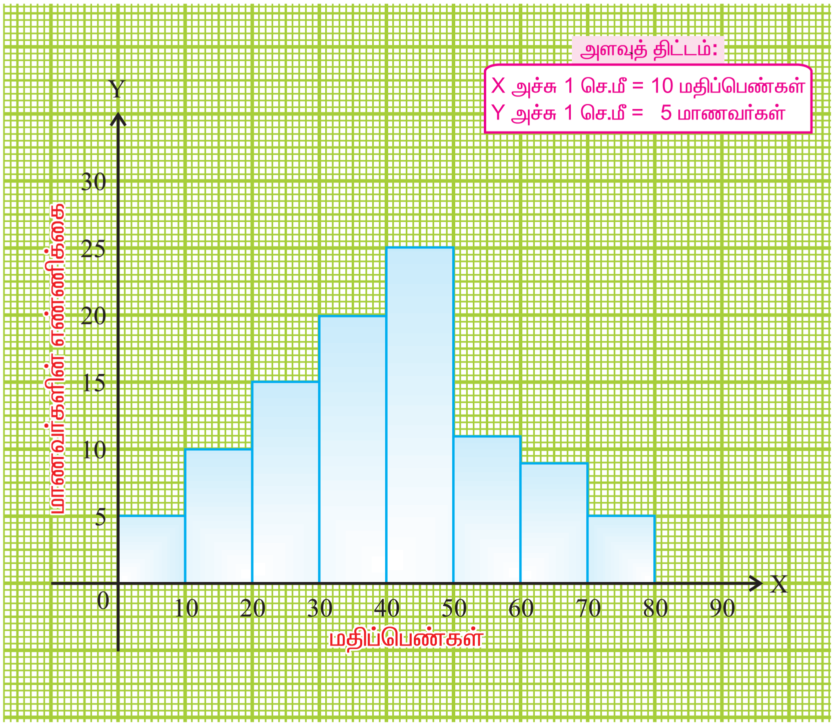
எடுத்துக்காட்டு 3.3

ஒரு தேர்வில் 100 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரையவும்.

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	10	15	20	25	12	8	5

தீர்வு

பிரிவு இடைவெளி அளவு 10 மதிப்பெண்ணாக உள்ளவாறு எல்லா இடைவெளிகளும் உள்ளன. இந்தப் பிரிவு இடைவெளிகளை X–அச்சின் மீது குறிப்போம். Y–அச்சின் மீது மாணவர்களின் எண்ணிக்கைகளைக் குறிப்போம். தக்க அளவுத் திட்டங்களை இவ்விரண்டு அச்சுகளிலும் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கான நிகழ்வுச்செவ்வகம் கீழே தரப்பட்டுள்ளதைக் காணவும்.



படம் 3.1

குறிப்பு : மேற்கண்ட படத்தில் செவ்வகங்கள் தொடர்ச்சியாக வரையப்பட்டுள்ளன. இச்செவ்வகங்களின் உயரங்கள் அவற்றின் நிகழ்வெண்களுக்கு நேர் விகிதத்தில் உள்ளன. பிரிவு இடைவெளிகளின் அளவுகள் சமமாக உள்ளதால் செவ்வகங்களின் பரப்புகள், அவற்றிற்கான நிகழ்வெண்களுக்கு நேர்விகிதத்தில் உள்ளன.

3.3.1 (ஆ) தொடர்ச்சியற்ற பிரிவு இடைவெளிகளுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைதல்

எடுத்துக்காட்டு 3.4

ஒரு வனப்பகுதியிலுள்ள மரங்களின் உயரங்கள் பின்வருமாறு கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. இவ்விவரங்களைக் கொண்டு நிகழ்வுச் செவ்வகம் அமைக்கவும்.

உயரங்கள் (மீட்டரில்)	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
மரங்களின் எண்ணிக்கை	10	15	25	30	45	50	35	20

தீர்வு

இக்கணக்கில் பிரிவு இடைவெளிகள் தொடர்ச்சியற்றதாக உள்ளன. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து அப்படியே செவ்வகங்கள் வரைந்தால், பிரிவு இடைவெளிக்கு இடையே இடைவெளிகள் அமையும். ஆனால், நிகழ்வுச் செவ்வகத்தில் செவ்வகங்கள் தொடர்ச்சியாக அமைய வேண்டும். எனவே, இந்த இடைவெளிகளைத் தொடர்ச்சியாக இருக்கும்படி மாற்ற வேண்டும். இதற்கு சரிசெய் காரணி தேவைப்படுகிறது. இதைப் பின்வருமாறு காண்போம்.

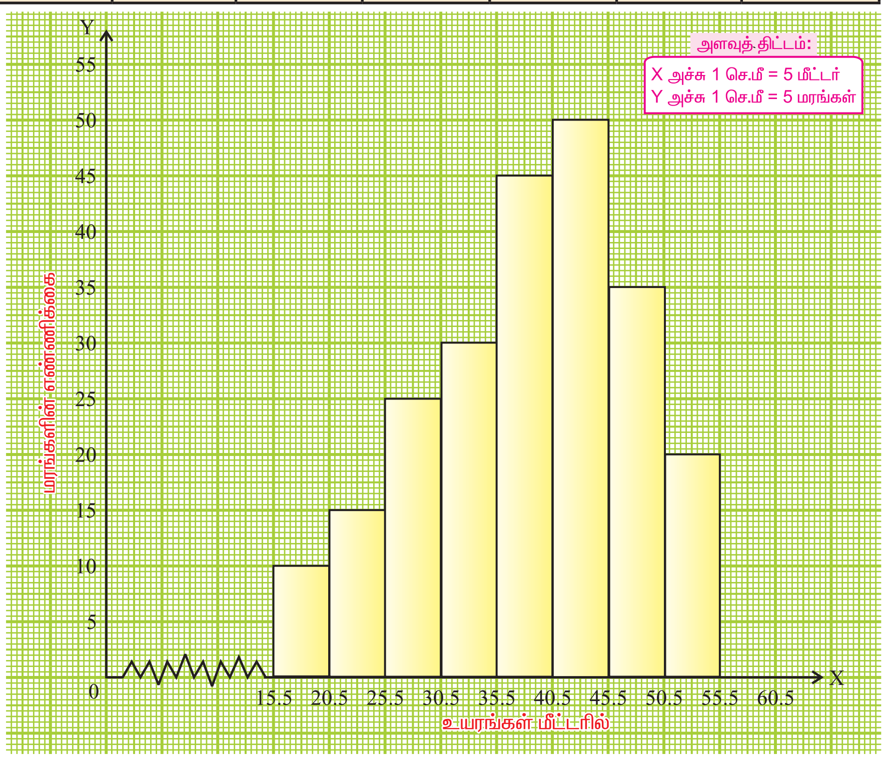
சரிசெய்காரணி $= \frac{1}{2}$ [(ஏதேனும் ஒரு பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லை) – (அதற்கு உடனடியாக முன்னுள்ள பிரிவு இடைவெளியின் மேல் எல்லை)]

$$= \frac{1}{2}(21-20) = 0.5$$

மேற்கண்ட பிரிவு இடைவெளியில், ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லையிலிருந்து சரிசெய் காரணி 0.5 ஐக் கழிக்கவும், மேல் எல்லையுடனும் சரிசெய் காரணி 0.5 ஐக் கூட்டவும். இவ்வாறு மாற்றியமைக்கப்பட்ட அட்டவணை பின்வருமாறு இருக்கும்.

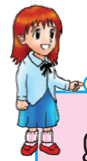
உயரங்கள் (மீட்டரில்)	15.5-20.5	20.5-25.5	25.5-30.5	30.5-35.5	35.5-40.5	40.5-45.5	45.5-50.5	50.5-55.5
மரங்களின் எண்ணிக்கை	10	15	25	30	45	50	35	20

இப்பொழுது மேலே கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண்பரவல் அட்டவணை, தொடர்ச்சியான அட்டவணையாக மாற்றப்பட்டுள்ளது. அதற்கேற்ற, நிகழ்வுச் செவ்வகம் அருகில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.



படம் 3.2

குறிப்பு: படம் 3.2 இல் நிகழ்வுச் செவ்வகத்தில் X–அச்சில் முதல் மதிப்பு 15.5 இல் தொடங்குகின்றது. இங்கு ஆதியிலிருந்து தொடங்குவதற்கு மாறாக 15.5இல் தொடங்குவதால் இந்த சிறு இடைவெளியை முறுக்கு வளைவாகக் குறிப்பிடுகின்றோம். இம்முறுக்கு வளைவு நிகழ்வுச் செவ்வகம் ஆதியில் தொடங்குவதற்குப் பதில் வேறு இடத்தில் (இங்கு 15.5 இல்) தொடங்குகின்றது எனக் குறிக்க உதவுகிறது.



நீவிர் அறிவீரா?

இந்த முறுக்கு வளைவு குறுக்கு நெடுக்கான (Zig-Zag) கோட்டின் மூலம் குறிக்கப்படுகின்றது.

3.3.2 நிகழ்வுப் பலகோணம் (Frequency Polygon)

வரைபடம் மூலம் நிகழ்வெண் பரவலைக் குறிப்பிடும் மற்றொரு முறை நிகழ்வுப் பலகோணம் ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வுச்செவ்வகம் வரைவோம். இச்செவ்வகங்களின் மேற்பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளைக் குறிப்போம். அடுத்தடுத்த மையப்புள்ளிகளை நேர்க்கோட்டுத்துண்டுகள் மூலம் இணைத்தால், ஒரு பலகோணம் கிடைக்கும். இந்தப் பலகோணம் நிகழ்வுப் பலகோணம் என்று அழைக்கப்படும். இவ்வாறு வரையப்படும் பலகோணத்தின் இரு முனைகளையும் அவற்றிற்கடுத்த நிகழ்வுச் செவ்வகத்தில் இல்லாத பிரிவு இடைவெளியின் மையப் புள்ளியுடன் இணைப்பது வழக்கம்.

நிகழ்வுப் பலகோணத்தை இருமுறைகளில் அமைக்கலாம்:

(i) நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தி வரைதல்

(ii) நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தாமல் வரைதல்

3.3.2 (அ) நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தி நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைதல்

செய்முறை

படி 1 : கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்களைக் கொண்டு நிகழ்வெண் பரவலைப்பெற்று நிகழ்வுச்செவ்வகம் வரையவும்.

படி 2 : அடுத்தடுத்து அமைகின்ற செவ்வகங்களின் மேற்பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். அடுத்தடுத்த மையப்புள்ளிகளை நேர்க்கோட்டுத் துண்டுகளால் இணைக்கவும்.

படி 3 : பூச்சிய நிகழ்வெண் கொண்ட இரு பிரிவு இடைவெளிகளை, முதல் செவ்வகத்திற்கு இடப்பக்கத்திலும், கடைசிச் செவ்வகத்திற்கு வலப்பக்கத்திலும் எடுத்துக் கொள்க. இவ்வாறு எடுக்கப்படும் பிரிவு இடைவெளிகள் கற்பனைப் பிரிவு இடைவெளிகள் என அறியப்படும்.

படி 4 : முதல் செவ்வகத்தின் மேற்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும், கடைசி செவ்வகத்தின் மேற்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் முறையே அருகில் உள்ள கற்பனைப் பிரிவு இடைவெளிகளின் மையப்புள்ளிகளுடன் இணைப்பதால் பலகோணம் நிறைவடைகிறது.

கணக்கு

எடுத்துக்காட்டு 3.5

கீழே கொடுக்கப்பட்ட பரவலுக்கு ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைந்து அதன் மீது ஒரு நிகழ்வுப் பலகோணம் அமைக்கவும்.

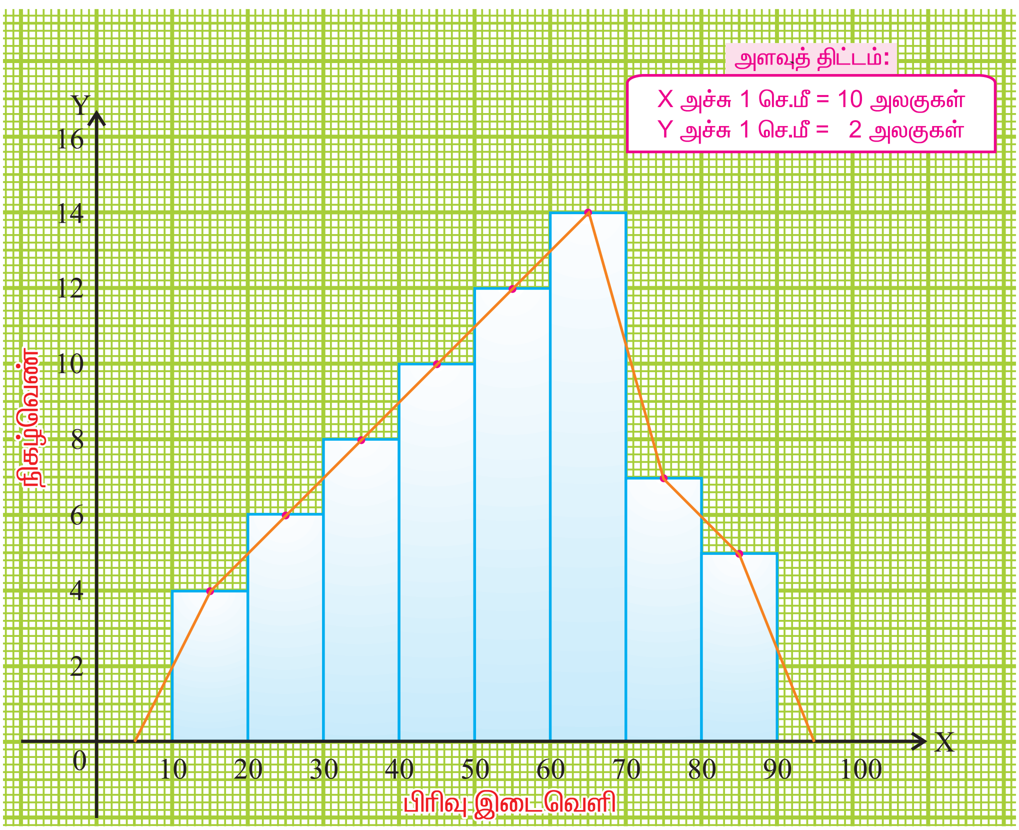
பிரிவு இடைவெளி	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
நிகழ்வெண்	4	6	8	10	12	14	7	5

தீர்வு

படம் 3.3இல் காட்டியுள்ளவாறு பிரிவு இடைவெளிகளை X–அச்சிலும், நிகழ்வெண்களை Y–அச்சிலும் தக்க அளவுத் திட்டம் கொண்டு வரைவோம்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வுச்செவ்வகத்தை வரைவோம். செவ்வகங்களின் மேற்பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளைக் குறிப்போம். கற்பனைப் பிரிவு இடைவெளிகளான 0-10 மற்றும் 90-100 பிரிவு இடைவெளிகளின் மையப்புள்ளிகளை X–அச்சின் மீது குறிப்போம். அளவுகோலைப் பயன்படுத்திக் கோட்டுத்துண்டுகளால் அடுத்தடுத்துள்ள மையப்புள்ளிகளை இணைப்போம்.

இப்பொழுது படம் 3.3 இல் உள்ளதுபோல் ஒரு நிகழ்வுப் பலகோணம் கிடைக்கிறது.



படம் 3.3

எடுத்துக்காட்டு 3.6

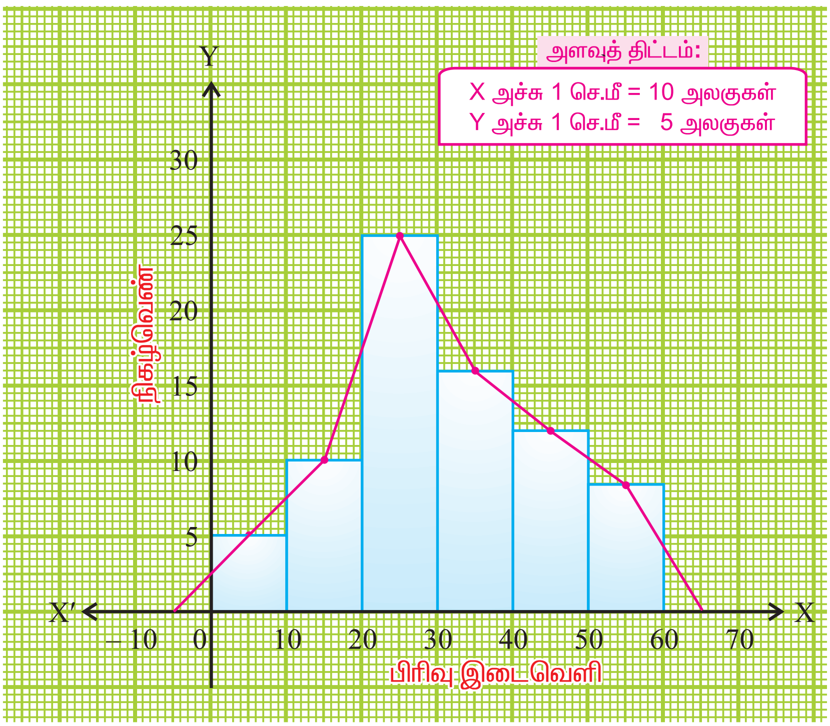
கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தி நிகழ்வுப் பலகோணத்தை வரைக.

பிரிவு இடைவெளி	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
நிகழ்வெண்	5	10	25	16	12	8

தீர்வு

படம் 3.4 இல் காட்டியுள்ளவாறு பிரிவு இடைவெளிகளை X-அச்சிலும், நிகழ்வெண் களை Y-அச்சிலும் தக்க அளவுத் திட்டம் கொண்டு வரைவோம்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைவோம். அடுத்தடுத்து அமையும் செவ்வகங்களின் மேற்பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். கற்பனைப் பிரிவு இடைவெளிகளான (– 10) - 0 மற்றும் 60-70 என்ற பிரிவு இடைவெளிகளின் மையப் புள்ளிகளை X-அச்சில் குறிக்கிறோம். ஓர் அளவுகோலைக் கொண்டு அடுத்தடுத்த மையப்புள்ளிகளை வரிசையாகக் கோட்டுத்துண்டுகளால் இணைக்கிறோம். நமக்கு நிகழ்வுப் பலகோணம் கிடைத்துள்ளது. (படம் 3.4 ஐப் பார்க்க)



படம் 3.4

குறிப்பு: சில சமயங்களில் கற்பனைப் பிரிவு இடைவெளிகள் கிடைக்கப் பெறுவதில்லை. எடுத்துக்காட்டு: மாணவர்கள் தேர்வில் பொதுவாகப் பூச்சியத்திற்குக் குறைவாக மதிப்பெண்கள் பெற இயலாது. இவ்வாறே அத்தேர்வில் அதிக மதிப்பெண்ணிற்கு மேலேயும் அவர்கள் மதிப்பெண் பெற இயலாது. இந்தச் சூழ்நிலையில் முதல் செவ்வகத்தின் இடப்பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியையும், கடைசிச் செவ்வகத்தின் வலப்பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியையும் எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். இப்பொழுது மையப்புள்ளிகளை வரிசையாக, அளவுகோலைப் பயன்படுத்திக் கோட்டுத் துண்டுகளால் இணைக்க வேண்டும்.

இந்தக் குறிப்பைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஏற்ப நிகழ்வுப்பலகோணம் அமைப்போம்.

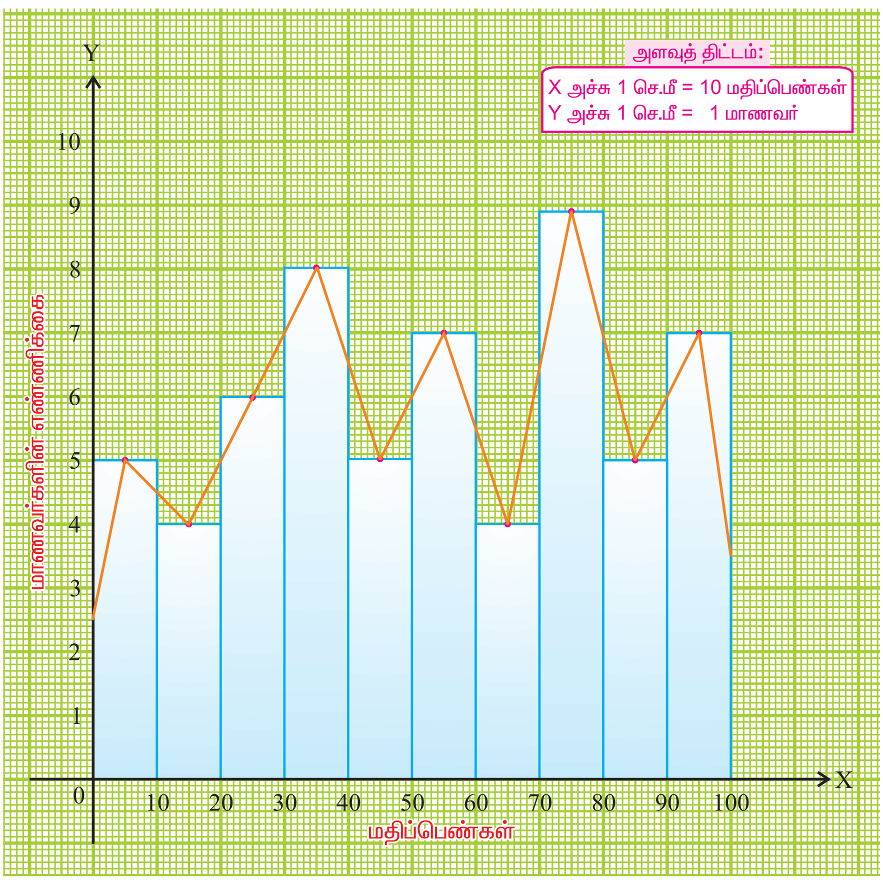
எடுத்துக்காட்டு 3.7

கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு, நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தி நிகழ்வுப் பலகோணத்தை வரைக.

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	4	6	8	5	7	4	9	5	7

தீர்வு

மதிப்பெண்களை X– அச்சிலும், மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை Y-அச்சிலும் எடுத்துக் கொள்கிறோம். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகம் அமைக்கிறோம். அடுத்தடுத்து அமைகின்ற செவ்வகங்களின் மேற்பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளைக்குறிக்கிறோம்.முதல்செவ்வகத்தின்இடப்பக்கத்தின்மையப்புள்ளியைக் குறிக்கிறோம். கடைசி செவ்வகத்தின் வலப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியைக் குறிக்கிறோம். அடுத்தடுத்த செவ்வகங்களின் மேல் பக்க மையப் புள்ளிகளை அளவுகோலைக் கொண்டு வரிசையாகக் நேர்க்கோட்டுத் துண்டுகளால் இணைக்கிறோம். இவ்வாறு இணைக்கப்பட்ட பலகோணத்தின் முதல் கோட்டுத்துண்டின் முனையை முதல் செவ்வகத்தின் இடப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியுடனும், கடைசி கோட்டுத்துண்டின் முனையைக் கடைசி செவ்வகத்தின் வலப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியுடனும் இணைக்கக் கிடைப்பது நிகழ்வுப் பலகோணம் ஆகும்.



படம் 3.5

3.3.2 (ஆ) நிகழ்வுச்செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தாமல் நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைதல்

செய்முறை

படி 1 : நிகழ்வெண் பரவலை எடுத்துக் கொள்ளவும். ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மையப் புள்ளியையும் குறிக்கவும்.

படி 2 : மையப்புள்ளிகளை X- அச்சிலும், நிகழ்வெண்களை Y-அச்சிலும் குறிக்கவும்.

படி 3 : ஒவ்வொரு மையப்புள்ளியிலும் நிகழ்வெண்ணுக்கேற்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

படி 4 : வரிசையாக இந்தப் புள்ளிகளை நேர்கோட்டுத் துண்டுகளால் இணைக்கவும்.

படி 5 : பல கோணத்தை முடிக்க, முதல் பிரிவு இடைவெளியின் முன் உள்ள மையப் புள்ளியையும், கடைசிப் பிரிவு இடைவெளியின் பின்னர் உள்ள மையப்புள்ளியையும் (இவை பூச்சிய நிகழ்வெண் கொண்டவாறு) X-அச்சில் இணைக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.8

கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தாமல், நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைக.

பிரிவு இடைவெளி	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
நிகழ்வெண்	4	6	8	10	12	14	7	5

தீர்வு

X-அச்சில் பிரிவு இடைவெளிகளையும், Y-அச்சில் நிகழ்வெண்களை எடுத்துக் கொள்கிறோம். நிகழ்வெண் பூச்சியமாக உள்ள 0-10 என்ற முதல் கற்பனை இடைவெளியையும், 90-100 என்ற இறுதி கற்பனை இடைவெளியையும் கருத்தில் கொள்கிறோம். இவ்விவரங்கள் அருகிலுள்ள அட்டவணையில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.

பிரிவு இடைவெளி	மையப்புள்ளி	நிகழ்வெண்
0-10	**5**	**0**
10-20	15	4
20-30	25	6
30-40	35	8
40-50	45	10
50-60	55	12
60-70	65	14
70-80	75	7
80-90	85	5
90-100	**95**	**0**

அட்டவணையிலிருந்து பின்வரும் புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிக்கவும்.

A (5, 0), B (15, 4),

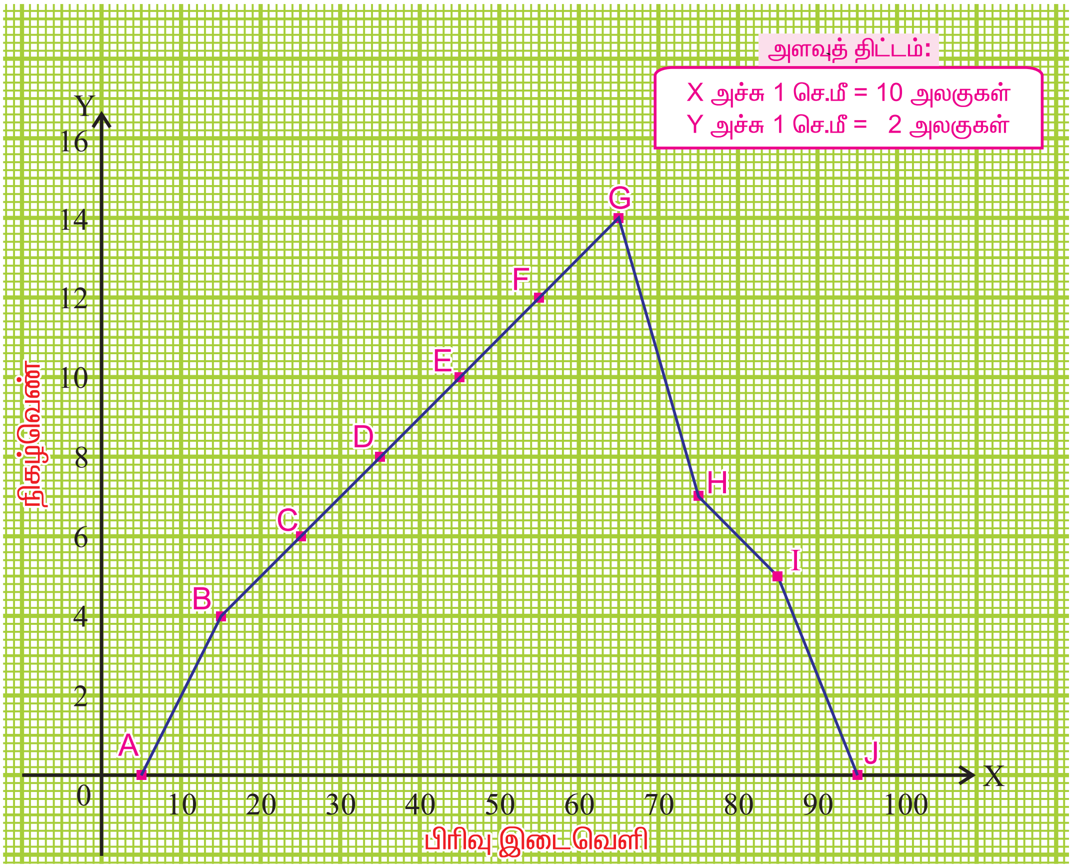
C (25, 6), D (35, 8),

E (45, 10), F (55, 12),

G (65, 14), H (75, 7),

I (85, 5) மற்றும் J (95, 0).

கோட்டுத் துண்டுகள் AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ ஆகியவற்றை இணைப்பதால் ABCDEFGHIJ என்ற நிகழ்வுப்பலகோணம் கிடைக்கின்றது. (பார்க்க படம் 3.6.)



படம் 3.6

பயிற்சி 3.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைக.

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
நிகழ்வெண்	8	12	6	14	10	5

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைக.

ஒரு ஏக்கரில் விளைச்சல் (குவிண்டால்)	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36 - 40
நெல் வயல்களின் எண்ணிக்கை	3	5	18	15	6	4

3. ஒரு கிரிக்கெட் ஆட்டத்தில் பார்வையாளர்களின் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்கு ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரையவும்.

வயது (ஆண்டுகளில்)	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
பார்வையாளர்களின் எண்ணிக்கை	4	6	12	10	8	2

4. ஒரு கிராமத்தில் உள்ள மக்களில் நீரிழிவு நோயினால் பாதிக்கப்பட்டவர்கள் பற்றிய விவரங்கள் பின்வருமாறு :

வயது (ஆண்டுகளில்)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	3	6	13	20	10	5

மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தி ஒரு நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைக.

5. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வுப் பலகோணம் அமைக்க

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
நிகழ்வெண்	7	10	23	11	8	5

6. பின்வரும் அட்டவணையில் அறிவுக்கூர்மைத் தேர்வு எழுதிய 150 போட்டியாளர்களைப் பற்றிய விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

அறிவுக்கூர்மை விகிதம்	55-70	70-85	85-100	100-115	115-130	130-145
போட்டியாளர்களின் எண்ணிக்கை	20	40	30	35	10	15

மேற்கண்ட நிகழ்வெண் பரவலுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வுப் பலகோணம் அமைக்க.

7. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தி நிகழ்வுப் பலகோணம் அமைக்க.

மதிப்பெண்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	9	3	4	6	2	3	4	5	7	8

8. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு, நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தாமல் நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைக.

வயது (ஆண்டுகளில்)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ஆட்களின் எண்ணிக்கை	6	11	25	35	18	12	6

9. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தாமல் நிகழ்வுப் பலகோணம் அமைக்கவும்.

பிரிவு இடைவெளி	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
நிகழ்வெண்	12	16	20	8	10	4

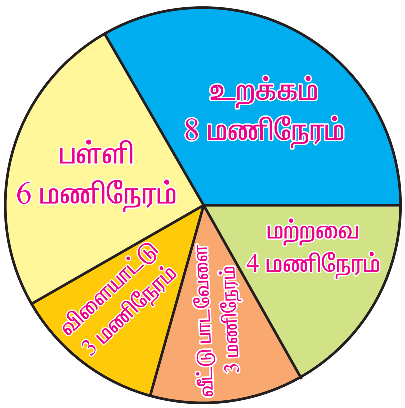
10. ஓர் ஆங்கிலத் தேர்வில் 40 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் (50க்கு) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வுப் பலகோணம் அமைக்கவும்.

29, 45, 23, 40, 31, 11, 48, 1, 30, 24, 25, 29, 25, 32, 31, 22, 9, 49, 19, 13, 32, 39, 25, 3, 27, 41, 12, 13, 2, 44, 7, 43, 15, 35, 40, 3, 12, 48, 49, 18.

3.4 எளிய வட்ட விளக்கப்படம் வரைதல்

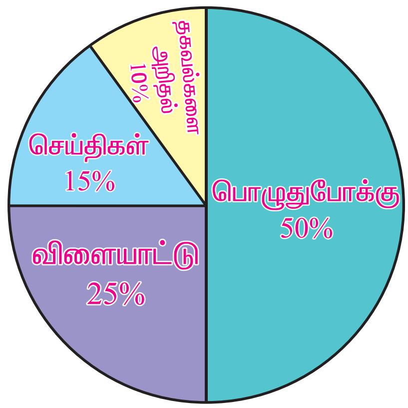
படம் 3.7 மற்றும் படம் 3.8 ஆகியவற்றில் காட்டியுள்ள விவர வட்ட விளக்கப்படங்களைப் போன்று எங்கேயாவது பார்த்து இருக்கிறீர்களா?

ஒரு பள்ளி மாணவன் ஒரு நாளில் (24 மணி நேரம்) செலவழித்த நேரங்கள்



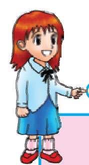
படம் 3.7

பல்வேறுபட்ட தொலைக்காட்சி அலைவரிசைகளைக் காண்பவர்கள்



படம் 3.8

மேற்கண்ட படங்களை வட்ட விளக்கப்படங்கள் என்று அழைப்போம். வட்ட விளக்கப்படம், அதன் முழுமைக்கும், ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் உள்ள தொடர்பை விளக்குகின்றது. இங்கு ஒரு வட்டம் வட்டக்கோணப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு வட்டக்கோணப்பகுதியின் அளவு அது குறிக்கும் செயல் மற்றும் தகவல்களுக்கு நேர்விகிதத்தில் இருக்கும். இந்த வட்டக்கோணப் பகுதி 'பை'(Pie) என்ற வட்ட வடிவத் திண்பண்டத்தின் துண்டுகள் போல் தோற்றமளிப்பதால் இதை ஆங்கிலத்தில் **Pie Chart** என்று கூறுவர்.



நீவிர் அறிவீரா?

பை (pie) என்பது ஒரு அமெரிக்க உணவு வகை

எடுத்துக்காட்டாக, படம் 3.7 இல்உள்ள வட்ட விளக்கப் படத்தில்

$$\left.\begin{array}{r}\text{மாணவன் உறக்கத்திற்கு}\\ \text{செலவிடும் நேர விகிதம்}\end{array}\right\} = \frac{\text{உறங்கும் நேரம்}}{\text{முழு நாள்}}$$

$$= \frac{8 \text{ மணி}}{24 \text{ மணி}} = \frac{1}{3}$$

எனவே, உறக்கத்திற்கான வட்டக்கோணப்பகுதியின் அளவு வட்டத்தில் $\frac{1}{3}$ பாகமாகும்.

$$\left.\begin{array}{r}\text{மாணவன் பள்ளியில்}\\ \text{செலவிடும் நேர விகிதம்}\end{array}\right\} = \frac{\text{பள்ளியில் உள்ள நேரம்}}{\text{முழு நாள்}}$$

$$= \frac{6 \text{ மணி}}{24 \text{ மணி}} = \frac{1}{4}$$

எனவே, பள்ளியில் செலவிடும் நேரத்திற்கான வட்டக்கோணப் பகுதியின் அளவு வட்டத்தில் $\frac{1}{4}$ பாகமாகும்.

$$\left.\begin{array}{r}\text{மாணவன் விளையாட்டில்}\\ \text{செலவிடும் நேர விகிதம்}\end{array}\right\} = \frac{\text{விளையாடும் நேரம்}}{\text{முழு நாள்}}$$

$$= \frac{3 \text{ மணி}}{24 \text{ மணி}} = \frac{1}{8}$$

எனவே, விளையாட்டிற்காகச் செலவிடும் நேரத்திற்கான வட்டக்கோணப் பகுதியின் அளவு வட்டத்தில் $\frac{1}{8}$ பாகமாகும்.

$$\left.\begin{array}{r}\text{மாணவன் வீட்டுப்பாட வேலையில்}\\ \text{செலவிடும் நேர விகிதம்}\end{array}\right\} = \frac{\text{வீட்டுப்பாட வேலை நேரம்}}{\text{முழு நாள்}}$$

$$= \frac{3 \text{ மணி}}{24 \text{ மணி}} = \frac{1}{8}$$

எனவே, வீட்டுப்பாட வேலையில் செலவிடும் நேரத்திற்கான வட்டக்கோணப் பகுதியின் அளவு வட்டத்தில் $\frac{1}{8}$ பாகமாகும்.

$$\left.\begin{array}{r}\text{மாணவன் இதர வேலையில்}\\ \text{செலவிடும் நேர விகிதம்}\end{array}\right\} = \frac{\text{இதர வேலை நேரம்}}{\text{முழு நாள்}}$$

$$= \frac{4 \text{ மணி}}{24 \text{ மணி}} = \frac{1}{6}$$

எனவே, இதர வேலையில் செலவிடும் நேரத்திற்கான வட்டக்கோணப் பகுதியின் அளவு வட்டத்தில் $\frac{1}{6}$ பாகமாகும்.

மேற்கண்ட எல்லாச் செயல்களின் பின்னக் காலங்களின் கூடுதல்

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{8 + 6 + 3 + 3 + 4}{24}$$

$$= \frac{24}{24} = 1 \text{ எனக் கிடைக்கிறது.}$$

இங்கு ஒருநாளில் மாணவன் செலவழித்த நேரம் வட்டத்தின் மூலம் குறிக்கப்படுகின்றது. வட்டத்தின் முழுப்பகுதியின் அளவு 1 எனக் கொள்க.

மாணவனின் வெவ்வேறு செயல்பாடுகள் ஆரங்களின் நேர விகிதாச்சாரத்திற்கு ஏற்ப வட்டக்கோணப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன. இந்த விகிதாச்சாரப் பகுதியை கோண அளவுகளைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம். வட்ட மையத்தில் அமையும் கோண அளவுகளின் கூடுதல் $360°$ என நமக்குத் தெரியும். எனவே நாம் வட்டக் கோணப் பகுதிகளைக் கோண அளவுகளைப் பயன்படுத்திக் குறிப்பிடலாம்.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம், கோண அளவுகளைப் பயன்படுத்தி வட்ட விளக்கப்படம் எவ்வாறு அமைக்கப்படுகிறது எனக் காண்போம்.

கணக்கு

எடுத்துக்காட்டு 3.9

ஒரு மாணவன் ஒரு வேலை நாளில் வெவ்வேறு செயல்களுக்காக செலவிட்ட நேரங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விவரங்களுக்குக் கோண அளவுகளைப் பயன்படுத்தி வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

செயல்	உறக்கம்	பள்ளி	விளையாட்டு	வீட்டுப்பாட வேலை	மற்றவை
கால அளவு	8	6	3	3	4

தீர்வு

24 மணிநேரம் கொண்ட ஒரு நாளில் வெவ்வேறு செயல்களுக்குச் செலவழித்த நேரங்களை 360° இன் பாகங்களாக மாற்றுவோம்.

உறக்க நேரம் 8 மணிநேரம் என்பதால் $\frac{8}{24} \times 360^0 = 120°$ என்று வட்டமையக் கோணமுடைய வட்டக்கோணப் பகுதியில் இதனைக் குறிக்க வேண்டும்.

எனவே, உறக்கத்தைக் குறிக்கும் வட்டக்கோணப் பகுதியின் மையக்கோணம் 120°.

இதுபோலவே, மற்ற செயல்களான பள்ளி, விளையாட்டு, வீட்டுப்பாட வேலை மற்றும் மற்றவை ஆகியவற்றின் வட்டக்கோணப் பகுதியின் மையக்கோணங்கள் கணக்கிடப்பட்டு, பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

செயல்	கால அளவு	மையக்கோண அளவு
உறக்கம்	8	$\frac{8}{24} \times 360^0 = 120^0$
பள்ளி	6	$\frac{6}{24} \times 360^0 = 90^0$
விளையாட்டு	3	$\frac{3}{24} \times 360^0 = 45^0$
வீட்டுப்பாட வேலை	3	$\frac{3}{24} \times 360^0 = 45^0$
மற்றவை	4	$\frac{4}{24} \times 360^0 = 60^0$
மொத்தம்	24	360^0

வட்ட விளக்கப் படத்தை அமைத்தல்

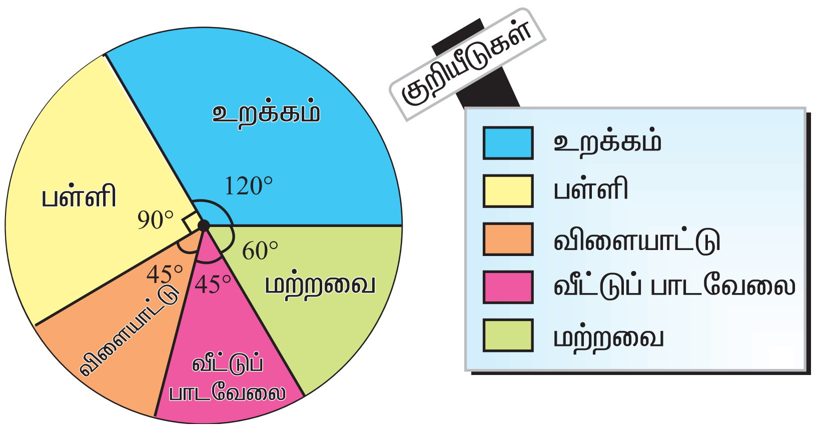
நம் வசதிக்கேற்ப ஏதேனும் ஓர் ஆரமுடைய வட்டத்தை வரைவோம். இவ்வட்டத்தில் ஏதேனும் ஓர் ஆரத்தை முதலில் வரைவோம். இந்த ஆரத்தின் மீது வட்ட மையத்தில் 120° பிரிவு ஏற்படுத்துமாறு இரண்டாம் புயம் வரைவோம். இந்த வட்டக்கோணப் பகுதி அம்மாணவன் உறக்கத்திற்குச் செலவிட்ட நேரத்தைக் குறிக்கின்றது.

இப்புயத்திலிருந்து இரண்டாம் வட்ட மையத்தில் 90° ஏற்படுத்துமாறு இரண்டாம் வட்டக்கோணப் பகுதியை அளந்து குறிக்கிறோம். இவ்வட்டக் கோணப் பகுதி பள்ளி நேரத்தைக் குறிக்கிறது.

இதுபோலவே விளையாட்டு நேரம், வீட்டுப் பாடவேலை செய்யும் நேரம் இவற்றைக் குறிக்கும் வட்டக்கோணப் பகுதிகளை அமைக்கவும். இறுதியாக உள்ள வட்டக்கோணப் பகுதி மற்றவைக்கான நேரத்தைக் குறிக்கும்.

ஒவ்வொரு வட்டக்கோணப்பகுதியை மற்ற வட்டக்கோணப்பகுதியிலிருந்து வேறுபடுத்திக் காட்ட நிழலிடலாம் அல்லது பல்வேறு வண்ணமிடலாம்.

பள்ளி மாணவன் ஒரு நாளில்
(24 மணிநேரம்) செலவழித்த நேரங்கள்



குறிப்பு: வட்டவிளக்கப் படத்தில், பல்வேறுபட்ட தகவல்கள் அல்லது பகுதிகள் வட்டக்கோணப் பகுதிகளாக அமைக்கப்பட்டுள்ளன. எல்லா வட்டக்கோணப் பகுதிகளின் கூடுதலை முழு வட்டம் குறிக்கும். வட்ட மையத்தில் உள்ள கோணம் 360° ஆனது ஒவ்வொரு வட்ட கோணப் பகுதியின் அளவுக்கேற்ப பிரிக்கப்படுகிறது. இதை ஒட்டி மற்ற கோண அளவுகளைக் கணக்கிடுகின்றோம்.

$$\text{ஒரு பகுதியின் மையக்கோண அளவு} = \frac{\text{அப்பகுதியின் மதிப்பு}}{\text{மொத்த மதிப்பு}} \times 360^\circ$$

சில சமயங்களில் பகுதிகளின் அளவு சதவீதங்களாகக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கலாம்.

$$\text{இதுபோன்ற வேளைகளில் மையக்கோண அளவு} = \frac{\text{அப்பகுதியின் மதிப்பு}}{100} \times 360^\circ$$

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஏற்ற வட்ட விளக்கப்படம் அமைத்தலுக்கான படிநிலைகள்

1. ஒவ்வொரு பகுதியின் மையக்கோண அளவை மேற்கண்ட சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காணவும்.
2. நம் வசதிக்கேற்ப ஏதேனும் ஓர் ஆரமுடைய வட்டம் வரைக.
3. வட்டத்தினுள் கிடையான ஓர் ஆரம் வரைக.

4. கிடைமட்ட ஆரத்துடன் முதல் பகுதியின் கோணத்தை வட்ட மையத்தில் ஏற்படுத்துமாறு இரண்டாவது ஆரத்தை வரைக. இப்போது கிடைக்கும் வட்டக்கோணப் பகுதி முதல் பகுதியைக் குறிக்கும். இந்த இரண்டாவது ஆரத்துடன் வட்ட மையத்தில் இரண்டாவது பகுதியின் கோணத்தை ஏற்படுத்தும் அடுத்த ஆரத்தை வரைக. தற்போது கிடைக்கும் வட்ட கோணப் பகுதி இரண்டாவது பகுதியைக் குறிக்கும். இது போலவே மற்ற எல்லாப் பகுதி களும் முடியும் வரை அவற்றுக்குரிய வட்டகோணப் பகுதிகளை வரையவும்.
5. வட்டக்கோணப் பகுதிகளை வேறுபடுத்திக் காட்ட வெவ்வேறு வண்ணமிடவும். ஒவ்வொரு பகுதியும் எதைக் குறிக்கிறது என்பதை எழுதவும். வண்ணங்கள் குறிக்கும் பகுதிகளின் பெயர்களைக் குறிப்பிடவும்.
6. குறியீடு கொடுக்கவும்.
7. விவரங்களுக்கேற்ற தலைப்பு கொடுக்கவும்.

இப்பொழுது கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு உரிய வட்ட விளக்கப்படம் நமக்குக் கிடைக்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 3.10

பின்வரும் அட்டவணையில் ஒரு குடும்பத்தில் மாத வரவு, செலவு விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.

விவரங்கள்	உணவு	வீட்டு வாடகை	உடை	கல்வி	சேமிப்பு	இதர செலவுகள்
செலவுகள் (₹ இல்)	4800	2400	1600	800	1000	1400

கோண அளவைப் பயன்படுத்தி மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

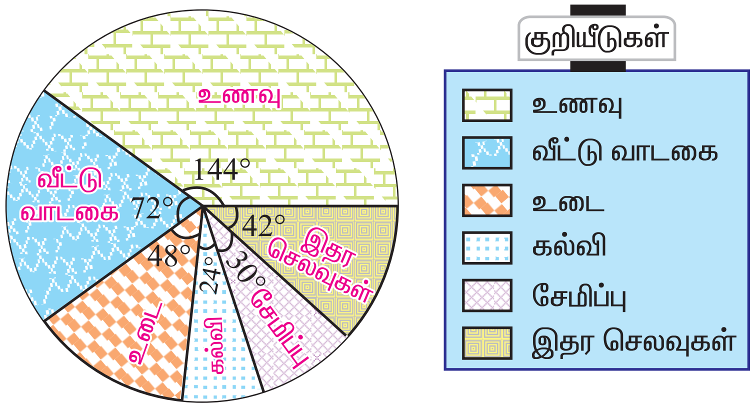
தீர்வு

அட்டவணையில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு விவரத்தின் மையக்கோணத்தையும் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

விவரங்கள்	செலவுகள் (₹ இல்)	மையக்கோண அளவு
உணவு	4800	$\frac{4800}{12000} \times 360^\circ = 144^\circ$
வீட்டு வாடகை	2400	$\frac{2400}{12000} \times 360^\circ = 72^\circ$
உடை	1600	$\frac{1600}{12000} \times 360^\circ = 48^\circ$
கல்வி	800	$\frac{800}{12000} \times 360^\circ = 24^\circ$
சேமிப்பு	1000	$\frac{1000}{12000} \times 360^\circ = 30^\circ$
இதர செலவுகள்	1400	$\frac{1400}{12000} \times 360^\circ = 42^\circ$
மொத்தம்	**12000**	**360°**

நாம் பின்வருமாறு வட்ட விளக்கப் படத்தினைப் பெறுகிறோம்.

ஒரு குடும்பத்தின் மாதாந்திர வரவு செலவு விபரம்



படம் 3.10

எடுத்துக்காட்டு 3.11

பள்ளி இறுதிப் பொதுத்தேர்வில் (S.S.L.C.) ஒரு பள்ளியின் தேர்வு முடிவுகள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தேர்வு முடிவு	முதல் வகுப்பில் தேர்ச்சி பெற்றோர்	இரண்டாம் வகுப்பில் தேர்ச்சி பெற்றோர்	மூன்றாம் வகுப்பில் தேர்ச்சி பெற்றோர்	தேர்ச்சி பெறாதோர்
மாணவர்களின் சதவீதம்	25	35	30	10

மேற்கண்ட விவரங்களை விளக்க ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

தீர்வு

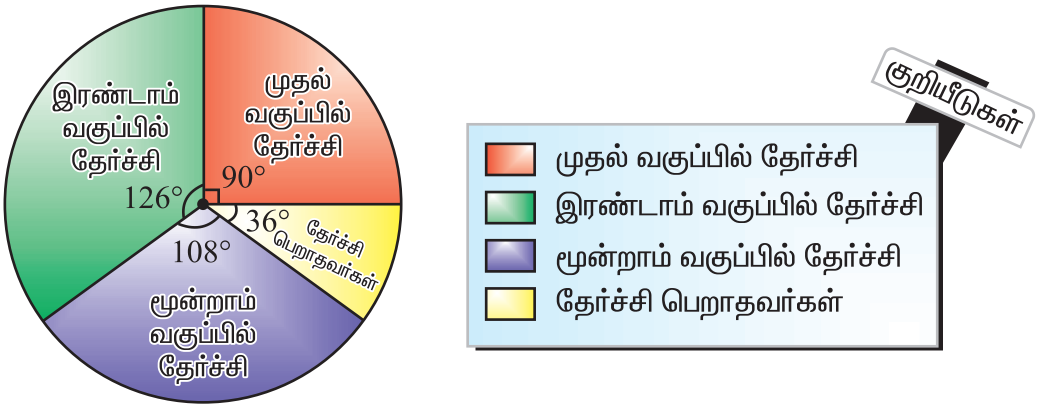
$$\text{தேவையான பகுதியின் மையக்கோணம்} = \frac{\text{அப்பகுதியின் சதவீதம்}}{100} \times 360^\circ$$

இதைப் பயன்படுத்தி நாம், வெவ்வேறு பகுதிகளின் மையக்கோண அளவுகளைப் பின்வருமாறு காணலாம்:

தேர்வு முடிவு	மாணவர்களின் சதவீதம்	மையக்கோண அளவு
முதல் வகுப்பில் தேர்ச்சி பெற்றோர்	25	$\frac{25}{100} \times 360^{0} = 90^{0}$
இரண்டாம் வகுப்பில் தேர்ச்சி பெற்றோர்	35	$\frac{35}{100} \times 360^{0} = 126^{0}$
மூன்றாம் வகுப்பில் தேர்ச்சி பெற்றோர்	30	$\frac{30}{100} \times 360^{0} = 108^{0}$
தேர்ச்சி பெறாதவர்கள்	10	$\frac{10}{100} \times 360^{0} = 36^{\circ}$
மொத்தம்	100	360^{0}

பின்வருமாறு வட்ட விளக்கப்படத்தை நாம் பெறுகின்றோம்.

பள்ளி இறுதிப் பொதுத்தேர்வு (S.S.L.C.) முடிவுகள்



படம் 3.11

பயிற்சி 3.2

1. யுகேந்திரனின் தேர்ச்சி முன்னேற்றத் தகவல் அட்டையில் மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன :

பாடம்	தமிழ்	ஆங்கிலம்	கணக்கு	அறிவியல்	சமூக அறிவியல்
மதிப்பெண்கள்	72	60	84	70	74

மேற்கண்ட விவரங்களை விளக்க ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரையவும்.

2. எட்டாம் வகுப்பில் 36 மாணவர்கள் உள்ளனர். இவர்கள் பல்வேறு அமைப்புகளில் உறுப்பினராக உள்ளனர்.

அமைப்புகள்	கணக்கு	N.C.C	J.R.C	சாரணர்
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	12	6	10	8

மேற்கண்ட விவரங்களை ஒரு வட்ட விளக்கப் படத்தில் காண்பிக்கவும்.

3. ஒரு மாணவர் விடுதியில் உள்ள மாணவர்கள் வெவ்வேறு மொழி பேசுபவர்கள், அவர்களின் விவரம் பின்வருமாறு :

மொழி	தமிழ்	தெலுங்கு	மலையாளம்	கன்னடம்	ஆங்கிலம்	மற்ற மொழிகள்
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	36	12	9	6	5	4

மேற்கண்ட விவரங்களை காட்டும் ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

4. ஒரு பள்ளியில் வெவ்வேறு வகைப் பொழுது போக்கில் ஈடுபடும் எட்டாம் வகுப்பு மாணவர்களின் விவரங்கள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விவரங்களுக்கு ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

பொழுதுபோக்கு	இசை	மண் பொம்மை செய்தல்	நடனம்	நாடகம்	சமூக நலப்பணி
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	20	25	27	28	20

5. ஓர் உலோகக் கலவையில் பின்வரும் உலோகங்கள் கலந்துள்ளன. இதை ஒரு வட்ட விளக்கப் படத்தில் அளிக்கவும்.

உலோகங்கள்	தங்கம்	ஈயம்	வெள்ளி	தாமிரம்	துத்தநாகம்
எடை (கிராமில்)	60	100	80	150	60

6. ஒரு அடுமனையில் ஒருநாளில் விற்பனையான பொருள்களும், அவற்றின் விலைகளும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்கு ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

பொருள்கள்	சாதாரண ரொட்டி	பழரொட்டி	கேக்	பிஸ்கட்டு	பிற
விலை (₹)	320	80	160	120	40

7. ஒரு புத்தக வெளியீட்டாளரால் புத்தகம் ஒன்றுக்குச் செலவு செய்யப்பட்ட தொகைக்கான விவரம் பின்வருமாறு:

விவரங்கள்	தாள்	அச்சிடல்	கட்டமைப்பு	விளம்பரம்	உரிமை
செலவு செய்யப்பட்ட தொகை (₹)	25	12	6	9	8

மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

8. ஒரு விவசாயி பயிர் செய்வதற்கு ஆகும் செலவுகள் பின்வருமாறு :

விவரங்கள்	நிலத்தை உழுதல்	உரம்	விதைகள்	பூச்சிக் கொல்லிகள்	நீர் பாய்ச்சுதல்
தொகை (₹)	2000	1600	1500	1000	1100

இவற்றை விவரிக்கும் ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

9. ஒரு மிருகக்காட்சி சாலையில் உள்ள **900** உயிர் வாழ்வனவற்றின் விவரங்கள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உயிரினங்கள்	காட்டு விலங்குகள்	பறவைகள்	மற்ற நிலவாழ் விலங்குகள்	நீர் விலங்குகள்	ஊர்வன
உயிரினங்களின் எண்ணிக்கை	400	120	135	170	75

மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

10. ஒரு தொழிற்சாலையில் ஓர் ஆண்டில் உற்பத்தியாகும் 5 வகையான ஊர்திகளின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விவரங்களை ஒரு வட்ட விளக்கப் படத்தில் குறிக்க.

ஊர்திகள்	ஸ்கூட்டர்	மோட்டர் பைக்	கார்	ஜீப்	வேன்
எண்ணிக்கை	3000	4000	1500	1000	500

11. ஓர் உணவுப்பொருளில் உள்ள சத்துக்கள் பின்வருமாறு உள்ளன. கீழ்க்கண்ட விவரங்களை ஒரு வட்ட விளக்கப்படத்தில் வரைக.

சத்துப் பொருட்கள்	புரதம்	கொழுப்பு	கார்போ ஹைட்ரேட்	வைட்டமின்	தாது உப்பு
சதவீதம்	30	10	40	15	5

12. ஒரு பள்ளியில் உள்ள மாணவர்கள் விரும்பும் சுவையான ஐஸ்கிரீம் வகைகள் சதவீதங்களில் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வகைகள்	சாக்லேட்	வெண்ணிலா	ஸ்ட்ராபெரி	மற்ற நறுமணங்கள்
மாணவர்கள் விரும்பும் வகைகளின் சதவீதம்	40	30	20	10

இதை ஒரு வட்ட விளக்கப் படத்தில் வரைக.

13. ஒரு பள்ளிக்கு மாணவர்கள் வருகை தரும் போக்குவரத்து முறை பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

போக்குவரத்து முறை	பேருந்து	மிதிவண்டி	நடந்து வருதல்	ஸ்கூட்டர்	கார்
மாணவர்கள் சதவீதம்	40	30	15	10	5

இதை ஒரு வட்ட விளக்கப்படத்தின் உதவியுடன் குறிக்கவும்.

14. திரு. இராஜன் பாபு தன் வருமானத்தில் 20% ஐ வீட்டு வாடகைக்காகவும், 30% ஐ உணவுக்காகவும், 10% ஐ தன் குழந்தைகளின் கல்விச் செலவுக்காகவும் செலவழிக்கின்றார். 25% ஐச் சேமிக்கின்றார். எஞ்சியதை மற்ற செலவினங்களுக்காகச் செலவு செய்கிறார். இவற்றை விளக்க ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

15. ஒரு மாநிலத்தில் பல்வேறு வகைத் தொழில் செய்பவர்களின் விவரங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தொழிலாளர் களின் வகைகள்	பயிரி-டுவோர்	விவசாயத் தொழிலா ளர்கள்	தொழிற் சாலையில் பணி புரிவோர்	வணிகத் தொழிலா ளர்கள்	பிறர்
சதவீதம்	40	25	12.5	10	12.5

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கு ஒரு வட்ட விளக்க வரைபடம் வரைக.

3.5 மைய நிலைப் போக்கு அளவைகள் (Measures of Central Tendency)

திரட்டப்பெற்ற அதிக அளவிலான விவரங்களை அட்டவணைப்படுத்தியப் பின்னரும், அப்பரவலின் பொது வடிவம் தெளிவாகத் தெரிவது இல்லை. மேலும் தெளிவான வடிவம் தெரிய வேண்டுமானால் அந்த மொத்த விவரங்களையும் ஒரு தனி எண்ணால் குறித்துச் சொல்ல வேண்டும். அப்படிப்பட்ட எண்ணைச் சுற்றி அதிக அளவிலான விவரங்கள் இருந்தால். அந்த எண்ணே இவ்விவரங்களின் பண்புகளைக் கொண்டிருக்கும். அந்த வகையான எண்களை மையநிலைப் போக்கு அளவைகள் என்பர். அவ்விதமான சில அளவைகள்

(i) கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean)

(ii) இடைநிலை (Median) மற்றும்

(iii) முகடு (Mode)

3.5.1 கூட்டுச் சராசரி (A.M)

கண்டறிந்த மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகைக்கும், மதிப்புகளின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள விகிதத்தைக் கூட்டுச் சராசரி என்கின்றோம்.

3.5.1. (அ) தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரி

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ என்ற n மதிப்புகளைக் கொண்ட மாறி x எனில் அதன் கூட்டுச் சராசரியை $\overline{x}$ என்று குறிப்போம்.

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

கிரேக்க எழுத்தாகிய ‘Σ’ வை கணிதத்தில் சிக்மா என்கிறோம். இது கூட்டுப் பலனைக் குறிக்கப் பயன் படுத்தப்படும்.இக்குறியீட்டில் $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ஆகிய எண்களின் கூட்டற்பலனை $\sum_{i=1}^{n} x_i$ அல்லது Σx_i என்று குறிப்பர்.

இப்பொழுது கூட்டுச்சராசரி

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}.$$

Σ குறியீட்டைப் புரிந்துகொள்வோம்

$$\sum_{k=1}^{3} k = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_{n=3}^{6} n = 3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

$$\sum_{n=2}^{4} 2n = 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 = 18$$

$$\sum_{k=1}^{3} 5 = \sum_{k=1}^{3} 5 \times k^0 = 5 \times 1^0 + 5 \times 2^0 + 5 \times 3^0 = 5 + 5 + 5 = 15$$

$$\sum_{K=2}^{4} (k-1) = (2-1) + (3-1) + (4-1) = 6$$

குறிப்பு:

கூட்டுச் சராசரி, சராசரி (Average) அல்லது மத்திமம் (Mean) என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.12

ஒரு தேர்வில் 10 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள்

15, 75, 33, 67, 76, 54, 39, 12, 78, 11 எனில், இதன் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு, $n = 10$

கூட்டுச் சராசரி $= \bar{x} = \dfrac{15+75+33+67+76+54+39+12+78+11}{10}$

$$\bar{x} = \frac{460}{10} = 46.$$

எடுத்துக்காட்டு 3.13

9, 6, 7, 8, 5 மற்றும் x ஆகியவற்றின் சராசரி 8 எனில் x இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

இங்குக் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் 9, 6, 7, 8, 5 மற்றும் x, $n = 6$.

சூத்திரத்தின்படி, கூட்டுச் சராசரி $= \bar{x} = \dfrac{9+6+7+8+5+x}{6} = \dfrac{35+x}{6}$

$$\bar{x} = 8$$

ஆதலால், $\dfrac{35+x}{6} = 8$

எனவே, $35 + x = 48$

$$x = 48 - 35 = 13.$$

எடுத்துக்காட்டு 3.14

ஒரு வகுப்பிலுள்ள 10 மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 166 செ.மீ. எனக் கணக்கிடப்பட்டது. தகவல்களைச் சரிபார்க்கும்போது ஒரு மதிப்பு 150 செ.மீ.க்கு பதிலாக 160 செ.மீ. என்று குறிப்பிடப்பட்டது கண்டுபிடிக்கப்பட்டது எனில் சரியான சராசரி உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு, $\bar{x} = 166$ செ.மீ. மற்றும் $n = 10$.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{\Sigma x}{10}$$

$166 = \dfrac{\Sigma x}{10}$ அல்லது $\Sigma x = 1660$

தவறான கூடுதல் $= 1660$

சரியான கூடுதல் $=$ தவறான கூடுதல் $-$ தவறான மதிப்பு $+$ சரியான மதிப்பு

$= 1660 - 160 + 150 = 1650$

சரியான சராசரி உயரம் $= \dfrac{1650}{10} = 165$ செ.மீ.

3.5.1 (ஆ) தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்குக் கூட்டுச்சராசரி காணுதல்

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரி காணும் இரு வழிகளாவன:

(i) நேரடி முறை மற்றும் (ii) உத்தேச சராசரி முறை

(i) நேரடி முறையில் கூட்டுச் சராசரி காணல்

நிகழ்வெண் பரவல் ஒன்றை எடுத்துக் கொள்வோம்

மாறி	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
நிகழ்வெண்	f_1	f_2	f_3	$\cdots$	f_n

இந்த அட்டவணையின் விளக்கம் பின்வருமாறு:

x_1 என்பது f_1 முறையும்
x_2 என்பது f_2 முறையும்
x_3 என்பது f_3 முறையும்
....
....
x_n என்பது f_n முறையும் உள்ளன என்பதைக் குறிக்கின்றது.

x என்ற மாறியின் வேறுபட்ட மதிப்புகள் $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ஆகும். இங்கு N என்பது மாறிகளின் நிகழ்வெண்களின் மொத்த எண்ணிக்கை ஆகும்.

அதாவது $f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = N$ (அல்லது) $\sum_{i=1}^{n} f_i = N$

எனவே, மொத்தக் கூடுதல் $= (x_1 + x_1 + x_1 + \cdots f_1$ முறை$) + (x_2 + x_2 + x_2 + \cdots f_2$ முறை$) +$

$\ldots\ldots + (x_n + x_n + x_n + \cdots f_n$ முறை$)$

$= f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_n \times x_n = \Sigma f_i x_i$

இங்கு, $\bar{x} = \dfrac{\text{கண்டறியப்பட்ட மதிப்புகளின் கூடுதல்}}{\text{கண்டறியப்பட்ட மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை}} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

$\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \dfrac{\Sigma fx}{N}$, இங்கு $N = \Sigma f$.

எடுத்துக்காட்டு 3.15

நேரடி முறையில் கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

x	5	10	15	20	25	30
f	4	5	7	4	3	2

தீர்வு

x	f	fx
5	4	20
10	5	50
15	7	105
20	4	80
25	3	75
30	2	60
மொத்தம்	N = 25	$\Sigma fx = 390$

கூட்டுச் சராசரி, $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f x}{N}$

$= \dfrac{390}{25} = 15.6$

(ii) உத்தேச சராசரி முறையில் கூட்டுச்சராசரி காணல்

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் எண்கள் சிறியனவாக உள்ளன. எனவே இங்கு பெருக்கற் பலன் எளிதாகக் காணப்படுகிறது. பெரிய எண்களாக இருப்பின், பெருக்கற்பலன் காண்பது கடினமாகும். மேலும் பிழை வரவும் வாய்ப்பு உள்ளது.

மற்றொரு எளிய வழி முறையில் இக்கடினத்தைத் தீர்க்கலாம். இம்முறையில் ஒரு பொருத்தமான எண் A ஐ உத்தேசமாக எடுத்துக் கொள்கின்றோம். இந்த எண் உத்தேச சராசரியாகும்.

உத்தேச சராசரி A யிலிருந்து ஒவ்வொரு மாறி $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ இன் விலகல்கள் முறையே $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ எனக் கணக்கிடுகிறோம்.

அதாவது $d_1 = x_1 - A,\ d_2 = x_2 - A,\ d_3 = x_3 - A, \cdots, d_n = x_n - A$

இப்பொழுது $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ இவற்றை முறையே $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$ ஆல் பெருக்கவும். இப்பொழுது Σfd காணலாம். கூட்டுச் சராசரியைப் பின்வரும் சூத்திரம் மூலம் காணலாம்.

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} \quad \overline{x} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$$

$$\overline{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \quad (\text{A என்பது உத்தேச சராசரி, } N = \Sigma f)$$

இப்பொழுது எடுத்துக்காட்டு 3.15 இல் உள்ள விவரங்களுக்கு நாம் உத்தேச சராசரி முறையில் கூட்டுச் சராசரி காண்போம்.

உத்தேச சராசரி A = 15 என்க

x	f	$d = x - A$	fd
5	4	– 10	– 40
10	5	– 5	– 25
15	7	0	0
20	4	5	20
25	3	10	30
30	2	15	30
மொத்தம்	N = 25		$\Sigma fd = 15$

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = \overline{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$$

$$= 15 + \frac{15}{25} = 15 + \frac{3}{5} = \frac{75+3}{5} = \frac{78}{5} = 15.6$$

3.5.2 எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி (Weighted Arithmetic Mean)

சில சமயங்களில் மாறிகள், பல்வேறுபட்ட எடையுடன் கூடியதாக அமையும். இந்தச் சூழ்நிலையிலும் கூட்டுச்சராசரியை (A.M.) காண இயலும். இதை நாம் எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி என்கின்றோம் (W.A.M).

எடுத்துக்காட்டாக x_1 என்ற மாறி w_1 என்ற எடையுடனும், x_2 என்ற மாறி w_2 என்ற எடையுடனும், இறுதியாக x_n என்ற மாறி w_n என்ற எடையுடனும், கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

எடையிட்ட கூட்டுச்சராசரி W. A. M. = $\dfrac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n} = \dfrac{\Sigma wx}{\Sigma w}$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.16

பின்வரும் விவரங்களுக்கு எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி காண்க.

உணவுப் பொருட்கள்	அளவு (கி.கி.) w_i	ஒரு கிலோ கிராம் விலை (₹) x_i
அரிசி	25	30
சர்க்கரை	12	30
எண்ணெய்	8	70

தீர்வு

இங்கு x இன் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்ட உணவுப் பொருட்களின் விலையாகவும், இவற்றின் சம்பந்தப்பட்ட அளவுகள் (கி.கி) எடைகளாகவும் அமைந்துள்ளன.

ஆதலால், எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி (W.A.M) $= \dfrac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n}$

$$= \frac{25 \times 30 + 12 \times 30 + 8 \times 70}{25 + 12 + 8} = \frac{1670}{45}$$

$$= ₹\ 37.11\ .$$

3.5.3 இடைநிலை (Median)

மையநிலைப் போக்கு அளவுகளில் இடைநிலையும் ஒன்று ஆகும்.

3.5.3 (அ) தொகுக்கப்படாத விவரங்களின் இடைநிலை காணல்

இடைநிலை அளவைப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

முதலில், நாம் எடுத்துக்கொண்ட விவரங்களை ஏறுவரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைப்போம்.

(i) விவரங்களின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படை எண் எனில் இதன் நடு உறுப்பு இடைநிலை அளவாகும்.

உதாரணம்: 33, 35, 39, 40, 43 என்பனவற்றின் நடு உறுப்பு 39. எனவே இதன் இடைநிலை 39 ஆகும்.

(ii) விவரங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்படை எண் எனில் இரு மத்திய மதிப்புகளின் சராசரியே அவற்றின் இடைநிலை அளவாகும்.

உதாரணம்: 33, 35, 39, 40, 43, 48 எனில் இடைநிலை $= \dfrac{39 + 40}{2} = 39.5$

குறிப்பு: இடைநிலை அளவுக்குக் கீழ் எத்தனை விவரங்கள் உள்ளனவோ அதே எண்ணிக்கையிலான விவரங்கள் அதற்கு மேல் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.17

17, 15, 9, 13, 21, 7, 32 ஆகியவற்றின் இடைநிலை காண்க.

தீர்வு

மதிப்புகளை ஏறு வரிசையில் அமைத்தால் 7, 9, 13, 15, 17, 21, 32 எனக் கிடைக்கிறது.

இங்கு, n = 7 (ஒற்றைப்படை எண்)

இடைநிலை = நடுமதிப்பு

$= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ இன்மதிப்பு $= \left(\frac{7+1}{2}\right)$ இன்மதிப்பு

= 4 ஆம் இடத்தில் உள்ள எண்

எனவே, இடைநிலை = 15

எடுத்துக்காட்டு 3.18

ஒரு கிரிக்கெட் விளையாட்டு வீரர் எடுத்த ஓட்டங்கள் பின்வருமாறு 13, 28, 61, 70, 4, 11, 33, 0, 71, 92. இவற்றின் இடைநிலை காண்க.

தீர்வு

ஓட்டங்களை ஏறுவரிசையில் அமைப்போம் 0, 4, 11, 13, 28, 33, 61, 70, 71, 92.

இங்கு $n = 10$ (இரட்டை எண்)

இங்கு, இரு மத்திய மதிப்புகள் உள்ளன. அவை 28, 33 ஆகும்.

$\therefore$ இடைநிலை $= \frac{28+33}{2} = \frac{61}{2} = 30.5$.

3.5.3 (ஆ) தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு இடைநிலை காணல்

குவிவு நிகழ்வெண் (Cumulative frequency)

ஒரு நிகழ்வெண் பட்டியலில் குவிவு நிகழ்வெண் என்பது அந்தப் பிரிவு இடைவெளி வரை உள்ள நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.19

50 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கான இடைநிலை காண்க.

மதிப்பெண்கள்	20	27	34	43	58	65	89
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	2	4	6	11	12	8	7

தீர்வு

மதிப்பெண்கள் (x)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f)	நிகழ்வெண் குவிவு
20	2	2
27	4	(2 + 4 =) 6
34	6	(6 + 6 =) 12
43	11	(11 + 12 =) 23
58	**12**	**(23 + 12 =) 35**
65	8	(35 + 8 =) 43
89	7	(43 + 7 =) 50

இங்கு மொத்த நிகழ்வெண், $N = \Sigma f = 50$

$$\therefore \frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25.$$

இடைநிலை = $\left(\frac{N}{2}\right)$ ஆவது மதிப்பு = 25 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

ஆனால், 25 ஆவது உறுப்பு குவிவு நிகழ்வெண் நிரலில் உள்ள 35 என்ற இடத்தில் உள்ளது. இதற்குத் தொடர்பான மதிப்பு 58.

எனவே, இடைநிலை = 58.

3.5.4 முகடு (Mode)

முகடும் ஒரு மையப்போக்கு அளவு ஆகும்.

முகடு பின்வருமாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

3.5.4 (அ) தொகுக்கப்படாத விவரங்களின் முகடு (தனித்தனியான விவரங்கள்)

தனித் தொகுதியாக அமைந்துள்ள மதிப்புகளின் கணத்தில் எந்த ஒரு மதிப்பானது அதிக எண்ணிக்கையில் இருக்கிறதோ அது தரப்பட்ட புள்ளி விவரங்களின் முகடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.20

2, 4, 5, 2, 1, 2, 3, 4, 4, 6, 2 ஆகியவற்றின் முகடு காண்க.

தீர்வு

மேலே உள்ள விவரங்களில் 2 மிகுதியாக 4 முறை வந்துள்ளது.

எனவே, முகடு = 2.

எடுத்துக்காட்டு 3.21

22, 25, 21, 22, 29, 25, 34, 37, 30, 22, 29, 25 ஆகியவற்றின் முகடு காண்க.

தீர்வு

இங்கு 22 மூன்று முறையும், 25 மூன்று முறையும் அமைந்திருக்கின்றன.

எனவே 22, 25 ஆகிய இரண்டுமே முகடுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.22

15, 25, 35, 45, 55, 65 ஆகியவற்றின் முகடு காண்க.

தீர்வு

இங்கு ஒவ்வொரு எண்ணும் ஒரே முறை தான் வந்துள்ளது. எனவே தரப்பட்ட விவரங்களுக்கு முகடு இல்லை.

3.5.4 (ஆ) தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களின் முகடு (நிகழ்வெண் பரவல்)

தரப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை ஒழுங்குப்படுத்தி ஒரு நிகழ்வெண் பட்டியலில் அமைத்தால், அதிக நிகழ்வெண்ணைக் கொண்ட பிரிவு, முகட்டுப் பிரிவு எனப்படுகிறது. இப்பிரிவில் உள்ள மாறியின் மதிப்பு முகடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.23

பின்வரும் நிகழ்வெண் பட்டியலுக்கு முகடு காண்க.

கூலி (₹)	250	300	350	400	450	500
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	10	15	16	12	11	13

தீர்வு

கூலி (₹)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
250	10
300	15
350	**16**
400	12
450	11
500	13

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து மீப்பெரு நிகழ்வெண் 16 ஆகும். இதற்கு ஏற்ற மாறியின் மதிப்பு (கூலி) ₹ 350. எனவே, முகடு 350 ஆகும்.

நீவிர் அறிவீரா?

ஒரு முகடு (Uni modal)	இரு முகடுகள் (Bi modal)	மூன்று முகடுகள் (Tri modal)	பன் முகடுகள் (Multi modal)
கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஒரே ஒரு முகடு மட்டும் இருப்பின் அதனை ஒரு முகடு என்பர்.	கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு இரு முகடுகள் மட்டும் இருப்பின் அதனை இரு முகடுகள் என்பர்.	கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு மூன்று முகடுகள் மட்டும் இருப்பின் அதனை மூன்று முகடுகள் என்பர்.	கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு மூன்றுக்கு மேற்பட்ட முகடுகள் இருப்பின் அதனைப் பன் முகடுகள் என்பர்.
எடுத்துக்காட்டு : 10, 15, 20, 25, 15, 18, 12, 15. முகடு 15.	எடுத்துக்காட்டு : 20, 25, 30, 30, 15, 10, 25. இரு முகடுகள் 25, 30	எடுத்துக்காட்டு : 60, 40, 85, 30, 85, 45, 80, 80, 55, 50, 60. மூன்று முகடுகள் 60, 80, 85.	எடுத்துக்காட்டு : 1, 2, 3, 8, 5, 4, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 2, 7, 4, 1. பன் முகடுகள் 1, 2, 3, 4, 5.

பயிற்சி 3.3

I. கூட்டுச்சராசரி காணும் கணக்குகள்

1. கூட்டுச் சராசரி காணவும் 2, 4, 6, 8, 10 , 12, 14, 16.

2. 18, 41, x , 36, 31, 24, 37, 35, 27, 36 இவற்றின் சராசரி 31 எனில் x இன் மதிப்பு என்ன ?

3. ஒரு வகுப்பில் 20 மாணவர்கள் உள்ளனர். இவர்களுள் 5 மாணவர்கள் தலா 76 மதிப்பெண்களும், 7 மாணவர்கள் தலா 77 மதிப்பெண்களும், 8 மாணவர்கள் தலா 78 மதிப்பெண்களும் பெற்றுள்ளனர். வகுப்புச் சராசரி மதிப்பெண் காண்க.

4. ஒரு வகுப்பில் உள்ள 20 மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 160 செ.மீ எனக் கணக்கிடப்பட்டது. சரிபார்க்கும் போது 152 செ.மீ என்பதை 132 செ.மீ என தவறாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டதாகத் தெரிய வந்தது. சரியான சராசரி உயரம் காணவும்.

5. பின்வரும் விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடவும்.

x	15	25	35	45	55	65	75	85
f	12	20	15	14	16	11	7	8

6. 40 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு வகுப்பில் பல்வேறு வயதுகளை உடைய மாணவர்களின் எண்ணிக்கை பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மாணவர்களின் சராசரி வயதைக் காணவும்.

வயது (ஆண்டுகளில்)	13	14	15	16	17	18
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	3	8	9	11	6	3

7. பின்வரும் விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	65	70	75	80	85	90	95	100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	6	11	3	5	4	7	10	4

8. ஒரு தொழிற்சாலையிலுள்ள 12 தொழிலாளர்களின் எடைகள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவர்களின் சராசரி எடையைக் காணவும்.

எடைகள் (கி.கி.)	60	64	68	70	72
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	3	4	2	2	1

9. ஒரு குடும்பத்திற்கு ஒரு மாதத்திற்குத் தேவையான பொருட்கள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. தேவையான எடை அளவுகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடவும்.

பொருட்கள்	எடை (கி.கி.)	1 கிலோவின் விலை (₹)
அரிசி	25	30
கோதுமை	5	20
பருப்புகள்	4	60
காய்கறிகள்	8	25
எண்ணெய்	3	65

10. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி காண்க.

பொருட்கள்	பொருட்களின் எண்ணிக்கை	பொருள் ஒன்றின் விலை (₹)
முகப்பூச்சு மாவு	2	45.00
சோப்பு	4	12.00
எழுதுபொருள்	5	15.00
கணிதக் கருவிப் பெட்டிகள்	4	25.50

II. இடைநிலை காணும் கணக்குகள்

1. பின்வரும் மதிப்புகளுக்கு இடைநிலை காண்க.

(i) 83, 66, 86, 30, 81.

(ii) 45, 49, 46, 44, 38, 37, 55, 51.

(iii) 70, 71, 70, 68, 67, 69, 70.

(iv) 51, 55, 46, 47, 53, 55, 51, 46.

2. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு இடைநிலை காண்க.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f	9	11	5	6	8	1	3	7

3. ஒரு வகுப்பிலுள்ள 50 மாணவர்களின் உயரங்கள் (செ.மீ) பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உயரம் (செ.மீ.)	156	155	154	153	152	151	150
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	8	4	6	10	12	3	7

இவற்றின் இடைநிலை காண்க.

4. 60 நோயாளிகளின் இதயங்களின் X-கதிர்ப் படங்களை ஆராய்ந்தபோது கிடைத்த தகவல்கள் பின்வருமாறு. இவற்றின் இடைநிலை காண்க.

இதயத்தின் விட்டம் (மி.மீ.)	130	131	132	133	134	135
நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	7	9	15	12	6	11

5. 43 தொழிலாளர்களின் மாதச் சம்பளம் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இடைநிலை அளவைக் காண்க.

மாதச் சம்பளம் (₹)	4000	5500	6000	8250	10,000	17,000	25,000
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	7	5	4	3	13	8	3

III. முகடு காணும் கணக்குகள்

1. பின்வரும் விவரங்களுக்கு முகடு காணவும்.

i) 74, 81, 62, 58, 77, 74.

ii) 55, 51, 62, 71, 50, 32.

iii) 43, 36, 27, 25, 36, 66, 20, 25.

vi) 24, 20, 27, 32, 20, 28, 20.

2. பின்வரும் நிகழ்வெண் அட்டவணைப் பரவலுக்கு முகடு காண்க.

x	5	10	15	20	25	30
f	14	25	37	16	8	5

3. பின்வரும் விவரங்களுக்கு முகடு காண்க.

வெப்பநிலை °c	29	32.4	34.6	36.9	38.7	40
நாட்களின் எண்ணிக்கை	7	2	6	4	8	3

4. ஓர் ஆய்வில் பின்வரும் அளவுகளுள்ள சட்டைகளுக்கு அதிகத் தேவை இருப்பதாகத் தெரிய வருகின்றது. இவற்றின் முகடு காண்க.

அளவு	38	39	40	41	42	43	44
நபர்களின் எண்ணிக்கை (அணிந்து கொண்டிருப்போர்)	27	40	51	16	14	8	6

IV. கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு காணும் கணக்குகள்

1. பின்வரும் நிகழ்வெண் அட்டவணைக்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு காண்க.

x	10	20	25	30	37	55
f	5	12	14	15	10	4

2. ஒரு குழுமத்தில் வேலை செய்வோரின் வயதும், எண்ணிக்கையும் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வயது (ஆண்டுகளில்)	19	21	23	25	27	29	31
ஆள்களின் எண்ணிக்கை	13	15	20	18	16	17	13

இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு காண்க.

3. 20 மாணவர்களின் எடைகள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடை (கி.கி.)	47	50	53	56	60
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	3	7	2	4

இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு கணக்கிடுக.

கருத்துச் சுருக்கம்

- நிகழ்வுச் செவ்வகம், நிகழ்வுப் பலகோணம் என்பவை ஒரு நிகழ்வுப் பரவலின் இருவகை வரைபடங்கள் ஆகும்.

- நிகழ்வுச் செவ்வகம், நிகழ்வுப் பலகோணம் போன்ற வரைபடங்களின் பிரிவு இடைவெளிகள் X-அச்சிலும், அதற்குரிய நிகழ்வெண்கள் Y-அச்சிலும் குறிக்கப்படுகின்றன.

- ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தில் செவ்வகங்கள் அடுத்தடுத்தும், தொடர்ச்சியாகவும் எந்த இரண்டு அடுத்துள்ள செவ்வகங்களுக்கும் இடையில் இடைவெளியில்லாமலும் அமைக்கப்படுகின்றன.

- ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தில் அடுத்தடுத்துள்ள செவ்வகங்களின் மேற்பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை, முதல் பிரிவு இடைவெளிக்கு முன்னதாக உள்ள பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளியோடும், கடைசிப் பிரிவு இடைவெளிக்கு அடுத்துள்ள இடைவெளியின் மையப்புள்ளியோடும் இணைத்தால் கிடைப்பது நிகழ்வுப் பலகோணம் ஆகும்.

- ஒரு பகுதியின் மையக்கோண அளவு $= \dfrac{\text{அப்பகுதியின் மதிப்பு}}{\text{மொத்த மதிப்பு}} \times 360°$

- கூட்டுச் சராசரி என்பது மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகைக்கும், மாறிகளின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள விகிதம் ஆகும்.

- கூட்டுச் சராசரி ($\overline{x}$) காண சூத்திரம்

  (i) தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கு $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$

  (ii) நேரடி முறையில் தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு $\overline{x} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

  (iii) உத்தேச சராசரி முறையில் தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு $\overline{x} = A + \dfrac{\Sigma fd}{\Sigma f}$

  (இங்கு A என்பது உத்தேச எண், $d = x - A$)

- எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி (W.A.M.) $= \dfrac{\Sigma w_i x_i}{\Sigma w_i}$.

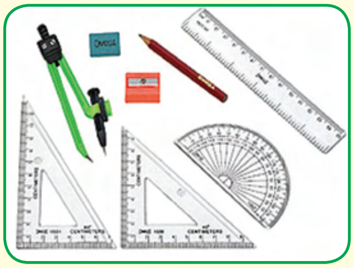
- இடைநிலை அளவுக்குக் கீழ் எத்தனை விவரங்கள் உள்ளனவோ அதே எண்ணிக்கையிலான விவரங்கள் அதற்கு மேல் இருக்கும்.

- ஒரு பரவலின் மிகுதியாக வருகின்ற மதிப்பு அப்பரவலின் முகடு ஆகும்.

செய்முறை வடிவியல்

4

4.1 அறிமுகம்



4.2 பொதுமைய வட்டங்கள்

4.1 அறிமுகம்

பழங்கால எகிப்தியர்கள் நிலங்களை அளத்தல், கட்டடம் கட்டுதல் ஆகியவற்றில் தங்கள் பயன்பாட்டு அறிவை வெளிப்படுத்தியுள்ளனர். பழங்காலக் கிரேக்கர்கள் செய்முறை வடிவக்கணிதத்தைத் தங்கள் கலாசாரத்தில் பயன்படுத்தினர். அளவுகோல் மற்றும் கவராயம் இவற்றைப் பயன்படுத்திப் பெரும் வியப்பளிக்கக்கூடிய வரைதல்களைச் செய்துள்ளனர்.

வடிவியல் என்பது பழங்காலக் கணிதப் பிரிவுகளுள் ஒன்று. அறிமுறை வடிவியல், செய்முறை வடிவியல் என இரு பெரும் பகுதிகளாக வடிவியல் பிரிக்கப்படுகிறது. அறிமுறை வடிவியலானது வடிவியல் கொள்கைகளை உதவிப் படங்கள் மூலமாக விளக்குகிறது. வடிவியல் கருவிகளைக் கொண்டு படங்களைத் துல்லியமாக எவ்வாறு வரைவது என்பதைச் செய்முறை வடிவியல் விளக்குகிறது.

முன் பருவங்களில், சில வடிவ கணித உருவங்களின் வரையறை, பண்புகள் மற்றும் பரப்பு காண உதவும் சூத்திரங்களை நாம் கற்றுள்ளோம். இப்பருவத்தில் வட்ட வலயங்களை வரையக் கற்போம்.

பிரம்மகுப்தர்

[கி.பி. 598 - 670]

ஏழாம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த மாபெரும் இந்தியக் கணித மேதையான பிரம்மகுப்தர் கணிதம் மற்றும் வானியல் பற்றி பல நூல்களை எழுதியுள்ளார். இவர் ராஜஸ்தான் மாநிலத்தைச் சார்ந்தவர். உஜ்ஜையினியில் இருந்த வானியல் ஆய்வு மையத்தின் தலைவராகப் பணியாற்றினார். பிரம்மஸ்புட்டஸித்தாந்தா என்ற பெரும் புகழ் பெற்ற நூலை எழுதினார். $\pi \simeq \sqrt{10}$ எனவும் இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ எனவும் கண்டறிந்தார்.

4.2 பொதுமைய வட்டங்கள்

இப்பகுதியில் நாம் பொதுமைய வட்டங்களைப் பற்றி கற்போம். உங்களுக்கு வட்டங்களைப் பற்றி முன்னரே தெரியும்.

4.2.1 கற்றல் தூண்டல்

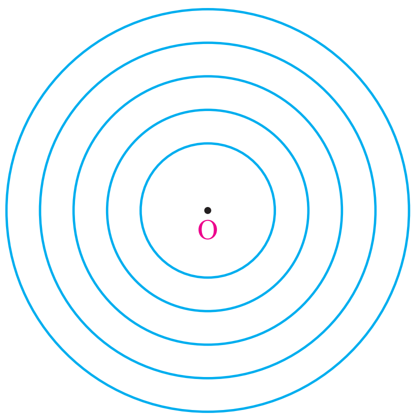
அசைவற்ற நீர்ப்பரப்பில் ஒரு சிறு கல்லைப் போட்டதும் வட்டம் வட்டமாக அலைகள் உண்டாவதைப் பார்த்திருக்கிறீர்கள். அவ்வட்டங்களுக்கெல்லாம் பொதுவான மையம் எது? அச்சிறு கல் எங்கு நீரில் விழுந்ததோ அந்த இடம் தானே! ஆம்.

பொதுவான மையத்தைக் கொண்டு வேறுபட்ட ஆர அளவுகளுடன் ஒரு தளத்தில் வரையப்படும் வட்டங்கள் பொதுமைய வட்டங்கள் எனப்படும். அந்த மையம் பொதுமையமாகும்.

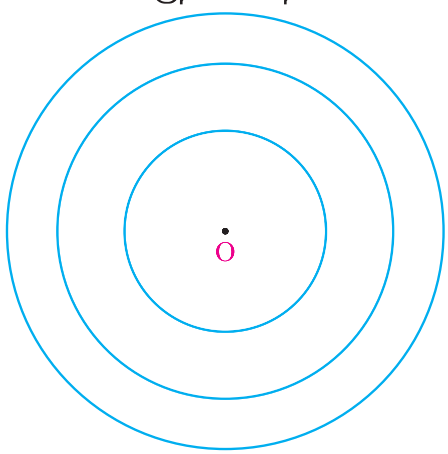
பொதுமைய வட்டங்கள்

ஒரு தளத்தில் பொது மையத்தைக் கொண்டு வெவ்வேறான ஆரங்களில் வரையப்படும் வட்டங்கள் பொதுமைய வட்டங்கள் என்றழைக்கப்படுகின்றன.

படங்கள் 4.1 மற்றும் 4.2 பொதுமைய வட்டங்களைக் குறிக்கின்றன.

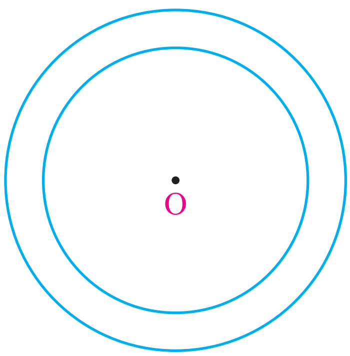


படம் 4.1

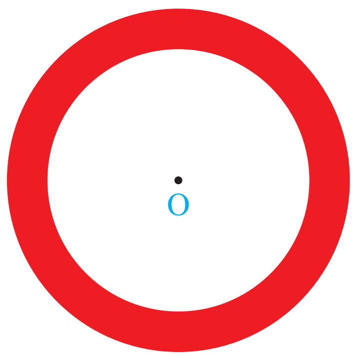


படம் 4.2

பின்வரும் இரண்டு படங்களையும் பார்க்கவும்.



படம் 4.3



படம் 4.4

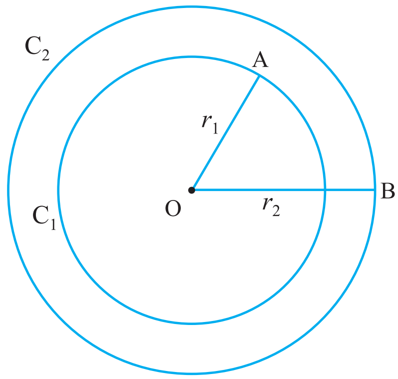
படம் 4.3 இல் இரண்டு பொதுமைய வட்டங்கள் உள்ளன.

படம் **4.4**இல் இரு வட்டங்களுக்கு இடையேயுள்ள பகுதியை வண்ணம் தீட்டிக் காட்டப்பட்டுள்ளது. இந்த வண்ணமிட்டப் பகுதியை வட்ட வலயம் (Circular ring) என்பர்.

வட்ட வலயம் – விவரிப்பு

படம் **4.5** இல், C_1 மற்றும் C_2 என்பவை O என்ற புள்ளியை பொது மையமாகவும், r_1 மற்றும் r_2 என்ற வேறுபட்ட ஆர அளவுகளையும் கொண்ட இரு வட்டங்கள் C_1 மற்றும் C_2 என்பவை பொதுமைய வட்டங்கள் ஆகும். இவ்விரு வட்டங்களுக்கு இடையே அடைபடும் பரப்பளவு வட்ட வலயம் என்றழைக்கப்படுகிறது.

வட்டவலயம் அகலம் = $OB - OA = r_2 - r_1$ $(r_2 > r_1)$



படம் **4.5**

4.2.2 ஆரங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது பொதுமைய வட்டங்கள் வரைதல்

எடுத்துக்காட்டு 4.1

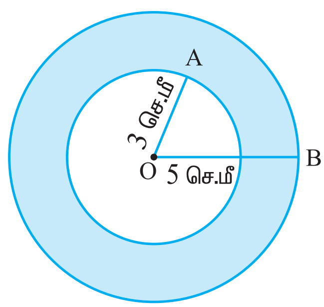
3 செ.மீ மற்றும் 5 செ.மீ ஆகிய ஆர அளவுகளுடைய பொதுமைய வட்டங்கள் வரைந்து வட்ட வலயத்தை நிழலிட்டுக் காட்டுக. அதன் அகலத்தையும் காண்க.

தீர்வு

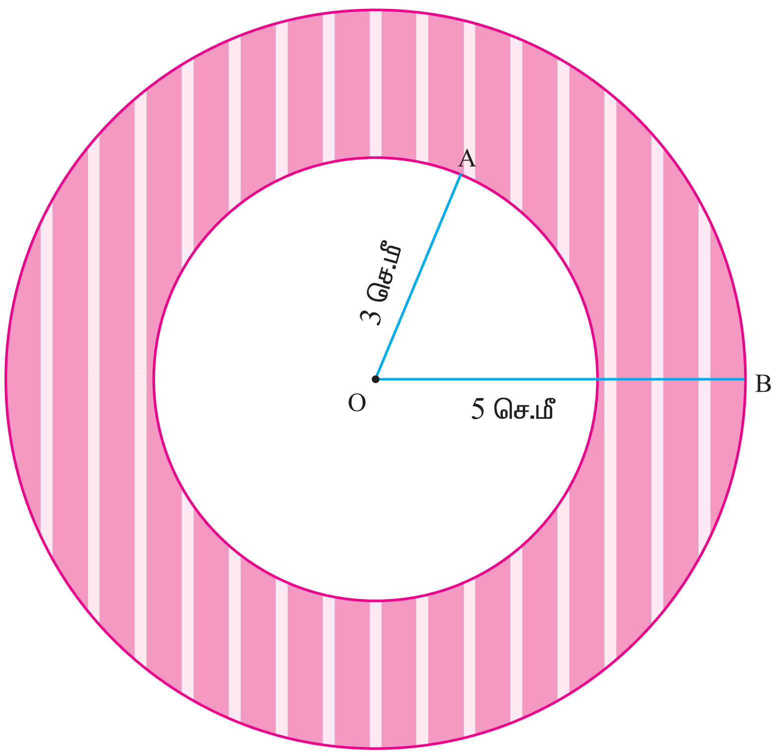
தரவு: பொதுமைய வட்டங்களின் ஆரங்கள்3 செ.மீ. மற்றும் 5 செ.மீ.

பொதுமைய வட்டங்கள் வரைதல்

உதவிப்படம்



படம் **4.6**



படம் **4.7**

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : O என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும்.

படி 3 : O ஐ மையமாகக் கொண்டு ஆர அளவு (OA) = 3 செ.மீ. உள்ளவாறு ஒரு வட்டம் வரையவும்.

படி 4 : O ஐ மையமாகக் கொண்டு ஆர அளவு (OB) = 5 செ.மீ. உள்ளவாறு மற்றொரு வட்டம் வரையவும்.

இவ்வாறு பொதுமைய வட்டங்கள் C_1 மற்றும் C_2 வரையப்படுகின்றன.

வட்ட வலயத்தின் அகலம் = OB – OA

= 5 – 3

= 2 செ.மீ.

பயிற்சி 4.1

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆர அளவுகளையுடைய பொதுமைய வட்டங்கள் வரைந்து வட்ட வலயத்தின் அகலத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

(i)	4 செ.மீ. மற்றும் 6 செ.மீ.	(ii)	3.5 செ.மீ. மற்றும் 5.5 செ.மீ.
(iii)	4.2 செ.மீ. மற்றும் 6.8 செ.மீ.	(iv)	5 செ.மீ. மற்றும் 6.5 செ.மீ.
(v)	6.2 செ.மீ. மற்றும் 8.1 செ.மீ.	(vi)	5.3 செ.மீ. மற்றும் 7 செ.மீ.

கருத்துச் சுருக்கம்

- பொதுவான மையத்தைக் கொண்டு வெவ்வேறான ஆரங்களுடன் ஒரு தளத்தில் வரையப்படும் வட்டங்கள் பொதுமைய வட்டங்கள் எனப்படும்.
- இரண்டு பொது மைய வட்டங்களுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவு வட்ட வலயம் ஆகும்.
- வட்ட வலயத்தின் அகலம் $= r_2 - r_1 \ (r_2 > r_1)$

விடைகள்

அத்தியாயம் 1

பயிற்சி 1.1

1. i) D ii) C iii) B iv) B v) A
2. i) 200 லி ii) 20,000 கி.மீ. iii) ₹ 1,550
   iv) 50 நிமிடங்கள் v) ₹ 50
3. ₹ 40,000 4. 5000, 3750
5. i) 90% ii) 94% iii) 98% iv) 88% v) 95% vi) 93%
6. 5 7. ₹ 9,000 8. ₹ 1,020
9. 180, 1320 10. 6 கி,கி.
11. i) 26,100 ii) 5,220 12. 25%, ₹ 8,600
13. ஜோதிகா கணக்கில் 20% அதிகமாகப் பெற்றார். 14. ₹ 6,250 15. 20%

பயிற்சி 1.2

1. i) ₹ 7490 ii) ₹ 500 iii) ₹ 9,000 iv) ₹ 2,246 v) ₹ 6,57,500
2. i) இலாபம் ₹ 64, இலாபம்% = 20%
   ii) இலாபம்₹ 200, இலாபம் % = 8%
   iii) நட்டம் ₹ 19, நட்டம் % = 5%
   iv) வி.வி = ₹ 38, நட்டம் % = 5%
   v) வி.வி = ₹ 5,500, இலாபம் % = 10%.
3. i) ₹ 787.50 ii) ₹ 1,260 iii) ₹ 2,835
4. ₹ 1,200 5. $33\frac{1}{3}\%$ 6. 25%
7. ₹ 22,80,000 8. ₹ 34,40,000
9. $11\frac{1}{9}\%$ 10. மொத்த இலாபம் ₹ 113.68

பயிற்சி 1.3

1. i) A ii) D iii) B iv) B v) C
2. ₹ 360 3. ₹ 8,000 4. ₹ 49,220
5. ₹ 18,433.40 6. ₹ 4,950 7. ₹ 13,000
8. 33% 9. ₹ 9,832.50 10. 20%
11. ஒரு சட்டைக்கு ₹ 1,310.40
12. i) தள்ளுபடித் தொகை = ₹ 460; வி.வி. = ₹ 1,840
    ii) தள்ளுபடித் தொகை = ₹ 35; தள்ளுபடி வீதம் = 25%

iii) கு.வி = ₹ 20,000; தள்ளுபடித் தொகை= ₹ 4,000

iv) தள்ளுபடி வீதம் = 5%; தள்ளுபடித் தொகை = ₹ 725

v) தள்ளுபடித் தொகை = ₹ 403; வி.வி = ₹ 2,821

பயிற்சி 1.4

1. i) A = ₹ 1,157.63, வட்டித் தொகை = ₹ 157.63

ii) A = ₹ 4,840, வட்டித் தொகை = ₹ 840

iii) A = ₹ 22,869, வட்டித் தொகை = ₹ 4,869

2. ₹ 2,125

3. i) ₹ 88,200 ii) ₹ 4,410

4. A = ₹ 27,783, கூட்டு வட்டி = ₹ 3,783 5. ₹ 9,826

6. கூட்டு வட்டி = ₹ 1,951 7. ₹ 20,000 8. ₹ 36,659.70

9. i) ₹ 92,400 ii) ₹ 92,610, வித்தியாசம் = ₹ 210

10. ₹ 6 11. ₹ 25 12. ₹ 2,000

13. சுஜா அதிகமாக செலுத்தியத் தொகை ₹ 924.10 14. P = ₹ 1,25,000

15. 2 வருடங்கள் 16.10%

பயிற்சி 1.5

1. 2,205 2. ₹ 2,55,150 3. ₹ 46,000

4. 5,31,616.25 5. 5,415 6. ₹ 20,000

7. 10,000

பயிற்சி 1.6

1. ₹ 27,000 2. ₹ 86,250 3. ₹ 10,800

4. ₹ 1,250

5. மாதத் தவணை = ₹ 700 ; மொத்தத் தொகை = ₹ 19,404

6. மாதத் தவணை = ₹ 875, மொத்தத் தொகை = ₹8,750

பயிற்சி 1.7

1. 24 நாட்கள் 2. 10; 1250

3. அச்சுக்கோர்ப்போரின் எண்ணிக்கை 10

4. 15 வேலையாட்கள் 5. 24 நாட்கள் 6. ₹ 192

பயிற்சி 1.8

1. 3 நாட்கள் 2. 30 நாட்கள் 3. 2 நாட்கள் 4. 12 நிமிடங்கள்

5. A = ₹ 360, B = ₹ 240 6. 6 நாட்கள் 7. 1 மணி

அத்தியாயம் 2

பயிற்சி 2.1

1. i) D ii) C iii) A iv) B
2. குறைந்த நீளமுடைய பக்கம் BC
3. QR = 26 செ.மீ.
4. செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும்.
5. QR = 5 செ.மீ.
6. $x = 9$ மீ
7. குத்துக் கோட்டின் நீளம் $x = 5\sqrt{3}$ செ.மீ.
8. ஆம்
9. $2\sqrt{51}$ அடி

பயிற்சி 2.2

1. i) D ii) D iii) C
2. ஆரம் = 0.5 செ.மீ.

அத்தியாயம் 3

பயிற்சி 3.3

I. கூட்டுச் சராசரி காணும் கணக்குகள்

1. 9 2. $x = 25$ 3. 77.15 4. 161 செ.மீ. 5. 45
6. 15.45 7. 82.1 8. 65.33 9. ₹ 33 10. ₹ 21

II. இடைநிலை காணும் கணக்குகள்

1. i) 81 ii) 45.5 iii) 70 iv) 51
2. 3 3. 153 4. 132 5. ₹ 10,000

III. முகடு காணும் கணக்குகள்

1. i) 74 ii) முகடு இல்லை iii) 25 மற்றும் 36 iv) 20
2. 15 3. 38.7°C 4. 40

IV. 1. சராசரி 28; இடைநிலை 25; முகடு 30 2. சராசரி 25; இடைநிலை 25; முகடு 23
3. சராசரி 53.05; இடைநிலை 53; முகடு 53