Government of Tamilnadu

ఎనిమిదవ తరగతి

TELUGU MEDIUM

STANDARD EIGHT

విడత III Term III

భాగము 2 Volume 2

గణితశాస్త్రము MATHEMATICS

విజ్ఞాన శాస్త్రము SCIENCE

సాంఘిక శాస్త్రము SOCIAL SCIENCE

Untouchability is Inhuman and a Crime

Department of School Education

© Government of Tamilnadu

First Edition - 2012

(Published under Uniform System of School Education Scheme in Trimester Pattern)

Textbook Preparation and Compilation

State Council of Educational Research and Training

College Road, Chennai - 600 006.

Wrapper and Book Design

T.Raghu, M.Vijayasarathy.

Textbook Printing

Tamilnadu Textbook Corporation

College Road, Chennai - 600 006.

This book has been printed on 80 G.S.M.Maplitho paper

Price: Rs.

Printed by offset at :

Textbook available at

www.textbooksonline.tn.nic.in

విషయ సూచిక

గణితశాస్త్రము - (1-96)
(MATHEMATICS)

అధ్యాయము	పాఠ్యాంశము	పేజి సంఖ్య
1.	అనుదిన అంక గణితము	2
2.	రేఖా గణితము	47
3.	దత్తాంశమును ఉపయోగించుట	59
4.	ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితము	90
	జవాబులు	94

విజ్ఞాన శాస్త్రము - (97-165)
(SCIENCE)

అధ్యాయము	పాఠ్యాంశము	పేజి సంఖ్య
1.	జీవులలో వైవిధ్యము	100
2.	మొక్కలు మరియు జంతువుల సంరక్షణ	118
3.	నేలబొగ్గు మరియు పెట్రోలియం	134
4.	కాంతి మరియు ధ్వని	148

సాంఘిక శాస్త్రము - (166-232)

(SOCIAL SCIENCE)

అధ్యాయము	పాఠ్యాంశము	పేజి సంఖ్య
	చరిత్ర	
1.	విలియం బెంటింక్ ప్రభువు (క్రీ.శ. 1828 - క్రీ.శ. 1835)	167
2.	డల్హౌసి ప్రభువు (క్రీ.శ. 1848 - క్రీ.శ. 1855)	171
3.	1857 గొప్ప తిరుగుబాటు	176
4.	తమిళ దేశములో నాయక రాజుల పరిపాలన	183
5.	తంజావూరులో మరాఠాల పరిపాలన (క్రీ.శ. 1676 - క్రీ.శ. 1856)	190
6.	వెల్లూరు తిరుగుబాటు - 1806	196
	భూగోళశాస్త్రం	
	తృతీయ రంగము - I	
1.	వ్యాపారము	200
	తృతీయ రంగము - II	
2.	రవాణా మరియు సమాచార వ్యవస్థలు	204
	జనాభా	
3.	జనాభా పెరుగుదల - విస్తరణ	210
4.	జనాభా - వనరులు	216
	పౌరశాస్త్రం	
1.	రహదారుల భద్రత - నియమ నిబంధనలు	221
	అర్థశాస్త్రం	
1.	ద్రవ్యము, పొదుపు మరియు పెట్టుబడి	228

గణితశాస్త్రము

MATHEMATICS

TELUGU MEDIUM

ఎనిమిదవ తరగతి

STANDARD EIGHT

విడత III

Term III

TEXTBOOK TEAM

TRANSLATORS

Thiru. M. Mohan Naidu
P.G. Assistant,
S.K.D.T. Hr. Sec. School,
Villivakkam, Chennai - 49.

Thiru. V. Srinivasa Rao
P.G. Assistant,
Govt. Hr. Sec. School,
Pallipat, Tiruvallur District.

Tmt. K. Kavitha
B.T. Assistant,
Govt. Hr. Sec. School,
Kanakamma Chatram, Tiruvallur District.

Laser Typeset: P. Bhagavan **Layout :** T.Raghu

1 అనుదిన అంక గణితము

1.1 పరిచయము

1.2 పునర్విమర్శ – లాభము, నష్టము మరియు బారు వడ్డీ

1.3 శాతముల ఉపయోగము, అధికముగా ఏర్పడు ఇతర ఖర్చులు (Overhead Expenses) త్రోపుడు మరియు పన్నులు

1.4 చక్రవడ్డీ

1.5 బారువడ్డీకి చక్రవడ్డీకి మధ్య భేదము

1.6 స్థిర జమ ఖాత (Fixed Deposits) మరియు అనువర్తన లేక ఆవర్తన నిల్వ ఖాతా (Recurring Deposits)

1.7 మిశ్రమాను పాతములు

1.8 కాలము మరియు పని

రోజర్ బెకన్

[1214-1294]

"Neglect of mathematics works injury to all knowledge". అని చెప్పిన రోజర్ బెకన్, ఒక అద్భుత ఉపాధ్యాయుడు, ఆంగ్ల తత్వవేత్త. ఇతడు పరిశీలన, పరిశోధన పద్ధతులకు ముఖ్యత్వమును ఇచ్చెను. ఒక సాధారణ వ్యక్తి, బ్యాంకు, దుకాణము, రైలు నిలయము, తపాలా కార్యలయము, భీమా కంపెనీ లకు వెళ్ళినపుడుగాని, లేక ఎగుమతి,దిగుమతులు వ్యాపార లావాదేవీలు వర్తక వాణిజ్యములు చేయునపుడు తనను అభివృద్ధి పరచుకొనుటకు గణిత పరిజ్ఞానము అవసరము – అని రోజర్ బెకన్ చెప్పెను.

1.1 పరిచయము

ప్రతి మనిషి తన నిత్య జీవిత పరుగులో "గెలుపు" అనే స్థానానికి చేరడానికి ప్రతి క్షణం ప్రయత్నం చేస్తుంటాడు. దాని కొరకు పని చేసి డబ్బును, పేరును సంపాదించుటకు తన కాలము (సమయము)ను వినియోగిస్తున్నాడు.

రాతి యుగం నుండి నేటి వరకు డబ్బుకు వస్తు మార్పిడి విధానం, ఉత్పత్తి మరియు భూమి వంటి విషయాలలో మానవుడు నిష్పత్తి మరియు అనుపాతములను ఉపయోగిస్తున్నాడు. జ్ఞాపక చిహ్నములుగా వున్న తాజ్‌మహల్, తంజావూరులోని బృహదీశ్వర ఆలయములు నేటికి ప్రత్యేక ఆకర్షణతో దృఢంగా ఉండుటకు కారణం, మన పూర్వీకులు వాటి నిర్మాణంలో ఉపయోగించిన సరైన నిష్పత్తి, వారి నైపుణ్యము.

వర్షము–పంటలు; పోషకాహారము–ఆరోగ్యము; ఆదాయము – ఖర్చు మొదలగు వాటిలోని "కారణము–ఫలితము" అనే సంబంధము ప్రపంచములోని అనేక విషయాలతో ముడిపడి వున్నది. వీటినే మిశ్రమానుపాతము అంటారు.

మనం జీవించుటకు, అభివృద్ధి చెందుటకు వడ్డీకి అప్పులు చేయుడంగాని, స్థిర నిల్వలు చేయడంగాని చేస్తాము. మన రక్షణ, ఆరోగ్యము, విద్య, మిగిలిన అవసరాలను తీర్చు బాధ్యతలను ప్రభుత్వమే చూస్తున్నది. దీని కొరకు మనము వివిధరకాల పన్నులను ప్రభుత్వమునకు చెల్లిస్తున్నాము.

ఈ అధ్యాయమునందు మన జీవితంతో ముడిపడి యుండు విషయములను గూర్చి తెలుసుకొందాము.

1.2 పునర్విమర్శ: లాభము, నష్టము మరియు బారువడ్డీ

మనము ముందు తరగతిలోనే లాభము, నష్టము, బారువడ్డీలను గూర్చి నేర్చుకొన్నాము. ఒకసారి జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాము.

లాభము, నష్టము మరియు బారువడ్డీ ఫలితములు

(i)	లాభము	=	అమ్మకపు ధర – కొన్నవెల
(ii)	నష్టము	=	కొన్నధర – అమ్మకపు ధర
(iii)	లాభ శాతము	=	$\frac{\text{లాభము}}{\text{కొన్నధర}} \times 100$
(iv)	నష్టశాతము	=	$\frac{\text{నష్టము}}{\text{కొన్నధర}} \times 100$
(v)	బారువడ్డీ (I)	=	$\frac{\text{అసలు} \times \text{కాలము} \times \text{రేటు}}{100} = \frac{Pnr}{100}$
(vi)	మొత్తము	=	అసలు + వడ్డీ

1.3 శాతములు, అధికముగా ఏర్పడే ఖర్చు (Overhead Expenses) ముదర (లేక) త్రోపుడు (Discount) మరియు పన్ను (Tax) యొక్క ఉపయోగములు

1.3.1. శాతము యొక్క ఉపయోగము

మనము శాతమును గూర్చి ఇంతకు ముందు తరగతిలోనే నేర్చుకొన్నాము. ఇప్పుడు మనకు తెలిసిన దానిని ఇలా చెప్పుకొందాము.

(i) రెండు శాతము $= 2\% = \frac{2}{100}$

(ii) 600 కేజీలలో 8% $= \frac{8}{100} \times 600 = 48$ kg

(ii) $125\% = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

ఇపుడు మనము కొన్ని లెక్కలలో శాతములను ఎలా ఉపయోగించవచ్చునో తెలుసుకుందాము.

నీకు తెలియునా?

$= \frac{1}{2} = 50\%$

$= \frac{1}{4} = 25\%$

$= \frac{3}{4} = 75\%$

ఉదాహరణ 1.1

రెండు రూపాయిల డెబ్బై పైసలలో పదిహేను పైసల శాతమెంత?

సాధన

₹2. 70 పైసలు = (2 × 100 పైసలు + 70 పైసలు)

= 200 పైసలు + 70 పైసలు

= 270 పైసలు

కావలసిన శాతము $= \frac{15}{270} \times 100 = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9}\%$.

ఉదాహరణ 1.2

ఒక మొత్తములో 12% అనునది ₹1080 అయిన మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన

మొత్తము డబ్బుకి x అని అనుకొనుము.

మొత్తములో 12% = ₹1080

$$\frac{12}{100} \times x = 1080$$

$$x = \frac{1080 \times 100}{12} = ₹9000$$

∴ మొత్తము = ₹9000

ఉదాహరణ 1.3

25 మంది విద్యార్థులలో 72% మంది లెక్కలలో మంచి ప్రావీణ్యము కలవారు. లెక్కలలో ప్రావీణ్యము లేని వారి సంఖ్య కనుగొనుము?

సాధన

లెక్కలలో ప్రావీణ్యము కలవారి శాతము = 72%

లెక్కలలో ప్రావీణ్యము కలవారి సంఖ్య = 25 మంది విద్యార్థులలో 72%

$$= \frac{72}{100} \times 25 = 18$$ విద్యార్థులు

లెక్కలలో ప్రావీణ్యము లేనివారు = 25 – 18 = 7 మంది.

ఉదాహరణ 1.4

240 లో 15% తక్కువగా గల సంఖ్య కనుగొనుము.

సాధన

240 లో 15% $= \frac{15}{100} \times 240 = 36$

∴ మనకు కావలసిన మొత్తము = 240 – 36 = 204.

ఉదాహరణ 1.5

ఒక ఇంటి యొక్క ధర 15 లక్షల నుండి 12 లక్షలకు తగ్గినది. తగ్గిన ధర శాతమును కనుగొనుము?

సాధన

వెల = ₹15,00,000

మారిన వెల = ₹ 12,00,000

తగ్గిన ధర = 15,00,000 – 12,00,000 = 3,00,000

∴ తగ్గిన ధర శాతము $= \frac{300000}{1500000} \times 100 = 20\%$

జ్ఞాపకము ఉంచుకొనవలసిన అంశములు

$$\text{పెరుగుదల శాతము} = \frac{\text{పెరిగిన మొత్తము}}{\text{నిజమైన ధర}} \times 100$$

$$\text{తరుగుదల శాతము} = \frac{\text{తరిగిన మొత్తము}}{\text{నిజమైన ధర}} \times 100$$

ప్రయత్నించుము

శరత్, భరత్ 15 తీపి ముక్కలను (sweets) 20%, 80% లగా విభజించుకొన్నారు. వారి ఇద్దరికి ఎన్ని తీపి ముక్కలు వచ్చును?

కృత్యము

మా అమ్మమ్మ తన చిన్నతనములో ఒక గ్రాము బంగారం ₹100 లకు కొన్నారు. ఇప్పుడు నీవు వార్తా పత్రికను చూచి నెలలో మొదటి రోజు బంగారం ధరను గుర్తించుము. ప్రతినెల బంగారం ధర గుర్తించి పెరుగుదల శాతమును కనుగొనుము.

అభ్యాసము 1.1

1. సరియైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము.

(i) ఒక బుట్టలో 25 పండ్లలలో 5 కమలా పండ్లు కలవు. కమలా పండ్ల శాతము ....

(A) 5% (B) 25% (C) 10% (D) 20%

(ii) $\frac{2}{25}$ = _______ %.

(A) 25 (B) 4 (C) 8 (D) 15

(iii) ఒక గాజు పాత్రలో గల బిస్కట్లలో 15% అనునది 30 బిస్కట్లు అయిన మొత్తం బిస్కెట్లు ఎన్ని?

(A) 100 (B) 200 (C) 150 (D) 300

(iv) ఒక స్కూటర్ ధర ₹34,000. ఈ సంవత్సరము దాని ధర 25% పెరిగిన, ప్రస్తుత ధర ఎంత?

(A)₹ 6,500 (B) ₹ 8,500 (C) ₹ 8,000 (D) ₹ 7,000

(v) ఒక వ్యక్తి తన నెలసరి జీతము ₹20,000 నందు ₹3000 పొదుపు చేయును. అతని పొదుపు శాతమెంత?

(A) 15% (B) 5% (C) 10% (D) 20%

2. (i) ఒక మొత్తములో 20% అనునది 40 లీటర్ల నూనె అయిన మొత్తం ఎన్ని లీటర్ల నూనె ఉన్నది?

(ii) 25% ప్రయాణము అనునది 5000కి.మీ. లకు సమానమైన, మొత్తం ప్రయాణ దూరము ఎంత?

(iii) ఒక మొత్తములో 3.5% అనునది ₹54.25 లకు సమానమైన, మొత్తమెంత?

(iv) 60% అనునది 30 నిమిషములకు సమానమైన, మొత్తం కాలమును కనుగొనుము?

(v) ఒక వస్తువు పై 4% అమ్మకపు పన్ను అనునది ₹2 లకు సమానమైన అమ్మకపు ధరను కనుగొనుము?

3. పద్మ తన జీతములో ఆటవిడుపు (Recreation) కోసము ఖర్చు చేయు ₹2000లు 5%నకు సమానమైన, ఆమె జీతమెంత?

4. ఒక బుట్టలోని చెడిపోయిన మామిడి పండ్లు 25% అనగా 1250 పండ్లు. అయిన బుట్టలోని మొత్తం పండ్లు ఎన్ని? మరియు మంచి పండ్లు ఎన్ని ?

5. రాణి తన 12వ తరగతి పరీక్షలో తీసిన మార్కులు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. మార్కుల శాతమును కనుగొనుము.

పాఠ్యాంశము	అత్యధిక మార్కులు	తీసిన మార్కులు	మార్కుల శాతము
(i) ఆంగ్లము	200	180	
(ii) తెలుగు	200	188	
(iii) లెక్కలు	200	195	
(iv) భౌతిక శాస్త్రము	150	132	
(v) రసాయన శాస్త్రము	150	142	
(vi) జీవ శాస్త్రము	150	140	

6. ఒక పాఠశాల క్రికెట్ జట్టు 20 పందెములను వేరొక్క పాఠశాలతో ఆడారు. దీని యందు మొదటి పాఠశాల 25% గెలిచారు. అయిన మొదటి పాఠశాల గెలిచిన పందెములు ఎన్ని?

7. రహీమ్ ₹10,000 లకు ఒక సంవత్సరమునకు 18% బారువడ్డీ చొప్పున ఒక సంస్థలో నిల్వ చేసెను. అతను 5 సంవత్సరముల తర్వాత పొందు వడ్డీ ఎంత?

8. ఒక బొమ్మ గుర్తింపు ధర ₹1200/– లు దానికి అంగడివాడు 15% త్రోపుడు యిచ్చిన, అమ్మకపు ధరను కనుగొనుము?

9. ఒక సంగణక (కంప్యూటర్) వ్యాపార సంస్థ నందు 1500 మంది ముఖాముఖి పరీక్షకు హాజరు అయినారు. అందులో 12% మందిని ఎన్నుకొనిరి. అయితే ఎంత మంది ఎన్నుకొనబడిరి? మరియు ఎంతమంది ఎన్నిక కాలేదు? కనుగొనుము.

10. ఒక మిశ్రమ లోహములో 30% రాగి 20% తుత్తునాగము (zinc) మరియు మిగిలినది నికెల్. 20 కి.గ్రా. మిశ్రమ లోహములో నికెల్ ఎంత వున్నది?

11. పాండియన్ మరియు తామరై యిద్దరును గ్రామ పంచాయితి ఎన్నికలలో నిలిచిరి. పాండియన్‌కు 44% అనగా 11484 ఓట్లు, తామరైకు 36% ఓట్లు లభించినవి. (i) మొత్తము గ్రామములో ఓట్ల సంఖ్య ఎంత? ఈ ఇద్దరు అభ్యర్థులకు ఓటు వేయని వారి సంఖ్యను కనుగొనుము?

12. ఒక వ్యక్తి తన జీతములో 40% భోజనమునకు, 15% బట్టలకు, 20% ఇంటి అద్దెకు మిగతా భాగము పొదుపు చేసెను. ఎంత శాతము పొదుపు చేసెను? అతని జీతము ₹34,400 అయిన అతను పొదుపు చేయు మొత్తమును కనుగొనుము?

13. ప్రణీత ఇంగ్లీషు నందు 50 మార్కులకు 35 మార్కులు గణితమునందు 30 మార్కులకి 27 మార్కులు సాధించినది. రెండింటిలో ఏ పాఠ్యంశములో ఎక్కువ మార్కులు పొందెను? ఎన్ని మార్కులు ఎక్కువగా పొందెను?

14. ఒక వ్యక్తి తన జీతములో 15% బోనస్‌గా పొందిన డబ్బులు ₹11250 లకు సమానమైన, అతని జీతమెంత?

15. వివాహములో ఉపయోగించు దుస్తుల (suit) ధర ₹2100 నుండి ₹2500 లకు పెరిగినది. పెరిగిన ధర శాతమును కనుగొనుము?

ప్రయత్నించుము

1. 40% = 100% – ______ %
2. ఒక తరగతిలో 25% విద్యార్థులు నడిచి 65% విద్యార్థులు ద్విచక్ర వాహనము (bicycle) లోను మిగిలిన వారు పాఠశాల బస్సు నందు వచ్చుచున్నారు. పాఠశాల బస్సులో వచ్చువారి శాతమును కనుగొనుము?
3. ఒక తరగతిలో 30% మంది విద్యార్థులు హిందీ, 50% మంది తెలుగును, మిగిలిన వారు ఫ్రెంచ్ భాషను వారి ద్వితీయ భాషగా తీసుకున్నారు. ఎంత మంది ఫ్రెంచ్ భాషను ద్వితీయ భాషగా తీసుకున్నారు.
4. ఒక నగరములో 30% స్త్రీలు, 40% మగవారు, మిగిలిన వారు పిల్లలు ఉన్నారు. పిల్లల శాతమును కనుగొనుము?

కృత్యము

గణేష్ మరియు గోవిందన్ అనే వర్తకుల వద్ద అముద పట్టు చీరలను కొన్నది. గణేష్ 200 గ్రా. వెండి నూలుతో 100 గ్రా. కాంస్యమును కలిపి పట్టు చీరను నేసెను. గోవిందన్ 300 గ్రా వెండి నూలుతో 200 గ్రా. కాంస్యమును కలిపి చీరను నేసెను. రెండింటిలోను వెండి శాతమును కనుగొని ఎవరి జరీ మంచిదని కనుగొనుము?

(గమనిక : ఎక్కువగా వెండి కలిగి ఉన్నది – మంచిది)

1.3.2 లాభము మరియు నష్టముల ఉపయోగములు

ఈ అధ్యాయములో మనము లాభనష్టముల లెక్కలను సాధించుటను నేర్చుకొందాము.

(i) ఇప్పుడు అమ్మకపు ధరకి సూత్రము కనుగొనుము. ఈ క్రింది సందర్భము నుండి గ్రహించదము.

రాజేష్ ఒక కలమును ₹80 కొని తన స్నేహితుడికి అమ్మెను. అతనికి 5% లాభము రావలయునన్న దానిని ఎంతకు అమ్మవలెను?

రాజేష్ కొన్న కలము ధర ₹80 , అయిన దీనిని కొన్నధర (C.P.) అందురు. 5% లాభము కావలయునన్న అమ్మిన ధర కనుగొనుటకు,

$$\therefore \text{లాభము} = \text{కొన్నధరకు}\,5\% = \frac{5}{100}\times 80 = ₹4$$

దీనిని బట్టి మనకు తెలియునది. అమ్మకపుధర > కొన్నధర

$$\text{అమ్మకపు ధర} = \text{కొన్నధర} + \text{లాభము}$$

$$= 80 + 4 = ₹\,84.$$

రాజేష్ కలమును అమ్మిన ధర = ₹ 84

ఈ లెక్కను సూత్రమును వుపయోగించి చేయవచ్చును.

$$\text{అమ్మిన ధర} = \frac{100 + \text{లాభము}}{100} \times \text{కొన్నధర}$$

$$= \frac{(100+5)}{100}\times 80 = \frac{105}{100}\times 80 = ₹\,84.$$

(ii) ఇప్పుడు మనము కొన్నధరకి సూత్రమును కనుగొనుటను ఈ క్రింది సందర్భమునుండి గ్రహించెదము

ఒక అంగడివాడు ఒక చేతి గడియారమును 5% లాభముతో ₹ 540కు అమ్మెను. అయిన గడియారము కొన్న వెల ఎంత?

అంగడి వాడు 5% లాభమును పెట్టి గడియారము అమ్మెను. ఇక్కడ కొన్నధరను యివ్వలేదు. అందువల్ల మనము కొన్నధరను ₹100 అని అనుకుందాము.

లాభము కొన్నధరలో 5%.

∴ లాభము = 5% కొన్నవెలతో

$= \frac{5}{100} \times 100$

= ₹ 5.

దీని నుండి అమ్మకపు ధర = కొన్నధర + లాభము

= 100 + 5

= ₹ 105.

ఇక్కడ అమ్మకపు ధర ₹105 అయిన కొన్నధర ₹100 అగును.

ఇక్కడ గడియారపు అమ్మకపు ధర (S.P.) ₹540 అయిన

కొన్నవెల (C.P) $= \frac{540 \times 100}{105}$ = ₹ 514.29

∴ గడియారమును ₹514.29 కు అంగడివాడు కొనెను.

ఈ లెక్కను సూత్ర పద్దతిలో సాధించుట :

కొన్నధర (C.P) $= \frac{100}{100 + \text{లాభ శాతము}} \times$ అమ్మినధర

$= \frac{100}{100 + 5} \times 540$

$= \frac{100}{105} \times 540$

= ₹ 514.29.

మనము అమ్మినధర, కొన్నధరకు క్రింది విధముగా సూత్రములను వ్రాయవచ్చును

1. లాభము వచ్చినప్పుడు (i) కొ.ధ = $\left(\frac{100}{100 + \text{లాభ } \%}\right) \times$ అ.ధ	1. నష్టము వచ్చినపుడు (ii) కొ.ధ = $\left(\frac{100}{100 - \text{నష్టము}\%}\right) \times$ అ.ధ
2. లాభము వచ్చినప్పుడు (i) అ.ధ = $\left(\frac{100 + \text{లాభ } \%}{100}\right) \times$ కొ.ధ	2. నష్టము వచ్చినపుడు (ii) అ.ధ = $\left(\frac{100 - \text{నష్టము}\%}{100}\right) \times$ కొ.ధ

ఉదాహరణ 1.6

హమీద్ ఒక కలర్ టి.వి ని ₹15,200లకు కొని 20% నష్టమునకు అమ్మిన, అమ్మిన ధర ఎంత?

సాధన

రాహుల్ ఉపయోగించిన పద్ధతి

నష్టము కొన్నధరలో 20% అయిన

$= \frac{20}{100} \times 15200$

$= ₹\ 3040$

అమ్మకపు ధర = కొన్నధర–నష్టము

$= 15,200 - 3,040$

$= ₹\ 12,160$

(లేక)

రోషన్ ఉపయోగించిన పద్ధతి

కొన్నధర = ₹ 15, 200

నష్టము = 20%

అమ్మిన ధర = $\frac{100 - \text{నష్ట శాతము}}{100}$ × కొ.ధ.

$= \frac{100-20}{100} \times 15200$

$= \frac{80}{100} \times 15200$

$= ₹\ 12,160$

రాహుల్ మరియు రోషన్ యిద్దరు చేసిన లెక్కలో జవాబు ఒక్కటే. టి.వి యొక్క అమ్మిన ధర ₹12160 అగును.

ఉదాహరణ 1.7

ఒక స్కూటీని 15% నష్టముతో ₹13600 అమ్మిన కొన్నధర ఎంత?

సాధన

దేవి ఉపయోగించిన పద్ధతి

నష్టము 15% అనగా,

కొన్న వెలని 100 అనుకొనిన

నష్టము = ₹15 అగును.

కొన్నధర =[100-15]= ₹ 85

అ.ధ. ₹ 85 అయిన కొ.ధ. =₹100.

అమ్మిన ధర ₹ 13600 అయిన

కొన్నధర $= \frac{100 \times 13600}{85}$

$= ₹\ 16,000$

(లేక)

రేవతి ఉపయోగించిన పద్ధతి

నష్టము = 15%.

అమ్మిన ధర = ₹ 13,600

కొన్నధర = $\frac{100}{100 - \text{నష్ట శాతము}}$ × అ.ధ.

$= \frac{100}{100-15} \times 13600$

$= \frac{100}{85} \times 13600$

$= ₹\ 16,000$

స్కూటర్ కొన్నవెల ₹ 16,000.

ప్రయత్నించుము

వస్తువులు	కొన్నధర	లాభము/నష్టము	అమ్మిన ధర
వాషింగ్ మిషన్	16,000	9% లాభము	
మైక్రో ఒవెన్	13,500	12% నష్టము	
కట్ట బీరువా		13% నష్టము	6,786
సోఫా		12½% లాభము	7,000
ఏర్ కండిషనర్	32,400	7% లాభము	

ఉదాహరణ 1.8

11 కలముల కొన్నధర 10 కలముల అమ్మిన ధరకి సమానముగా వున్నది. దీనిలో లాభమా లేక నష్టమా కనుగొని శాతమును కనుగొనుము?

సాధన

కలము అమ్మకపు ధరను x అని అనుకొనుము.

10 కలముల అమ్మకపు ధర = ₹$10x$

11 కలముల అమ్మకపు ధర = ₹$11x$

11 కలముల కొన్నధర =10 కలముల అమ్మినధర = ₹$10x$

ఇక్కడ అమ్మిన ధర > కొన్నధర

$\therefore$ లాభము = అమ్మిన ధర – కొన్నధర

$= 11x - 10x = ₹\ x$

లాభ శాతము $= \dfrac{\text{లాభము}}{\text{కొన్నధర}} \times 100 = \dfrac{x}{10x} \times 100 = 10\%.$

ఉదాహరణ 1.9

ఒక వ్యక్తి రెండు చేతి గడియారములను ₹594 కు అమ్మెను. దానిలో ఒక దానిని 10% లాభమును రెండవ దానిలో 10% నష్టము కలిగిన మొత్తములో అతనికి లాభమా లేక నష్టమా కనుగొని శాతమును కనుగొనుము?

సాధన

మొదటి చేతి గడియారపు అమ్మకపు ధర = ₹594 లాభము = 10%

$\therefore$ మొదటి చేతి గడియారపు కొన్నధర $= \dfrac{100}{100 + \text{లాభ శాతము}} \times$ అమ్మకపు ధర

$= \dfrac{100}{(100+10)} \times 594$

$= \dfrac{100}{110} \times 594 = ₹540$

అదేవిధముగా రెండవ చేతి గడియారపు నష్టము 10% అయిన

$= \dfrac{100}{100 - \text{నష్ట శాతము}} \times$ అమ్మకపు ధర

$= \dfrac{100}{(100-10)} \times 594 = \dfrac{100}{90} \times 594 = ₹660$

మొత్తములో మనకు లాభమా లేక నష్టమా కనుగొనవలయునన్న మనము రెండింటి కొన్నధర, అమ్మినధరలను కనుగొనవలయును.

రెండు గడియారముల కొన్నవెల మొత్తము = 540 + 660 = ₹1,200.

రెండు గడియారములు అమ్మినవెల మొత్తము = 594 + 594 = ₹1,188.

మొత్తములో నష్టము = 1,200 – 1,188 = ₹12

నష్ట శాతము $= \dfrac{\text{నష్టము}}{\text{కొన్నవెల}} \times 100$

$= \dfrac{12}{1200} \times 100 = 1\%.$

1.3.3. అధికముగా ఏర్పడు ఇతర ఖర్చులు (లేక) రవాణా ఖర్చులు (Overhead Expenses)

మాయ వాళ్ళ తండ్రితో కలసి బజారుకు వెళ్ళి ఒక ఏర్‌కూలర్‌ను ₹18000 లకు కొన్నారు. వారి ఇల్లు అంగడికి దగ్గరలో లేదు. చాలా దూరము వల్ల వాళ్ళు దానిని ఇంటికి తీసికొని పోవుటకు వేరొక బండిని (రవాణా చేయుటకు) మాట్లాడిరి. దాని రవాణా ఖర్చుగాను ₹500 అయినది. ఇప్పుడు ఆ ఎర్‌కూలర్ ధర ₹18,000 మాత్రము కాదు, దానితో రవాణా ఖర్చును **(Overhead)** ₹500 చేర్చిన దానినే రవాణా ఖర్చు **(Overhead Expenses)** అని పిలువబడును.

ఇప్పుడు,

ఏర్‌కూలర్ కొన్నవెల = అసలుధర + రవాణా ఖర్చు

= 18,000 + 500 = ₹ 18,500

కిషోర్ తండ్రి ఒక పాత మారుతీ కారును చెన్నై డీలరు వద్ద ₹2,75,000 లకు కొన్నారు. కొన్న తరువాత దానిని రంగు వేయుటకు ₹25,000, తన సొంత వూరికి తీసికొని పోవుటకు గాను ₹2,000 ఖర్చు చేసెను. ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులిమ్ము.

(i) కారు యొక్క మొత్తము ధర ఎంత?

(ii) కారు యొక్క అసలు ధర (real cost)ఎంత?

(iii) ఇక్కడ చెప్పబడిన ఇతర ఖర్చులు ఏవి?

పై లెక్క నందు రంగు వేయు ఖర్చు, రవాణా ఖర్చును కలిపి ఇతర ఖర్చులు (overhead expenses) అగును.

కారు కొన్నధర = అసలుధర + ఇతర ఖర్చులు

= 2,75,000 + (25,000 + 2,000)

= 2,75,000 + 27,000 = ₹3,02,000.

దీనిని బట్టి మనము తెలుసుకొన్నది ఏమనగా ఒక వస్తువును కొనునపుడు ధర మాత్రము కాక కొన్ని ఖర్చులు కూడ కొనుటకు లేక అమ్ముటకు ముందు ఏర్పడును. ఈ అధిక ఖర్చులను కొన్నధరతో కలుపవలయును. దీనినే ఇతర ఖర్చులు (Overhead Expenses) అందురు. దీనిలో బాగు చేయుట (repairs), కూలి(labour charges), రవాణా(transportation)మొదలగు ఖర్చులు కలిసి ఉండును.

ఉదాహరణ 1.10

రాజు ఒక మోటారు సైకిల్‌ను ₹36,000 లకు కొని కొన్ని భాగములు జోడించి (Extra fiting) అందముగా మార్చుటకు కొంత డబ్బులు ఖర్చు చేసెను. అతడు దానిని 10% లాభము పెట్టి అమ్మిన ₹44,000 వచ్చెను. అతడు క్రొత్త భాగములు జోడించుటకుగాను ఎంత ఖర్చు చేసెను?

సాధన

కొన్న ధరని ₹100 అనుకొనుము.

లాభము = 10%, అమ్మకపు ధర = ₹110

అమ్మకపు ధర ₹110 అయిన కొన్నధర ₹100

అమ్మిన ధర ₹44000 అయిన

$$\text{కొన్నధర} = \frac{44000 \times 100}{110} = ₹\ 40,000$$

కొత్త భాగములును జోడించుటకు అయిన ఖర్చు = 40,000 – 36,000 = ₹ 4,000.

అభ్యాసము 1.2

1. అమ్మిన ధర, కొన్న ధర కనుగొనుము.

కొన్నధర	అమ్మిన ధర	లాభము	నష్టము
(i) ₹ 7,282		₹208	
(ii)	₹ 572	₹ 72	
(iii) ₹ 9,684			₹ 684
(iv)	₹ 1,973	₹ 273	
(v) ₹ 6,76,000			₹18,500

2. ఖాళీలను పూరింపుము

కొన్నధర	అమ్మిన ధర	లాభము & లాభశాతము	నష్టము & నష్ట శాతము
(i) ₹ 320	₹ 384		
(ii) ₹ 2,500	₹ 2,700		
(iii) ₹ 380	₹ 361		
(iv) ₹ 40			₹ 2 నష్టము
(v) ₹ 5,000		₹ 500 లాభము	

3. క్రింది వాటికి 5% లాభమయిన అమ్మకపు ధరను కనుగొనుము.

   (i) ద్విచక్ర వాహనము వెల ₹700 మరియు ఇతర ఖర్చు ₹50.

   (ii) ఒక సంగణక మేజా వెల ₹1,150 మరియు రవాణా ఖర్చు ₹50.

   (iii) ఒక పిండి రుబ్బు యంత్రము (table-top wet grinder) వెల ₹2,560 ఇచ్చికొని దానిని సరిచేయుటకు గాను ₹140 ఖర్చు చేసిరి.

4. ఒక అమ్మకపు దారుడు ఒక మేజాను 10% లాభముతో ₹1,320 అమ్మెను. అయిన కొన్నధర ఎంత?
5. 16 నోట్ పుస్తకముల కొన్నవెల 12 నోట్ పుస్తకముల అమ్మిన వెలకి సమానమైన లాభ శాతమును కనుగొనుము?
6. ఒక వ్యక్తి రెండు వస్తువులను ₹375 అమ్మెను. దానిలో మొదటి వస్తువుని 25% లాభమునకు రెండవ దానిని 25% నష్టమునకు అమ్మెను. మొత్తములో అతనికి లాభమా లేక నష్టమా కనుగొని, శాతమును కనుగొనుము?
7. అన్వరసన్ ఒక ఇంటిని ₹17,75,000 కొనెను. దానిని లోపల అందముగా మార్చుటకుగాను (interior decoration) ₹1,25,000 ఖర్చు చేసెను. తరువాత దానిని 20% లాభము పెట్టి అమ్మెను. ఇంటిని అమ్మిన ధరను కనుగొనుము?
8. అమల ఒక పాత ఇల్లు అరవై వేల రూపాయలు ఖర్చు పెట్టి క్రొత్తగా (remodelling) మార్చెను. దానిని 20% లాభము పెట్టి నలభై రెండు లక్షలకు అమ్మెను. ఆ ఇల్లు కొన్న ధర ఎంత?
9. జయకుమార్ ఒక స్థలమును నగరమునకు దూరముగా ₹21,00,000 కొని చుట్టు గోడ కట్టుటగాను ₹1,45,000 ఖర్చు చేసెను. అతను దానిని ₹25,00,000 అమ్మవలయునని తలంచి వార్తా పత్రిక నందు ప్రకటనకు గాను ₹5,000 ఖర్చు చేసెను. అతని లాభ శాతమెంత?
10. ఒక వ్యక్తి తన దగ్గర వున్న రెండు వేర్వేరు జాతి కుక్కలను ఒక్కొక్కటి ₹3,605 అమ్మెను. దానిలో ఒకదానిని 15% లాభమునకు, రెండవదానిని 9% నష్టమునకు అమ్మెను. దానిలో అతనికి కలిగినది లాభమా లేక నష్టమా?

    (గమనిక : కొన్నధర(C.P) ని కనుగొనవలెను)

1.3.4 ముదరా లేక త్రోపుడు (Discounts) ఉపయోగములు

నిన్నటి దినము పూజ తన తల్లిదండ్రులతో కలిసి సంక్రాంతి పండుగకు బట్టలు కొనుటకు అంగడికి పోయెను. ఆమె చాలా అంగళ్ళలో క్రింది ప్రకటనలను చూచెను. దాని అర్థము ఆమెకు బోధ పడలేదు.

దీనినే మనస్సులో తలచుకొనుచూ ఒక అంగడిలో ప్రవేశించి ఒక గౌనుకొనెను.

ఆ గౌను ధర ₹550 అని గుర్తించి వున్నది. దీనినే గుర్తింపుధర (Marked Price) అందురు. ఆమె అంగడి వాడికి ₹550 యిచ్చినది. అయితే అంగడివాడు తిరిగి మిగిలిన చిల్లర యిచ్చెను. అంతేకాక 20% ముదరా యిచ్చు చున్నామని చెప్పెను.

ఇక్కడ 20% ముదరా లేక త్రోపుడు అనగా గుర్తింపు ధర పై 20% తగ్గింపు అని అర్థము.

త్రోపుడు $= \frac{20}{100} \times 550 =$ ₹ 110.

గుర్తింపు ధర నుండి తగ్గించు మొత్తమును త్రోపుడు (లేక) ముదరా అని అందురు.

సాధారణముగా ఒక వస్తువు పై గుర్తించిన ధరనే గుర్తింపు ధర లేక జాబితా ధర అందురు.

పూజ అంగడి వాడికి యిచ్చిన మొత్తము ₹440

= ₹550 – ₹110

= గుర్తింపు ధర – ముదర

దీనిని బట్టి మనము తెలుసుకొన్నది

ముదరా = గుర్తింపు ధర – అమ్మకపు ధర

అమ్మకపు ధర = గుర్తింపు ధర – ముదరా (లేక) త్రోపుడు

గుర్తింపు ధర = అమ్మకపు ధర + ముదర (లేక) త్రోపుడు

పండుగ సందర్భములలో కో అప్ టెక్స్, ఖాదీ మరియు ఇతర దుకాణములు వివిధ వస్తువులకు 10% లేక 20% లేక 30% ముదరా యిచ్చుట మనకు తెలియును. తమిళ నెల 'ఆడి' నందు వ్యాపారస్థులు తమ వ్యాపారము వృద్ధి చేయుటకు మరియు క్రొత్త ఉత్పత్తులను పరిచయము చేయుటకు గాను అనేక వస్తువుల మీద 10% నుండి 50% వరకు ముదర యిచ్చుట మనకు తెలియును.

ఉదాహరణ 1.11

ఒక సైకిల్ గుర్తింపు ధర ₹1500 అయిన దానిని ₹1350 లకు అమ్మిరి. దీనిలో త్రోపుడు శాతమెంత?

సాధన

గుర్తింపు ధర (M.P) = ₹ 1500, అమ్మకపుధర (S. P) = ₹ 1350

త్రోపుడు = గుర్తింపుధర – అమ్మిన ధర

= 1500 – 1350

= ₹ 150

₹1500 గాను త్రోపుడు = ₹ 150

₹100 గాను త్రోపుడు = $\frac{150}{1500} \times 100$

త్రోపుడు శాతము = 10%.

త్రోపుడు అనునది గుర్తింపు ధరపై ఇస్తున్నారు. కాబట్టి గుర్తింపు ధరనే ఆధారముగా తీసుకొనవలయును

ఉదాహరణ 1.12

ఒక గౌను జాబితా ధర ₹220 దానికి 20% త్రోపుడు యిచ్చిన అమ్మకపు ధర, త్రోపుడు కనుగొనుము.

సాధన

గౌను యొక్క గుర్తింపు ధర (జాబితాధర) ₹220 త్రోపుడు = 20%

త్రోపుడు = $\frac{20}{100} \times 220$

= ₹ 44

అమ్మకపు ధర = గుర్తింపు ధర – త్రోపుడు

= 220 – 44

= ₹ 176.

ఉదాహరణ 1.13

ఒక బీరువా పై 5% త్రోపుడు యిచ్చిన తరవాత ₹5225 కు అమ్మిన గుర్తింపు ధరను కనుగొనుము?

సాధన

కృష్ణ ఉపయోగించిన పద్ధతి

ఈలెక్కనందు ముదరా శాతము యివ్వబడినది

అందువల్ల గుర్తింపు ధరని ₹100 అనుకొనుము.

త్రోపుడు శాతము = 5%

త్రోపుడు $= \frac{5}{100} \times 100$

= ₹ 5.

అమ్మకపు ధర =గుర్తింపుధర−త్రోపుడు

= 100 – 5 = ₹ 95

అమ్మకపుధర 95 రూ అయిన గుర్తింపుధర 100

అమ్మకపు ధర = ₹5225

గుర్తింపు ధర $= \frac{100}{95} \times 5225$

∴ బీరువా గుర్తింపు ధర = ₹ 5,500.

[లేక]

విఘ్నేష్ ఉపయోగించిన పద్ధతి

అమ్మకపు ధర (S.P) = ₹5225

త్రోపుడు = 5%

గుర్తింపు ధర (M.P) = ?

గు.ధర= $\frac{100}{100 - \text{త్రోపుడు}\%}$ × అమ్మకపు ధర

$= \left(\frac{100}{100-5}\right) \times 5225$

$= \frac{100}{95} \times 5225$

= ₹ 5,500.

ఉదాహరణ 1.14

ఒక అంగడివాడు తన వాడుకదారులకు (customers) 10% శాతము ముదరా యిచ్చి కూడా అతను 20% లాభమును పొందుచున్నాడు. ఒక వస్తువు యొక్క అమ్మకపు ధరను ₹450 అయిన గుర్తింపు ధరను కనుగొనుము.

సాధన

వనిత ఉపయోగించిన పద్ధతి:

గుర్తింపు ధరను ₹100 అనుకొనుము.

త్రోపుడు = 10% గు.ధర లో

$= \frac{10}{100}$ గు.ధర లో $= \frac{10}{100} \times 100$

= ₹ 10

అ.ధ. = గుర్తింపు ధర − త్రోపుడు

= 100 − 10 = ₹ 90

లాభము = 20% కొ.ద. లో

$= \frac{20}{100} \times 450$ = Rs. 90

అ.ధ. = కొ.ద + లాభము

= 450 + 90 = ₹ 540.

అమ్మకపు ధర 90 అయిన గుర్తింపుధర 100

అ.ధ. ₹ 540,

గు.ధర $= \frac{540 \times 100}{90}$ = ₹ 600

∴ గుర్తింపు ధర = ₹ 600

∴ వస్తువు యొక్క గుర్తింపు ధర=₹ 600

[లేక]

విమల సూత్రమును వుపయోగించే పద్ధతి

త్రోపుడు = 10%, లాభము = 20%,

కొ.ధర = ₹ 450, గు.దర. = ?

గు.ధర= $\frac{100 + \text{లాభ}\%}{100 - \text{త్రోపుడు}\%}$ × కొన్నధర

$= \frac{(100+20)}{(100-10)} \times 450$

$= \frac{120}{90} \times 450$

= ₹ 600

ఉదాహరణ 1.15

ఒక డీలర్ 10% త్రోపుడు యిచ్చి 10% లాభమును పొందు చున్నాడు. ఒక పుస్తకపు గుర్తింపు ధర ₹220 అయిన అమ్మకపు ధర ఎంత?

సాధన

సుగంధన్ ఉపయోగించు పద్ధతి

గుర్తింపు ధర = ₹220

త్రోపుడు = గుర్తింపు ధరలో 10%

$= \frac{10}{100} \times 220 = \text{Rs. } 22$

అమ్మిన ధర(S.P)= గు.ధర – త్రోపుడు

= 220 – 22 = ₹ 198

కొన్నధర(C.P) = ₹110 అయిన

లాభము = కొన్నధర లో 10%

$= \frac{10}{100} \times 100 = \text{Rs. } 10$

అమ్మకపు ధర = కొన్నధర + లాభము

= 100 + 10

= ₹110

అ.ధ. ₹110 కొన్నధర ₹100 అగును

అమ్మకపు ధర ₹198 అయిన

కొన్నధర $= \frac{198 \times 100}{110}$

= ₹ 180.

[లేక]

ముకుందన్ ఉపయోగించు పద్ధతి

త్రోపుడు = 10%

లాభము = 10%

గుర్తింపు ధర = ₹ 220

కొన్నధర $= \frac{100 + \text{త్రోపుడు\%}}{100 - \text{లాభ\%}} \times$ గు.ధర

$= \frac{100 - 10}{100 + 10} \times 220$

$= \frac{90}{110} \times 220$ = ₹ 180.

ఉదాహరణ 1.16

ఒక టి.వి ని 10% మరియు 20% వరుసగా ముదరా యిచ్చి ₹14,400 కి అమ్మిన, గుర్తింపు ధరను కనుగొనుము?

సాధన

అమ్మకపు ధర = ₹ 14,400

గుర్తింపు ధరను ₹100 అనుకొనుము.

మొదట త్రోపుడు = 10% $= \frac{10}{100} \times 100$ = ₹10

మొదటి అమ్మకపు ధర = 100 – 10 = ₹90

రెండవ త్రోపుడు = 20% $= \frac{20}{100} \times 90$ = ₹18

రెండవ త్రోపుడు తరువాత అమ్మకపు ధర = 90 – 18 = ₹72

అమ్మకపు ధర ₹ 72. అయిన గుర్తింపు ధర ₹ 100 అగును.

అమ్మకపు ధర ₹ 14,400, అయిన

గుర్తింపు ధర $= \frac{14400 \times 100}{72}$ = ₹20,000

గుర్తింపు ధర = ₹20,000.

ఉదాహరణ 1.17

ఒక వ్యాపారస్థుడు ఒక వస్తువును ₹1,200 కొని 30% ఎక్కువగా గుర్తింపు ధరను నిర్ణయించి 20% ముదర యిచ్చి అమ్మెను. అమ్మిన ధర మరియు లాభ శాతము ఎంత?

సాధన

వస్తువు యొక్క కొన్న ధర (C.P.) ₹100 అనుకొనుము.

గుర్తింపు ధర (M.P) కొన్నధరపై (C.P) ఎక్కువగా పెట్టిన = ₹130

కొన్నధర ₹100 అయిన గుర్తింపు ధర ₹130 అగును

కొన్నధర = ₹1200. గుర్తింపు ధర (M.P)= $\frac{1200 \times 130}{100}$ = ₹1560

త్రోపుడు = 1560 లో 20% = $\frac{20}{100} \times 1560$ = ₹ 312

అమ్మకపు ధర (S.P) = గుర్తింపు ధర (M.P) – త్రోపుడు

= 1560 – 312 = ₹1248

లాభ శాతము = అమ్మకపు ధర(S.P) – కొన్నధర (C.P)

= 1248 –1200 = ₹ 48.

లాభ శాతము = $\frac{\text{లాభము}}{\text{కొన్నధర}} \times 100$

= $\frac{48}{1200} \times 100 = 4\%$

ప్రయత్నించుము

ఒక అంగడి వాడు 20% త్రోపుడు ఇచ్చెను. క్రింది వాటికి అమ్మకపు విలువను కనుగొనుము.

(i) ఒక జత బట్టల గుర్తింపు ధర = ₹120.

(ii) ఒక సంచి యొక్క గుర్తింపు ధర = ₹250 .

(iii) ఒక జత పాదరక్షలు (shoes)గుర్తింపు ధర = ₹750.

1.3.5 పన్ను (Tax) ఉపయోగములు

పిల్లలు, మనము టి.వి. మరియు వార్తా పత్రికలో "సరియైన కాల వ్యవధిలో పన్ను కట్టుము" అనే ప్రకటన చూస్తున్నాము. పన్ను అనగానేమి? మన ప్రభుత్వము సామాన్య ప్రజల నుండి "పన్ను" ఎందుకు వసూలు చేస్తున్నారు?

మనము పన్ను కట్టుట వలన ప్రభుత్వమే మనకు కావలసిన అత్యవసరమైన రహదారులు, రైలు వసతి, నీటి పారుదల, విద్యుత్తు, త్రాగునీరు మొదలగు వసతులు కల్పించి దేశాన్ని అభివృద్ధి చేయును. వీటన్నింటి కొరకు ప్రభుత్వమునకు "డబ్బు" అవసరము. ఈ అవసరమైన డబ్బును ప్రజలనుండి పన్నుల రూపములో వసూలు చేయుదురు.

పన్నులు రెండు రకములు:

1. ప్రత్యక్ష పన్ను (Direct Tax)

ప్రజలు నేరుగా ప్రభుత్వమునకు చెల్లించు పన్నును ప్రత్యక్ష పన్ను అందురు. ఆదాయపు పన్ను (Income Tax), ఆస్తి పన్ను (Property Tax), వృత్తి పన్ను (Professional Tax), నీటి పన్ను (Water Tax) మొదలగునవి ప్రత్యక్షపన్నులు (Direct Tax).

2. పరోక్ష పన్ను (Indirect Tax)

ప్రజలు నేరుగా కాక పరోక్షముగా కట్టు పన్నును పరోక్ష పన్ను అందురు.

కేంద్ర ప్రభుత్వ పన్ను (Excise Tax)

దేశములో ఉత్పత్తి అగు కొన్ని వస్తువులపై వేయు పన్నునే కేంద్ర ప్రభుత్వ పన్ను అందురు. దీనిని భారత ప్రభుత్వము వసూలు చేయును.

సేవా పన్ను (Service Tax)

హోటళ్ళు, సినిమా థియేటర్లు చార్టెడ్ అకౌంటెట్స్, టెలిఫోను బిల్లు, మొదలగు వాటిపై చెల్లించు పన్నునే సేవా పన్ను అందురు. ఈ పన్నును సేవలను అందించువారు వసూలు చేసి భారత ప్రభుత్వమునకు చెల్లించెదరు.

ఆదాయపు పన్ను (Income Tax)

మన ప్రభుత్వమునకు అధిక ఆదాయము వచ్చు పన్నులలో ఇది అతి ముఖ్యమైనది. ప్రతి పౌరుడు ఒక సంవత్సరమునకు నిర్ణయించిన ఆదాయమున్నచో ఆదాయ పన్నును కట్టవలయును. నిజమైన దేశ పౌరుడు ఖచ్చితముగా సరియైన సమయములో ఆదాయపన్నును కట్టవలయును.

> ఒక వస్తువును అమ్మినపుడు దానిపై ప్రభుత్వము విధించు పన్నును అమ్మకపు పన్ను అందురు.

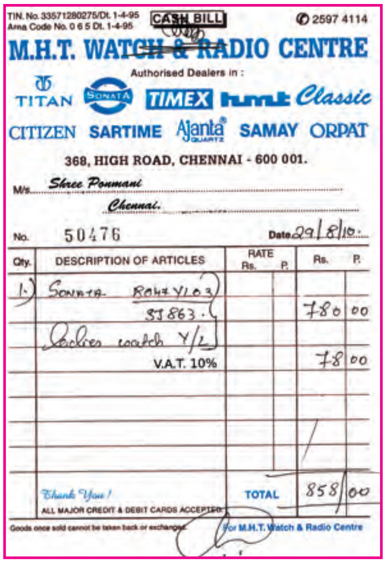
అమ్మకపుపన్ను (Sales Tax) / విలువ ఆధారిత పన్ను (Value Added Tax)

అమ్మకపుపన్ను

ఒక వస్తువును విక్రయించు సందర్భములో అమ్మకపు దారుడు చేయు అమ్మకము మీద వసూలు చేయబడు పన్నును అమ్మకపు పన్ను అందురు. కొనుగోలు దారుడు వ్యాపార వస్తువును కొనుగోలు చేయునప్పుడు వస్తువుల యొక్క ధరతోపాటు పన్ను చెల్లించును.

ఒక వస్తువు యొక్క అమ్మకపు ధరపై ప్రభుత్వము అమ్మకపు పన్ను నిర్ణయించును. దానిని రసీదులలో చేర్చుదురు.

ఈ రోజులలో వస్తువు ధరలతో బాటు చేర్చబడివున్న పన్నును విలువ ఆధారిత పన్ను అందురు **(Value Added Tax (VAT)).** మనము చెల్లించు ధరలోనే పన్ను కూడా చేర్చబడివున్నది.


TIN. No. 33571280275/Dt. 1-4-95
Area Code No. 0 6 5 Dt. 1-4-95
CASH BILL
✆ 2597 4114
M.H.T. WATCH & RADIO CENTRE
Authorised Dealers in :
TITAN SONATA TIMEX hmt Classic
CITIZEN SARTIME Ajanta SAMAY ORPAT
368, HIGH ROAD, CHENNAI - 600 001.
M/s. Shree Ponmani
Chennai.
No. 50476 Date 29/8/10.

Qty.	DESCRIPTION OF ARTICLES	RATE Rs.	P.	Rs.	P.
1.)	Sonata Ro47YL03 SJ863. Ladies watch Y/2			780	00
	V.A.T. 10%			78	00
	Thank You! ALL MAJOR CREDIT & DEBIT CARDS ACCEPTED.	TOTAL		858	00

Goods once sold cannot be taken back or exchanged.
For M.H.T. Watch & Radio Centre

కృత్యము

2011 సంవత్సరము నందలి వివిధ వ్యాపార వస్తువుల అమ్మకపు పన్నును కనుగొనుము.

1. విద్యుత్తు పరికరములు ______ %
2. పెట్రోలు _____ %   3. డీజల్ ___ %
4. గృహోపకరణములు ______ %
5. రసాయనములు ______ %

నీకు తెలియునా?

కొన్ని వ్యాపార వస్తువులైన పాలు, చక్కర, బియ్యము, ఉప్పు, కలము, పెన్సిల్, పుస్తకములు వంటి వస్తువులకు మన ప్రభుత్వము అమ్మకపు పన్ను నుండి మినహాయింపు ఇచ్చినది.

అమ్మకపు పన్ను గణించుట

$$\text{అమ్మకపు పన్ను} = \frac{\text{అమ్మకపు పన్ను శాతము}}{100} \times \text{వస్తువు ధర}$$

$$\text{అమ్మకపు పన్ను శాతము} = \frac{\text{అమ్మకపు పన్ను}}{\text{వస్తువు ధర}} \times 100$$

$$\text{రసీదు నందలి మొత్తము ధర} = \text{వస్తువు ధర} + \text{అమ్మకపు పన్ను}$$

ఉదాహరణ 1.18

వినోద్ ఒక సంగీత వాయిద్యమును ₹12,000 లకు కొనెను. ఆ వస్తువు పైన 8% అమ్మకపు పన్ను విధించిన అతడు ఎంత మొత్తము చెల్లించవలయును. అమ్మకపు పన్ను ఎంత?

సాధన

సంగీతపు వాయిద్యపు ధర = ₹ 12,000

అమ్మకపు పన్ను శాతము = 8%

$$\text{అమ్మకపు పన్ను} = \frac{8}{100} \times 12000$$

$$= ₹\ 960$$

వినోద్ చెల్లించిన మొత్తము = 12,000 + 960

= ₹12,960

ఉదాహరణ 1.19

ఒక శీతలీకరణ సాధనము యొక్క ధర అమ్మకపు పన్నుతో కలిపి ₹ 14,355 దాని గుర్తింపు ధర ₹ 13,050 అయిన అమ్మకపు పన్ను శాతము కనుగొనుము?

సాధన రశీదు నందు శీతలీకరణ సాధనము అమ్మిన ధర = ₹14355 గుర్తింపు ధర = ₹13050

అమ్మకపు పన్ను = రసీదు మొత్తము – వస్తువు ధర

= 14,355 – 13,050 = ₹1,305

$$\text{అమ్మకపు పన్ను శాతము} = \frac{\text{అమ్మకపు పన్ను}}{\text{వస్తువు ధర}} \times 100$$

$$= \frac{1305}{13050} \times 100$$

$$= 10\%$$

ఉదాహరణ 1.20

ప్రియ ఒక సూట్‌కేసుని ₹2,730కు కొనెను. దీని పైన 5% VAT పన్ను విధించబడియున్నది. VAT వేయకముందు ధర ఎంత? మరియు VAT ఎంత?

సాధన

విలువ ఆధారిత పన్ను = 5%.

VAT లేకుండా ధర 100 రూపాయలైన VAT 5% శాతము కలిపితే 105/- రూపాయలగును.

నిజమైన ధర ₹100 అయిన VAT కలిపిన ధర ₹105 అగును.

ధర, VAT పన్ను కలిపి ₹ 2,730 ఐతే సూట్‌కేసు ధర

$$= \frac{100}{105} \times 2730 = ₹2,600$$

సూట్ కేసు ధర = ₹2,600

VAT = 2,730 – 2,600 = ₹ 130

ప్రయత్నించుము

1. క్రింది వాటికి అమ్మకపు ధర కనుగొనుము. ప్రతి దానికి 5% అమ్మకపు పన్ను విధించబడినది.
   (i) ఒక తలదిండు ₹60 అయిన (ii) రెండు బార్ సోప్‌లు ఒక్కొక్కటి ₹25.
2. 8% VAT కలిపి అమ్మకపు ధర యివ్వబడినది. అసలు ధరను కనుగొనుము.
   (i) ఒక విద్యుత్ వాటర్ హీటర్ ₹14,500 కొనబడినది. (ii) ఒక టపాకాయల పెట్టె ₹200 లకు కొనబడినది.

అభ్యాసము 1.3

1. సరియైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము.

(i) త్రోపుడు అనునది ఎల్లప్పుడు దీని పైన ఆధారపడును. ________.
(A) గుర్తింపు ధర, (B) కొన్నధర (C) అమ్మకపు ధర (D) వడ్డీ

(ii) గుర్తింపు ధర = ₹ 140, అమ్మకపు ధర = ₹ 105, అయిన త్రోపుడు= ________.
(A) ₹ 245 (B) ₹ 25 (C) ₹ 30 (D) ₹ 35

(iii) _______ = గుర్తింపు ధర – త్రోపుడు.
(A) కొన్నధర (B) అమ్మకపు ధర (C) రశీదునందలి ధర (D) శూన్యము

(iv) ఒక వస్తువు విలువపైన వేయబడు పన్నును .... అని అందురు.
(A) సేవా పన్ను (B) VAT (C) కేంద్ర ప్రభుత్వ పన్ను D) సేవా పన్ను

(v) ఒక వస్తువు పైన ₹28 త్రోపుడు ఇచ్చి అమ్మకపు ధర 240 రూపాయలైన గుర్తింపు ధర ________.
(A) ₹212 (B) ₹228 (C) ₹268 (D) ₹258

2. ఒక పుస్తకముపైన ₹450 గుర్తించబడినది. అంగడివాడు దానిపై 20% శాతము త్రోపుడు ఇచ్చి పుస్తకపు ప్రదర్శనలో అమ్మిన, అమ్మకపు ధర కనుగొనుము.

3. ఒక దూరదర్శినిపై 10% మరియు 20% వరుసగా త్రోపుడు ఇచ్చిన తరువాత అమ్మినవెల ₹5,760 అయిన గుర్తింపు ధర కనుగొనుము.

4. శేఖర్ ఒక సంగణక యంత్రమును ₹38,000 లకు ముద్రణాయంత్రము (printer) ను ₹8,000 లకు కొనెను. ఈ రెండిండిపైన 7% అమ్మకపు పన్ను చెల్లించిన కొన్నధరను కనుగొనుము?

5. ఒక వంట సామగ్రి అమ్మకపు ధర మరియువిలువ ఆధారిత పన్ను (VAT) కలిపి ₹19,610 అయినది. VAT 6% అయిన ఆ వంట సామగ్రి గుర్తింపు ధరను కనుగొనుము?

6. రిచ్చర్డ్ ₹5,000 గుర్తింపు ధర కలిగియున్న ఒక సూట్‌ను 10% త్రోపుడుపై కొనెను. దానిపై 10% అమ్మకపు పన్ను చెల్లించిన అతడు అంగడి వాడికి ఎంత చెల్లించెను?

7. 9% శాతము అమ్మకపు పన్ను చెల్లించి ఒక శీతలీకరణ సాధనమును ₹1,170 లకు కొనెను. అసలు ధరను కనుగొనుము?

8. ఒక వ్యాపారస్తుడు తన దగ్గర వున్న వస్తువులపై కొన్నధర కంటె 40% ఎక్కువగా గుర్తింపుధరను నిర్ణయించెను. అతడు 5% త్రోపుడు ఇచ్చి అమ్మిన లాభమా? నష్టమా? కనుగొని శాతమును కనుగొనుము?

9. ఒక టీవీ పై ₹11,500 గుర్తింపు ధరను వుంచి 10% త్రోపుడు ధర ప్రకటించారు. పండుగ సమయములో అంగడివాడు తిరిగి 5% త్రోపుడు ఇచ్చి అమ్మెను. దానికి అమ్మకపు ధర కనుగొనుము?

10. ₹3500 లను గుర్తించిన కూలర్‌ను ఒకడు ₹2,800 లకు కొనెను. త్రోపుడు శాతము కనుగొనుము?

11. దీప 15 చొక్కాలను ₹1200 లకు కొని 5% లాభము పెట్టి అమ్మెను. వినియోగదారుడు 4% అమ్మకపు పన్ను చెల్లించిన ఒక్కొక్క చొక్కా వెల ఎంత?

12. క్రింది వాటికి త్రోపుడు, త్రోపుడు శాతము, అమ్మకపు ధర, గుర్తింపు ధర కనుగొనుము

వరుస సంఖ్య	వస్తువులు	గుర్తింపు ధర	త్రోపుడు శాతము	త్రోపుడు మొత్తము	అమ్మకపు ధర
(i)	చీర	₹ 2,300	20%	---	---
(ii)	కలముల జత	₹ 140	---	---	₹105
(iii)	డైనింగ్ టేబుల్	---	20%	---	₹16,000
(iv)	వాషింగ్ మెషీన్	₹ 14,500	---	---	₹13,775
(v)	టపాకాయలు పెట్టె	₹ 3,224	12½%	---	---

ప్రయత్నించుము

వెంట వెంటనే త్రోపుడు కలిగిన 20% మరియు 5% మంచిదా? లేక ఒకేసారి 25% ఇచ్చిన త్రోపుడు మంచిదా? కారణములు తెలుపుము.

1.4. చక్రవడ్డీ

7వ తరగతి నందు నీవు బారువడ్డీ, బారువడ్డీ గణించుటకు సూత్రమును, మొత్తమును కనుగొనుట నేర్చుకొన్నారు. ఇప్పుడు చక్రవడ్డీ, చక్రవడ్డీ గణించుటకు సూత్రములను, మొత్తము కనుగొనుటను నేర్చుకొందురు.

వినయ్ ₹50,000 ఒక బ్యాంక్ నుండి 4% వడ్డీరేటుతో రెండు సంవత్సరములకు అప్పుతీసుకున్నాడు.

మొదటి సంవత్సరము వినయ్ చెల్లించినది.

$$\text{బారువడ్డీ} = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$= \frac{50000 \times 1 \times 4}{100} = ₹\ 2,000$$

ఈ ₹2000 మొదటి సంవత్సరము ముగింపులో కట్టవలయును. ఒకవేళ కట్టకపోయిన వడ్డీ అసలుతో చేరిపోవును. P + I = ₹ 52,000, యిది క్రొత్తగా ఏర్పడినది. ఇది రెండవ సంవత్సరపు అసలు అగును.

రెండవ సంవత్సరము వడ్డీ

$$S.I. = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$= \frac{52000 \times 1 \times 4}{100} = ₹\ 2,080$$

రెండవ సంవత్సరమున వినయ్ ఎక్కువ వడ్డీ చెల్లించవలసి యున్నది.

ఈ విధముగా గణించుటనే చక్రవడ్డీ అందురు.

మామూలుగా బ్యాంకులనందు, భీమా కంపెనీలలో, తపాలా కార్యాలయములలో నిధినిర్వహణ సంస్థలు అన్నింటిలోను చక్రవడ్డీని గణింతురు.

నీకు తెలియునా?

ఒక అసలుకు మాత్రము గణించు వడ్డీని బారువడ్డీ అందురు. అసలుకి వడ్డీని, వడ్డీకి వడ్డీని కలిపి లెక్కించు పద్ధతినే చక్రవడ్డీ అందురు

ఉదాహరణ 1.21

రామ్‌లాల్ ₹8000 లను 3 సంవత్సరములకు 15% వడ్డీ రేటు చొప్పున ఒక సంస్థ (finance) లో నిల్వ చేసెను. 3 సంవత్సరముల తరువాత రామ్‌లాల్ పొందు చక్రవడ్డీ ఎంత?

సాధన :

మెట్టు 1: మొదటి సంవత్సరపు అసలు = ₹8,000

$$\text{మొదటి సంవత్సరపు వడ్డీ} = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$= \frac{8000 \times 1 \times 15}{100} = ₹1,200$$

మొదటి సంవత్సరపు మొత్తము = అసలు + వడ్డీ = P+I =

= 8,000 + 1,200 = ₹9,200

మెట్టు 2: మొదటి సంవత్సరపు మొత్తమే రెండవ సంవత్సరపు అసలు అగును.

రెండవ సంవత్సరపు అసలు $= ₹9{,}200$

రెండవ సంవత్సరపు వడ్డీ $= \dfrac{P \times n \times r}{100}$

$= \dfrac{9200 \times 1 \times 15}{100} = ₹1{,}380$

రెండవ సంవత్సరపు మొత్తము $= P + I = 9{,}200 + 1{,}380 = ₹10{,}580$

మెట్టు 3: రెండవ సంవత్సరపు మొత్తమే మూడవ సంవత్సరపు అసలు అగును.

మూడవ సంవత్సరపు అసలు $= ₹10{,}580$

వడ్డీ $= \dfrac{P \times n \times r}{100}$

$= \dfrac{10580 \times 1 \times 15}{100} = ₹1{,}587$

మూడవ సంవత్సరపు మొత్తము $= P + I$

$= 10{,}580 + 1{,}587 = ₹12{,}167$

మూడు సంవత్సరములకు రామ్‌లాల్ పొందు వడ్డీ

$A - P = 12{,}167 - 8{,}000 = ₹4{,}167.$

చక్రవడ్డీకి సూత్రమును సాధించుట

పైన చక్రవడ్డీ గణించిన పద్ధతి చాలా పొడవుగాను సులభ సాధ్యముకానిది గాను వున్నది. ఎక్కువ సంవత్సరములు యిచ్చినచో ఒక్కొక్క సంవత్సరమునకు కనిపెట్ట వలయును. అందువలన మనము చాలా సులభముగా చక్రవడ్డీ మొత్తమును గణించుటకు సూత్రమును నేర్చుకొందాము.

అసలు (P) గాను, వడ్డీరేటు శాతమును (r) % గాను, కాలమును (n) సంవత్సరములుగాను తీసికొనిన చక్రవడ్డీకి సూత్రము : క్రింది విధముగా

మెట్టు 1 : మొదటి సంవత్సరపు అసలు $= P$

మొదటి సంవత్సరపు వడ్డీ $= \dfrac{P \times n \times r}{100}$

$= \dfrac{P \times 1 \times r}{100} = \dfrac{Pr}{100}$

మొదటి సంవత్సరపు వడ్డీ $= P + I$

$= P + \dfrac{Pr}{100}$

$= P\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)$

మెట్టు 2 : రెండవ సంవత్సరపు అసలు $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)$

రెండవ సంవత్సరపు వడ్డీ $= \dfrac{P\left(1+\frac{r}{100}\right)\times 1\times r}{100}$

(బారువడ్డీ సూత్రమునే ఉపయోగించిన)

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\frac{r}{100}$

రెండవ సంవత్సరపు మొత్తము $= P + I$

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)+P\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\frac{r}{100}$

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)$

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

మెట్టు 3 : మూడవ సంవత్సరపు అసలు $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

మూడవ సంవత్సరపు వడ్డీ $= \dfrac{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times 1\times r}{100}$

(బారువడ్డీ సూత్రమునే ఉపయోగించిన)

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times\frac{r}{100}$

మూడవ సంవత్సరపు మొత్తము $= P + I$

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2+P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times\frac{r}{100}$

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left(1+\frac{r}{100}\right)$

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$

'n' సంవత్సరములు తరువాత మొత్తము (A) $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

మరియు 'n' సంవత్సరముల చక్రవడ్డీ $= A - P$

(i. e.) చక్రవడ్డీ $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - P$

చక్రవడ్డీ కనుగొనుట

సందర్భము 1: సంవత్సరమునకు ఒకసారి లెక్కించుట (Compounded Annually)

ప్రతి సంవత్సరపు ముగింపులో వడ్డీని అసలుతో కలుపు పద్ధతినే సంవత్సరమునకు ఒకసారి వడ్డీ లెక్కించు పద్ధతి అందురు.

ఇక్కడ $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$, చక్రవడ్డీ $= A - P$

సందర్భము 2: అర్ధ సంవత్సరపు వడ్డీ (Semi - Annually)

ప్రతి అర్ధ సంవత్సరము చక్రవడ్డీని కనుగొనవలయునన్న సంవత్సరమును రెండు అర్ధ సం॥లుగా చేయవలెను. ప్రతి 6 నెలలకు లెక్కించవలెనన్న రేటును సగముగా $\left(\frac{r}{2}\right)$ తీసికొనవలయును.

అర్ధ సంవత్సరపు వడ్డీ, $A = P\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$ మరియు C.I=A–P

సందర్భము 3: మూడు నెలలకు చక్రవడ్డీ

ప్రతి మూడు నెలలకు చక్రవడ్డీ గణించవలయునన్న ఒక సంవత్సరమునకు 4 సార్లు లెక్కించవలెను. వడ్డీ రేటు $\left(\frac{r}{4}\right)$ వంతు అగును.

ఈ సందర్భములో, $A = P\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{4n}$ మరియు C.I.=A–P

సందర్భము 4: కాలము భిన్న రూపములో ఉన్నప్పుడు వడ్డీ లెక్కించుట

కాలము భిన్న రూపములో వుండిన, ఉదాహరణకు $5\frac{1}{4}$ సంవత్సరము అని ఇచ్చిన క్రింది విధముగా మొత్తమును (A) కనుగొన వచ్చును.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^5\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]$$ మరియుC.I.=A–P

(↓ 5 సం॥, ↓ ¼ సం॥)

ఉదాహరణ 1.22

₹15,625 లకు 8% చొప్పున సంవత్సరమునకు ఒక సారి వడ్డీ లెక్కించు పద్ధతిలో 3 సం॥లకు చక్రవడ్డీ కనుగొనుము?

సాధన

మూడు సంవత్సరములకు మొత్తము $= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3$

$= 15625\left(1 + \frac{8}{100}\right)^3$

$= 15625\left(1 + \frac{2}{25}\right)^3$

$= 15625\left(\frac{27}{25}\right)^3$

$= 15625 \times \frac{27}{25} \times \frac{27}{25} \times \frac{27}{25}$

= ₹ 19,683

చక్రవడ్డీ=A – P = 19,683 – 15,625

= ₹ 4,058

ఒక సంవత్సరమునకు మరియు అర్థ సంవత్సరమునకు చక్రవడ్డీని కనుగొనుట.

వ.సం.	సంవత్సరమునకు	ఆరు నెలలకు
1	P = ₹100 శాతము =10% సంవత్సరమునకు చక్రవడ్డీ	P = ₹100 కు శాతము = 10% సంవత్సరమునకు, చక్రవడ్డీ ఆరు నెలలకు
2	కాలము = ఒక సంవత్సరము	కాలము= 6 నెలలు లేక ½ సంవత్సరము
3	$I = \frac{100 \times 10 \times 1}{100} =$ ₹10	$I = \frac{100 \times 10 \times 1/2}{100} =$ ₹5
4	A = 100 + 10 = ₹110	A = 100 + 5 = ₹105 తరువాత ఆరు నెలలకి P = ₹105
		$I = \frac{105 \times 10 \times 1/2}{100} =$ ₹5.25 A = 105 + 5.25 = ₹110.25
5	A = ₹110	A = ₹110.25

ఆరు నెలలకు మనము వడ్డీ గణించవలయునన్న రెండు సార్లు (ఆరునెలలకు) మరియు వడ్డీ శాతములో సగము తీసికొని గణించవలయును.

ఉదాహరణ 1.23

అసలు ₹1000 లకు ఒక సంవత్సరమునకు 10% చొప్పున ఆరు నెలలకు వడ్డీ లెక్కించు పద్ధతిలో 18 నెలలకు అగు చక్రవడ్డీని కనుగొనుము?

సాధన

P = ₹1000 r = 10% సం॥నకు

n = 18 నెలలు $= \frac{18}{12}$ సంవత్సరము $= \frac{3}{2}$ సంవత్సరము $= 1\frac{1}{2}$ సంవత్సరము

18 నెలలకు మొత్తము $= P\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$

$= 1000\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{100}\right)\right]^{2\times\frac{3}{2}}$

$= 1000\left(1 + \frac{10}{200}\right)^{3}$

$= 1000\left(\frac{21}{20}\right)^{3}$

$= 1000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$

= ₹ 1157.625

= ₹ 1157.63

చక్రవడ్డీ = A – P

= 1157.63 – 1000 = ₹ 157.63

ప్రయత్నించుము

ఒక మొత్తమును 8% చొప్పున ఒక సంవత్సరమునకు అగు చక్రవడ్డీని 3 నెలలకి ఒకమారు వడ్డీని ఎన్నిసార్లు లెక్కింపవలెను ?

ఉదాహరణ 1.24

₹ 20,000 అసలుకు సం॥ 15% శాతము చొప్పున $2\frac{1}{3}$ సంవత్సరములకు అగు చక్రవడ్డీ ఎంత?

సాధన

P = ₹ 20,000, r = 15% సం॥ $n = 2\frac{1}{3}$ సం॥ కు

$$2\frac{1}{3} \text{ సంవత్సరముల తరువాత } = A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{r}{100}\right)\right]$$

$$= 20000\left(1+\frac{15}{100}\right)^2\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{15}{100}\right)\right]$$

$$= 20000\left(1+\frac{3}{20}\right)^2\left(1+\frac{1}{20}\right)$$

$$= 20000\left(\frac{23}{20}\right)^2\left(\frac{21}{20}\right)$$

$$= 20000\times\frac{23}{20}\times\frac{23}{20}\times\frac{21}{20}$$

$$= 27,772.50$$

$$\text{C.I.} = A - P$$

$$= 27,772.50 - 20,000$$

$$= 7,772.50$$

చక్రవడ్డీలో విలోమ లెక్కలు (Inverse Problems)

మనము యింతకు పూర్వమే ఈ సూత్రమును నేర్చుకొన్నాము., $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$, దీని యందు A, P, r ,n అనే నాలుగు అంశములు వున్నవి. ఈ నాలుగింటిలో మూడు తెలిసిన నాల్గవ విలువను మనము కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 1.25

అసలు ₹ 640 ఏ వడ్డీ రేటుతో 2 సంవత్సరములకు ₹774.40 మొత్తముగా మారును. చక్రవడ్డీ ఒక సంవత్సరానికి ఒకసారి లెక్కించవలయును.

సాధన

P = 640, A = 774.40, n = ₹2 , r = ?

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$774.40 = 640\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{774.40}{640} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{77440}{64000} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{121}{100} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\left(\frac{11}{10}\right)^2 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{11}{10} = 1+\frac{r}{100}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{11}{10}-1$$

$$\frac{r}{100} = \frac{11-10}{10}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{1}{10}$$

$$r = \frac{100}{10}$$

రేటు $= r = 10\%$ (సంవత్సరమునకు)

ఉదాహరణ 1.26

చక్రవడ్డీ 5% చొప్పున ఎంత కాలమునకు ₹ 1600, ₹1852.20లుగా మారును?

సాధన

P = ₹1600 , A = ₹1852.20 , r = 5% సం॥, n = ?

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$1852.20 = 1600\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$$

$$\frac{1852.20}{1600} = \left(\frac{105}{100}\right)^n$$

$$\frac{185220}{160000} = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$$\frac{9261}{8000} = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$$\left(\frac{21}{20}\right)^3 = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

n = 3 సంవత్సరములు

ప్రయత్నించుము

క్రింది వాటికి కాలము రేటుని కనుగొనుము.

1. ఒక మొత్తమునకు 2 సం॥లకు 8% చొప్పున చక్రవడ్డీని ఆరు నెలలకి ఒకమారు గణించుము.
2. ఒక మొత్తము 1½ సం॥కు 4% చొప్పున చక్రవడ్డీని ఆరు నెలలకి గణించుము.

1.5 బారువడ్డీకి చక్రవడ్డీకి గల భేదము (లేక) వ్యత్యాసము

P = అసలు n = రెండు సం॥ R = రేటు శాతము

2 సం॥ లకు బారువడ్డీ, చక్రవడ్డీకి గల భేదము $= P\left(\frac{r}{100}\right)^2$

ఉదాహరణ 1.27

అసలు ₹ 8000 రేటు 10%, కాలము 2 సం॥ అయిన బారువడ్డీ చక్రవడ్డీకి గల భేదమును కనుగొనుము.

సాధన

ఇక్కడ, P = ₹8000, n = 2 సంవత్సరములు, r = 10% సంవత్సరమునకు

బారువడ్డీ చక్రవడ్డీల భేదము $= P\left(\frac{r}{100}\right)^2$

$= 8000\left(\frac{10}{100}\right)^2$

$= 8000\left(\frac{1}{10}\right)^2$

$= 8000 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = ₹80$

అభ్యాసము 1.4

1. క్రింది వాటికి మొత్తమును, చక్రవడ్డీని కనుగొనుము.

వ. సంఖ్య	అసలు	సం॥నకు రేటు %	కాలము
(i)	1000	5%	3
(ii)	4000	10%	2
(iii)	18,000	10%	$2\frac{1}{2}$

2. సంగీత అలెక్స్ వద్ద 8000 రూపాయలను 12% చొప్పున 2 సం॥లకు అప్పుగా తీసుకొనెను. సంవత్సరమునకు ఒకసారి వడ్డీ లెక్కించు పద్ధతిలో సంగీత ఎంత చక్రవడ్డీని చెల్లించును?
3. మోహన్ ఒక వ్యాపారములో ₹ 80,000 పెట్టుబడిగా పెట్టెను. 5% చక్రవడ్డీ చొప్పున సంవత్సరమునకు ఒకసారి వడ్డీ చెల్లించు పద్ధతిలో(i) 2వ సంవత్సరపు ముగింపులో ఆమె ఖాతాలో వుండు మొత్తము ఎంత? (ii) 3వ సంవత్సరపు వడ్డీ ఎంత?
4. 24,000 రూపాయల అసలుకు సంవత్సరమునకు 10% చొప్పున 1½ సంవత్సరమునకు ఎంత వడ్డీ అగును. ప్రతి 6 నెలలకు వడ్డీ లెక్కించుము?
5. సంవత్సరమునకు 12 ½ % వడ్డీ రేటుతో 18 నెలలకు ద్రావిడ్ 8,192 రూపాయలను నిల్వ చేసిన 6 నెలలకు ఒక మారు వడ్డీని లెక్కించు పద్ధతిలో వడ్డీని కనుగొనుము?
6. సంవత్సరమునకు 16% వడ్డీ రేటుతో 9 నెలలకు 15,625 రూపాయలకు 3 నెలలకు లెక్కించు పద్ధతిలో ఎంత వడ్డీ అగును?
7. 4% వడ్డీ రేటుతో 2సంవత్సరములకు 1,632 రూపాయలను చక్రవడ్డీగా పొందిన అసలు కనుగొనుము.
8. విక్కీ సం॥కు 15% వడ్డీ రేటుతో ₹26,400 బ్యాంకులో అప్పుగా తీసుకొనెను. సంవత్సరమునకు ఒకసారి వడ్డీ లెక్కించు పద్ధతిలో అతను 2 సంవత్సరముల 4 నెలల తరువాత అప్పు మొత్తము తీర్చవలయునన్న ఎంత మొత్తము కట్టవలయును?
9. 10% సంవత్సరపు వడ్డీ రేటు చొప్పున ఆరీఫ్ ఒక బ్యాంకు నుండి 80,000 రూపాయలను అప్పుగా తీసుకొనెను. 1½ సంవత్సరము తరువాత చెల్లించిన (i) సంవత్సరపు చక్రవడ్డీ (ii) ప్రతి 6 నెలలకు చక్రవడ్డీ లెక్కించిన రెండింటికి మొత్తములోని భేదమును కనుగొనుము.
10. 5% సంవత్సరపు వడ్డీ రేటు చొప్పున 2,400 రూపాయలకు 2 సంవత్సరములకు బారువడ్డీ, చక్రవడ్డీల భేదమును కనుగొనుము.
11. 6% సంవత్సరపు వడ్డీ రేటు చొప్పున 6,400 రూపాయలకు 2 సంవత్సరములకు బారువడ్డీ చక్రవడ్డీల భేదమును కనుగొనుము.

12. 5% వడ్డీ రేటు చొప్పున ఒక మొత్తమునకు 2 సంవత్సరములకు బారువడ్డీ చక్రవడ్డీ భేదము 5 రూపాయలు అయిన అసలు ఎంత?
13. 12% వడ్డీ రేటు చొప్పున సుజాత 12,500 రూపాయలు 3 సంవత్సరములకు బారువడ్డీకి అప్పు చేసెను. రాధిక అదే అసలు అదే కాలమునకు 10% వడ్డీ రేటు చొప్పున చక్రవడ్డీకి తీసుకొనెను. ఇద్దరిలో ఎవరు ఎంత ఎక్కువ వడ్డీని చెల్లించిరి?
14. ఎంత సొమ్ము పెట్టుబడిగా పెట్టిన అది 4% సంవత్సరపు వడ్డీ రేటు చొప్పున, 1½ సంవత్సరమునకు, 6 నెలలకు ఒకమారు వడ్డీ లెక్కించు పద్ధతిలో 1,32,651 రూపాయలు అగును?
15. గాయత్రి 12,000 రూపాయలను 5% సంవత్సరపు వడ్డీ రేటు చొప్పున 'n' సంవత్సరకాలమునకు చక్రవడ్డీకి పెట్టుబడిగా పెట్టెను. ఆమె 'n' సంవత్సరముల తరువాత పొందిన మొత్తము 13,230 రూపాయలు అయిన 'n'ని కనుగొనుము?
16. ₹ 640 అసలు 2 సంవత్సరముల కాలములో ₹774.40 మొత్తమయిన వడ్డీ రేటును కనుగొనుము?
17. 2000 రూపాయలు అసలు, ప్రతి 6 నెలలకు వడ్డీ లెక్కించిన 1 1/2 సంవత్సరము తరువాత ₹ 2315.25 మొత్తము అయినది. వడ్డీ రేటును కనుగొనుము?

1.5.1 పెరుగుదల, తరుగుదల (Appreciation and Depreciation)

a) పెరుగుదల (Appreciation)

పెరుగుదల అనగా జనభా పెరుగుదల, బాక్టీరియా పెరుగుదల, కొన్ని వస్తువుల విలువ పెరుగుదల, ఆస్తుల విలువ పెరుగుదల మొదలగు వాటిని సూచించును. పెరుగుదలకి సూత్రము.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

b) తరుగుదల (Depreciation)

తరుగుదల అనగా కొన్ని వస్తువుల విలువ తగ్గిపోవుట. వాహనముల విలువ, కట్టడము విలువ, కొన్ని యంత్రముల విలువ మొదలైనవి తగ్గును. తరుగుదలకు సూత్రము.

$$A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$$

నీకు తెలియునా?

ప్రపంచ జనాభా

సంవత్సరము	జనాభా
1700	600,000,000
1800	900,000,000
1900	1,500,000,000
2000	6,000,000,000

3వ శతాబ్దములలో జనాభా 10 రెట్లుగా పెరిగినది.

ఉదాహరణ 1.28

ఒక గ్రామము యొక్క జనాభా ప్రతి సంవత్సరము 7% చొప్పున పెరుగుచున్నది. గ్రామ జనాభా 90,000 అయిన రెండు సంవత్సరముల తరువాత జనాభా కనుగొనుము?

సాధన

జనాభా $P = 90,000$ పెరుగుదల రేటు $= 7\%$ కాలము $= 2$ సంవత్సరములు.

'n' సంవత్సరము తరువాత జనాభా $= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$.

2 సంవత్సరముల తరువాత జనాభా $= 90000\left(1 + \frac{7}{100}\right)^2$.

$$= 90000\left(\frac{107}{100}\right)^2$$

$$= 90000 \times \frac{107}{100} \times \frac{107}{100}$$

$$= 103041$$

2 సంవత్సరముల తరువాత జనాభా = 1,03,041

ఉదాహరణ 1.29

ప్రతి సంవత్సరము 5% చొప్పున ఒక యంత్రము (మిషన్) విలువ తరుగుచున్నది. (depreciates) ఒకడు ₹ 30,000 యిచ్చి ఆ యంత్రమును కొనిన 3 సంవత్సరముల తరువాత దాని విలువెంత?

సాధన

యంత్రము (మిషన్) యొక్క ప్రస్తుత ధర P = ₹ 30,000, తరుగుదల రేటు R = 5%,

కాలము = 3 సం॥లు

'n' సంవత్సరముల తరువాత యంత్రము విలువ $= P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$

మూడు సంవత్సరముల తరువాత యంత్రము విలువ $= 30000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3$

$$= 30000\left(\frac{95}{100}\right)^3$$

$$= 30000 \times \frac{95}{100} \times \frac{95}{100} \times \frac{95}{100}$$

= ₹25721.25

మూడు సంవత్సరముల తరువాత యంత్రము విలువ = ₹25,721.25

ఉదాహరణ 1.30

ఒక గ్రామ జనాభా ప్రతి సంవత్సరము 5% చొప్పున పెరుగుచున్నది. ప్రస్తుత జనాభా 1,04,832 అయిన రెండు సంవత్సరములకు పూర్వము జనాభా ఎంత?

సాధన

రెండు సంవత్సరముల పూర్వము జనాభా,

$$\therefore P\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 = 104832$$

$$P\left(\frac{105}{100}\right)^2 = 104832$$

$$P \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} = 104832$$

$$P = \frac{104832 \times 100 \times 100}{105 \times 105}$$

$$= 95085.71$$

= 95,086 (పూర్ణాంకమునకు సవరించిన)

రెండు సంవత్సరముల ముందు జనాభా = 95,086.

అభ్యాసము 1.5

1. ఒక పాఠశాలలో చేరిన విద్యార్థుల సంఖ్య 2000. ప్రతి సంవత్సరము 5% చొప్పున విద్యార్థులు చేరిక పెరిగిన రెండు సంవత్సరముల తరువాత విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?
2. ఒక కారు వెల ₹3,50,000 దాని పై ప్రతి సంవత్సరము 10% తరుగుదల ఉన్నచో 3 సంవత్సరముల తరువాత దాని ధర ఎంత?
3. ఒక మోటార్ సైకిల్‌ను ₹50,000 కు కొన్నారు. దాని విలువ ప్రతి సంవత్సరము 8% తగ్గిన, ఒక సంవత్సరము తర్వాత ధర ఎంత?
4. ఒక ప్రయోగశాలలో ప్రతి గంటకి 2.5% చొప్పున బాక్టీరియా సంఖ్య అధికమగుచున్నది. ప్రారంభములో బాక్టీరియా సంఖ్య 5,06,000 అయిన రెండు గంటల తరువాత వాటి సంఖ్యను కనుగొనుము.
5. ఒక గ్రామము నుండి ప్రజలు నిరుద్యోగ సమస్యవలన ప్రక్కనవున్న నగరమునకు వలస (migration) పోవుచున్నారు. రెండు సంవత్సరములకు ముందు గ్రామ జనాభా 6,000. ప్రతి సంవత్సరము వలస శాతము 5% అయిన ప్రస్తుత గ్రామ జనాభా ఎంత?
6. ఒక ఆయిల్ ఇంజన్ ప్రస్తుత విలువ ₹14,580 ప్రతి సంవత్సరము 10% తరుగుదల ఉన్నచో మూడు సంవత్సరములకు పూర్వము దాని ధర ఎంత?
7. ఒక గ్రామములో ఉద్యోగ వసతి కారణంగా సంవత్సరమునకు 9% చొప్పున జనాభా పెరుగుచున్నది. ప్రస్తుత జనాభా 11,881 అయిన రెండు సంవత్సరములకు పూర్వపు జనాభాను కనుగొనుము?

1.6 స్థిర జమ ఖాతా (Fixed Deposits) అనువర్తన నిల్వ (Recurring Deposits)

బ్యాంక్, తపాలా కార్యాలయము, ఇతర నిధి నిర్వహణ సంస్థలు (financial institutions) ప్రజలు వివిధ వడ్డీ శాతములలో నిల్వచేయుదురు. ప్రజలు పొదుపు చేసిన డబ్బును వడ్డీతో కలిపి కాల వ్యవధి ముగిసిన వెంటనే తిరిగి తీసుకొందురు.

పైన చెప్పిన వాటిలో ఎన్నో పద్ధతులలో నిల్వ చేయవచ్చును. వాటిలో కొన్ని,

(i) స్థిర నిల్వ (Fixed Deposit) (ii) అనువర్తన నిల్వ (Recurring Deposit)

(i) స్థిర జమ ఖాతా

దీనియందు ఒక మొత్తమును కొంత కాలమునకు నిల్వచేయుదురు. దీనినే F. D. అందురు.

గమనిక : నిల్వలు తక్కువ కాలమునకు లేక ఎక్కువ కాలమునకు నిల్వ చేయ వచ్చును. నిల్వ చేయు కాలమును బట్టి వడ్డీ శాతమును నిర్ణయించెదరు.

(ii) అనువర్తన నిల్వ

అనువర్తన నిల్వకును స్థిర నిల్వకును ఎంతో భేదము కలదు. అనువర్తన నిల్వని R.D. అందురు.

ఈ నిల్వయందు ఖాతాదారుడు తన పొదుపు సామర్థ్యాన్ని బట్టి ఎంతో కొంత డబ్బును ప్రతి నెల కొంత కాలవ్యవధి వరకు తపాల కార్యాలయము లేక బ్యాంకు నందు స్వతహాగా కట్టవచ్చును.

బ్యాంకు అయినా తపాలా కార్యాలయమైనా నిల్వచేసిన మొత్తమును వడ్డీతో కలిపి కాల వ్యవధి ముగిసిన వెంటనే తిరిగి ఇచ్చెదరు. దీనినే అనువర్తన నిల్వ అందురు.

గమనిక: అనువర్తన నిల్వయందు వడ్డీని బారువడ్డీ పద్ధతిలో లెక్కించెదరు.

నీకు తెలియునా?

నెలసరి వాయిదాను ఆ నెలలో ఏ తేదిలోనైనా చెల్లించవచ్చును.

ఇప్పుడు మనము వడ్డీని కాలవ్యవధి **(maturity)** తరువాత వచ్చు మొత్తమును లెక్కించుటకు సూత్రమును కనుగొందాము.

R అనునది వడ్డీ శాతము, P అనునది నెలసరి వాయిదా మొత్తము. N అనునది నెలల సంఖ్య

$$\text{వడ్డీ} = \frac{PNr}{100}, \quad N = \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \text{ సంవత్సరములు}$$

$$\text{కాలవ్యవధి తరువాత వచ్చు మొత్తము } A = Pn + \frac{PNr}{100}$$

ఉదాహరణ 1.31

తరుణ్ ఒక బ్యాంకు నందు 2 లక్షలను 8% సంవత్సరపు వడ్డీ రేటు చొప్పున 5 సంవత్సరములకు నిల్వ చేసెను. కాల వ్యవధి తరువాత పొందు మొత్తము ఎంత?

సాధన

నిల్వ చేసిన అసలు $P =$ ₹ 2,00,000, $n = 5$ సంవత్సరములు ,

$r =$ సంవత్సరము వడ్డీ రేటు 8%

$$\text{వడ్డీ} = \frac{Pnr}{100} = 200000 \times 5 \times \frac{8}{100}$$

$$= 80,000$$

5సంవత్సరముల తరువాత పొందు మొత్తము = 2,00,000 + 80,000 = 2,80,000.

ఉదాహరణ 1.32

వైదీష్ ప్రతి నెల ప్రారంభములో ₹500 చొప్పున 5 సంవత్సరములకు 7.5% వడ్డీ రేటు చొప్పున తపాలా కార్యాలయమునందు నిల్వ చేసెను. ఐదు సంవత్సరముల తరువాత అతను పొందు మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన

ప్రతి నెల నిల్వ చేసిన మొత్తము, $P = 500$

$n = 5 \times 12 = 60$ నెలలు

వడ్డీ రేటు, $r = 7\frac{1}{2}\% = \frac{15}{2}\%$

నిల్వ మొత్తము $= Pn = 500 \times 60$

$= 30,000$

అనువర్తన నిల్వ , $N = \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ సంవత్సరములు

$= \frac{1}{24} \times 60 \times 61 = \frac{305}{2}$ సంవత్సరములు

$$\text{వడ్డీ} = I = \frac{PNr}{100}$$

$$= 500 \times \frac{305}{2} \times \frac{15}{2 \times 100}$$

$$= ₹5{,}718.75$$

$$\text{మొత్తము} = Pn + \frac{PNr}{100}$$

$$= 30{,}000 + 5{,}718.75$$

$$= ₹35{,}718.75$$

ఉదాహరణ 1.33

విశాల్ ప్రతి నెల ప్రారంభమున ₹200 చొప్పున ఐదు సంవత్సరములకు తపాలాకార్యాలయమునందు నిల్వ చేసెను. 5 సంవత్సరాల తరువాత అతను ₹13,830 మొత్తమును పొందెను. వడ్డీ శాతమును కనుగొనుము?

సాధన

కాలవ్యవధి తరువాత పొందిన మొత్తము, A =13,830, P = 200, $n = 5 \times 12 = 60$ నెలలు

$$\text{కాలము, } N = \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \text{ సంవత్సరములు}$$

$$= \frac{1}{12} \times 60 \times \frac{61}{2} = \frac{305}{2} \text{ సం॥లు}$$

$$\text{నిల్వ చేసిన మొత్తము} = Pn = 200 \times 60 = 12,000$$

$$\text{కాల వ్యవధి మొత్తము} = Pn + \frac{PNr}{100}$$

$$13830 = 12000 + 200 \times \frac{305}{2} \times \frac{r}{100}$$

$$13830 - 12000 = 305 \times r$$

$$1830 = 305 \times r$$

$$r = \frac{1830}{305} = 6\%$$

1.6.1 అద్దెల ద్వారా కొనుగోలు మరియు వాయిదా చెల్లింపు (Hire Purchase and Instalments)

బ్యాంక్‌లు మరియు నిధి నిర్వహణ సంస్థలు (financial institutions) వినియోగదారుల కొరకు అద్దెల ద్వారా కొనుగోలు, వాయిదాల చెల్లింపు వంటి పథకములను పరిచయము చేసినవి.

అద్దె కొనుగోలు పథకము (**Hire purchase**)**:** అద్దె కొనుగోలు పథకము ద్వారా మనము కొనుగోలు చేయు వాహనము ఒక నిర్ణీత కాలము వరకు మన సొంతము కాజాలదు. నిధి నిర్వహణ సంస్థకు మనము కొనుగోలు చేసిన వస్తువు యొక్క మొత్తము విలువను సంపూర్ణముగా చెల్లించిన పిదప ఆ వస్తువు లేక వాహనము మన సొంతము అగును.

వాయిదా కొనుగోలు విధానము (**Instalment**)**:** వస్తువుల యొక్క ధరతో పాటు దానికగు వడ్డీ మరియు తదితర చార్జీలను కలిపి మనము చెల్లింపవలసియుండును. అసలుతో సహా వడ్డీ మొత్తమును కట్టవలసిన నెలలతో భాగింపవలెను. ఈ విధముగా వచ్చిన మొత్తమునే వాయిదా మొత్తము అందురు.

సమీకరించు నెలసరి వాయిదా (Equated Monthly Instalment (E.M.I.))

సమీకరించ బడిన నెలసరి వాయిదా అనునది తగ్గింపు విధాన క్రమమును అనుసరింపబడు వాయిదా విధానమగును. వస్తువుల యొక్క ధరతో పాటు దానికగువడ్డీ మరియు తదితర ఖర్చులను కలిపి మనము చెల్లించవలసి యుండును. అసలుతో సహా అధికమగు మొత్తమును కట్టవలసిన నెలలతో భాగింపవలెను. ఆ విధముగా వచ్చిన మొత్తమునే సమీకరించబడిన నెలసరి వాయిదా (E. M. I.) అనబడును.

$$\text{E. M. I.} = \frac{\text{అసలు + వడ్డీ}}{\text{మాసముల సంఖ్య}}$$

బహు విధములైన వాయిదాలపై చెల్లించు పథకములు (Different schemes)

1. 0% వడ్డీ పథకము (**0% interest scheme):** 0% వడ్డీ పథకములో సేవా లేక ప్రక్రియ చార్జీలను (processing charge) వసూలు చేయుదురు. 4 లేక 5 వాయిదాల పైకమును ముందుగానే తీసుకొందురు. వడ్డీ లేదు.
2. 100% ద్రవ్యసహాయ పథకము (**100% Finance):** వడ్డీ మరియు నెలసరి వాయిదాలతో (E.M.I.) సహా ప్రక్రియ లేదా వాజ్యపు చార్జీలను (processing charges) కలిగి వుండును.
3. త్రోపుడు అమ్మకము (**Discount Sale):** వాణిజ్య పోటీల వలన అమ్మకపు విలువలందు త్రోపుడు ప్రకటన చేయబడుచున్నది. వ్యాపార అభివృద్ధికి గాను అద్దెల ద్వారా కొనుగోలు చేయుట యందు కూడా త్రోపుడు ఇవ్వబడుచున్నది.
4. ప్రారంభ నగదు చెల్లింపు పథకము (**Initial Payment):** వస్తువుల వెలలో కొంత శాతమును ముందుగానే కట్టించు కొని మిగిలిన భాగమునకు వడ్డీని చేర్చి నెలసరి వాయిదాల ద్వారా వస్తువులు అమ్మబడుచున్నవి. దీనినే ప్రారంభ నగదు చెల్లింపు పథకము అందురు.

ఉదాహరణ 1.34

ఒక వాషింగ్ మిషన్ ధర ₹18,940 ఇవ్వబడినది. క్రింది పట్టికలో వేర్వేరు వాయిదా పథకములో కొనుగోలు చేయుటకై వివరములు యివ్వబడినవి. ఏ పథకము సరియైనదో కనుగొనుము.

వరుస సంఖ్య	వేర్వేరు పథకము	అమ్మిన వెల	ప్రారంభ చెల్లింపు	వడ్డీ రేటు	ప్రక్రియ చార్జీ	కాలము
(i)	75% ఋణము	18,940	25%	12%	1%	24 నెలలు
(ii)	100% ఋణము	18,940	Nil	16%	2%	24 నెలలు
(iii)	0% ఋణము	18,940	4 E. M. I	Nil	2%	24 నెలలు

పై పట్టికలో పేర్కొన్న పథకములకు సమీకరించిన నెలసరి వాయిదా (E. M. I) మరియు మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన

(i) 75% ఋణ సౌకర్య పథకము

P = ₹18, 940, ప్రారంభ చెల్లింపు 25% రేటు, రేటు = 12%,

సేవా పన్ను = ₹18, 940 లో 1%

$$= \frac{1}{100} \times 18940 = 189.40 \simeq 189$$

ప్రారంభ చెల్లింపు = ₹18,940 లకి 25%

$$= \frac{25}{100} \times 18940 = ₹4{,}735$$

ఋణ మొత్తము = 18,940 – 4,735 = ₹14,205

వడ్డీ $= \dfrac{14205 \times 12 \times 2}{100}$

= ₹3,409. 20 = ₹3,409

E. M. I. $= \dfrac{\text{ఋణము + వడ్డీ}}{\text{నెలల సంఖ్య}}$

$= \dfrac{14205 + 3409}{24} = \dfrac{17614}{24}$

= 733.92 ₹ ≃ ₹734

చెల్లించవలసిన మొత్తము = 4,735 + 14,205 + 3,409 + 189

= ₹22,538

(ii) 100% ఋణ సౌకర్య పథకము

సేవా పన్ను = ₹18940 లో 2%

$= \dfrac{2}{100} \times 18940$ = ₹378.80 ≃ ₹379

వడ్డీ రేటు = 16%

వడ్డీ $= 18940 \times \dfrac{16}{100} \times 2$

= ₹6060.80 ≃ ₹6,061

E. M. I. $= \dfrac{\text{ఋణము + వడ్డీ}}{\text{నెలల సంఖ్య}}$

$= \dfrac{18940 + 6061}{24} = \dfrac{25001}{24}$

= ₹1,041.708 = ₹1,041.71

= ₹1,042

చెల్లించవలసిన మొత్తము = 6,061 + 18,940 + 379 = ₹25,380

(iii) 0% వడ్డీ పథకము

సేవా పన్ను = ₹18940 లో 2%

$= \dfrac{2}{100} \times 18940$ = ₹378.80 = ₹ 379

E. M. I. $= \dfrac{\text{ఋణము + వడ్డీ}}{\text{నెలల సంఖ్య}}$

$= \dfrac{18940 + 0}{24} = \dfrac{18940}{24}$

= ₹789.166 ≃ ₹789

ముందుగా చెల్లించిన E. M. I. = ₹789 × 4 = ₹3,156

చెల్లించవలసిన మొత్తము = 18,940 + 3,156 + 379 = ₹22,475

కావున 0% వడ్డీ పథకము మంచి పథకము.

ఉదాహరణ 1.35

ఒక సంగణక యంత్రము వెల ₹20,000 దీనిని 36 నెలలలో 10% వడ్డీ రేటు చొప్పున కట్టవచ్చునని కంపెనీ ప్రకటన చేసినది. కొనుగోలుదారుడు ఒక నెలకి ఎంత కట్టవలయునో కనుగొనుము?

సాధన

సంగణక యంత్రము వెల= 20,000, వడ్డీ = 10%, కాలము = 36 నెలలు (3 సంవత్సరములు)

$$\text{మొత్తము వడ్డీ} = 20000 \times \frac{10}{100} \times 3$$

$$= ₹6,000$$

$$\text{మొత్తము చెల్లింపు} = 20,000 + 6,000$$

$$= ₹26,000$$

$$\text{నెలసరి చెల్లింపు} = \frac{\text{మొత్తము}}{\text{నెలల సంఖ్య}}$$

$$= \frac{26000}{36}$$

$$= ₹722.\ 22$$

$$\simeq ₹722$$

అభ్యాసము 1.6

1. శ్వేత ₹25,000 లను స్థిర నిల్వ ఖాతాలో జమ చేసెను. 4% సంవత్సరపు వడ్డీ రేటుతో 2 సంవత్సరములకు జమ చేసినది. ముగింపు సమయములో ఆమెకి ఎంత మొత్తము లభించును?
2. నితిన్ ₹75,000 లను 3 సంవత్సరములకు 5% సంవత్సరపు వడ్డీ రేటుతో స్థిర నిల్వ ఖాతాలో జమ చేసెను. ముగింపు సమయములో ఎంత లభించును?
3. ఇమ్రాన్ ప్రతి నెల ప్రారంభములో ₹400 లను రెండు సంవత్సరములకు 12% వడ్డీ రేటు చొప్పున తపాలా కార్యాలయము నందు అనువర్తన నిల్వ చేసెను. రెండు సంవత్సరముల తరువాత అతను పొందు మొత్తమును కనుగొనుము?
4. రమేష్ కొంత మొత్తమును ప్రతి నెల ప్రారంభములో 6 సంవత్సరములు తపాలా కార్యాలయములో 8% వడ్డీ రేటు చొప్పున జమ చేసెను. 6 సంవత్సరముల తరువాత అతని ₹17,904. మొత్తముగా లభించినది. అయిన అతను నెలసరి ఎంత డబ్బులు కట్టెను?
5. కృష్ణ ప్రతి నెల ప్రారంభములో ₹ 700 లను 6 సంవత్సరములు బ్యాంక్‌నందు అనువర్తన నిల్వలో జమ చేసెను. 6 సం॥ల తరువాత అతనికి ₹ 64,197 పొందెను. వడ్డీ శాతమును కనుగొనుము?
6. ఒక మైక్రో ఒవెన్ ధర ₹ 6,000, 5 వాయిదాలలో చెల్లించ వలయునని పూర్ణి తలచినది. కంపెనీ 10% సంవత్సరపు వడ్డీ రేటు చొప్పున అమ్మిన నెలసరి ఆమె ఎంత డబ్బులు కట్టవలెను? మొత్తమును కనుగొనుము?
7. ఒక శీతలీకరణ సాధనము వెల ₹16,800, రంజిత్ దానిని 0% వడ్డీ పథకములో కొనదలచెను. 3 నెలల వాయిదాలు ముందుగా చెల్లించెను. 3% సేవాచార్జీ కూడా రంజిత్ చెల్లించెను. 24 నెలలకు అతడి నెలసరి చెల్లింపు మరియు మొత్తము కనుగొనుము.
8. ఒక భోజనము మేజా ధర ₹ 8,400, వెంకట్ దానిని 10 వాయిదాలలో చెల్లించు పథకములో కొనెను. కంపెనీ దానిని 5% సంవత్సరపు వడ్డీ రేటు చొప్పున లెక్కించిన అతని నెలసరి వాయిదా చెల్లింపు మరియు మొత్తమును కనుగొనుము?

1.7 మిశ్రమానుపాతములు

క్రింది తరగతులలో అనులోమాను, విలోమాను పాతములను గురించి చదివియున్నారు. ఇప్పుడు వాటిని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొందాము.

అనులోమానుపాతము

ఏదేని రెండు పరిమాణములను తీసికొనిన వాటిలో ఒక్కటి ఎక్కువైనను, లేదా తగ్గినను, రెండవది ఎక్కువగును లేదా తగ్గును. ఇదియే అనులోమానుపాతము.

అనులోమానుపాతమునకు ఉదాహరణము

1. దూరము, కాలము అనునది అనులోమానుపాతమునకు ఒక ఉదాహరణ. ఎందుకనగా దూరము అధికమయిన కాలము అధికమగును.
2. అసలు మరియు వడ్డీ అనునది ఒక ఉదాహరణ. ఎట్లనగా అసలు అధికమయిన దానికి లభించు వడ్డీ అధిమగును.
3. వస్తువులు కొనుట, దానికి వెచ్చించు ధనము కూడా ఒక ఉదాహరణ. ఎందుకనగా వస్తువులు ఎక్కువైనచో దానికి అగు ఖర్చు అధికమగును.

విలోమానుపాతము

రెండు పరిమాణములు ఒకటి ఎక్కువైనను లేక తక్కువైనను వరుసగా మరొక్కటి తగ్గును లేదా ఎక్కువగును. దీనినే విలోమానుపాతము అందురు.

విలోమానుపాతమునకు ఉదాహరణము

1. పనివారు, కాలము అనునది చక్కని ఉదాహరణ, ఎట్లనగా పని చేయు మనుష్యులు ఎక్కువయిన దానికి పట్టుకాలము తగ్గును.
2. వేగము, కాలము ఒక ఉదాహరణ. వేగము ఎక్కువయిన దానికి పట్టుకాలము తగ్గును.
3. జనాభా పెరుగుదల మరియు వారికి కావలసిన ఆహారము అనునది ఒక ఉదాహరణ. జనాభా పెరిగినచో ఆహారపులభ్యత తగ్గిపోవును.

మిశ్రమానుపాతము

రెండు లేక అంతకంటె ఎక్కువ అనుపాతములు కలిగి యుండు లెక్కలను మిశ్రమానుపాతములు అందురు.

క్రింది పట్టికలో రెండు అనుపాతములను కలిగియుండు వివిధ అవకాశములు ఇవ్వబడినవి.

అనుపాతములు I	అనుపాతములు II
అనులోమాను	అనులోమాను
విలోమాను	విలోమాను
అనులోమాను	విలోమాను
విలోమాను	అనులోమాను

క్రింద ఇవ్వబడిన లెక్కల ద్వారా మిశ్రమానుపాతము గురించి తెలుసుకొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 1.36

112 మీ. పొడవు గల ఒక గోడను 20 మంది మనుష్యులు 6 రోజులలో కట్టగలిగినచో, 25 మంది 3 రోజులలో ఎంత పొడవు గల గోడను కట్టగలరు?

సాధన

పద్ధతి 1: పై సమస్యలో మూడు రకములైన అనుపాతములు గలవు. అని మనుష్యుల సంఖ్య, రోజులు, గోడ పొడవు.

మనుష్యుల సంఖ్య	రోజులు	గోడ పొడవు
20	6	112
25	3	x

మెట్టు1 : మనుష్యులను గోడ పొడవును తీసికొనుము. మనుష్యుల సంఖ్య 20 నుండి 25కు అధికమయినచో గోడ పొడవు అధిక మగును. అందు వలన యిది అనులోమాను పాతము.

అందువల్ల నిష్పత్తి $20 : 25 :: 112 : x$ ...... (1)

మెట్టు2 : రోజులను, గోడ పొడవుతో పోల్చుము. రోజులు 6 నుండి 3కు తగ్గినచో గోడ పొడవు తగ్గును. అందువలన ఇది అనులోమాను పాతము.

నిష్పత్తి $6 : 3 :: 112 : x$ ..... (2)

(1) మరియు (2), ద్వారా మనము ఇలా వ్రాయవచ్చును.

$$\left.\begin{array}{r}20:25\\6:3\end{array}\right\}::112:x$$

అంత్యముల లబ్ధము = మధ్యముల లబ్ధము

అంత్యములు		మధ్యములు		అంత్యము
20	:	25 ::112	:	x
6	:	3		

$$20 \times 6 \times x = 25 \times 3 \times 112$$

$$x = \frac{25 \times 3 \times 112}{20 \times 6} = 70 \text{ మీటర్లు}$$

రెండవ పద్ధతి

మనుష్యులు	రోజులు	గోడ పొడవు
20	6	112
25	3	x

మెట్టు1 : మనుష్యుల సంఖ్య అధికమయినచో గోడ పొడవు అధికమగును. మనుష్యులు 20 నుండి 25 కు అధికమయినచో గోడ పొడవు అధికమగును. అందువలన ఇది అనులోమానుపాతము.

$$\text{లబ్ధగుణకము} = \frac{25}{20}$$

మెట్టు2 : ఇప్పుడు రోజులు, గోడ పొడవును తీసుకొనుము. రోజుల సంఖ్య 6 నుండి 3కు తగ్గినచో గోడ పొడవు తగ్గును. అందువలన ఇదియు అనులోమాను పాతము

$$\text{లబ్ధ గుణకము} = \frac{3}{6}.$$

$$x = \frac{25}{20} \times \frac{3}{6} \times 112 = 70 \text{ మీటర్లు}$$

ఉదాహరణ 1.37

ఒక పనిని 6 మంది రోజుకు 10 గంటలు పనిచేసిన 24 రోజులలో పూర్తిచేయుదురు. అదే పనిని 9 మంది రోజుకు 8 గంటలు పని చేసిన ఎన్ని రోజులలో పూర్తి చేయగలరు?

సాధన

పద్ధతి 1: ఈ సమస్యలో 3 రకములైన అనుపాతములు కలవు.

అవి 1) మనుష్యులు 2) పనిచేయుకాలము 3) రోజులు

మనుష్యులు	గంటలు	రోజులు
6	10	24
9	8	x

మెట్టు1 : మనుష్యులు, రోజులలను పరిశీలించిన, మనుష్యులు 6 నుండి 9కి పెరిగిన రోజుల సంఖ్య తగ్గును. ఇది విలోమానుపాతము.

నిష్పత్తి $9 : 6 :: 24 : x$ ..... (1)

మెట్టు2 : పని చేయుకాలము రోజులను పరిశీలించిన పని చేయు గంటలు 10 నుండి 8 కి తగ్గిన, రోజులు అధికమగును. కాబట్టి ఇది విలోమానుపాతము.

నిష్పత్తి $8 : 10 :: 24 : x$ ..... (2)

(1) మరియు (2), లను కలిపినచో

$$\left.\begin{matrix} 9:6 \\ 8:10 \end{matrix}\right\} :: 24 : x$$

అంత్యముల లబ్ధము = మధ్యముల లబ్ధము

అంత్యములు		మధ్యములు		అంత్యములు
9	:	6 : : 24	:	x
8	:	10		

$$9 \times 8 \times x = 6 \times 10 \times 24$$

$$x = \frac{6 \times 10 \times 24}{9 \times 8} = 20 \text{ రోజులు}$$

గమనిక: 1. అనులోమాను పాతము (↓) బాణము గుర్తు క్రిందకు గుర్తించుము
2. విలోమాను పాతము (↑) బాణము గుర్తు పైకి గుర్తించుము
3. లబ్ద గుణకమును బాణపుగుర్తు అధారంగా వ్రాయవలెను. బాణపు గుర్తునకు తల భాగములో సంఖ్యను లవముగాను తోక భాగములో సంఖ్యను హారముగాను తీసుకొనుము.

రెండవ పద్ధతిలో క్రింది ఇవ్వబడిన సూచనలు గుర్తుంచు కొనుము.

పద్ధతి 2 : (బాణపు గుర్తులు ఉపయోగించి)

మనుష్యులు	పని చేయు గంటలు	రోజుల సంఖ్య
6	10	24
9	8	x

మెట్టు 1 : మనుష్యులను, రోజులతో పోల్చుము. మనుష్యుల సంఖ్య 6 నుండి 9 కి పెరిగిన రోజులు తగ్గును. ఇది విలోమానుపాతము

$$\text{లబ్ద గుణకము} = \frac{6}{9}$$

మెట్టు 2 : పని చేయు గంటలను రోజులతో పోల్చుము. గంటలు 10 నుండి 8కి తగ్గిన రోజులు అధికమగును. అందువలన యిది విలోమాను పాతము.

$$\text{లబ్ద గుణకము} = \frac{10}{8}$$

$$x = \frac{6}{9} \times \frac{10}{8} \times 24 = 20 \text{ రోజులు}$$

అభ్యాసము 1.7

1. 12 మంది వడ్రంగులు ఒక కొయ్యపనిని రోజుకు 10 గంటలు పనిచేసి 18 రోజులలో ముగించిరి. అదే పనిని 15 మంది రోజుకు 6 గంటలు పనిచేసిన ఎన్ని రోజులగును?
2. 80 యంత్రాలు 6 గంటలలో ఒకే రకమైన 4800 సెల్‌ఫోన్లను తయారు చేసినచో 1 గంటలో 1 యంత్రము ఎన్ని సెల్‌ఫోన్లను తయారు చేయగలదు? అదే విధముగా 25 యంత్రాలు 5 గంటలలో ఎన్ని సెల్ ఫోన్లను తయారు చేయగలవు?
3. 14 మంది ముద్రణ అధికారులు 5 గంటలలో 70 పేజీల పుస్తకమును ముద్రించినచో, 100 పేజీల పుస్తకమును 9 గంటలలో ముద్రించుటకు ఎంత మంది కావలయును?
4. 12 మంది 10 రోజులలో 2400 చదరపు మీటర్ల నేలను చదును చేసినచో, 5400 చ.మీ. నేలను 18 రోజులలో చదును చేయుటకు ఎంతమంది కావలయును?
5. స్వాతి 18 రోజులలో రోజుకు 4 గంటలు పనిచేసి 5 చీరలకు ఎంబ్రాయిడరీ చేయును. 6 గంటలు పనిచేసి 10 చీరలకు ఎంబ్రయిడరీ చేయుటకు ఎన్ని రోజులగును?
6. ఒక బ్యాంకులో అసలు ₹2500 లకు 6 నెలలకు ₹ 100 చొప్పున వడ్డీ యిచ్చినచో ₹3200కు 9 నెలలకు ఎంత వడ్డీ వచ్చును?

1.8 కాలము మరియు పని

ఒక పనిని, దానిని చేయు మనష్యులను పోల్చుటకు ముందు, ఒకడు ఒక రోజుకు ఎంత పని చేయగలడో లెక్కించుట అవసరము. ఎందుకనగా పని, కాలము రెండు విలోమానుపాతములో వుండును. ఎట్లనగా ఎక్కువ మంది కలసి పనిచేసినచో ఆ పనిని ముగించుటకు పట్టుకాలము తగ్గును.

ఈ సమస్యను పరిష్కరించుటలో క్రింది విషయములను గుర్తుంచుకొనవలెను.

1. ఒక మనిషి ఒక పనిని 'n' రోజులలో ముగించినచో అతను చేసిన పని మొత్తములో '$\frac{1}{n}$' వంతు అగును. ఉదాహరణకు ఒకడు ఒక పనిని '4' రోజులలో ముగించినచో అప్పుడు అతని ఒక రోజు పని $= \frac{1}{4}$
2. ఒక మనిషి ఒక రోజులో చేయగల మొత్తము పని పరిమాణము యిచ్చినచో అతను మొత్తము పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టుకాలము = 1/(ఒకరోజు పని). ఉదాహరణ ఒకడు ఒక రోజులో $\frac{1}{10}$ వంతు పనిచేసినచో అతను ఆ పని ముగించుటకు పట్టుకాలము.
$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)} = 1 \times \frac{10}{1} = 10 \text{ రోజులు.}$$

ఉదాహరణ 1.38

A అనునతడు 20 రోజులలోను, B అనునతడు 30 రోజులలోను ఒక పనిని పూర్తిచేయగలిగినచో ఇద్దరు కలసి ఆ పనిని ఎంత కాలములో పూర్తిచేయగలరు?

సాధన

ఒక రోజులో A చేయుపని $= \frac{1}{20}$, ఒక రోజులో B చేయుపని $= \frac{1}{30}$

A మరియు B యిద్దరు కలసి ఒక రోజులో చేయు పని $= \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$

$$= \frac{3+2}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \text{ వ వంతు పని}$$

ఇద్దరు కలసి ఆ పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టుకాలము $= \frac{1}{1/12} = 12$ రోజులు

ఉదాహరణ 1.39

A మరియు B అను యిరువురు కలసి ఒక పనిని 8 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. అందులో A ఒక్కడే 12 రోజులలో పూర్తి చేయును. B ఒక్కడే పూర్తి చేయుటకు పట్టుకాలము ఎంత?

సాధన

A మరియు B లు ఒక రోజులో చేయుపని $= \frac{1}{8}$ వ వంతు పని

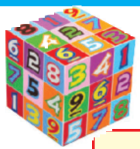
ఒక రోజులో A చేయుపని $= \frac{1}{12}$ వ వంతు పని

ఒక రోజులో B చేయుపని $= \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{3-2}{24} = \frac{1}{24}$

అదే పనిని చేయుటకు B కి పట్టుకాలము $= \frac{1}{1/24} = 24$ రోజులు.

ఉదాహరణ 1.40

A మరియు B ఇద్దరు కలిసి పని చేయుదురు. ఆ పనిని A, 12 రోజులలోను, B, 20 రోజులలోను పూర్తి చేయగలరు. మరి యిద్దరు కలసి 3 రోజులు పనిచేసిన తర్వాత A ఆ పనిని వదలి వెళ్ళగా మిగిలిన పనిని B ఎంత కాలములో పూర్తి చేయగలడు?



ప్రయత్నించుము

> A, B, C అను ముగ్గురు విడివిడిగా వరుసగా 20, 5, 4 రోజులలో పనిని పూర్తి చేయుగలరు. అయిన, వారు ముగ్గురు కలసి పనిని ఎన్ని రోజులలో పూర్తి చేయగలరు?

సాధన

ఒక రోజులో A చేయుపని $= \dfrac{1}{12}$

ఒక రోజులో B చేయుపని $= \dfrac{1}{20}$

ఒక రోజులో ఇద్దరు కలసి చేయుపని $= \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{20}$

$= \dfrac{5+3}{60} = \dfrac{8}{60} = \dfrac{2}{15}$

మూడు రోజులలో ఇద్దరు కలిసి చేయుపని $= \dfrac{2}{15} \times 3 = \dfrac{2}{5}$

మిగిలిన పని $= 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$

మిగిలిన పని B చేయుటకు పట్టుకాలము $= \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{20}} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{20}{1}$

$=$ 12 రోజులు

ఉదాహరణ 1.41

ఒక పనిని A, B అను ఇద్దరు 12 రోజులలో, B మరియు C ఇద్దరు కలసి 15 రోజులలో, C మరియు A ఇద్దరు కలసి 20 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. వారు అందరు కలసియు మరియు విడివిడిగా చేయుటకు పట్టుకాలమును కనుగొనుము?

సాధన

ఒక రోజులో A , B ఇద్దరు కలసి చేయుపని $= \dfrac{1}{12}$

ఒక రోజులో B, C ఇద్దరు కలసి చేయుపని $= \dfrac{1}{15}$

ఒక రోజులో C, A ఇద్దరు కలసి చేయుపని $= \dfrac{1}{20}$

ఒక రోజులో (A+B)+(B+C)+(C+A) కలసి చేయు పని $= \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{20}$

ఒక రోజులో (2A + 2B + 2C) కలసి చేయు పని $= \dfrac{5+4+3}{60}$

ఒక రోజులో 2(A + B + C) కలసి చేయు పని $= \dfrac{12}{60}$

ఒక రోజులో A, B, C ముగ్గురు కలసి చేసిన పని $= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{10}$

$\therefore$ A,B ,C ముగ్గురు కలిసి 10 రోజులలో పూర్తి చేయుదురు.

ఒక రోజులో A చేసిన పని

(i.e.)[(A + B + C) చేసిన పని – (B + C)చేసిన పని] = $\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{3-2}{30}=\frac{1}{30}$

$\therefore$ A ఆ పనిని 30 రోజులలో పూర్తి చేయును.

ఒక రోజులో B చేసిన పని

(i.e.)[(A + B + C)చేసిన పని – (C + A)చేసిన పని] = $\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{2-1}{20}=\frac{1}{20}$

$\therefore$ B ఆ పనిని 20 రోజులలో పూర్తి చేయును.

ఒక రోజులో C చేసిన పని

(i.e.)[(A + B + C)చేసిన పని – (A + B)చేసిన పని] = $\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{6-5}{60}=\frac{1}{60}$

$\therefore$ C ఆ పనిని 60 రోజులలో పూర్తి చేయును.

ఉదాహరణ 1.42

ఒక పనిని A అనునతడు 10 రోజులలోను, B అనునతడు 15 రోజులలోను పూర్తిచేయగలరు. వారిద్దరు కలసి పని ముగించి సంపాదించిన మొత్తము ₹ 1500 అయిన వారిద్దరికి ఒక్కొక్కరికి ఎంత లభించును.

సాధన

ఒక రోజులో A చేయుపని = $\frac{1}{10}$

ఒక రోజులో B చేయుపని = $\frac{1}{15}$

వారిద్దరి పని నిష్పత్తి = $\frac{1}{10}:\frac{1}{15}=3:2$

మొత్తము భాగము = 1500

A యొక్క భాగము = $\frac{3}{5}\times 1500$ = ₹ 900

B యొక్క భాగము = $\frac{2}{5}\times 1500$ = ₹ 600

ఉదాహరణ 1.43

ఒక నీటి తొట్టె నింపుటకు రెండు కుళాయిలకు విడివిడిగా పట్టు కాలము 30,40 నిమిషములు. ఆ తొట్టి నీరు వెలుపలికి పంపుటకు వేరొక కుళాయికి పట్టుకాలము 24 నిమిషములు అయినచో మూడింటిని ఒకేసారి తెరచినచో ఖాళీ తొట్టెలో నీరు నింపుటకు పట్టు కాలమెంత?

సాధన

మొదటి కుళాయి ద్వారా ఒక నిమిషములో నిండు నీటి కొలత = $\frac{1}{30}$

రెండవ కుళాయి ద్వారా ఒక నిమిషములో నిండు నీటి కొలత = $\frac{1}{40}$

మూడవ కుళాయి ద్వారా ఒక నిమిషములో వెలుపలికి పోవు నీటి కొలత = $\frac{1}{24}$

3 కొళాయిలు ఒకేసారి తెరచినచో తొట్టె నిండు నీటి కొలత $= \frac{1}{30} + \frac{1}{40} - \frac{1}{24}$

$= \frac{4+3-5}{120} = \frac{7-5}{120}$

$= \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$

తొట్టె నింపుటకు పట్టుకాలము $= \frac{1}{1/60}$ = 60 నిమిషములు

= 1 గంట

అభ్యాసము 1.8

1. ఒక పనిని పూర్తి చేయుటకు ఒక పురుషునికి పట్టు కాలము 4 రోజులు, అదే పనిని పూర్తి చేయుటకు స్త్రీకి 12 రోజులు పట్టినచో వారిద్దరు కలసి ఎన్ని రోజులలో పూర్తి చేయగలరు?
2. ఇద్దరు బాలురు కలసి ఒక పనిని 10 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. మొదటి అబ్బాయి ఒక్కడే 15 రోజులలో పూర్తి చేయగలడు. రెండవ అబ్బాయి ఒక్కడే పూర్తి చేయుటకు పట్టుకాలము ఎంత?
3. A, B మరియు C అను ముగ్గురు ఒక పనిని వరుసగా 8, 12 మరియు 16 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. వీటిలో మొదట A, B ఇరువురు కలసి 3 రోజులు పని చేసిన తర్వాత B వదిలి వెళ్లగా C, A తో కలసి పని చేసెను. వారిద్దరికి ఆ పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టుకాలము ఎంత?
4. ఒక తొట్టెలో నీరు నింపుటకు A కుళాయికి 10 నిమిషములు, B కుళాయికి 20 నిమిషములు పట్టును. తొట్టె నీరు వెలుపలికి పంపుటకు C కుళాయికి 15 నిమిషములు పట్టును. మూడింటిని ఒకేసారి తెరచినచో ఖాళీ తొట్టెను నింపుటకు పట్టుకాలము ఎంత?
5. ఒక పనిని A అనునతడు 20 రోజులలో, B అనునతడు 30 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. ఆ పనికి వారికి లభించిన మొత్తము ₹600. వారిద్దరికి ఒక్కొక్కరికి ఎంత లభించును?
6. ఒక పనిని ముగించుటకు A, B మరియు C అను ముగ్గురికి పట్టుకాలము వరుసగా 12,24 మరియు 8 రోజులు. వారు ముగ్గురు కలసి ఒక రోజు పని చేసిన తర్వాత C వదిలి వెళ్ళగా మిగిలిన పని చేయుటకు A మరియు B కి పట్టుకాలము ఎంత?
7. ఒక తొట్టె నింపుటకు మొదటి కొళాయికి 15 నిమిషములు, రెండవ కుళాయికి 20 నిమిషములు పట్టును. రెండు కుళాయిలు తెరచివుంచగా ఖాళీ తొట్టె నిండుటకు పట్టు కాలమెంత?

సంక్షిప్తములు: C.P. = కొన్నవెల, S.P. = అమ్మిన ధర, M.P. = గుర్తింపు ధర, R = రేటు, P = అసలు n = కాలము, A = మొత్తము, C.I = చక్రవడ్డీ.

పాఠ్యభాగ సారాంశము

- శాతము అనునది నూటికి లెక్కవేయును. భిన్నము యొక్క హారము 100 అయిన దానిని శాతము అందురు.
- లాభము వచ్చినపుడు,

  లాభము = అమ్మినవెల – కొన్నవెల; లాభ శాతము $= \frac{\text{లాభము}}{\text{కొన్నవెల}} X100$

  అమ్మినవెల $= \frac{100+\text{లాభ }\%}{100}$ Xకొ.వె. ; కొన్నవెల $= \frac{100}{100+\text{లాభ }\%}$ Xఅమ్మిన వెల
- నష్టము వచ్చినపుడు,

  నష్టము = కొన్నవెల – అమ్మినవెల.; నష్టశాతము $= \frac{\text{నష్టము}}{\text{కొన్నవెల}} X100$

  అమ్మినవెల $= \frac{100-\text{నష్ట }\%}{100}$ Xకొ.వె. ; కొన్నవెల $= \frac{100}{100-\text{నష్ట }\%}$ Xఅమ్మిన వెల
- గుర్తింపు వెల యందు తగ్గింపబడినది త్రోపుడు అగును.
- గుర్తింపు వెల యందు ఇవ్వబడిన త్రోపుడు తగ్గించిన తరువాత గల వెలను అమ్మకపు వెల అందురు.
- తగ్గింపు = గుర్తింపుధర – అమ్మినవెల.
- గుర్తింపుధం $= \frac{100}{100 - \text{తగ్గింపు}\%} \times$ అ.వె; అమ్మినవెల $= \frac{100 - \text{తగ్గింపు}\%}{100} \times$ గు.ధర
- కొన్నవెల $= \frac{100 - \text{తగ్గింపు}\%}{100 + \text{లాభ}\%} \times$ గు.ధర; గుర్తింపుధర $= \frac{100 + \text{లాభ}\%}{100 - \text{తగ్గింపు}\%} \times$ కొ.వె.
- తగ్గింపు శాతము $= \frac{\text{తగ్గింపు}}{\text{గుర్తింపు ధర}} \times 100$
- వడ్డీ అనునది

  (i) సంవత్సరపు చక్రవడ్డీ, $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

  (ii) అర్ధ సంవత్సరపు చక్రవడ్డీ, $A = P\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$

  (iii) పావు సంవత్సరపు చక్రవడ్డీ, $A = P\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{4n}$
- పెరుగుదల, $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$; తరుగుదల, $A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$
- రెండు సంవత్సరాలకు చక్రవడ్డీ, బారువడ్డీకి మధ్య వ్యత్యాసము $= P\left(\frac{r}{100}\right)^2$
- A అనునతని ఒకరోజు పని $= \frac{1}{\text{A తీసుకొను రోజులు}}$
- 'x' రోజులలో ముగించు పని = ఒకరోజు పని $\times x$.

2

రేఖా గణితము

2.1 పరిచయము

2.2 త్రిభుజములలో అనుషక్తము

2.3 పైథాగరస్ సిద్ధాంతము

2.4 వృత్తములు.

2.1 పరిచయము

రేఖా గణితము క్రీ.పూ 1000 సంవత్సరములకు పూర్వమే ఈజిప్టులచే అభివృద్ధి పరచబడినది. గ్రీకులు అవసరమైన ప్రాధమిక స్వీకృతాలు, సత్యప్రవచనాల ద్వారా రేఖా గణితమునకు తార్కిక పద్ధతులలో సైద్ధాంతిక నిరూపణలు ఇచ్చారు.

రేఖా గణితము మన జీవితంలో ఒక ముఖ్యపాత్ర పోషించుచున్నది. ముఖ్యముగా త్రిభుజములను అనేక విధములుగా ఉపయోగించుచున్నాము. బహుభుజములుగా గల భూమి వైశాల్యమును త్రిభుజములుగా విభజించి తెలుసుకొనవచ్చును. అన్ని త్రిభుజముల మొత్తము వైశాల్యము ఆ బహుభుజి యొక్క వైశాల్యమగును. త్రిభుజములు లంబకోణ త్రిభుజములైనచో వైశాల్యము కనుగొనుట చాలా సులభమగును. అట్లు కానిచో త్రిభుజ ఆధారభుజము నుండి ఎదుటి శీర్షమునకు లంబము గీచి వైశాల్యమును కనుగొనవలెను.

ఈ పాఠ్యభాగమునందు త్రిభుజములలో అనుషక్తములు - వాటి ధర్మములను గురించి తెలుసుకొనెదము.

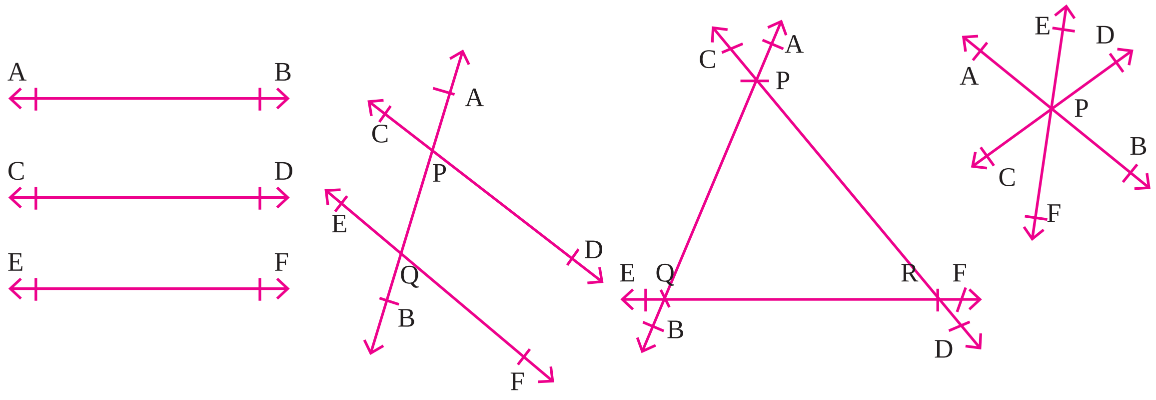
పైథాగరస్

(క్రీ.పూ 582 - 497)

గణిత శాస్త్రవేత్త లందరిలోను పేరెన్నికగన్న ఈయన ఒక గ్రీకు గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు. లంబకోణ త్రిభుజమునకు సంబంధించిన విషయములలో ఆయన దిట్ట. లంబకోణ త్రిభుజ సంబంధములు ఈయన పేరుతోనే పిలువబడు చున్నవి.

2.2 త్రిభుజములలో అనుషక్తము (Concurrency in triangles)

ఒక తలము నందు మూడు లేక అంతకంటే ఎక్కువగా రేఖలను గీయుము. ఎన్ని విధములుగా గీయగలము? క్రింది విధముగా గీయగలము.



(a) (b) (c) (d)

పటము **(a)** నందు AB ,CD, EF లు సమాంతర రేఖలు, కావున అవి ఖండించుకొనవు.

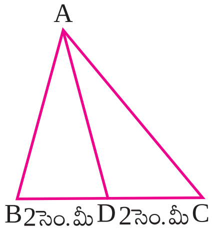
పటము **(b)** నందు AB మరియు CD లు P వద్ద, AB మరియు EF లు Q వద్ద ఖండించు కొనుచున్నవి. కావున P, Q లు రెండు ఖండన బిందువులు.

పటము **(c)** నందు P, Q, R లు మూడు ఖండన బిందువులు.

అయితే పటము **(d)** నందు P ఒకటే ఖండన బిందువు. ఇక్కడ AB,CD,EF లు ఒకే బిందువు 'P' ద్వారా పోవుచున్నవి. ఈ రేఖలను అనుషక్తరేఖలు **(concurrent lines)** అందురు. 'P' బిందువును "అనుషక్త బిందువు" అందురు.

ఒక త్రిభుజమునందు కొన్ని ముఖ్యమైన అనుషక్త బిందువులు కలవు. వాటిని త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రము, త్రిభుజ లంబ కేంద్రము, త్రిభుజ అంతర కేంద్రము మరియు త్రిభుజ పరివృత్త కేంద్రము అని అంటారు. ఇపుడు మనము ఈ త్రిభుజ బిందువులను ఎట్లు పొందగలమో చదువుకోబోవుచున్నాము.

2.2.1 త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రము

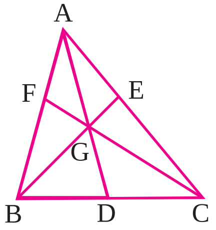


ప్రక్కపటమునందు, ABC ఒక త్రిభుజము.

BC మధ్య బిందువు D. AD ని కలుపుము.

ఇక్కడ △ABC నందు AD ఒక మధ్యగతరేఖ.

ఒక త్రిభుజ శీర్షము నుండి దాని ఎదుటి భుజము యొక్క మధ్య బిందువుకు గీయబడిన రేఖా ఖండమును "మధ్యగతరేఖ" అందురు.

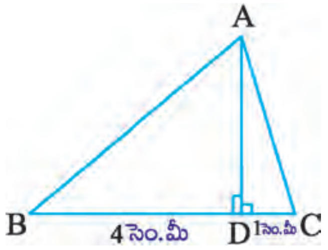


ప్రక్క పటమును గమనించుము.

△ ABC లో AD, BE, CF లు మూడు మధ్యగత రేఖలు. అవి G వద్ద ఖండించుకొనును. ఈ బిందువునే గురుత్వకేంద్రము అంటారు. ఒక త్రిభుజములోని మూడు మధ్యగతరేఖలు అనుషక్తములగును. వాటి అనుషక్త బిందువును గురుత్వకేంద్రము అంటారు. దీనిని 'G' అని గుర్తిస్తారు.

గమనిక : (i) గురుత్వకేంద్రము ప్రతి మధ్యగతరేఖను 2 : 1 నిష్పత్తిలో విభజించును.
(ii) గురుత్వ కేంద్రము భూమ్యాకర్షణ బిందువు అగును.

2.2.2 త్రిభుజ లంబకేంద్రము

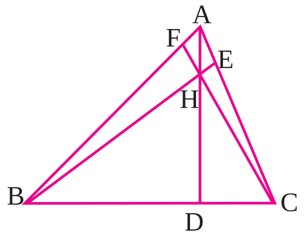


ప్రక్క పటమునందు, ABC ఒక త్రిభుజము.

A నుండి, BC కి ఒక లంబమును గీయుము.

BC కి AD ఒక లంబము.

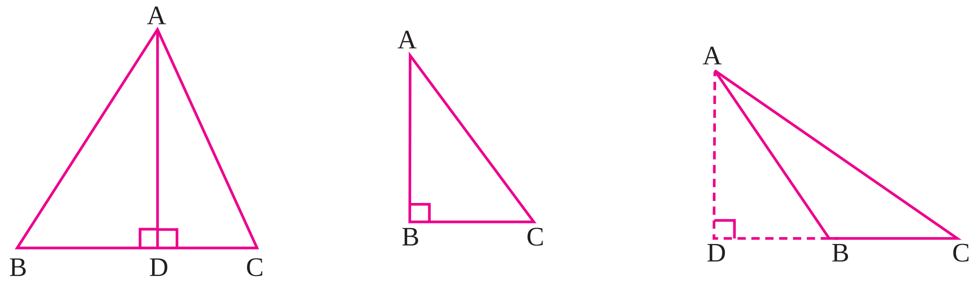
$\angle ADB = \angle ADC = 90^{\circ}$ ఇక్కడ D మధ్యబిందువు కావలసిన అవసరంలేదు. ఇక్కడ AD లంబపుటెత్తు అగును.



ఒక త్రిభుజమునందు శీర్షము నుండి, దాని కెదురుగాగల భుజమునకు గీచిన లంబమును 'లంబపుటెత్తు' అంటారు. పటములో ABC నందు AD,BE,CFలు మూడు లంబపుటెత్తులు. అవి H వద్ద ఖండించుకొనుచున్నవి. ఈ బిందువునే లంబకేంద్రము అంటారు.

ఒక త్రిభుజములోని మూడు లంబపుటెత్తులు అనుషక్తములు. వాటి అనుషక్త బిందువును 'లంబకేంద్రము' అంటారు.

లంబ కేంద్రము యొక్క వివిధ స్థానములు (Different positions of orthocentre)



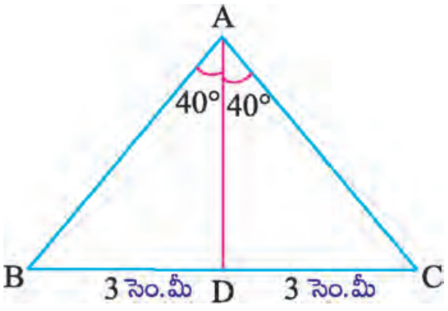
(a) (b) (c)

సందర్భము**(i)** : పటము (a) నందు ABC ఒక అల్పకోణ త్రిభుజము. దీనిలో లంబకేంద్రము త్రిభుజ అంతర భాగమునందు ఉండును.

సందర్భము **(ii)** : పటము (b) నందు ABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజము. దీనిలో లంబకేంద్రము త్రిభుజ లంబకోణ శీర్షము వద్ద ఉండును.

సందర్భము **(iii)** : పటము (c) నందు ABC ఒక అధిక కోణ త్రిభుజము. దీనిలో లంబకేంద్రము త్రిభుజ బాహ్య భాగము నందు ఉండును.

2.2.3 త్రిభుజ అంతర కేంద్రము

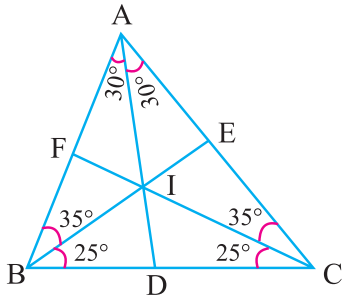


ప్రక్కపటము నందు ABC ఒక త్రిభుజము.

$\angle A$ ను AD రెండు సమభాగములుగా సమద్విఖండన చేయుచున్నది. $\angle BAD = \angle DAC$.

ఇక్కడ AD ని కోణ సమద్విఖండన రేఖ అంటారు.

ఒక త్రిభుజములోని కోణమును సమద్విఖండన చేయు రేఖా ఖండమును కోణసమద్విఖండన రేఖ అంటారు.



ఇపుడు ప్రక్కపటము △ABC లోని AD, BE, CF లు మూడు కోణ సమద్విఖండన రేఖలు. అవి I వద్ద ఖండించుకొనుచున్నవి.

ఈ బిందువునే "త్రిభుజ అంతరకేంద్రము" అంటారు.

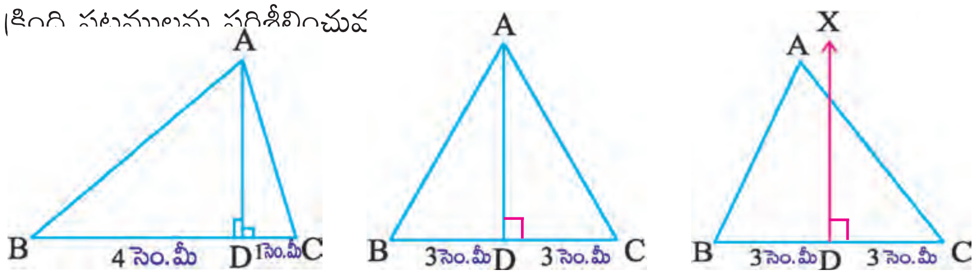
ఒక త్రిభుజములోని మూడు కోణ సమద్విఖండన రేఖలు అనుషక్తములు, వాటి అనుషక్తబిందువును "అంతర కేంద్రము" అంటారు.

2.2.4 త్రిభుజ పరివృత్త కేంద్రము

క్రింది తరగతిలో మీరు లంబ సమద్విఖండన రేఖను గూర్చి నేర్చుకొనియున్నారు.

త్రిభుజమునందు లంబ సమద్విఖండన రేఖ అనగానేమి?

క్రింది పటములను పరిశీలించుమ



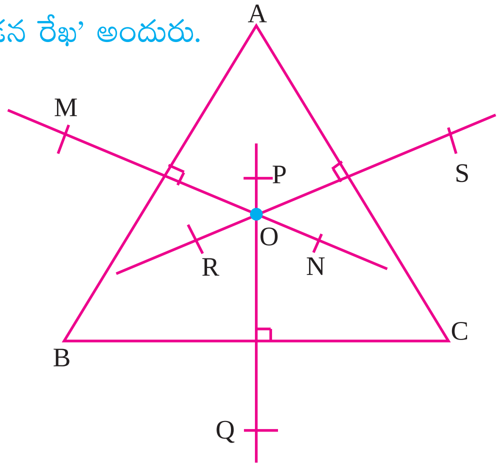
(a) (b) (c)

పటము (a) నందు A నుండి BC కి గీయబడిన ఒక లంబము AD అయితే అది BC ని సమద్విఖండన చేయుటలేదు.

పటము (b) నందు BC ని AD సమద్విఖండన చేయుచున్నది. కావున BD=DC మరియు BC కి AD లంబముగాఉన్నది.

పటము (c) నందు BC కి గీయబడిన లంబరేఖ DX మరియు BC ని DX సమద్విఖండన చేయుచున్నది. BD=DC అయితే 'XD' శీర్షము A ద్వారా పోవుటలేదు.

ఒక త్రిభుజములోని ఒక భుజమునకు లంబముగా ఉండి ఆ భుజమును సమద్విఖండన చేయు రేఖను 'లంబసమద్వి ఖండన రేఖ' అందురు.



పై పటమును గమనించుము.

ఇక్కడ 'O' వద్ద ఖండించుకొనుచున్న PQ, RS మరియు MN అనునవి BC, AC మరియు AB ల యొక్క మూడు లంబ సమద్విఖండన రేఖలు.

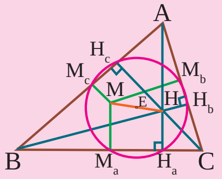
'O' అనునది పరివృత్త కేంద్రము.

ఒక త్రిభుజము యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖలు అనుషక్తములు. వాటి అనుషక్తబిందువును "పరివృత్త కేంద్రము" అంటారు.

గమనిక :(i) ఏదైనా ఒక త్రిభుజము ABC నందు, పరివృత్త కేంద్రము (O), గురుత్వకేంద్రము (G) మరియు లంబకేంద్రములు (H) ఒకే రేఖపై ఉన్నచో దానిని యూలర్ రేఖ (Euler Line) అంటారు. మరియు OG : GH = 1 : 2.

(ii) ప్రత్యేకముగా సమభుజ త్రిభుజమునందు పరివృత్త కేంద్రము (O), అంతర కేంద్రము(I) లంబకేంద్రము (H), గురుత్వ కేంద్రము (G), ఒకే బిందువు వద్ద ఉండును.

Euler (1707-1783)
Switzerland



2.3 పైథాగరస్ సిద్ధాంతము

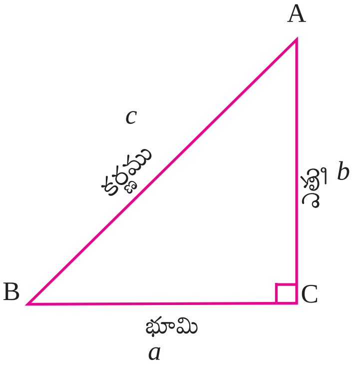
2.3.1 పైథాగరస్ సిద్ధాంతము

ఒక లంబ కోణ త్రిభుజమునందు కర్ణము మీది వర్గమునకు, మిగిలిన రెండు భుజముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానము.

ΔABC నందు $\angle C = 90^\circ$ అనుకొనుము.

$BC = a, CA = b$ మరియు $AB = c$.

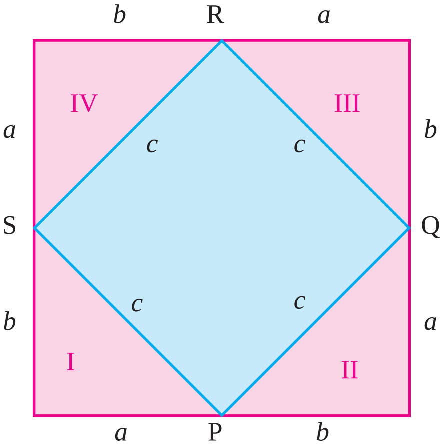
పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము, $a^2 + b^2 = c^2$.



ఇది అనేక మంది గణిత శాస్త్రవేత్తలచే వివిధ పద్ధతుల ద్వారా నిరూపించబడినది.

మనము ఒక సులభ పద్ధతిలో పైథాగరస్ సిద్ధాంతము యొక్క నిరూపణ చూద్దాము.

సిద్ధాంతము: మనము ప్రక్కపటములో చూపినట్లుగా భుజము $(a+b)$ తో ఒక చతురస్రమును గీచెదము.



నిరూపణ :

ఒక చతురస్రము యొక్క వైశాల్యము దాని భుజము యొక్క వర్గము – అని మనకు తెలుసు.

చతురస్ర భుజము $(a+b)$ యొక్క వర్గము $(a+b)^2$.

పటము నుండి $(a + b)$ భుజము గా గల చతురస్ర వైశాల్యము $=(a+b)^2$ = I, II, III మరియు IV త్రిభుజముల వైశాల్యము + PQRS చతురస్ర వైశాల్యము.

i.e., $(a+b)^2 = 4$ (లంబకోణ త్రిభుజముల వైశాల్యము) + (PQRS చతురస్ర వైశాల్యము)

$$(a+b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\times a\times b\right)+c^2$$

$$a^2+b^2+2ab = 2ab+c^2$$

$$\therefore a^2+b^2 = c^2$$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

కృత్యము

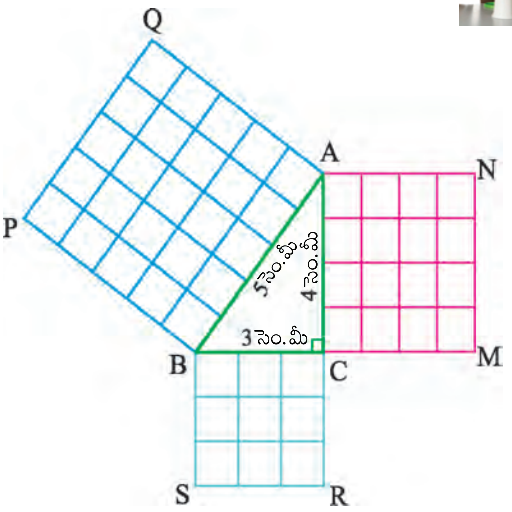
పైథాగరస్ సిద్ధాంతము

$\angle C = 90°$, AB = 5 సెం.మీ., AC = 4 సెం.మీ., BC = 3 సెం.మీ. ఉండునట్లు ఒక లంబకోణ త్రిభుజము ABC ను నిర్మించుము.

ఆ త్రిభుజ భుజములపై మూడు చతురస్రములను నిర్మించుము.

ఆ చతురస్రములను 1 చ.సెం.మీ వైశాల్యము ఉండునట్లుగా చిన్నచిన్న చతురస్రములుగా విభజించుము.

చిన్న చతురస్రములను లెక్కించి, పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును నిరూపించవచ్చును.



ABPQ నందు చతురస్రములు = 25

BCRS నందు చతురస్రములు = 9

ACMN నందు చతురస్రములు = 16

$\therefore$ ABPQ నందు చతురస్రములు = BCRS నందు చతురస్రముల సంఖ్య + ACMN నందు చతురస్రముల సంఖ్య

పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును నిరూపించగల సంఖ్యలను "పైథాగరస్ త్రిపది" అంటారు.

ఉదాహరణ 2.1

ΔABC లో $\angle B=90^0$, AB = 18సెం.మీ., BC = 24సెం.మీ. అయిన AC పొడవును కనుగొనుము.

సాధన

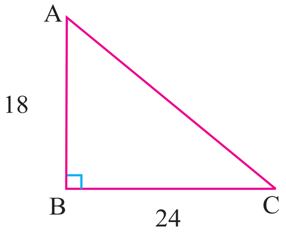
పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము $AC^2 = AB^2+BC^2$

$= 18^2+24^2$

$= 324+576$

$= 900$

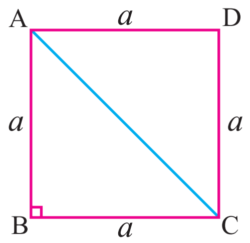
$\therefore AC = \sqrt{900} = 30$సెం.మీ.



ఉదాహరణ 2.2

ఒక చతురస్రము చుట్టుకొలత 40 సెం.మీ. వాటి కర్ణముల పొడవుల మొత్తము ఎంత?

సాధన



చతురస్ర భుజము పొడవు 'a' అనుకొనుము. AC ఒక కర్ణము.

ABCD చతురస్రం చుట్టుకొలత $= 4\,a$ యూనిట్లు

$4a = 40$ సెం.మీ. [దత్తాంశము]

$a = \frac{40}{4} = 10$ సెం.మీ.

ఒక చతురస్రములోని ప్రతికోణము లంబకోణము మరియు కర్ణములు సమానము – అని మనకు తెలుసును.

ΔABCనందు $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 10^2 + 10^2 = 100 + 100$

$= 200$

$\therefore AC = \sqrt{200}$

$= \sqrt{2 \times 100} = 10\sqrt{2}$

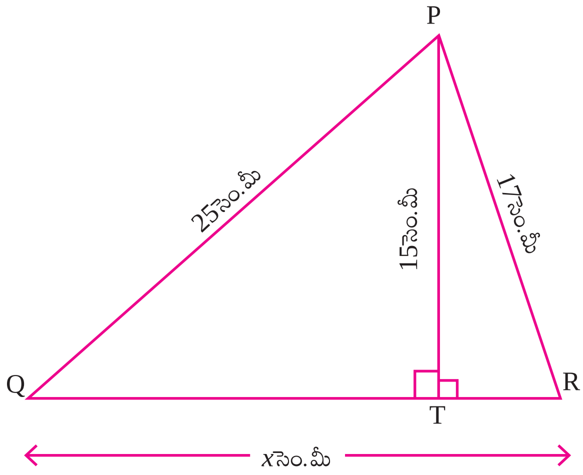
$= 10 \times 1.414 = 14.14$ సెం.మీ.

కర్ణము AC = కర్ణము BD

$\therefore$ కర్ణముల మొత్తము $= 14.14 + 14.14 = 28.28$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ 2.3

త్రిభుజము PQR నందు PT ఒక లంబపుటెత్తు, PQ = 25సెం.మీ., PR = 17 సెం.మీ. మరియు PT = 15సెం.మీ. అయిన QR = x సెం.మీ. x ను కనుగొనుము.



సాధన పటము నుండి QR = QT + TR.

కనుగొన వలసినది : QT మరియు TR.

PTQ లంబకోణ త్రిభుజము నందు,

PT ఒక లంబపుటెత్తు $\angle PTQ = 90^\circ$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము, $PQ^2 = PT^2 + QT^2 \quad \therefore PQ^2 - PT^2 = QT^2$

$\therefore QT^2 = 25^2 - 15^2 = 625 - 225 = 400$

$QT = \sqrt{400} = 20$ సెం.మీ. .....(1)

అదే విధముగా లంబకోణ త్రిభుజము PTR నందు

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము $PR^2 = PT^2 + TR^2$

$\therefore TR^2 = PR^2 - PT^2$

$= 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$

$TR = \sqrt{64} = 8$ సెం.మీ. ..... (2)

(1) మరియు (2) ల నుండి QR $=$ QT + TR = 20 + 8 = 28సెం.మీ.

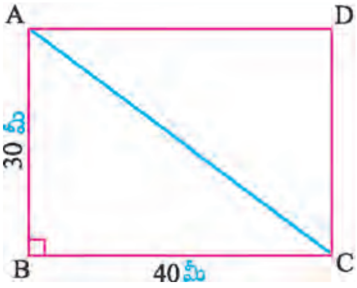
ఉదాహరణ 2.4

ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార పొలము కొలతలు 40 మీ X 30 మీ గా ఉన్నవి. ఆ పొలములో A నుండి C కి కర్ణము మీదుగా నడిచి వెళ్లినచో ఎంత దూరము తగ్గునో కనుగొనుము.

సాధన

దత్తాంశము:ABCD ఒక దీర్ఘ చతురస్ర పొలము పొడవు = 40మీ, వెడల్పు = 30మీ, $\angle B = 90^\circ$

లంబకోణ త్రిభుజము ABC నందు



పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= 30^2 + 40^2 = 900 + 1600$$
$$= 2500$$
$$\therefore AC = \sqrt{2500} = 50 \text{ మీ},$$

A నుండి C కి B ద్వారా వెళ్ళ వలసిన దూరము

$$= 30 + 40 = 70 \text{ మీ},$$

తగ్గిన దూరము $= 70 - 50 = 20$ మీ.

అభ్యాసము 2.1

1. సరైన జవాబును గుర్తించుము:

(i) ఒక త్రిభుజములోని మధ్యగత రేఖల అనుషక్త బిందువు ....

ఎ) అంతర కేంద్రము బి) పరివృత్త కేంద్రము సి) లంబకేంద్రము డి) గురుత్వకేంద్రము

(ii) ఒక త్రిభుజములోని లంబపుటెత్తుల అనుషక్త బిందువు ....

ఎ) అంతర కేంద్రము బి) పరివృత్త కేంద్రము సి) లంబకేంద్రము డి) గురుత్వకేంద్రము

(iii) ఒక త్రిభుజములోని కోణ సమద్విఖండన రేఖల అనుషక్తబిందువు ....

ఎ) అంతర కేంద్రము బి) పరివృత్త కేంద్రము సి) లంబకేంద్రము డి) గురుత్వకేంద్రము

(vi) ఒక త్రిభుజములోని లంబసమద్విఖండన రేఖల అనుషక్త బిందువు ....

ఎ) అంతర కేంద్రము బి) పరివృత్త కేంద్రము సి) లంబకేంద్రము డి) గురుత్వకేంద్రము

2. ఒక సమద్విభుజ త్రిభుజమునందు $AB = AC$ మరియు $\angle B = 65^\circ$ అయిన తక్కువ పొడవు గల భుజము ఏది?

3. P వద్ద లంబకోణము గలిగిన త్రిభుజము PQR. PQ=10 సెం.మీ., PR=24 సెం.మీ. QR ను కనుగొనుము.

4. ఇచ్చిన భుజములు లంబకోణ త్రిభుజ భుజములు అగునా? సరిచూడుము. AB = 25 సెం.మీ., BC = 24 సెం.మీ., AC = 7 సెం.మీ.

5. PQR త్రిభుజమునందు $Q=25^\circ$, $R=65^\circ$ అయిన ΔPQR ఒక లంబకోణ త్రిభుజము అగునా? PQ = 4 సెం.మీ. ,PR = 3 సెం.మీ. అయిన QR ను కనుగొనుము.

6. 15 మీ. పొడవు గలిగిన ఒకనిచ్చెనను 12 మీ. ఎత్తుగల కిటికి వద్దకు వేయబడినది. అది గోడనుండి భూమిపై x మీ దూరంలో ఉంచబడినది. x విలువ కనుగొనుము.

7. 10 సెం.మీ. భుజము గల సమభుజ త్రిభుజము యొక్క ఎత్తును కనుగొనుము.

8. 12, 5 మరియు 13 సంఖ్యలు పైథాగరస్ త్రిపది అగునా?

9. ఇంటికి రంగులు వేయువాడు నిచ్చెనను, 16 అడుగల ఎత్తున భవంతి యొక్క రెండవ అంతస్తులోని కిటికి వద్ద తాకునట్టుగా ఉంచెను. ఆ నిచ్చెన క్రింది భాగము ఇంటి నుండి 12 అడుగుల దూరములో ఉన్నది. అతడు రంగులు కలుపుకొను సమయములో, ఒక కుక్క ఆ నిచ్చెనను ఇంటినుండి 2 అడుగుల దూరముగా నెట్టివేసెను. ఇపుడు నిచ్చెన ఇంటికి ఎన్ని అడుగుల ఎత్తువరకు చేరెను?

2.4 వృత్తములు

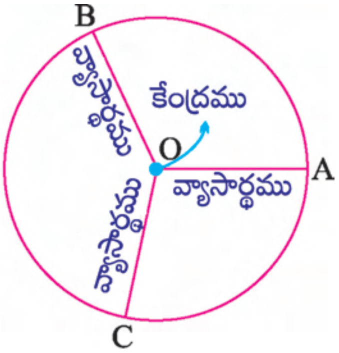
క్రింది వస్తువులు నీకు బాగా పరిచయమే. క్రింది వస్తువులు ఏ ఆకారములో ఉన్నవో నీవు చెప్పగలవా?

(a) సైకిలు చక్రము

(b) జాతీయ చిహ్నములోని అశోక చక్రము

(c) పూర్ణ చంద్రుడు

ఖచ్చితముగా మీ జవాబు వృత్తమే. ఒక తలమునందు ఒక స్థిరమైన బిందువు నుండి సమాన దూరములో P అను బిందువు తిరిగినచో ఏర్పడునదియే వృత్తము – అని మీకు తెలుసు.



వృత్తము – నిర్వచనము

ఒక తలము నందు ఒక స్థిరబిందువు నుండి సమాన దూరంలో గల బిందువుల సముదాయమునే 'వృత్తము' అంటారు.

స్థిర బిందువును 'వృత్త కేంద్రము' అంటారు.

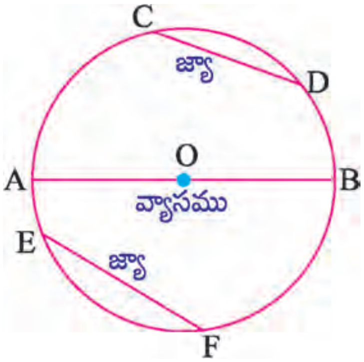
స్థిర దూరమును 'వృత్త వ్యాసార్థము' అంటారు.

పటము నందు 'O' ను కేంద్రము అని OA, OB, OC లను 'వ్యాసార్థములు' అని అంటారు.

ఇక్కడ, $OA = OB = OC = r$

గమనిక: వృత్తములోని వ్యాసార్థములన్ని సమానమే.

జ్యా (Chord) :



వృత్తముపై ఏవేని రెండు బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండమును 'జ్యా' అంటారు.

పటమునందు CD, AB మరియు EF లు జ్యాలు అగును. ఇందులో AB వృత్తకేంద్రము ద్వారా పోవుచున్న ఒక ప్రత్యేక జ్యా.

వ్యాసము

వృత్తకేంద్రము ద్వారా పోవు జ్యాను 'వ్యాసము' అంటారు. వ్యాసము అన్నింటికంటె పొడవైన జ్యా అగును.

పటము నందు AOB వృత్త వ్యాసము.

AB యొక్క మధ్య బిందువు 'O' మరియు OA= OB = వృత్త వ్యాసార్ధము.

కావున వ్యాసము = 2 × వ్యాసార్ధము (లేక) వ్యాసార్ధము = వ్యాసము ÷ 2

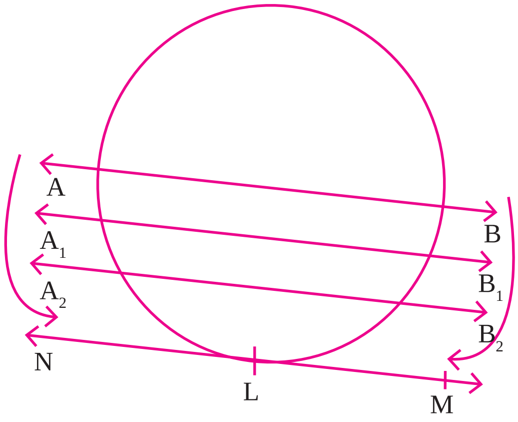
గమనిక: (i) ప్రతి వ్యాసము యొక్క మధ్యబిందువు వృత్త కేంద్రమే.

(ii) వృత్త వ్యాసములన్ని అనుషక్తములు. వాటి అనుషక్త బిందువు వృత్త కేంద్రము.

వృత్త ఖండనరేఖ

ఒక వృత్తము ద్వారా పోవుచూ, వృత్తమును రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించు రేఖను వృత్తము యొక్క ఖండనరేఖ అంటారు.

ఇచ్చిన పటమునందు AB ఒక ఖండనరేఖ ఇది వృత్తమును A,B బిందువుల వద్ద ఖండించుచున్నది. ఇపుడు ఖండనరేఖ AB ని క్రింది వైపుగా జరుపుము. ఇపుడు A_1,B_1, వద్దను, తర్వాత A_2 B_2 వద్ద ఉండును.



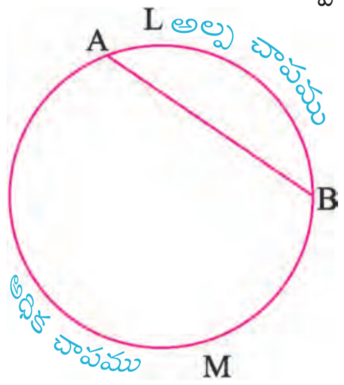
వృత్త ఖండనరేఖ AB క్రిందికి జరుగుకొలది A,B లు ఒకదానికి ఒకటి దగ్గరగును.

కావున A, B మధ్య దూరము నిదానముగా తగ్గుచూ ఉండును.

ఒక స్థితిలో ఖండనరేఖ AB వృత్తమును ఒకే ఒక బిందువు L వద్ద తాకును. ఈ స్థితిలో LM రేఖను 'స్పర్శరేఖ' అంటారు. ఇది వృత్తమును ఒకే ఒక బిందువు వద్ద తాకును.

స్పర్శ రేఖ

వృత్తమును ఒకే ఒక బిందువు వద్ద తాకు రేఖను 'స్పర్శరేఖ' అంటారు. ఆ బిందువును 'స్పర్శ బిందువు' అంటారు.



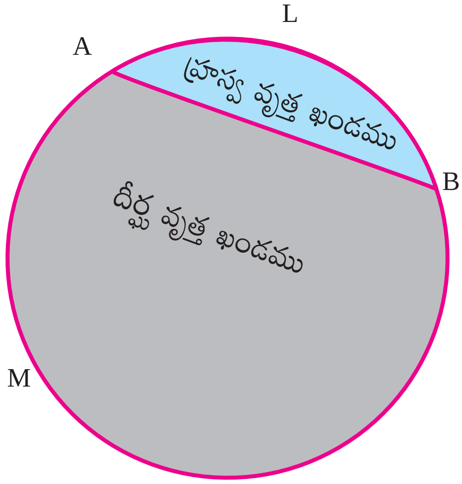
వృత్త చాపము

పటమునందు AB ఒక జ్యా. AB జ్యా వృత్తమును రెండు భాగములుగా విభజించుచున్నది.

వక్రభాగము ALB మరియు AMB లను చాపములు అంటారు. చాపములను ' ⌒ ' గుర్తుతో గుర్తించెదరు.

చిన్న చాపము $\overset{\frown}{ALB}$ ని అల్ప చాపము అని,

పెద్ద చాపము $\overset{\frown}{AMB}$ని అధిక చాపము అని అంటారు.



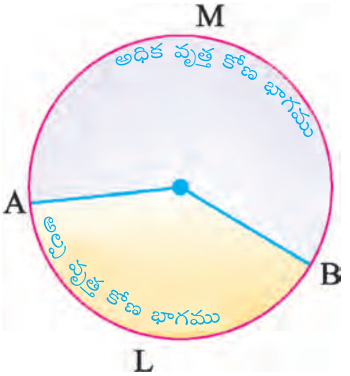
వృత్త ఖండము

ఒక జ్యా వృత్తమును రెండు భాగములుగా విభజించును. ఒక్కొక్క భాగమును "వృత్త ఖండము" అంటారు.

అల్పచాపమును కలిగియున్న భాగమును హ్రస్వ వృత్త ఖండము అంటారు.

అధిక చాపమును కలిగియున్న భాగమును దీర్ఘ వృత్త ఖండము అని అంటారు.

వృత్త కోణ భాగము



ఒక వృత్త చాపము, రెండు వ్యాసార్థములతో మూయబడి ఉండు వృత్త భాగమును వృత్తకోణ భాగము అంటారు.

చిన్న వృత్త కోణభాగము OALB ని అల్పవృత్త కోణ భాగము **(minor sector)** అంటారు.

పెద్ద వృత్త కోణభాగము OAMB ని అధికవృత్త కోణభాగము **(major sector)** అంటారు.

అభ్యాసము 2.2

1. సరైన జవాబును సూచించుము:

(i) వృత్త కేంద్రమునకు, వృత్త పరిధికి మధ్యగల దూరమును .... అందురు.

(A) వృత్తకోణ భాగము (B) వృత్త ఖండము (C) వ్యాసము (D) వ్యాసార్థము

(ii) వృత్త వ్యాసార్థము, వ్యాసముల మధ్యగల సంబంధము ....

(A) వ్యాసార్థము = 2 × వ్యాసము (B) వ్యాసార్థము = వ్యాసము + 2

(C) వ్యాసము = వ్యాసార్థము + 2 (D) వ్యాసము = 2 (వ్యాసార్థము)

(iii) వృత్తములో అతిపెద్ద జ్యా

(A) వ్యాసార్థము (B) వృత్త ఖండనరేఖ (C) వ్యాసము (D) స్పర్శరేఖ

2. రెండు వ్యాసముల మొత్తము 200 మి.మీ. వృత్త వ్యాసార్థమును సెం.మీ. లలో కనుగొనుము.

3. వృత్తఖండము మరియు వృత్త కోణభాగములను నిర్వచించుము.

4. వృత్త చాపమును నిర్వచించుము.

5. వృత్తఖండన రేఖ మరియు స్పర్శ రేఖలను నిర్వచించుము.

పాఠ్యభాగ సారాంశము

- గురుత్వకేంద్రము : మూడు మధ్యగత రేఖల అనుషక్తబిందువు.
- లంబకేంద్రము : మూడు లంబపుటెత్తుల అనుషక్త బిందువు.
- అంతర కేంద్రము : మూడు కోణ సమద్విఖండన రేఖల అనుషక్త బిందువు.
- పరివృత్త కేంద్రము : మూడు భుజముల లంబ సమద్విఖండన రేఖల అనుషక్త బిందువు.
- వృత్తము : ఒక స్థిర బిందువునుండి, సమాన దూరంలో గల బిందువుల సముదాయమే వృత్తము.
- జ్యా: అంత్య బిందువులు వృత్తముపైగల ఒక రేఖా ఖండము – జ్యా
- వ్యాసము: వృత్త కేంద్రము ద్వారా పోవు జ్యానే వ్యాసము అందురు.
- వృత్తము గుండా పోవుచూ వృత్తమును రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించు రేఖను వృత్త ఖండన రేఖ అంటారు.
- వృత్తమును ఒకే ఒక బిందువు వద్ద తాకుచూ పోవు రేఖను 'స్పర్శరేఖ' అని, ఆ బిందువును 'స్పర్శ బిందువు' అని అంటారు.
- వృత్త ఖండము : వృత్తము యొక్క జ్యా వృత్తమును రెండు భాగములుగా విభజించును.
- వృత్త కోణభాగము : చాపము, రెండు వ్యాసార్ధముల మధ్యగల వృత్త భాగమును వృత్త కోణ భాగము అంటారు.

గణిత సంఘ కృత్యము

పైథాగరస్ త్రిపది

$m^2 + n^2, m^2 - n^2, 2mn$ ఇక్కడ $m > n; n \in \mathbb{N}$ అను నియమమును ఉపయోగించి మనము అనేకమైన పైథాగరస్ త్రిపదులను కనుగొనగలము. $m = 2, n = 1$ అయిన $m^2 + n^2 = 2^2 + 1^2 = 5$, $m^2 - n^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, $2mn = 2 \times 2 \times 1 = 4$. 5, 3, 4 ఒక పైథాగరస్ త్రిపది.

పైథాగరస్ త్రిపది యొక్క గుణిజములు కూడా పైథాగరస్ త్రిపదులే అగును.

ఉదాహరణకు (5, 3, 4) యొక్క గుణిజములు: (10, 6, 8), (15, 9, 12), (20, 12, 16) .... కూడా పైథాగరస్ త్రిపదులే.

ఇంకనూ కొన్ని పైథాగరస్ త్రిపదులను కనుగొనగలరా?

దత్తాంశమును ఉపయోగించుట

3

3.1 పరిచయము

3.2 పౌన:పున్య పట్టికలను తయారుచేయుట – పునర్విమర్శ

3.3 వర్గీకృత దత్తాంశమునకు హిస్టోగ్రామ్ మరియు పౌన:పున్య బహుభుజిలను గీయుట

3.4 సాధారణ వృత్త రేఖాపటమును నిర్మించుట

3.5 కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు

ఆర్.ఎ. ఫిషర్

(17 ఫిబ్రవరి 1890 – 29 జూలై 1962)

దోష సిద్ధాంతముపై ఇష్టముతో "ఫిషర్" సాంఖ్యక సమస్యలను పరిశోధించుటకు పూనుకొనెను. ఇతడు 1915 – 1919 మధ్య కాలములో గణిత, భౌతిక శాస్త్రములలో ఉపాధ్యాయుడిగా పనిచేసెను. పరిశోధనల రూపకల్పనలో యాదృచ్ఛికత, విస్తృతిలను ఇతడు ఉపయోగించిన విధానమునే నేడు ప్రపంచమంతటను ఉపయోగిస్తున్నారు. ఈయనను "ఆధునిక సాంఖ్యకశాస్త్ర పిత" అని అంటారు.

3.1 పరిచయము

ప్రతి దినము మనము వార్తా పత్రికల ద్వారాను, ఇతర మాధ్యమాల ద్వారాను వివిధ రకముల సమాచారమును సంఖ్యల రూపములో చూస్తున్నాము.

మన దేశంలోని ఆహార ఉత్పత్తి, ప్రపంచ జనాభా, వివిధ దేశముల దిగుమతులు మరియు ఎగుమతులు, ఒక రాష్ట్రంలో పాఠశాలకు నిలిచి పోయిన విద్యార్థుల సంఖ్య, ప్రమాదంలో చనిపోయిన వారి వివరములు మొదలగు సమాచారము ఇందులో ఉండవచ్చును.

ఈ సమాచారములన్నింటిలోను మనము సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తున్నాము. ఈ సంఖ్యలనే దత్తాంశము అంటారు. ఈ దత్తాంశము నిర్ణయాలు తీసుకొనుటకు ఉపయోగపడును. ప్రతి పౌరుని జీవితంలోను ఈ దత్తాంశములు ఒక ముఖ్యపాత్ర పోషిస్తున్నాయి. కావున అవసరమైన మరియు ఖచ్చితమైన సమాచారమును, దత్తాంశము నుండి పొందుట ఎట్లో తెలుసుకొనుట చాలా ముఖ్యము.

లెక్కించిన దత్తాంశము చదువుటకు అర్థం చేసుకొనుటకు మరియు పరిశీలించుటకు అనుకూలముగా ఉండకపోవచ్చును. కాబట్టి దత్తాంశమును వివిధ పద్ధతులలో అందించుట కొరకు జాగ్రత్తగా సేకరించవలెను. ఒక సాధారణ వ్యక్తి కూడా దత్తాంశమును అర్థం చేసుకొని, దాని నుండి కొంత సమాచారము పొందగలుగునట్లుగా ఉండవలెను.

3.2 పౌన:పున్య పట్టికను తయారుచేయుటను గుర్తుచేసుకొనుట

మనము 7వ తరగతిలో పౌన:పున్య పట్టికను తయారుచేయడం నేర్చుకొనియున్నాము. గుర్తుచేసుకుందామా !

3.2.1 ముడి దత్తాంశమునకు (ungrouped data) పౌన:పున్య పట్టిక

ఉదాహరణ 3.1

క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు పౌన:పున్య పట్టికను తయారుచేయుము.

15, 17, 17, 20, 15, 18, 16, 25, 16, 15,

16, 18, 20, 28, 30, 27, 18, 18, 20, 25,

16, 16, 20, 28, 15, 18, 20, 20, 20, 25.

సాధన

పౌన:పున్యపట్టిక క్రింద ఇవ్వబడినది :

సంఖ్య (x)	గణన గుర్తులు	పౌన:పున్యము (f)
15	||||	4
16	卌	5
17	||	2
18	卌	5
20	卌 ||	7
25	|||	3
27	|	1
28	||	2
30	|	1
	మొత్తము	**30**

3.2.2 వర్గీకృత దత్తాంశమునకు (grouped data) పౌన:పున్య పట్టిక తయారు చేయుట

ఉదాహరణ 3.2

ఒక గణిత పరీక్షలో 50 మంది విద్యార్థులు 100 మార్కులకు గాను వారు తెచ్చుకొన్న మార్కులు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

43, 88, 25, 93, 68, 81, 29, 41, 45, 87, 34, 50, 61, 75, 51, 96, 20, 13, 18, 35, 25, 77, 62, 98, 47, 36, 15, 40, 9, 25, 39, 60, 37, 50, 19, 86, 42, 29, 32, 61, 45, 68, 41, 87, 61, 44, 67, 30, 54, 8.

పై దత్తాంశమునకు తరగతి అంతరమును ఉపయోగించి పౌనఃపున్య పట్టికను తయారు చేయుము.

సాధన

మొత్తం విలువల సంఖ్య = 50

వ్యాప్తి = గరిష్ఠ విలువ – కనిష్ఠ విలువ

= 98 – 8 = 90

ఇపుడు దత్తాంశమును 10 తరగతులుగా విభజించెదము.

∴ తరగతి అంతరము యొక్క పరిమాణము = $\frac{\text{వ్యాప్తి}}{\text{తరగతి అంతరముల సంఖ్య}}$

$= \frac{90}{10} = 9$

గణిత పరీక్షలో 50 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులకు పౌనఃపున్య పట్టిక ఇలా ఉంది :

తరగతి అంతరము	గణన గుర్తులు	పౌనఃపున్యము (*f*)
0 - 10	||	2
10 - 20	||||	4
20 - 30	~~||||~~ |	6
30 - 40	~~||||~~ ||	7
40 - 50	~~||||~~ ||||	9
50 - 60	||||	4
60 - 70	~~||||~~ |||	8
70 - 80	||	2
80 - 90	~~||||~~	5
90 - 100	|||	3
	మొత్తము	**50**

ఈ విధంగా దత్తాంశమును వర్గీకరించి, పట్టిక యందు పొందు పరచవచ్చును.

తరగతి అంతరము	0-10	10-20	20- 30	30-40	40- 50	50- 60	60- 70	70- 80	80-90	90-100
పౌన: పున్యము	2	4	6	7	9	4	8	2	5	3

3.3 వర్గీకరించిన దత్తాంశమునకు (Grouped Data) సోపాన చిత్రము మరియు పౌన:పున్య బహుభుజి లను గీయుట:

ఇచ్చిన దత్తాంశమును రేఖీయ చిత్రముగా గానీ, రేఖాపటముగా గాని గుర్తించవచ్చును. దానినే రేఖాచిత్రము (graphs) అంటారు. దత్తాంశమును రేఖా చిత్రములుగా చూపుటవలన, చదువుటకు ఆసక్తి కలిగించును, తక్కువ సమయములో సులభముగా అర్థము చేసుకోగలము. వీటిని అనేక రకములుగా రేఖా చిత్రములలో చూపవచ్చును. ఈ అధ్యాయము నందు మనము రెండు పద్ధతులను తెలుసుకోబోవుచున్నాము. అవి

(i) సోపాన చిత్రము (Histogram)

(ii) పౌన:పున్య బహుభుజి (Frequency Polygon)

3.3.1 సోపాన చిత్రము

ఒక అంత మొందని పౌన:పున్య విభజనను రేఖా చిత్రము ద్వారా చూపు పటమునే "సోపాన చిత్రము" అందురు.

సోపాన చిత్రమునందు, దీర్ఘచతురస్రము (Bars) లను వరుసగా ఒక దాని ప్రక్కన ఒకటి గీయవలెను. అనగా, సోపాన చిత్రమునందు, దీర్ఘచతురస్రములు, తరగతి అంతరములపై నిలబడి ఉండును. దీర్ఘ చతురస్రముల వైశాల్యము పౌన:పున్యములకు అనుపాతములో ఉండును.

3.3.1 (a) అంతమొందని పౌన:పున్య విభజనలకు (continuous frequency distribution) సోపాన చిత్రము గీయుట.

పద్ధతి

మెట్టు 1 : దత్తాంశము అంతమొందు రూపంలో ఉంటే, దానిని అంతమొందని రూపంలో వ్రాయవలెను.

మెట్టు 2 : X-అక్షముపై తరగతి అంతరములను సరైన ప్రమాణము తీసుకొని గుర్తించుము

మెట్టు 3 : పౌన:పున్యములను Y-అక్షంపై సరైన ప్రమాణము తీసుకొని గుర్తించుము.

మెట్టు 4 : తరగతి అంతరములను ఆధారముగాను, పౌన:పున్యములను ఎత్తులుగాను తీసుకొని దీర్ఘచతురస్రములను నిర్మించుము.

క్రింది ఉదాహరణలో సోపాన చిత్రమును ఎట్లు గీయుదురో వివరించబడినది.

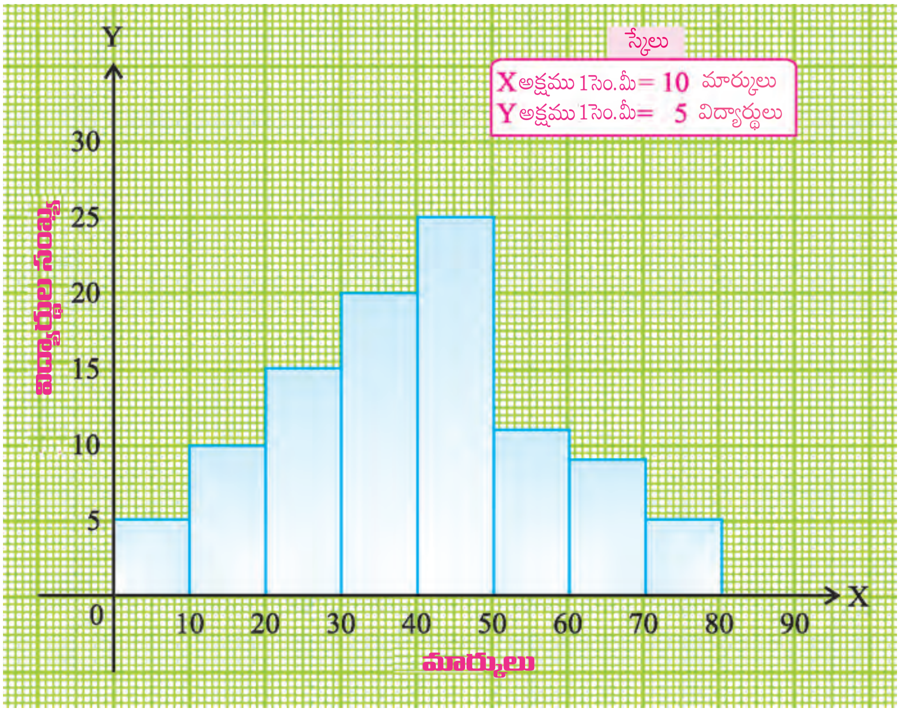
ఉదాహరణ : 3.3

ఒక పరీక్షలో 100 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. దీనికి సోపాన చిత్రమును గీయుము.

మార్కులు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
విద్యార్థుల సంఖ్య	5	10	15	20	25	12	8	5

సాధన

తరగతి అంతరములు 10 మార్కుల సమాన అంతరములు కలిగి ఉన్నవి. వీటిని X-అక్షముపై గుర్తించుము. విద్యార్థుల సంఖ్యను Y-అక్షముపై సరైన స్కేలు ఉపయోగించి గుర్తించుము. సోపాన చిత్రము క్రింద గీయబడినది.



పటము. *3.1*

గమనిక: పై పట్టికలో దీర్ఘచతురస్రములు (bars) అన్ని వరుసగా గీయబడినవి. దీర్ఘ చతురస్రముల పొడవులు, వాటి పౌన:పున్యములకు అనుపాతములో ఉన్నవి. తరగతి అంతరములు సమానముగా ఉన్నందున, దీర్ఘచతురస్రముల వైశాల్యములు వాటి పౌన:పున్యములకు అనుపాతములో ఉన్నవి.

3.3.1 (b) తరగతి అంతరములు వరుసగా లేనపుడు సోపాన చిత్రము గీయుట

ఉదాహరణ 3.4

ఒక అడవిలోని చెట్ల ఎత్తులు ఇలా ఇవ్వబడెను. ఇచ్చిన దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రమును గీయుము.

ఎత్తు (మీటర్లలో)	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
చెట్ల సంఖ్య	10	15	25	30	45	50	35	20

సాధన

ఈ సమస్యలో, ఇవ్వబడిన తరగతి అంతరములు వరుసగా లేవు. దీనికి ఇచ్చిన విధంగానే సోపాన చిత్రమును గీచినచో తరగతి అంతరముల మధ్య ఖాళీ ఏర్పడును. అయితే సోపాన చిత్రమునందు దీర్ఘచతురస్రములు వరుసగా ఉండవలెను. కావున తరగతి అంతరములను వరుసగా వ్రాయవలెను. దీనికి మనకు ఒక అమరిక కారకము (adjustment Factor) అవసరము.

అమరిక కారకము = $\frac{1}{2}$ [(తరగతి అంతరము దిగువ హద్దు)–
(దానికి ముందు తరగతి అంతరము ఎగువ హద్దు)]

$$= \frac{1}{2}(21 - 20) = 0.5$$

పై తరగతి అంతరమునందు, మనము ప్రతి దిగువ హద్దు నుండి 0.5 ను తీసివేసి, ప్రతి ఎగువ హద్దు నందు 0.5 కూడవలెను. కావున ఇచ్చిన పట్టికను మనం ఇలా మార్చి వ్రాయవలెను.

ఎత్తు (మీటర్లలో)	15.5-20.5	20.5-25.5	25.5-30.5	30.5-35.5	35.5-40.5	40.5-45.5	45.5-50.5	50.5-55.5
చెట్ల సంఖ్య	10	15	25	30	45	50	35	20

ఇపుడు పై పట్టిక అంతమొందని పౌన:పున్య విభజనగా మారినది. సోపాన చిత్రము క్రింద గీయబడినది.

పటము 3.2

గమనిక: సోపాన చిత్రము (పటము 3.2) లో X-అక్షమునందు మొదటి విలువ 15.5 నుండి ప్రారంభమగుచున్నది. కావున మూల బిందువు వద్ద ఒక వక్ర రేఖ (kink)గీయబడినది. దీనికి రేఖా చిత్రము మూల బిందువు నుండి కాకుండా, 15.5 నుండి ప్రారంభమగుచున్నది అని అర్థము.

నీకు తెలియునా?

అంతరమును జిగ్-జాగ్ రేఖతో సూచించెదరు

3.3.2 పౌనఃపున్య బహుభుజి

పౌనఃపున్య విభజనను రేఖాచిత్రములో సూచించు మరొక పద్ధతి – పౌనఃపున్య బహుభుజి.

ఇవ్వబడిన అంతమొందని దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రమును గీయుము. పై భాగములలో ప్రక్క ప్రక్కన ఉన్న దీర్ఘచతురస్రముల మధ్య బిందువులను గుర్తించుము. ఈ మధ్య బిందువులన్నింటిని వరుసగా రేఖా ఖండములచే కలిపిన, బహుభుజి ఏర్పడును. ఈ బహుభుజిని పౌనఃపున్య బహుభుజి అంటారు. బహుభుజి యొక్క రెండు చివరలను తప్పనిసరిగా పౌనఃపున్యము యొక్క దిగువ హద్దు, ఎగువ హద్దుల వరకు గీయవలెను.

పౌనఃపున్య బహుభుజిని రెండు విధములుగా గీయవచ్చును

(i) సోపాన చిత్రమును ఉపయోగించి గీయుట

(ii) సోపాన చిత్రము లేకుండా గీయుట

3.3.2 (a) సోపాన చిత్రమును ఉపయోగించి పౌనఃపున్య బహుభుజి గీయుట

గీయు పద్ధతి

మెట్టు 1 : ఇచ్చిన దత్తాంశమునుండి పౌనఃపున్య విభజన చేసి, సోపాన చిత్రమును గీయుము.

మెట్టు 2 : సోపాన చిత్రములోని దీర్ఘ చతురస్రముల పై భాగపు మధ్య బిందువులను రేఖా ఖండములచే కలుపుము.

మెట్టు 3 : రెండు తరగతి అంతరములను, వాటి పౌనఃపున్యము సున్న (0) గాను ఊహించి, వాటిలో ఒకటి మొదటి దీర్ఘ చతురస్రమునకు ఎడమ ప్రక్కన, రెండవది చివరి దీర్ఘ చతురస్రమునకు కుడి ప్రక్కన గుర్తించుము. ఈ తరగతి అంతరములను ఊహించిన తరగతి అంతరములు అంటారు.

మెట్టు 4 : ఊహించిన తరగతి అంతరములతో మొదటి మరియు చివరి తరగతి అంతరములను కలిపి పౌనఃపున్య బహుభుజిని పూర్తిచేయుము.

ఉదాహరణ 3.5

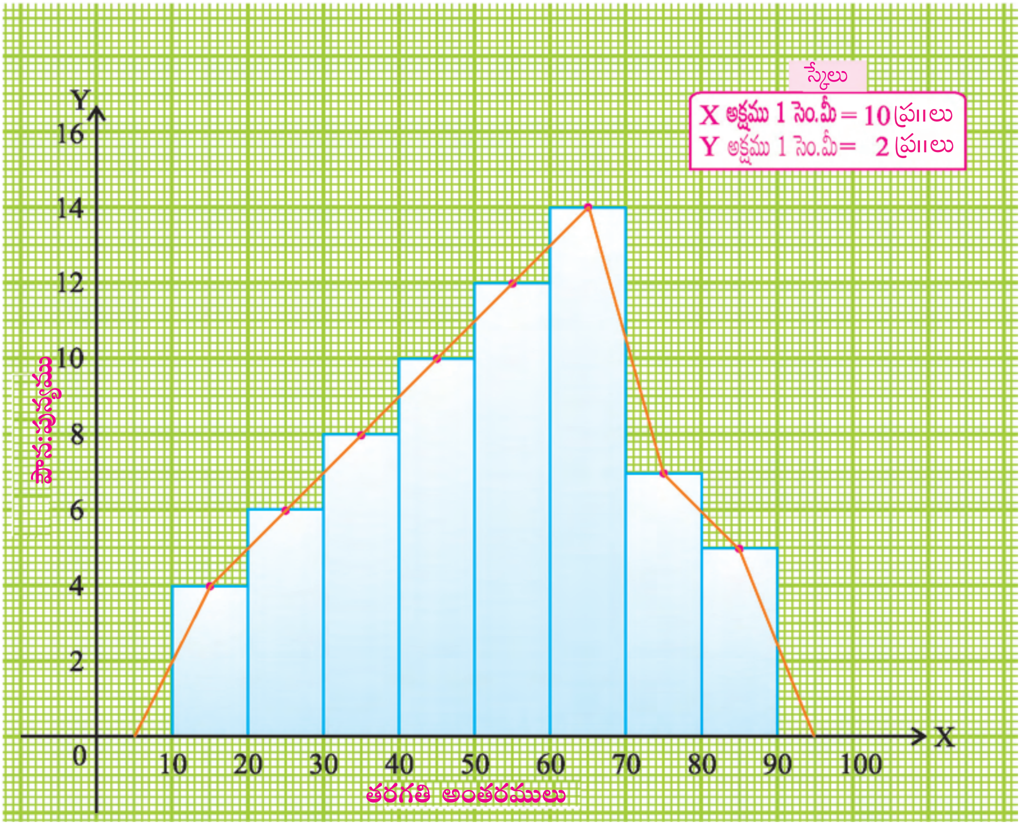
క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రము పై పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయుము.

తరగతి అంతరము	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
పౌనఃపున్యము:	4	6	8	10	12	14	7	5

సాధన

పటము 3. 3లో చూపినట్లు సరియైన స్కేలు తరగతి అంతరములను X-అక్షముపైన, పౌన:పున్యములను Y-అక్షముపైన తీసుకొనుము.

ఇచ్చిన దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రము గీయుము. వరుసగా ఉన్న దీర్ఘ చతురస్రముల పై భాగములో మధ్య బిందువులను గుర్తించుము. ఊహించిన తరగతి అంతరములు 0−10 మరియు 90−100 లకు కూడా మధ్య బిందువులను గుర్తించుము. మధ్య బిందువులను కలుపుము. బహుభుజి యొక్క రెండు చివరలు 0−10 మరియు 90−100 మధ్య బిందువులతో కలపబడినవి. ఇపుడు, మనకు కావలసిన పౌన:పున్య బహుభుజి ఏర్పడినది. పటము 3.3ను పరిశీలించుము.



పటము 3. 3

ఉదాహరణ 3.6

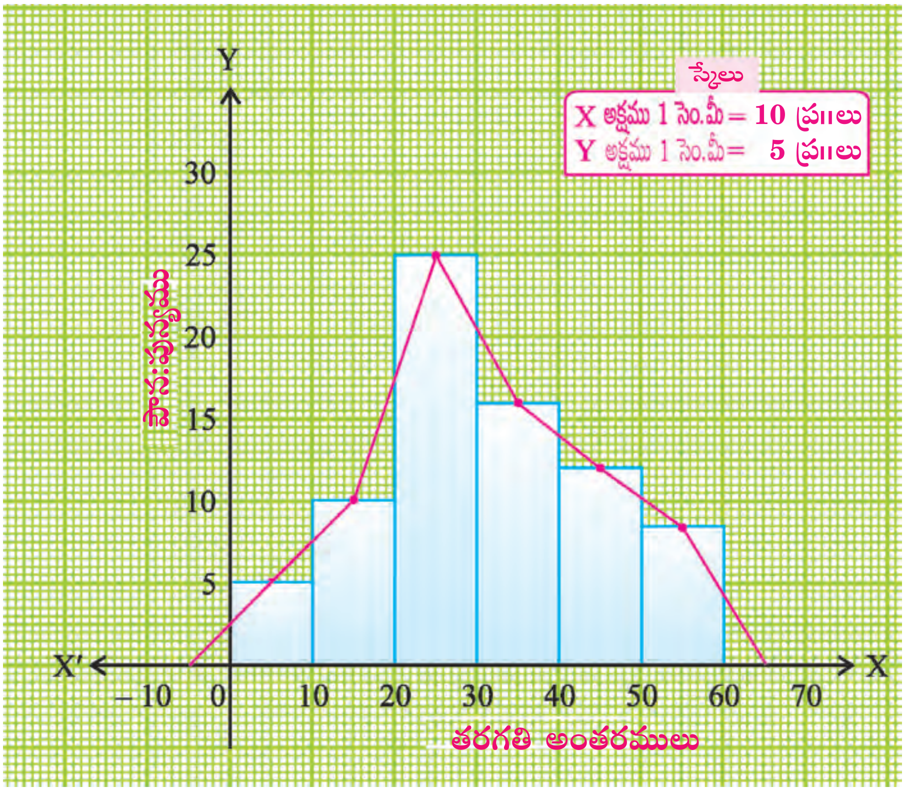
సోపాన చిత్రమును ఉపయోగించి క్రింది దత్తాంశమునకు పౌన:పున్య బహుభుజి గీయుము.

తరగతి అంతరము	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
పౌన:పున్యము	5	10	25	16	12	8

సాధన

పటము 3.4లో చూపినట్లుగా సరైన స్కేలుతో X-అక్షముపై తరగతి అంతరములను, Y-అక్షముపై పౌన:పున్యములను గుర్తించుము.

ఇచ్చిన దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రమును గీయుము. ఇపుడు దీర్ఘచతురస్రముపై భాగములలో మధ్య బిందువులను గుర్తించుము. ఊహించిన తరగతి అంతరము (-10) - 0 మరియు 60–70 తీసుకొనుము. మధ్యబిందువులను కలుపుము. బహుభుజి చివరలను ఊహించిన తరగతి అంతరములు (-10) - 0 మరియు 60–70ల మధ్య బిందువులతో కలుపుము. ఇపుడు మనకు పౌన:పున్య బహుభుజి ఏర్పడినది. (పటము 3.4 చూడుము)



పటము. ***3.4***

గమనిక : కొన్ని సందర్భములలో ఊహించిన తరగతి అంతరములు ఉండవు. ఉదాహరణకు – విద్యార్థులు ఒక పరీక్షలో పొందిన మార్కులు, ఈ విషయంలో సున్నకంటే చిన్న తరగతి, అత్యధిక మార్కుల కంటె పెద్ద తరగతిని ఊహించలేము. ఇలాంటి సందర్భములలో రేఖా ఖండముల చివరలను, మొదటి, చివరి దీర్ఘచతురస్రముల ఎత్తులో మధ్య బిందువు వద్దకు గీయవలెను.

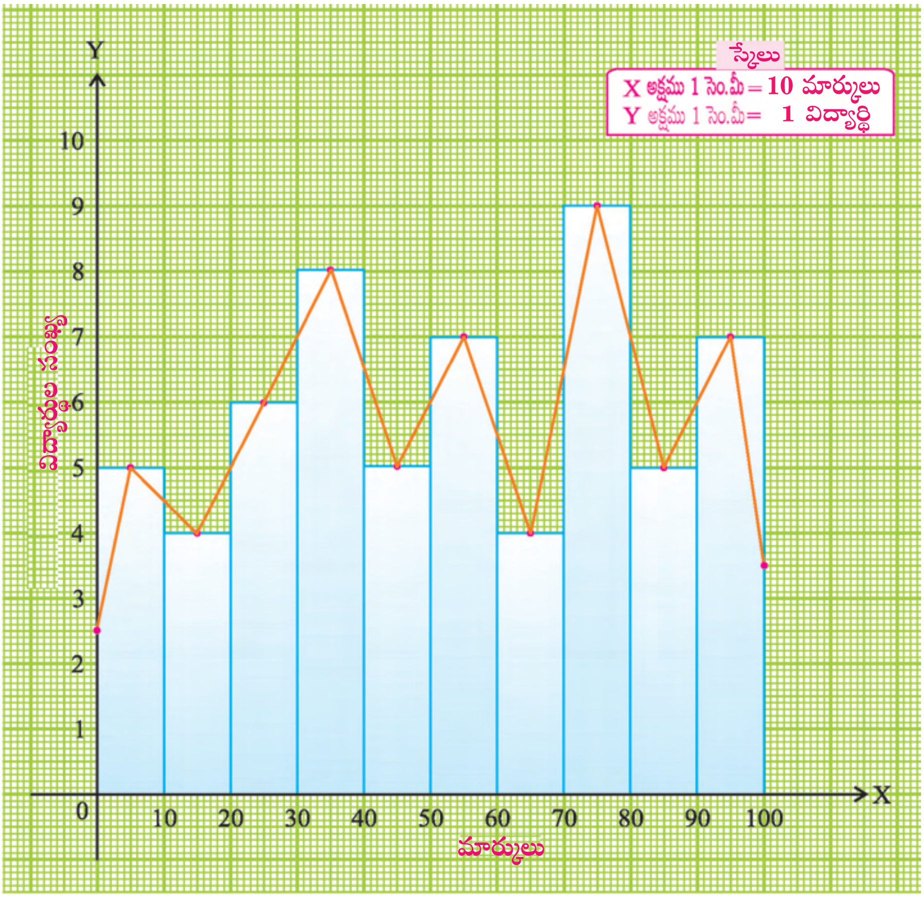
ఉదాహరణ 3.7

పై గమనికను ఉపయోగించి క్రింది ఉదాహరణకు పౌన:పున్య బహుభుజిని గీసెదము.

తరగతి అంతరము	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
పౌన: పున్యము	5	4	6	8	5	7	4	9	5	7

సాధన

X-అక్షముపై తరగతి అంతరములను, Y-.అక్షముపై పౌన:పున్యములను గుర్తించుము. దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రమును గీయుము. దీర్ఘచతురస్రముల పై భాగములోని మధ్య బిందువులను గుర్తించి, వాటిని కలుపుము. పౌన:పున్య బహుభుజి చివరి అంచులు, మొదటి మరియు చివరి దీర్ఘ చతురస్రముల ఎత్తుల మధ్య బిందువుతో కలుపుము.



పటము 3.5

3.3.2 (b) సోపాన చిత్రమును ఉపయోగించకుండా పౌన:పున్య బహుభుజిని నిర్మించుట

గీయు పద్ధతి

మెట్టు **1** : పౌన:పున్య విభజన పట్టిక నందు, తరగతి అంతరముల మధ్య బిందువులను లెక్కించుము.

మెట్టు **2** : తరగతి అంతరములను X-అక్షముపైన, పౌన:పున్యములను Y-అక్షముపైన గుర్తించుము.

మెట్టు **3** : పౌన:పున్యమును దానికి సంబంధించిన తరగతి అంతరముల మధ్య బిందువుల వద్ద గుర్తించుము.

మెట్టు **4** : రేఖా ఖండములతో ఈ మధ్య బిందువులను, వరుసగా కలుపుము.

మెట్టు **5** : బహుభుజిని పూర్తిచేయుటకు, దాని చివరలను X-అక్షముపై క్రింది తరగతి, పై తరగతి మధ్య బిందువులతో కలుపుము.

ఉదాహరణ 3.8

క్రింది దత్తాంశమునకు పౌన:పున్య బహుభుజిని గీయుము.

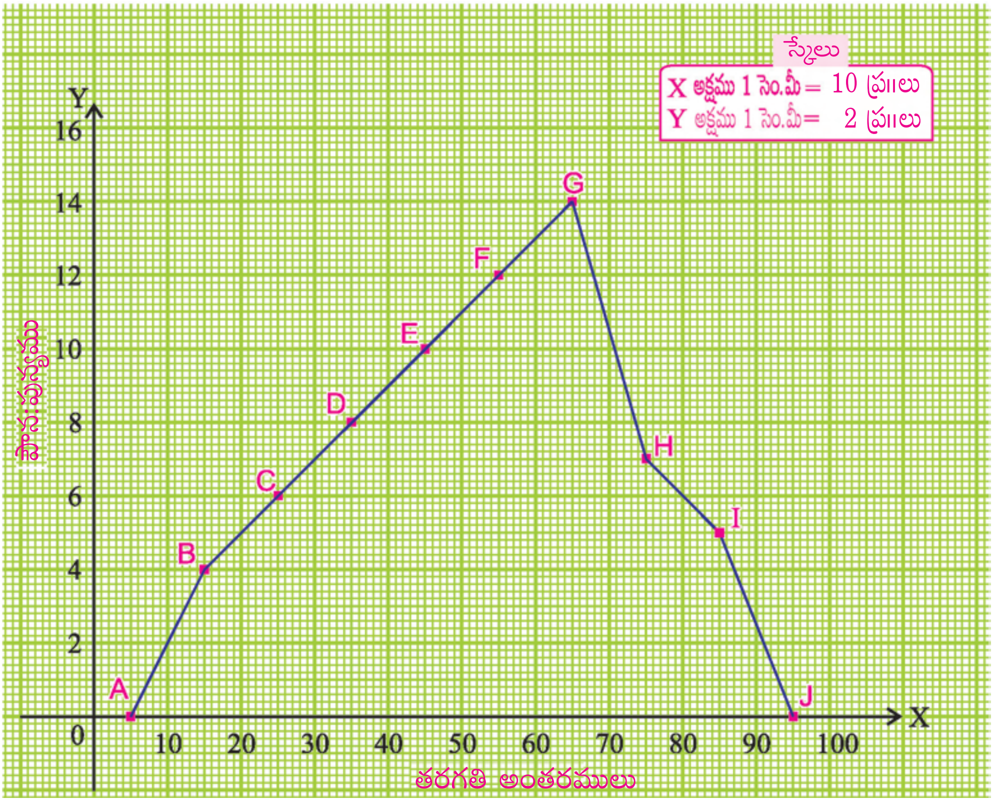
తరగతి అంతరము	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
పౌన:పున్యము	4	6	8	10	12	14	7	5

సాధన :

X-అక్షముపై తరగతి అంతరములను, Y-అక్షముపై పౌన:పున్యములను గుర్తించుము. ఊహించిన తరగతి అంతరములు 0−10 మరియు 90−100లను పౌన:పున్యము '0' ఉండునట్లు తీసుకొనుము. దత్తాంశమును పట్టిక పరచుము.

తరగతి అంతరము	మధ్య బిందువు	పౌన:పున్యము
0-10	**5**	**0**
10-20	15	4
20-30	25	6
30-40	35	8
40-50	45	10
50-60	55	12
60-70	65	14
70-80	75	7
80-90	85	5
90-100	**95**	**0**

ప్రక్కనున్న పట్టికను ఉపయోగించి, A (5, 0), B (15, 4), C (25, 6), D (35, 8), E (45, 10), F (55, 12), G (65, 14), H (75, 7), I (85, 5) మరియు J (95, 0). బిందువులను గుర్తించుము. మనము AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ కలిపిన మనకు కావలసిన పౌన:పున్య బహుభుజి ABCDEFGHIJ ఏర్పడుటను 3.6 లో చూపబడినది.



పటము 3.6

అభ్యాసము 3.1

1. క్రింది దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రము గీయుము.

తరగతి అంతరము	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
పౌన:పున్యము	8	12	6	14	10	5

2. క్రింది దత్తాంశము సహాయంతో సోపాన చిత్రము గీయుము.

ఒక ఎకరాకు దిగుబడి (క్వింటాళ్ళలో)	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36 - 40
పొలముల సంఖ్య	3	5	18	15	6	4

3. ఒక క్రికెట్ ఆటలోని ప్రేక్షకుల సంఖ్య దత్తాంశములో ఇవ్వబడినది. దీనికి సోపాన చిత్రము గీయుము.

వయస్సు (సం॥)	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
ప్రేక్షకుల సంఖ్య	4	6	12	10	8	2

4. ఒక గ్రామములోని చక్కెర వ్యాధిగ్రస్తుల వివరములు సేకరించబడినవి.

వయస్సు (సం॥)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
వ్యాధిగ్రస్తుల సంఖ్య	3	6	13	20	10	5

పై దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రము సహాయంతో పౌన:పున్య బహుభుజిని గీయుము.

5. క్రింది దత్తాంశమునకు, సోపాన చిత్రమును, పౌన:పున్యబహుభుజిని నిర్మించుము.

తరగతి అంతరము	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
పౌన:పున్యము	7	10	23	11	8	5

6. 150 మంది విద్యార్థులు పాల్గొనిన బుద్ధికుశలత (Intelligence test) పరీక్షలో వారి ప్రతిభ పట్టికపరచబడినది. దీనికి సోపాన చిత్రమును, పౌన:పున్య బహుభుజిని గీయుము.

ప్రజ్ఞాసూచిక	55-70	70-85	85-100	100-115	115-130	130-145
విద్యార్థుల సంఖ్య	20	40	30	35	10	15

7. క్రింది దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రమును ఉపయోగించి, పౌన:పున్య బహుభుజిని గీయుము.

తరగతి అంతరము	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
విద్యార్థుల సంఖ్య	9	3	4	6	2	3	4	5	7	8

8. క్రింది దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రము లేకుండా పౌనపున్య బహుభుజిని నిర్మించుము.

వయస్సు సం॥ లో	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
వ్యక్తుల సంఖ్య	6	11	25	35	18	12	6

9. క్రింది దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రము లేకుండా పౌన:పున్య బహుభుజిని నిర్మించుము.

తరగతి అంతరము	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
పౌన:పున్యము	12	16	20	8	10	4

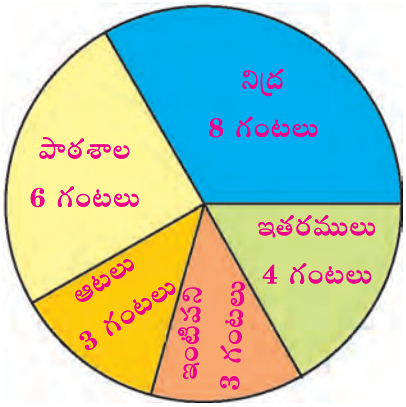
10. 40 మంది విద్యార్థులు ఒక ఆంగ్ల పరీక్షలో పొందిన మార్కులు (50 మార్కులకు) క్రింద ఇవ్వబడినవి. ఈ దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రము మరియు పౌన:పున్య బహుభుజిని గీయుము.

29, 45, 23, 40, 31, 11, 48, 1, 30, 24, 25, 29, 25, 32, 31, 22, 9, 49, 19, 13,
32, 39, 25, 3, 27, 41, 12, 13, 2, 44, 7, 43, 15, 35, 40, 3, 12, 48, 49, 18.

3.4 సాధారణ వృత్తరేఖా పటమును నిర్మించుట. (Construction of Simple Pie Chart)

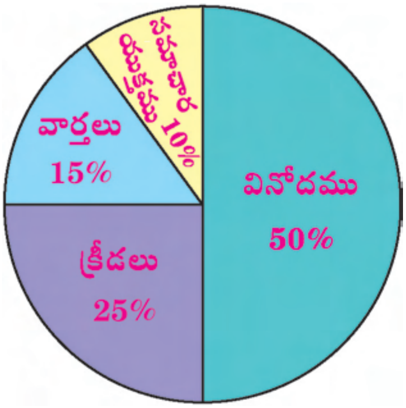
పటము 3.7 మరియు 3.8లో చూపినట్లుగా వృత్తాకార పటములలో దత్తాంశమును ఇవ్వడం, మీరెప్పుడైనా చూశారా?

ఒక పాఠశాల విద్యార్థి ఒక రోజు (24 గం॥ల) గడిపే సమయము.



పటము 3.7

వివిధ టి.వి. చానళ్ళు చూసే ప్రేక్షకులు.



పటము 3.8

పై పటముల మాదిరిగా గీయబడిన పటములను వృత్త రేఖా పటములు అంటారు. ఒక వృత్త రేఖాపటము ఒక మొత్తమునకు, దాని భాగములకు మధ్యగల సంబంధమును సూచించును. ఇక్కడ వృత్తమును, వృత్త ఖండములుగా విభజించెదరు. ప్రతి వృత్త ఖండము, అది సూచించు సమాచారమునకు అనుపాతములో ఉండును. వృత్త ఖండములు **pie** లోని ముక్కల రూపములో ఉండుటవలన దీనిని **pie chart** అంటారు.

నీకు తెలియునా?

Pie అనునది ఒక అమెరికన్ వంటకము

ఉదాహరణకు వృత్త రేఖాపటము "3.7"లో

నిద్రపోవు గంటలను సూచించు వృత్త ఖండము యొక్క అనుపాతము $= \dfrac{\text{నిద్రపోవు గంటలు}}{\text{ఒక పూర్తి రోజు}}$

$= \dfrac{8 \text{ గంటలు}}{24 \text{ గంటలు}} = \dfrac{1}{3}$

కావున, ఈ వృత్త ఖండము, వృత్తములో $\frac{1}{3}$ వ వంతుగా గీయబడినది.

పాఠశాలలో గడిపిన గంటలను సూచించు వృత్త ఖండము యొక్క అనుపాతము $= \dfrac{\text{పాఠశాలలో గడిపిన గంటలు}}{\text{ఒక పూర్తి రోజు}}$

$= \dfrac{6 \text{ గంటలు}}{24 \text{ గంటలు}} = \dfrac{1}{4}$

కావున, ఈ వృత్త ఖండము, వృత్తములో $\frac{1}{4}$ వ వంతుగా గీయబడినది.

ఆటలాడు సమయమును సూచించు వృత్త ఖండము యొక్క అనుపాతము $= \dfrac{\text{ఆటలాడు గంటలు}}{\text{ఒక పూర్తి రోజు}}$

$= \dfrac{3 \text{ గంటలు}}{24 \text{ గంటలు}} = \dfrac{1}{8}$

కావున, ఈ వృత్త ఖండము, వృత్తములో $\frac{1}{8}$ వ వంతుగా గీయబడినది.

ఇంటి పని చేయు సమయమును సూచించు వృత్త ఖండము యొక్క అనుపాతము $= \dfrac{\text{ఇంటి పని చేయు గంటలు}}{\text{ఒక పూర్తి రోజు}}$

$= \dfrac{3 \text{ గంటలు}}{24 \text{ గంటలు}} = \dfrac{1}{8}$

కావున, ఈ వృత్త ఖండము, వృత్తములో $\frac{1}{8}$ వ వంతుగా గీయబడినది.

ఇంటి పని చేయు సమయమును సూచించు వృత్త ఖండము యొక్క అనుపాతము $= \dfrac{\text{ఇతరములకు ఉపయోగించు గంటలు}}{\text{ఒక పూర్తి రోజు}}$

$= \dfrac{4 \text{ గంటలు}}{24 \text{ గంటలు}} = \dfrac{1}{6}$

కావున, ఈ వృత్త ఖండము, వృత్తములో $\frac{1}{6}$ వ వంతుగా గీయబడినది.

పైనున్న అన్ని భిన్నములను కూడుము,

మొత్తము $= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{6}$

$= \dfrac{8+6+3+3+4}{24} = \dfrac{24}{24} = 1.$

అన్ని భిన్నముల మొత్తము "1" కి సమానము. ఇక్కడ ఒక విద్యార్థి ఒక్కరోజు గడుపు సమయమును వృత్త సమహాయముతో చూపబడినది. పూర్తి వృత్త వైశాల్యమును '1'గా తీసుకోవడం జరిగినది. విద్యార్థియొక్క వివిధ కార్యక్రమములను అనుపాతములో లెక్కించి వృత్త ఖండములలో చూపడము జరిగినది. ఈ అనుపాత భాగమును కోణ కొలతల ద్వారా కూడా లెక్కించవచ్చును. వృత్త కేంద్రము వద్ద అన్ని కోణముల మొత్తము 360° కావున మనము ప్రతి వృత్త ఖండమును కోణ కొలతల ద్వారా చూపవచ్చును.

క్రింది ఉదాహరణలో, కోణ కొలతలను ఉపయోగించి వృత్త రేఖ పటము (pie chart) నిర్మించుట ఎట్లో వివరించ బడినది.

ఉదాహరణ 3.9

ఒక విద్యార్థి ఒక రోజులో తన సమయమును వివిధ పనులకు ఎలా వినియోగించు చున్నాడో క్రింద ఇవ్వబడినది. కోణ కొలతలను ఉపయోగించి వృత్త రేఖా పటమును (pie chart) నిర్మించుము.

కార్యక్రమము	నిద్ర	పాఠశాల	ఆటలు	ఇంటిపని	ఇతరములు
పని గంటలు	8	6	3	3	4

సాధన

ఒక రోజులోని 24 గం॥లో చేయు వివిధ పనుల అన్నింటిని 360°.గా మార్చుకొనుము. నిద్రపోవు సమయము 8 గం॥లు, కావున దీనిని $\frac{8}{24}\times 360^0 = 120°$ గా సూచించుము.

కావున, నిద్రపోవు సమయమును సూచించు వృత్త ఖండ కేంద్ర కోణము 120° గా ఉండవలెను.

అదే విధంగా, పాఠశాల, ఆటలు, ఇంటిపని, మరియు ఇతరములకు వినియోగించు సమయమును ఇదే విధంగా డిగ్రీలలో లెక్కించి వృత్త ఖండ కేంద్ర కోణములుగా మార్చుట క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

పని	పని గంటలు	కేంద్ర కోణము
నిద్ర	8	$\frac{8}{24}\times 360^0 = 120^0$
పాఠశాల	6	$\frac{6}{24}\times 360^0 = 90^0$
ఆట	3	$\frac{3}{24}\times 360^0 = 45^0$
ఇంటిపని	3	$\frac{3}{24}\times 360^0 = 45^0$
ఇతరములు	4	$\frac{4}{24}\times 360^0 = 60^0$
మొత్తము	24	360^0

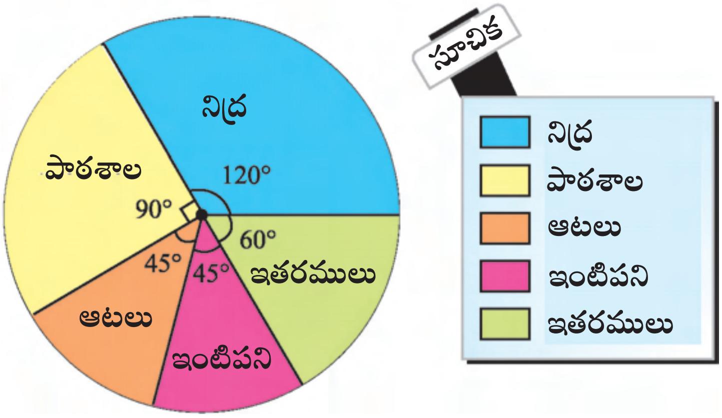
వృత్త రేఖాపటము గీయుట

నీకు అనుకూలమైన వ్యాసార్ధముతో వృత్తము గీయుము. ఆ వృత్తమునందు, ఏదో ఒక వ్యాసార్ధము వద్ద ప్రారంభించి కేంద్రము వద్ద 120° గుర్తించి రెండవ భుజము గీయుము. ఈ వృత్త ఖండము నిద్రపోవు సమయమును సూచించును.

ఈ భుజమునుండి, పైన గీచిన విధంగానే వృత్త ఖండము 90° ఉండునట్లు మరొకటి గీయుము. ఇది పాఠశాలలో గడిపిన సమయమును సూచించును. ఇదే విధంగా అన్ని అంశములకు వృత్త ఖండములను గీచెదము. .

ఈ వృత్త ఖండములకు వివిధ రంగులు వేయుట వలన అంశముల మధ్య తేడా చూపవచ్చును. పూర్తి చేయబడిన వృత్త రేఖా పటము ప్రక్క పటములో చూపబడినది.

ఒక విద్యార్థి ఒకరోజు గడిపిన సమయము



పటము *3.9*

గమనిక: వృత్త రేఖాపటములో, వివిధ అంశములను వృత్త ఖండముల చేతను మరియు అంశముల మొత్తమును వృత్తము చేతను సూచించెదరు. కేంద్రమువద్ద కోణ మొత్తము 360° లను అంశముల విలువలకు అనుగుణంగా విభజించవలెను.

$$\text{ఒక అంశముయొక్క కేంద్రకోణము} = \left| \frac{\text{అంశము విలువ}}{\text{మొత్తము విలువ}} \times 360^0 \right|$$

కొన్ని సందర్భములలో అంశములను శాతములలో తెలిపెదరు. అటువంటి సమయములో కేంద్ర కోణము $= \left| \frac{\text{అంశము యొక్క శాతము}}{100} \times 360^0 \right|$

ఇచ్చిన దత్తాంశమునకు వృత్త రేఖాపటము నిర్మించు విధము

1. పైన చెప్పిన సూత్రమును ఉపయోగించి, ప్రతి అంశమునకు కేంద్ర కోణమును లెక్కించుము.
2. అనుకూలమైన వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తమును గీయుము.
3. ఆ వృత్తములో అడ్డముగా ఒక వ్యాసార్థమును గీయుము.
4. ఆ వ్యాసార్థమునుండి మొదటి అంశము యొక్క కేంద్ర కొలతతో వృత్త ఖండమును గీయుము. దీనినుండి రెండవ అంశమునకు కేంద్ర కొలత గుర్తించి వ్యాసార్థము గీచి వృత్త ఖండమును గీయుము. ఈ విధంగా అన్ని భాగములకు వృత్త ఖండములు గీయుము..
5. అన్ని భాగములకు వేర్వేరుగా రంగు వేయుము.
6. సూచిక వ్రాయుము.
7. అంశమునకు పేరు పెట్టుము.

ఈ విధంగా ఇచ్చిన దత్తాంశమునకు వృత్త రేఖా పటము గీయగలము

ఉదాహరణ 3.10

క్రింది పట్టికలో ఒక కుటుంబ నెలసరి ఖర్చు వివరములు ఇవ్వబడినవి.

వివరములు	ఆహారము	ఇంటి అద్దె	బట్టలు	చదువు	పొదుపు	ఇతరములు
ఖర్చు (రూపాయలలో)	4800	2400	1600	800	1000	1400

పై దత్తాంశమునకు వృత్త రేఖా పటము గీయుము.

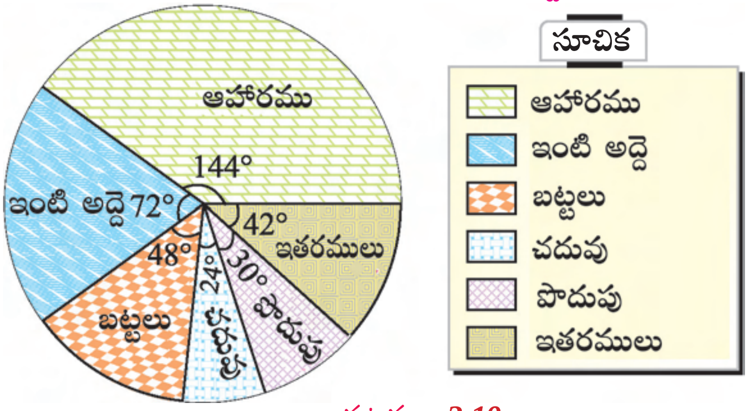
సాధన

క్రింది విధంగా ప్రతి అంశమునకు కేంద్ర కోణమును లెక్కించుము :

వివరములు	ఖర్చు (రూపాయలలో)	కేంద్ర కోణము
ఆహారము	4800	$\frac{4800}{12000} \times 360° = 144°$
ఇంటి అద్దె	2400	$\frac{2400}{12000} \times 360° = 72°$
బట్టలు	1600	$\frac{1600}{12000} \times 360° = 48°$
చదువు	800	$\frac{800}{12000} \times 360° = 24°$
పొదుపు	1000	$\frac{1000}{12000} \times 360° = 30°$
ఇతరములు	1400	$\frac{1400}{12000} \times 360° = 42°$
మొత్తము	**12000**	**360°**

క్రింది విధంగా వృత్త రేఖాపటము గీచెదము.

ఒక కుటుంబ నెలసరి ఖర్చులు



పటము *3.10*

ఉదాహరణ 3.11

ఒక పాఠశాల పదవ తరగతి ఫలితములు ఇలా ఉన్నవి.

ఫలితము	ప్రథమ శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులు	ద్వితీయ శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులు	తృతీయ శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులు	ఉత్తీర్ణులు కానివారు
విద్యార్థుల ఉత్తీర్ణత శాతము	25%	35%	30%	10%

పై సమాచారమునకు వృత్త రేఖా పటము గీయుము.

సాధన

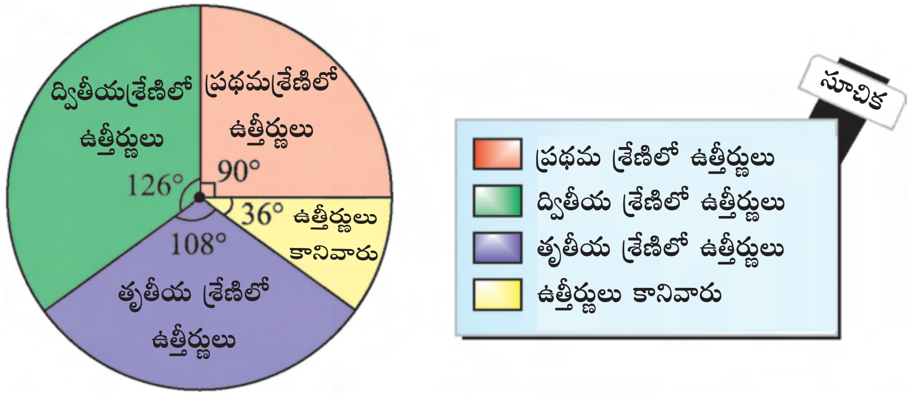
$$\text{అంశమునకు కేంద్రకోణము} = \left|\frac{\text{అంశము యొక్క శాతము}}{100} \times 360^0\right|$$

వివిధ అంశములకు కేంద్రకోణములను లెక్కించెదము :

ఫలితము	విద్యార్థుల శాతము	కేంద్రకోణము
ప్రథమ శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులు	25%	$\frac{25}{100} \times 360^0 = 90^0$
ద్వితీయ శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులు	35%	$\frac{35}{100} \times 360^0 = 126^0$
తృతీయ శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులు	30%	$\frac{30}{100} \times 360^0 = 108^0$
ఉత్తీర్ణులు కానివారు	10%	$\frac{10}{100} \times 360^0 = 36°$
మొత్తము	100%	360^0

మనకు కావలసిన వృత్త రేఖాపటము క్రింది విధంగా గీచెదము

పదవ తరగతి పరీక్ష ఫలితములు



పటము 3.11

అభ్యాసము 3.2

1. యుగేంద్రన్ యొక్క ప్రగతి పత్రము (progress card) లో మార్కులు ఇలా ఉన్నవి.

పాఠ్యాంశము	తమిళము	ఆంగ్లము	గణితము	సామాన్య శాస్త్రము	సాంఘిక శాస్త్రము
మార్కులు	72	60	84	70	74

అతడు వివిధ పాఠ్యాంశములలో పొందిన మార్కులకు వృత్త రేఖా పటము గీయుము.

2. 8వ తరగతిలో 36 మంది విద్యార్థులు కలరు. వారు వివిధ సంఘము లలో సభ్యులుగా ఉన్నారు.

సంఘము	గణితము	ఎన్.సి.సి.	జె.ఆర్.సి.	స్కౌట్
విద్యార్థుల సంఖ్య	12	6	10	8

పై దత్తాంశమును వృత్తరేఖా పటములో చూపుము.

3. ఒక వసతి గృహము నందు వివిధ భాషలు మాట్లాడు విద్యార్థుల సంఖ్య క్రింద ఇవ్వబడినవి.

పాఠ్యాంశము	తమిళము	తెలుగు	మళయాళం	కన్నడ	ఆంగ్లము	ఇతరములు
విద్యార్థుల సంఖ్య	36	12	9	6	5	4

ఈ దత్తాంశమును వృత్తరేఖా పటములో చూపుము.

4. ఒక పాఠశాలలోని 8వ తరగతిలో వివిధ అభిరుచుల (hobbies) లో పాల్గొను వారి సంఖ్య ఇవ్వబడినది. వృత్తరేఖాపటము గీయుము.

అభిరుచి	సంగీతము	బొమ్మలు	నాట్యము	నాటకము	సంఘసేవ
విద్యార్థుల సంఖ్య	20	25	27	28	20

5. ఒక మిశ్రమ లోహము క్రింది లోహములను కలిగియున్నది. దత్తాంశమును వృత్త రేఖా పటములో చూపుము.

లోహము	బంగారం	సీసము	వెండి	రాగి	జింకు
బరువు	60	100	80	150	60

6. ఒక బేకరి అంగడిలో ఒకరోజు వివిధ రకముల పదార్థముల అమ్మకం (రూపాయలలో) ఈ విధంగా జరిగినది. దత్తాంశమును వృత్త రేఖా పటములో చూపుము.

రకము	సాధారణ రొట్టె	ఫల రొట్టె	కేక్	బిస్కెట్స్	ఇతరములు
వెల (రూపాయలు)	320	80	160	120	40

7. ఒక పుస్తకమును అచ్చు వేయుటకు ఒక ప్రచురణ కర్త చేసిన ఖర్చు ఇలా ఇవ్వబడినది.

రకము	కాగితము	ముద్రణ	బైండింగ్	ప్రచారము	రాయల్టీ
ఖర్చు	25	12	6	9	8

పై దత్తాంశమును వృత్త రేఖాపటములో చూపుము.

8. ఒక వ్యవసాయ దారుడు వ్యవసాయముపై చేసిన ఖర్చు వివరములు ఇవ్వబడినవి.

రకము	దుక్కి	ఎరువులు	విత్తనములు	మందులు	నీటి పారుదల
మొత్తము రూ॥లో	2000	1600	1500	1000	1100

పై దత్తాంశమును వృత్త రేఖాపటములో చూపుము.

9. ఒక జంతు ప్రదర్శనశాలలో 900 ప్రాణులు ఉన్నవి. వాటి వివరములు ఇవ్వబడినవి.

వన్య మృగాలు	క్రూర జంతువులు	పక్షులు	భూమిపై నివసించు జంతువులు	నీటి జంతువులు	ప్రాకుడు ప్రాణులు
ప్రాణుల సంఖ్య	400	120	135	170	75

ఈ దత్తాంశమును వృత్త రేఖా పటములో చూపుము

10. ఒక కంపెనీలో ఒక సం॥లో తయారుచేయు వివిధ రకముల వాహనముల సంఖ్య ఇవ్వబడినది. ఈ దత్తాంశమును వృత్త రేఖాపటములో చూపుము.

వాహనము	స్కూటర్	మోటార్ సైకిల్	కారు	జీపు	వ్యాను
సంఖ్య	3000	4000	1500	1000	500

11. ఒక ఆహారములో ఉన్న పోషక విలువల శాతము క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది. ఈ దత్తాంశమును చూపు వృత్త రేఖా పటమును గీయుము.

పోషకములు	ప్రొటీన్	క్రొవ్వు	పిండి పదార్థములు	విటమిన్లు	మినరల్స్
శాతము	30%	10%	40%	15%	5%

12. వివిధ రుచులలో (flavours) ఐస్ క్రీమ్‌లను ఇష్టపడు ఒక పాఠశాల విద్యార్థుల శాతము క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది. దీనికి వృత్త రేఖాపటమును గీయుము.

రుచులు (Flavours)	చాక్లెట్	వెన్నెల	స్ట్రాబెర్రి	ఇతరములు
విద్యార్థుల శాతము	40%	30%	20%	10%

13. ఒక పాఠశాల విద్యార్థులు పాఠశాలకు వచ్చుటకు వినియోగించు ప్రయాణ సాధనముల వివరములు క్రింద ఇవ్వబడినవి:

ప్రయాణ విధము	బస్సు	సైకిలు	నడక	స్కూటరు	కారు
విద్యార్థుల శాతము	40%	30%	15%	10%	5%

పై దత్తాంశమునకు వృత్త రేఖాపటమును గీయుము.

14. రాజన్‌బాబు తన ఆదాయములో 20% ఇంటి అద్దెకు, 30% ఆహారమునకు, 10% పిల్లల చదువుకు, 25% పొదుపు చేయును. మిగిలినది ఇతర ఖర్చులకు ఉపయోగించును. ఈ సమాచారమునను వృత్త రేఖా పటములో చూపుము.

15. ఒక రాష్ట్రములోని వివిధ వర్గముల పనివారి శాతము క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

పనివారి వర్గీకరణ	వ్యవసాయదార్లు	వ్యవసాయ కూలీలు	కార్మికులు	వాణిజ్య పనివారు	ఇతరులు
శాతము	40%	25%	12.5%	10%	12.5%

పై సమాచారమును వృత్త రేఖాపటములో చూపుము.

3.5 కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు

ఇచ్చిన ముడి దత్తాంశమును పట్టిక పరచుట ద్వారా, మనకు ఆ విభజన యొక్క సాధారణ రూపము మాత్రమే తెలియును. ఇంకా స్పష్టముగా తెలుసుకోవాలంటే ఆ దత్తాంశమును ఎన్నిక చేయబడిన ఒక సంఖ్యగా చూపవలెను. ఆ దత్తాంశము యొక్క ముఖ్యత్వమును ఒక ప్రత్యేక విలువ ద్వారా చూపించిన ఇంకా ఉపయుక్తముగా ఉండును. ఈ విధంగా మొత్తము దత్తాంశమును పరిగణించు కొలతలనే కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు అంటారు. అవి

(i) అంకమధ్యము (ii) మధ్యగతము మరియు (iii) బాహుళకము

3.5.1 అంకమధ్యము (Arithmetic Mean (A.M))

అంకమధ్యము అనునది రాశుల మొత్తమునకు, రాశుల సంఖ్యకు మధ్యగల నిష్పత్తి.

3.5.1. (a) వర్గీకరించబడని దత్తాంశమునకు అంకమధ్యము

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ చరరాశి x కు n సూచికల అంకమధ్యమును $\overline{x}$ అని సూచించెదరు. దీనిని

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$ అని వ్రాస్తారు.

గణితమునందు మొత్తమును సూచించుటకు గ్రీకు అక్షరము Σ **(Sigma)** ను ఉపయోగించెదరు. ఈ సంకేతము ద్వారా $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ లను $\sum_{i=1}^{n} x_i$ అని (లేక) $\overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$ అని సూచించెదము.

గమనిక: అంకమధ్యమును సరాసరి అని కూడా అంటారు.

Σ గుర్తును గురించి ఇంకొంత

$$\sum_{k=1}^{3} k = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_{n=3}^{6} n = 3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

$$\sum_{n=2}^{4} 2n = 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 = 18$$

$$\sum_{k=1}^{3} 5 = \sum_{k=1}^{3} 5 \times k^0 = 5 \times 1^0 + 5 \times 2^0 + 5 \times 3^0 = 5 + 5 + 5 = 15$$

$$\sum_{K=2}^{4} (k-1) = (2-1) + (3-1) + (4-1) = 6$$

ఉదాహరణ 3.12

ఒక పరీక్షలో 10 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు ఇలా ఉన్నవి. 15, 75, 33, 67, 76, 54, 39, 12, 78, 11 అంక మధ్యమును కనుగొనుము.

సాధన

ఇక్కడ, రాశుల సంఖ్య, $n = 10$

$$\text{అంకమధ్యము} = \overline{x} = \frac{15 + 75 + 33 + 67 + 76 + 54 + 39 + 12 + 78 + 11}{10}$$

$$\overline{x} = \frac{460}{10} = 46.$$

ఉదాహరణ 3.13

9, 6, 7, 8, 5 మరియు x ల సరాసరి 8 అయిన x విలువ కనుగొనుము.

సాధన

ఇచ్చిన విలువలు 9, 6, 7, 8, 5 మరియు x, ఇక్కడ $n = 6$.

సూత్రము ప్రకారము అంకమధ్యమము $= \bar{x} = \dfrac{9+6+7+8+5+x}{6} = \dfrac{35+x}{6}$

దత్తాంశము ప్రకారము అంకమధ్యమము , $\bar{x} = 8$

కావున, $\dfrac{35+x}{6} = 8$

i.e. $35 + x = 48$

$x = 48 - 35 = 13.$

ఉదాహరణ 3.14

ఒక తరగతిలోని 10 మంది విద్యార్థుల సరాసరి ఎత్తు 166 సెం.మీ. అని లెక్కించబడినది. అయితే సరిచూచినపుడు ఒక విలువ 150 సెం.మీ. కు బదులుగా 160 సెం.మీ. తీసుకోబడినది అని తెలిసినది. సరైన సరాసరి ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన

ఇక్కడ, $\bar{x} = 166$ సెం.మీ మరియు $n = 10$

మనకు $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n} = \dfrac{\Sigma x}{10}$

i.e. $166 = \dfrac{\Sigma x}{10}$ (లేక) $\Sigma x = 1660$

తప్పైన $\Sigma x = 1660$

సరైన Σx = తప్పైన Σx – తప్పుగా వ్రాయబడిన విలువ + సరైన విలువ

$= 1660 - 160 + 150 = 1650$

కావున, సరైన అంకమధ్యమము $= \dfrac{1650}{10} = 165$ సెం.మీ.

3.5.1 (b) వర్గీకృత దత్తాంశము (grouped data) నకు అంకమధ్యమము

వర్గీకృత దత్తాంశమునకు రెండు విధములుగా అంకమధ్యమును కనుగొనువచ్చును. అవి,

(i) ప్రత్యక్ష పద్ధతి మరియు (ii) ఊహించిన అంకమధ్యమము పద్ధతి

(i) అంకమధ్యమును లెక్కించుట (ప్రత్యక్ష పద్ధతి)

మనకు క్రింది పౌనఃపున్య విభజన ఇవ్వబడినది అనుకుందాము.

చరరాశి	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
పౌనఃపున్యము	f_1	f_2	f_3	$\cdots$	f_n

ఈ పట్టికను క్రింది విధంగా వివరించెదము

దీని విలువ x_1 , f_1 మార్లువచ్చినది.

x_2 , f_2 మార్లువచ్చినది.

x_3 , f_3 మార్లువచ్చినది.

....

....

x_n , f_n మార్లువచ్చినది.

ఇక్కడ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ అనునవి x యొక్క వేర్వేరు విలువలు.

ఇక్కడ, రాశుల సంఖ్యను N చే సూచిస్తాము

$$\text{(i.e.,)}\ f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = N \ \text{(లేక)} \sum_{i=1}^{n} f_i = N$$

పరిశీలించవలసిన విలువల మొత్తము

$= (x_1 + x_1 + x_1 + ... + f_1 \text{ సార్లు}) + (x_2 + x_2 + x_2 + ... + f_2 \text{ సార్లు}) + ... + (x_n + x_n + x_n + ... + f_n \text{ సార్లు})$

$= f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_n \times x_n = \Sigma f_i x_i$

కావున, $\bar{x} = \dfrac{\text{పరిశీలనలోని విలువల మొత్తము}}{\text{పరిశీలించిన విలువల సంఖ్య}} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

సాధారణంగా, దీనిని ఇలా వ్రాస్తాము. $\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \dfrac{\Sigma fx}{N}$, $N = \Sigma f$.

ఉదాహరణ 3.15

క్రింది దత్తాంశమునకు అంకమధ్యమును ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో కనుగొనుము.

x	5	10	15	20	25	30
f	4	5	7	4	3	2

సాధన

x	f	fx
5	4	20
10	5	50
15	7	105
20	4	80
25	3	75
30	2	60
మొత్తము	N = 25	$\Sigma fx = 390$

అంకమధ్యము , $\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{N}$

$= \dfrac{390}{25} = 15.6$.

(ii) ఉజ్జాయింపు పద్ధతిలో అంకమధ్యమును కనుగొనుట (Assumed Mean Method)

పై ఉదాహరణలో, సంఖ్యలు చిన్నవిగా ఉండుటవలన గుణకారము సులభముగా ఉన్నది. అయితే సంఖ్యలు పెద్దవిగా ఉన్నపుడు వాటి గుణకారము సుదీర్ఘముగా ఉండి ఆసక్తి లేకుండా పోయి తప్పులకు దారి తీయవచ్చును.

ఈ కష్టము లేకుండా వేరొక సులభ పద్ధతి కనుగొనబడినది. ఈ పద్ధతిలో ఇచ్చిన విలువలలో ఒక విలువను అంకమధ్యము (A) గా అనుకొందురు. దీనిని ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యము అంటారు. తర్వాత, అన్ని విలువలకు $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యము (A) నుండి విచలనములు $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ లను కనుగొందురు.

i.e. $d_1 = x_1 - A,\ d_2 = x_2 - A,\ d_3 = x_3 - A, \cdots, d_n = x_n - A$

ఇపుడు $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ లను వరుసగా $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$ లచే గుణించి, ఆ విలువలను కూడిన Σfd వచ్చును.

ఇపుడు అంకమధ్యము $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma fd}{\Sigma f}$

$\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma fd}{N}$ (ఇక్కడ A ఊహించిన అంకమధ్యము $N = \Sigma f$)

ఇపుడు మనము పై ఉదాహరణ 3.15 నకు ఊహించిన అంకమధ్యమ పద్ధతిలో అంకమధ్యమును కనుగొందాము.

ఊహించిన అంకమధ్యము A = 15 గా తీసుకొనుము.

x	f	$d = x - A$	fd
5	4	– 10	– 40
10	5	– 5	– 25
15	7	0	0
20	4	5	20
25	3	10	30
30	2	15	30
మొత్తము	**N = 25**		**Σfd = 15**

$$\text{అంకమధ్యము} = \bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$$

$$= 15 + \frac{15}{25} = 15 + \frac{3}{5} = \frac{75+3}{5} = \frac{78}{5}$$

$$= 15.6\,.$$

3.5.2 భారయుత అంకమధ్యము (Weighted Arithmetic Mean (W.A.M.))

వివిధ బరువులతో కూడి యుండును. అటువంటి సమయములో కనుగొను అంకమధ్యమును భారయుత అంకమధ్యము అంటారు.

ఉదాహరణకు ఒకరాశి x_1 బరువు w_1, తోను, రాశి x_2 బరువు w_2 తోను చివరిగా x_n రాశి, w_n బరువుతోను కూడి ఉన్నవి. అపుడు

$$\text{W. A. M.} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

ఉదాహరణ 3.16

క్రింది దత్తాంశమునకు భారయుత అంకమధ్యమును కనుగొనుము :

ఆహారము	పరిమాణము (కి.గ్రా.లలో) w_i	ధర (కి.గ్రా.కు) రూ॥లలో x_i
బియ్యము	25	30
చక్కెర	12	30
నూనె	8	70

సాధన

ఇక్కడ x-అనునది విలువల ధరను, w పరిమాణమును (కి.గ్రా.) లలోను చూపుచున్నది.

$$\text{భారయుత అంకమధ్యము (W.A.M)} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n}$$

$$= \frac{25 \times 30 + 12 \times 30 + 8 \times 70}{25 + 12 + 8} = \frac{1670}{45}$$

$$= ₹\ 37.11$$

3.5.3 మధ్యగతము

కేంద్రీయ స్థాన కొలతలలో మరొక కొలత "మధ్యగతము".

3.5.3 (a) ముడి దత్తాంశమునకు మధ్యగతము

మధ్యగతమును క్రింది విధంగా లెక్కించెదరు.

(i) పరిశీలనల సంఖ్య (రాశుల సంఖ్య) బేసి సంఖ్య **(odd number)** గా ఉన్నపుడు, వాటిని ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమములో వ్రాయవలెను. వాటిలో మధ్యపదమునే మధ్యగతము అంటారు.
ఉదాహరణకు, ఐదు రాశులను 33, 35, 39, 40, 43 లను పరిశీలించుము. వీటిలో మధ్యలో ఉన్నవిలువ 39 కావున ఇదియే మధ్యగతము. .

(ii) పరిశీలనల సంఖ్య (లేక) రాశుల సంఖ్య 'సరి సంఖ్య'గా ఉంటే వాటిని ఆరోహణ (లేక) అవరోహణ క్రమములో వ్రాయుము. వాటి మధ్యలోని 'రెండు రాశుల' సరాసరినే 'మధ్యగతము' అంటారు.
ఉదాహరణకు, 33, 35, 39, 40, 43, 48 మరియు 48 ల మధ్యగతము $\frac{39+40}{2} = 39.5$ అగును.

గమనిక: మధ్యగతము అనగా ముందు, వెనుక సమాన సంఖ్యలో రాశులను కలిగియున్న ఒక రాశి.

ఉదాహరణ 3.17

17, 15, 9, 13, 21, 7, 32. ల మధ్యగతము కనుగొనుము.

సాధన

విలువలను ఆరోహణ క్రమములో ఇలా వ్రాయుము. 7, 9, 13, 15, 17, 21, మరియు 32,

ఇక్కడ, $n = 7$ (బేసి సంఖ్య)

కావున, మధ్యగతము = మధ్యవిలువ

$= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ వ పదము $= \left(\frac{7+1}{2}\right)$ విలువ = 4వ పదము

కావున, మధ్యగతము 15.

ఉదాహరణ 3.18

ఒక క్రికెట్ ఆటగాడు చేసిన పరుగులు 13, 28, 61, 70, 4, 11, 33, 0, 71, 92. మధ్యగతము కనుగొనుము.

సాధన

పరుగులను ఆరోహణ క్రమములో వ్రాయగా 0, 4, 11, 13, 28, 33, 61, 70, 71, 92.

ఇక్కడ, $n = 10$ (సరి సంఖ్య)

ఇక్కడ, రెండు మధ్య విలువలు 28 మరియు 33 కలవు

మధ్యగతము = రెండు మధ్య విలువల సరాసరి

$$= \frac{28+33}{2} = \frac{61}{2} = 30.5 .$$

3.5.3 (b) వర్గీకృత దత్తాంశమునకు మధ్యగతము

సంచిత పౌన:పున్యము

ఒక తరగతి యొక్క సంచిత పౌన:పున్యము అనగా ఆ తరగతి వరకు గల పౌన:పున్యముల మొత్తము.

ఉదాహరణ 3.19

50 మంది విద్యార్థుల మార్కుల మధ్యగతము కనుగొనుము.

మార్కులు	20	27	34	43	58	65	89
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	4	6	11	12	8	7

సాధన

మార్కులు (x)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌన:పున్యము
20	2	2
27	4	(2 + 4 =) 6
34	6	(6 + 6 =) 12
43	11	(11 + 12 =) 23
58	12	(23 + 12 =) 35
65	8	(35 + 8 =) 43
89	7	(43 + 7 =) 50

ఇక్కడ పౌన:పున్యముల మొత్తము, $N = \Sigma f = 50$

$$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25.$$

మధ్యగతము $\left(\frac{N}{2}\right)$ వ పదము = 25వ పదము.

ఇపుడు, 25వ విలువ, సంచిత పౌన:పున్యము 35, లో ఉండును, దానికి సంబంధించిన మార్కులు 58.

కావున, మధ్యగతము = 58

3.5.4 బాహుళకము

కేంద్రీయ స్థాన కొలతలలో "బాహుళకము" కూడా ఒకటి అగును.

బాహుళకమును క్రింది విధముగా కనుగొనవచ్చును.

3.5.4 (a) ముడి దత్తాంశమునకు బాహుళకము:

కొన్ని విలువల సముదాయమును ఇచ్చినపుడు, వాటిలో ఎక్కువ సార్లు వచ్చిన విలువను బాహుళకము అందురు.

ఉదాహరణ 3.20

2, 4, 5, 2, 1, 2, 3, 4, 4, 6, 2 ల బాహుళకము కనుగొనుము.

సాధన

ఈ ఉదాహరణలో '2' అను సంఖ్య ఎక్కువ సార్లు అనగా నాలుగు సార్లు వచ్చినది. కావున బాహుళకము = 2.

ఉదాహరణ 3.21

22, 25, 21, 22, 29, 25, 34, 37, 30, 22, 29, 25 ల బాహుళకము కనుగొనుము.

సాధన

ఇక్కడ "22" 3 సార్లు మరియు 25 కూడా 3 సార్లు వచ్చినవి.

∴ 22 మరియు 25 లు ఈ దత్తాంశమునకు బాహుళకములు అగును. ఇచ్చిన దత్తాంశమునకు రెండు బాహుళకములు ఉన్నవి అని గమనించగలము.

ఉదాహరణ 3.22

15, 25, 35, 45, 55, 65,

సాధన

ప్రతి విలువ ఒకే ఒక్కసారి మాత్రమే వచ్చినది. కావున ఈ దత్తాంశమునకు బాహుళకము లేదు.

3.5.4 (b) వర్గీకృత దత్తాంశమునకు (పౌన:పున్య విభజనకు) బాహుళకము

దత్తాంశము పౌన:పున్య పట్టిక రూపములో ఉంటే, పౌన:పున్యము ఎక్కువగా గల తరగతిని బాహుళక తరగతి అంటారు. ఆ తరగతి యొక్క విలువ ను బాహుళకము అంటారు.

ఉదాహరణ 3.23

క్రింది పౌన:పున్య పట్టికకు బాహుళకము కనుగొనుము.

వేతనములు	250	300	350	400	450	500
పనివారి సంఖ్య	10	15	16	12	11	13

సాధన

వేతనములు	పనివారి సంఖ్య
250	10
300	15
350	**16**
400	12
450	11
500	13

పై పట్టికను గమనించిన, అందులో అతిపెద్ద పౌన:పున్యము 16. ఈ అతిపెద్ద పౌన:పున్యమునకు చెందిన విలువ 350 ఇదే ఈ దత్తాంశముయొక్క బాహుళకము.

నీకు తెలియునా?

ఏక బాహుళకము	ద్వి బాహుళకము	త్రి బాహుళకము	బహుళ బాహుళకము
ఇచ్చిన వరుసలో ఒకే ఒక బాహుళకము ఉంటే దానిని ఏక బాహుళకము అంటారు.	ఇచ్చిన వరుసలో రెండు బాహుళకములు ఉంటే దానిని ద్వి బాహుళకము అంటారు.	ఇచ్చిన వరుసలో మూడు బాహుళకములు ఉంటే దానిని త్రి బాహుళకము అంటారు.	ఇచ్చిన వరుసలో మూడు కంటే ఎక్కువ బాహుళకములు ఉంటే దానిని బహుళ బాహుళకము అంటారు.
ఉదాహరణ : 10, 15, 20, 25, 15, 18, 12, 15. ఇక్కడ, బాహుళకము 15.	ఉదాహరణ : 20, 25, 30, 30, 15, 10, 25. ఇక్కడ 25, 30 లు ద్వి బాహుళకములు.	ఉదాహరణ : 60, 40, 85, 30, 85, 45, 80, 80, 55, 50, 60. ఇక్కడ 60, 80, 85 లు త్రి బాహుళకములు.	ఉదాహరణ : 1, 2, 3, 8, 5, 4, 5, 3, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 2, 7, 4, 1. ఇక్కడ 1, 2, 3, 4, 5 లు బహుళ బాహుళకములు.

అభ్యాసము 3.3

I. అంకమధ్యము పై సమస్యలు

1. 2, 4, 6, 8, 10 , 12, 14, 16 లకు అంకమధ్యము కనుగొనుము.
2. 18, 41, x , 36, 31, 24, 37, 35, 27, 36, ల సరాసరి 31, x విలువను కనుగొనుము.
3. 20 మంది విద్యార్థులు గల తరగతిలో 5 మంది 76 మార్కులు 7 మంది 77 మార్కులు, మరియు 8 మంది 78 మార్కులు సాధించారు. ఆ తరగతి అంకమధ్యమును కనుగొనుము..
4. ఒక తరగతిలోని 20 మంది విద్యార్థుల సరాసరి ఎత్తు 160 సెం.మీ. పరిశీలించిన చూసినపుడు ఒక విలువ 152 సెం.మీ. లకు బదులు 132 సెం.మీ. గా వ్రాయబడినది. అయిన సరైన అంకమధ్యపు ఎత్తు కనుగొనుము.

5. క్రింది దత్తాంశమునకు అంకమధ్యమును కనుగొనుము.

x	15	25	35	45	55	65	75	85
f	12	20	15	14	16	11	7	8

6. క్రింది దత్తాంశమునందు, ఒక తరగతిలోని 40 మంది బాలుర వయస్సు ఇవ్వబడినది. ఆ బాలుర వయస్సుకు అంకమధ్యము కనుగొనుము.

వయస్సు	13	14	15	16	17	18
విద్యార్థుల సంఖ్య	3	8	9	11	6	3

7. క్రింది దత్తాంశమునకు అంకమధ్యము కనుగొనుము.

మార్కులు	65	70	75	80	85	90	95	100
విద్యార్థుల సంఖ్య	6	11	3	5	4	7	10	4

8. క్రింది పట్టికలో, ఒక కర్మాగారంలో పనిచేయు 12 మంది కార్మికుల బరువులు ఇవ్వబడినవి. కార్మికుల బరువుల అంకమధ్యము కనుగొనుము.

బరువులు (కి.గ్రాములలో)	60	64	68	70	72
కార్మికుల సంఖ్య	3	4	2	2	1

9. ఒక కుటుంబమునకు, ఒక నెలకు కావలసిన సరుకులు, వాటి బరువులు ఇవ్వబడినవి. భారయుత అంకమధ్యము కనుగొనుము.

సరుకులు	బరువులు (కి.గ్రా.లలో)	ధర (రూ.లలో)
బియ్యము	25	30
గోధుమ	5	20
పప్పుధాన్యాలు	4	60
కూరగాయలు	8	25
నూనె	3	65

10. క్రింది దత్తాంశమునకు భారయుత అంకమధ్యము కనుగొనుము.

వస్తువు	సంఖ్య	ధర
పౌడరు	2	₹ 45
సబ్బు	4	₹ 12
కలము	5	₹ 15
పరికరముల పెట్టె	4	₹ 25.50

II. మధ్యగతము పై సమస్యలు

1. క్రింది విలువలకు మధ్యగతము కనుగొనుము:
   (i) 83, 66, 86, 30, 81.
   (ii) 45, 49, 46, 44, 38, 37, 55, 51.
   (iii) 70, 71, 70, 68, 67, 69, 70.
   (iv) 51, 55, 46, 47, 53, 55, 51, 46.

2. క్రింది దత్తాంశమునకు మధ్యగతము కనుగొనుము.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f	9	11	5	6	8	1	3	7

3. ఒక తరగతిలోని 50 మంది విద్యార్థుల ఎత్తు (సెం.మీ లలో) ఇవ్వబడినది. మధ్యగతము కనుగొనుము.

ఎత్తు (సెం.మీ)	156	155	154	153	152	151	150
విద్యార్థుల సంఖ్య	8	4	6	10	12	3	7

4. 60 మంది రోగుల గుండె లను X-కిరణముల ద్వారా పరీక్షించి, పరిశీలనలు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. మధ్యగతము కనుగొనుము.

గుండె వ్యాసము (మి.మీ.లలో)	130	131	132	133	134	135
రోగుల సంఖ్య	7	9	15	12	6	11

5. 43 మంది ఉద్యోగస్థుల జీతములు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. మధ్యగతమును కనుగొనుము.

జీతము (రూ॥)	4000	5500	6000	8250	10,000	17,000	25,000
ఉద్యోగస్థుల సంఖ్య	7	5	4	3	13	8	3

III. బాహుళకము పై సమస్యలు

1. క్రింది దత్తాంశములకు బాహుళకము కనుగొనుము.

i) 74, 81, 62, 58, 77, 74.

ii) 55, 51, 62, 71, 50, 32.

iii) 43, 36, 27, 25, 36, 66, 20, 25.

vi) 24, 20, 27, 32, 20, 28, 20.

2. క్రింది పౌన:పున్య పట్టికకు బాహుళకము కనుగొనుము.

x	5	10	15	20	25	30
f	14	25	37	16	8	5

3. క్రింది పట్టికకు బాహుళకము కనుగొనుము.

ఉష్ణోగ్రత (సెంటిగ్రేడ్‌లలో)	29	32.4	34.6	36.9	38.7	40
రోజుల సంఖ్య	7	2	6	4	8	3

4. ఒక సర్వేలో వివిధ కొలతలు గల చొక్కాలకు గల డిమాండు క్రింద ఇవ్వబడినది. బాహుళకము కనుగొనుము.

కొలత	38	39	40	41	42	43	44
చొక్కాల సంఖ్య	27	40	51	16	14	8	6

IV. అంకమధ్యము, మధ్యగతము మరియు బాహుళకములపై సమస్యలు

1. క్రింది పౌన:పున్య పట్టికకు అంకమధ్యము, మధ్యగతము మరియు బాహుళకములను కనుగొనుము.

x	10	20	25	30	37	55
f	5	12	14	15	10	4

2. ఒక కంపెనీలోని ఉద్యోగస్థుల వయస్సులు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. అంకమధ్యము, మధ్యగతము, బాహుళకములను లెక్కించుము.

వయస్సు (సం॥లలో)	19	21	23	25	27	29	31
వ్యక్తుల సంఖ్య	13	15	20	18	16	17	13

3. క్రింది పట్టికలో 20 మంది విద్యార్థుల బరువులు ఇవ్వబడినవి. అంకమధ్యము, మధ్యగతము, బాహుళకములను లెక్కించుము.

బరువులు కి.గ్రా.లలో	47	50	53	56	60
విద్యార్థుల సంఖ్య	4	3	7	2	4

పాఠ్యభాగ సారాంశము

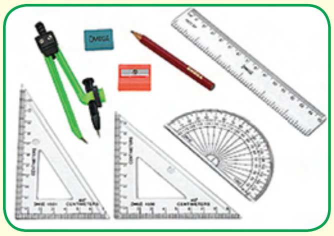
- ఒక పౌనఃపున్య విభజనను గ్రాఫు ద్వారా చూపు రెండు పద్ధతులే సోపాన చిత్రము మరియు పౌనఃపున్య బహుభుజి.
- సోపాన చిత్రము మరియు పౌనఃపున్య బహుభుజిలను గ్రాఫులో చూపునపుడు, తరగతి అంతరములను X-అక్షముపైన, వాటి పౌనఃపున్యములను Y-అక్షముపైన తీసుకోవలెను.
- సోపాన చిత్రము నందు దీర్ఘచతురస్రములను వరసగా ప్రక్క ప్రక్కన అనగా మధ్యలో ఖాళీ లేకుండా అమర్చవలెను.
- సోపాన చిత్రము యొక్క దీర్ఘ చతురస్రములపై భాగమున మధ్య బిందువులను అన్నింటిని, క్రిందటి తరగతి అంతరము (Succeeding C. I) మరియు తర్వాతి తరగతి అంతరము (Preceding C. I) ల మధ్య బిందువులను కలిపినచో ఏర్పడు బహుభుజినే పౌనఃపున్య బహుభుజి అంటారు.
- ఒక అంశము యొక్క కేంద్ర కోణము $= \left| \dfrac{\text{అంశము యొక్క శాతము}}{100} \times 360^0 \right|$
- రాశులమొత్తమునకు, రాశుల సంఖ్యకు గల నిష్పత్తినే అంకమధ్యము అంటారు.
- అంకమధ్యము కనుగొనుటకు సూత్రములు

  (i) $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$ (ii) $\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

  (iii) $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma fd}{\Sigma f}$ A ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యము d = x – A.
- భారయుత అంకమధ్యము $= \dfrac{\Sigma w_i x_i}{\Sigma w_i}$.
- ముందు వెనుక సమాన సంఖ్యలో రాశులను కలిగియుండు రాశినే మధ్యగతము అంటారు.
- ఒక విభజనయందు ఎక్కువ సార్లు వచ్చు విలువను బాహుళకము అంటారు.

4 ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితము

4.1 పరిచయము



4.2 ఏక కేంద్రీయ వృత్తములు

బ్రహ్మగుప్త

[క్రీ.శ. 598 – 670]

ఏడవ శతాబ్దమునకు చెందిన భారత గణిత శాస్త్రవేత్త, రాజస్థాన్‌వాసి అయిన బ్రహ్మగుప్తుడు గణితము, ఖగోళ శాస్త్రములపై అనేక పుస్తకములు వ్రాశాడు. ఉజ్జయినిలోని ఖగోళ పరిశోధనా కేంద్రమునకు అధిపతిగా వ్యవహరించాడు. ప్రసిద్ధిచెందిన "బ్రహ్మపుట సిద్ధాంతము" అను గ్రంథమును వ్రాశాడు. $\pi \simeq \sqrt{10}$ మరియు "n" సహజ సంఖ్యల వర్గముల మొత్తము $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ అను విలువలను కనిపెట్టెను.

4.1 పరిచయము

పూర్వ కాలములో ఈజిప్టులు తమ రేఖా గణితము యొక్క ప్రయోగాత్మక నైపుణ్యమును వారి పథక నిర్మాణములలోను, పరిమాణములను కొలుచుటలోను ఉపయోగించియున్నారు. వారి నాగరికతలో కూడా ప్రయోగాత్మక రేఖా గణితమును ఉపయోగించియున్నారు. అనేక గొప్ప నిర్మాణములను వారు కొలబద్దలు మరియు వృత్త లేఖిని సహాయముతో నిర్మించినారు.

గణిత శాస్త్రము యొక్క తొలి శాఖలలో ఒకటి రేఖా గణితము. రేఖా గణితము, సిద్ధాంత రేఖా గణితము మరియు ప్రయోగత్మక రేఖా గణితముగా వర్గీకరింపబడెను. రేఖా గణిత సిద్ధాంతములను చూచాయగా గీయబడిన పటము యొక్క నిర్మాణ క్రమముతో సిద్ధాంత రేఖా గణితములో వివరించబడును. రేఖా గణిత ఉపకరణములను ఉపయోగించి సరియైన పటమును గీచి వాటి నిర్మాణ క్రమముతో ప్రయోగాత్మక రేఖా గణితము వివరించబడును.

కొన్ని సమతల రేఖా చిత్రముల నిర్మాణము, ధర్మములు మరియు వాటి వైశాల్యమును కనుగొను సూత్రములను క్రింది తరగతులలో నేర్చుకొని యున్నాము. ఈ భాగమునందు ఏక కేంద్రవృత్తములను నిర్మించుట నేర్చుకొందాము.

4.2 ఏక కేంద్ర వృత్తములు

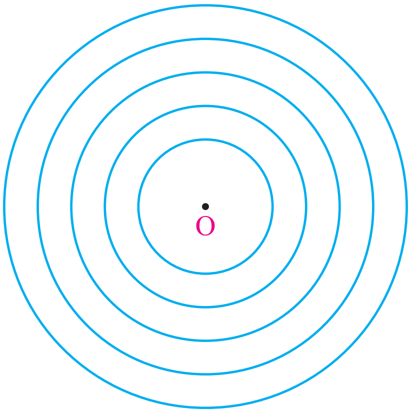
ఈ భాగమునందు, ఏక కేంద్ర వృత్తమును గూర్చి నేర్చుకొనెదము. వృత్తమును గూర్చి ముందే నేర్చుకొనియున్నాము.

4.2.1. ప్రేరేపించుట

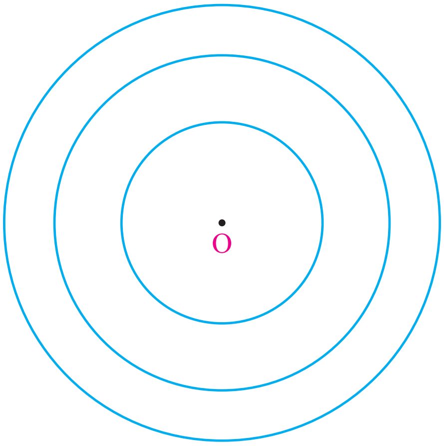
నిశ్చలమైన నీటిపై ఒక రాయిని వేసినప్పుడు, చిన్న చిన్న వృత్తాకార అలలు ఏర్పడుటను గమనించవచ్చును. ఈ వృత్తముల కేంద్రము ఎచ్చట ఉండును? రాయి ఎక్కడ వేశామో అదే అగునా? అవును. అదే అగును.

ఏక కేంద్రీయ వృత్తములు

ఒక సమతలమునందు ఒకే కేంద్రముతో వేర్వేరు వ్యాసార్థములతో గీయబడిన వృత్తములను ఏక కేంద్రీయ వృత్తములందురు పటములు 4. 1 మరియు 4. 2 చూడుము.

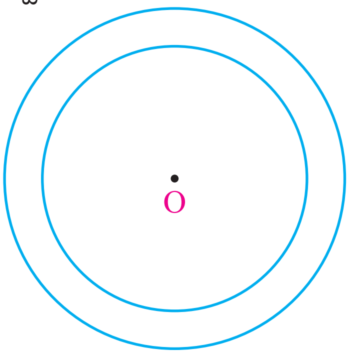


పటము *4.1*

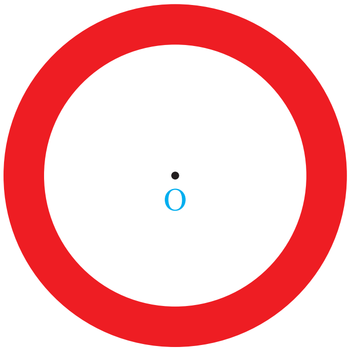


పటము *4.2*

క్రింద ఇవ్వబడిన రెండు పటములను పరిశీలించుము.



పటము *4.3*



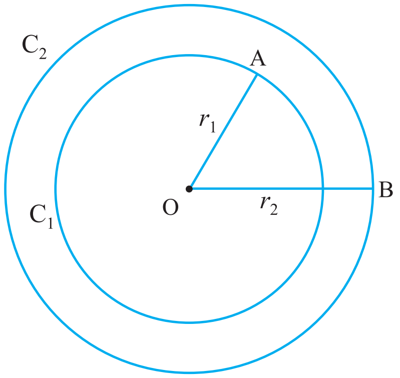
పటము *4.4*

పటము 4. 3 నందు రెండు ఏకకేంద్రీయ వృత్తములు ఉన్నవి.

పటము 4. 4 నందు రెండు ఏక కేంద్రీయ వృత్తముల మధ్యగల వైశాల్యముల రంగుతో ఛాయ చేయబడెను. రంగుతో ఛాయ చేయబడిన వైశాల్యమును వృత్తవలయము అందురు.

వృత్తవలయము – వివరణ

పటము 4.5 నందు C_1 మరియు C_2 అనునవి O ను కేంద్రముగా మరియు r_1, r_2 లను భిన్న వ్యాసార్థములను కలిగియున్న వృత్తములగును. C_1 మరియు C_2 అనునవి ఏక కేంద్రీయ వృత్తములగును. ఆ రెండు వృత్తముల మధ్యగల వైశాల్యమును వృత్తవలయము అందురు.



పటము 4.5

వృత్త వలయము యొక్క వెడల్పు = OB – OA = $r_2 - r_1$

(ఇచ్చుట $r_2 > r_1$)

4.2.2. ఇవ్వబడిన వ్యాసార్థములతో ఏక కేంద్రీయ వృత్త నిర్మాణము.

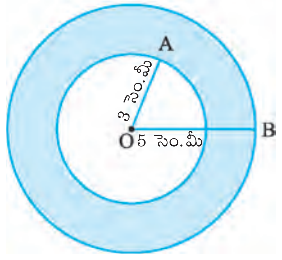
ఉదాహరణ 4.1

3 సెం.మీ. మరియు 5 సెం.మీ. వ్యాసార్థములతో ఏక కేంద్రీయ వృత్తములను నిర్మించి పిదప వృత్తవలయమును ఛాయ వేయుము. వృత్తవలయ వెడల్పును కనుగొనుము.

సాధన

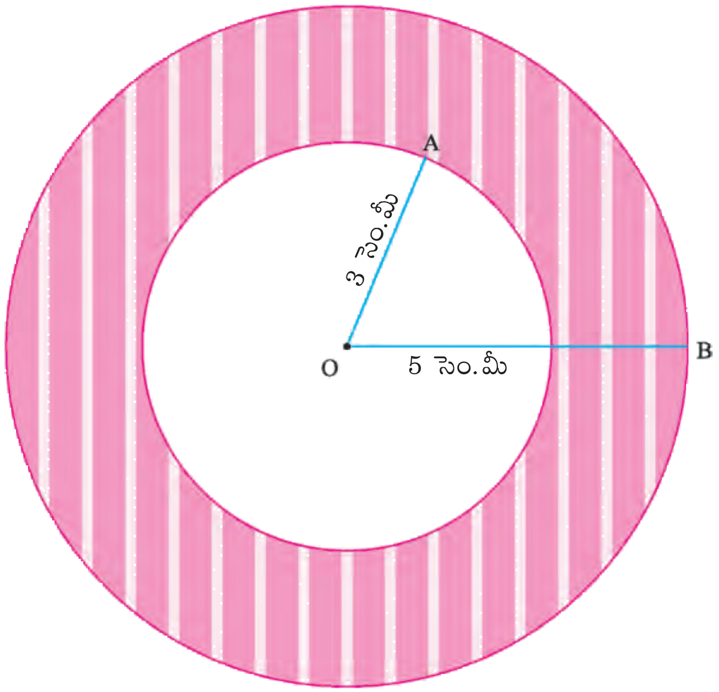
ఇవ్వబడినది: వ్యాసార్థములు 3సెం.మీ. మరియు 5 సెం.మీ.

చిత్తు పటము



పటము 4.6

ఏక కేంద్రీయ వృత్తముల నిర్మాణము



పటము 4.7

నిర్మాణ క్రమము

దశ 1 : చిత్తు పటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించుము.

దశ 2 : ఏదైన ఒక బిందువు O ను తీసికొని వృత్త కేంద్రముగా గుర్తించుము.

దశ 3 : O కేంద్రముగా తీసుకొని OA = 3 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో వృత్తమును గీయుము.

దశ 4 : O కేంద్రముగా తీసుకొని OB = 5 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో వృత్తమును గీయుము.

ఈ విధముగా ఏక కేంద్రీయ వృత్తములు C_1 మరియు C_2 గీయబడినవి.

వృత్త వలయము యొక్క వెడల్పు = OB – OA

= 5 – 3

= 2 సెం.మీ.

అభ్యాసము 4.1

1. క్రింద ఇవ్వబడిన వ్యాసార్థముల కొలతలకు ఏక కేంద్రీయ వృత్తములను గీయుము. వృత్త వలయము యొక్క వెడల్పును కనుగొనుము.

(i) 4 సెం.మీ మరియు 6 సెం.మీ.

(ii) 3.5 సెం.మీ మరియు 5.5 సెం.మీ.

(iii) 4.2 సెం.మీ మరియు 6.8 సెం.మీ.

(iv) 5 సెం.మీ మరియు 6.5 సెం.మీ.

(v) 6.2 సెం.మీ మరియు 8.1 సెం.మీ.

(vi) 5.3 సెం.మీ మరియు 7 సెం.మీ.

పాఠ్యభాగ సారాంశము

- ఒక సమతలమునందు ఒకే కేంద్రముపై వేరువేరు వ్యాసార్థములతో గీయబడిన వృత్తములను ఏక కేంద్రీయ వృత్తములు అందురు.
- రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తముల మధ్యగల వైశాల్యమును వృత్తవలయము అందురు.
- వృత్తవలయము వెడల్పు = $r_2 - r_1$ $(r_2 > r_1)$

జవాబులు

అధ్యాయము 1

అభ్యాసము 1.1

1. i) D ii) C iii) B iv) B v) A
2. i) 200 లీటర్లు ii) 20,000 కి.మీ. iii) ₹1,550 iv)50 నిమిషములు v) ₹ 50
3. ₹40,000 4. 3750
5. i) 90% ii) 94% iii) 98% iv) 88% v) 95% vi) 93%
6. 5 7. ₹ 9,000 8. ₹ 1,020 9. 180, 1320 10. 6 కి.గ్రా.
11. i) 26,100 ii) 5,220 12. 25%, ₹ 8,600
13. ఆమె గణితములో 20% అధికముగా సాధించెను. 14. ₹ 6,250 15. 20%

అభ్యాసము 1.2

1. i) ₹ 7490 ii) ₹ 500 iii) ₹ 9,000 iv) ₹ 2,246 v) ₹ 6,57,500
2. i) లాభము ₹64, లాభ శాతము = 20% ii)లాభము ₹200, లాభ శాతము = 8%
   iii) నష్టము ₹19, నష్ట శాతము = 5% iv)అమ్మిన వెల = ₹38, నష్టశాతము = 5%
   v) అమ్మిన వెల = ₹5,500, లాభ శాతము = 10%.
3. i) ₹787.50 ii) ₹1,260 iii) ₹2,835
4. ₹1,200 5. $33\frac{1}{3}$% 6. 25% 7.₹22,80,000 8. ₹34,40,000
9. $11\frac{1}{9}$% 10. మొత్తం పైన లాభము ₹113.68

అభ్యాసము 1.3

1. i) A ii) D iii) B iv) B v) C 2. ₹ 360
3. ₹ 8,000 4. ₹ 49,220 5. ₹18,433.40 6. ₹ 4,950 7. ₹ 13,000
8. 33% 9. ₹9,832.50 10. 20% 11. ఒక చొక్కా ధర ₹1,310.40
12. i) తగ్గింపు మొత్తము = ₹460; అమ్మకపు ధర = ₹1,840
    ii) తగ్గింపు మొత్తము = ₹35; తగ్గింపు శాతం = 25%
    iii) గుర్తింపు ధర = ₹20,000; తగ్గింపు మొత్తము = ₹4,000
    iv) తగ్గింపు శాతం = 5%; తగ్గింపు మొత్తము = ₹725
    v) తగ్గింపు మొత్తము = ₹403; అమ్మకపు ధర = ₹2,821

అభ్యాసము 1.4

1. i) A = ₹1,157.63, వడ్డీ = ₹157.63

   ii) A = ₹4,840, వడ్డీ = ₹840

   iii) A = ₹22,869, వడ్డీ = ₹4,869

2. ₹2,125

3. i) ₹88,200   ii) ₹4,410

4. మొత్తము = ₹27,783, కొన్నవెల = ₹3,783   5. ₹9,826

6. కొన్నవెల = ₹1,951   7. ₹20,000   8. ₹36,659.70

9. i) ₹92,400   ii) ₹92,610, తేడా = ₹210

10. ₹6   11. ₹25   12. ₹2,000

13. సుజ చెల్లించిన అధిక వడ్డీ ₹924.10   14. అసలు = ₹1,25,000

15. 2 సం॥లు   16. 10%   17. 10%

అభ్యాసము 1.5

1. 2,205   2. ₹2,55,150   3. ₹46,000

4. 5,31,616.25   5. 5,415   6. ₹20,000

7. 10,000

అభ్యాసము 1.6

1. ₹27,000   2. ₹86,250   3. ₹10,800
4. ₹200   5. 9%   6. ₹1,250
7. ₹19,404   8. నెలసరి వాయిదా = ₹875, మొత్తము = ₹8,750

అభ్యాసము 1.7

1. 24 రోజులు   2. 10; 1250   3. 36 మంది   4. 15 మంది పనివాళ్ళు

5. 24 రోజులు   6. ₹192

అభ్యాసము 1.8

1. 3 రోజులు   2. 30 రోజులు   3. 2 రోజులు   4. 12 నిమిషాలు

5. A = ₹360, B = ₹240   6. 6 రోజులు   7. 1 గంట

అధ్యాయము 2

అభ్యాసము 2.1

1.i)D ii) C iii) A iv) B

2. అతి తక్కువ పొడవు గల భుజము BC. 3.QR = 26 సెం.మీ

4. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము ఏర్పడును.

5.QR = 5 సెం.మీ 6. $x = 9$ మీ. 7. ఎత్తు, $x = 5\sqrt{3}$ సెం.మీ

8. అవును 9. $2\sqrt{51}$ అడుగులు

అభ్యాసము 2.2

1. i) D ii) D iii) C 2. వ్యాసార్థము = 5 సెం.మీ.

అధ్యాయము 3

అభ్యాసము 3.3

I. అంకమధ్యముపై సమస్యలు

1. 9 2. $x = 25$ 3. 77.15 4. 161 సెం. మీ 5. 45

6. 15.45 7. 82.1 8. 65.33 9. ₹33 10. ₹21

II. మధ్యగతముపై సమస్యలు

1. i) 81 ii) 45.5 iii) 70 iv) 51

2. 3 3. 153 4. 132 5. ₹10,000

III. బాహుళకముపై సమస్యలు

1. i) 74 ii) బాహుళకము లేదు iii) 25 మరియు 36 iv) 20

2. 15 3. 38.7°C 4. 40

IV. 1. అంకమధ్యము 28; మధ్యగతము 25; బాహుళకము 30

2. అంకమధ్యము 25; మధ్యగతము 25; బాహుళకము 23

3. అంకమధ్యము 53.05; మధ్యగతము 53; బాహుళకము 53