Government of Tamilnadu

ಎಂಟನೆಯ ತರಗತಿ

KANNADA MEDIUM

STANDARD EIGHT

ಅವಧಿ III Term III

ಭಾಗ 2 Volume 2

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ MATHEMATICS

ವಿಜ್ಞಾನ SCIENCE

ಸಮಾಜ ವಿಜ್ಞಾನ SOCIAL SCIENCE

Untouchability is Inhuman and a Crime

Department of School Education

© **Government of Tamilnadu**

First Edition - 2012

(Published under Uniform System of School Education Scheme in Trimester Pattern)

Textbook Preparation and Compilation

State Council of Educational Research and Training

College Road, Chennai - 600 006.

Wrapper and Book Design

T.Raghu, M.Vijayasarathy.

Textbook Printing

Tamilnadu Textbook Corporation

College Road, Chennai - 600 006.

This book has been printed on 80 G.S.M.Maplitho paper

Price: Rs.

Printed by offset at :

Textbook available at

www.textbooksonline.tn.nic.in

ಪರಿವಿಡಿ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ - (1-96)

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಅಧ್ಯಾಯದ ಹೆಸರು	ಪುಟ ಸಂ.
1.	ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ	2
2.	ರೇಖಾಗಣಿತ	47
3.	ದತ್ತಾಂಶ ನಿರ್ವಹಣೆ	59
4.	ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ	90
	ಉತ್ತರಗಳು	94

ವಿಜ್ಞಾನ - (97-165)

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಅಧ್ಯಾಯದ ಹೆಸರು	ಪುಟ ಸಂ.
1.	ಜೀವಿಗಳ ವೈವಿಧ್ಯತೆ	100
2.	ಸಸ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಸಂರಕ್ಷಣೆ	118
3.	ಕಲ್ಲಿದ್ದಲು ಮತ್ತು ಪೆಟ್ರೋಲಿಯಂ	134
4.	ಬೆಳಕು ಮತ್ತು ಶಬ್ದ	148

ಸಮಾಜ ವಿಜ್ಞಾನ - (166-232)

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಅಧ್ಯಾಯದ ಹೆಸರು	ಪುಟ ಸಂ.
	ಇತಿಹಾಸ	
1.	ಲಾರ್ಡ್‌ವಿಲಿಯಂ ಬೆಂಟಿಂಕ್ (ಕ್ರಿ.ಶ. 1828 – ಕ್ರಿ.ಶ. 1835)	167
2.	ಲಾರ್ಡ್‌ಡಾಲ್‌ಹೌಸಿ (ಕ್ರಿ.ಶ. 1848 – ಕ್ರಿ.ಶ. 1855)	171
3.	ಮಹಾಕ್ರಾಂತಿ – ಕ್ರಿ.ಶ.1857	175
4.	ತಮಿಳುನಾಡಿನಲ್ಲಿ ನಾಯಕರುಗಳ ಆಳ್ವಿಕೆ	181
5.	ತಂಜಾವೂರಿನಲ್ಲಿ ಮರಾಠರ ಆಳ್ವಿಕೆ (ಕ್ರಿ.ಶ. 1676 – ಕ್ರಿ.ಶ. 1856)	188
6.	ವೆಲ್ಲೂರು ಕ್ರಾಂತಿ – ಕ್ರಿ.ಶ. 1806	194
	ಭೂಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರ	
1.	ತೃತೀಯ ಚಟುವಟಿಕೆ I ವ್ಯಾಪಾರ	198
2.	ತೃತೀಯ ಚಟುವಟಿಕೆ II ಸಾರಿಗೆ ಮತ್ತು ಸುದ್ದಿ ಸಂಪರ್ಕಗಳು	203
3.	ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಮತ್ತು ಹಂಚಿಕೆ	209
4.	ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳು	215
	ಪೌರನೀತಿ	
1.	ರಸ್ತೆ ಸುರಕ್ಷತೆ – ವಿಧಿ ನಿಯಮಗಳು	220
	ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ	
1.	ಹಣ, ಉಳಿತಾಯ ಮತ್ತು ಹೂಡಿಕೆ	228

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ

MATHEMATICS

KANNADA MEDIUM

ಎಂಟನೆಯ ತರಗತಿ

STANDARD EIGHT

ಅವಧಿ III

Term III

Textbook Team

TRANSLATORS

Thiru. S. JAGADEESH
(Asst. Headmaster)
P.G. Asst. (Mathematics)
Govt. Hr. Sec. School
Panakahalli - 638 461
Erode District.

Thiru. K. MADAIAH
B.T. Asst. (Mathematics)
Govt. High School
Chikkahalli - 638 461
Erode District.

Thiru.S. SHASHIKANTH
B.T. Asst. (Mathematics)
Govt. Hr. Sec. School
Thalavadi - 638 461
Erode District.

Laser Typeset: Krupa & Asha *Layout: T.Raghu*

1 ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ

1.1 ಪೀಠಿಕೆ

1.2 ಪುನರಾವರ್ತನೆ - ಲಾಭ, ನಷ್ಟ ಮತ್ತು ಸರಳಬಡ್ಡಿ

1.3 ಶೇಕಡ, ಲಾಭ ಮತ್ತು ನಷ್ಟ, ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಖರ್ಚುಗಳು, ರಿಯಾಯಿತಿ ಮತ್ತು ತೆರಿಗೆಗಳ ಅನ್ವಯ

1.4 ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (C.I.)

1.5 ಸರಳಬಡ್ಡಿ (S.I.) ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (C.I.) ಗಳಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

1.6 ಸಂಚಿತ ಠೇವಣಿ (Fixed Deposit) ಮತ್ತು ಆವರ್ತಕ ಠೇವಣಿಗಳು (Recurring Deposits)

1.7 ಸಂಯುಕ್ತ ಅನುಪಾತ

1.8 ಕಾಲ ಮತ್ತು ಕೆಲಸ

ರೋಜರ್ ಬೇಕನ್

[1214-1294]

ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ವಿಧಾನಗಳ ಮೇಲೆ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಪಡೆದ ಇವರು ಅದ್ಭುತ ಶಿಕ್ಷಕ, ಆಂಗ್ಲ ತತ್ವಜ್ಞಾನಿ. ಇವರು ಆಕ್ಸ್‌ಫರ್ಡ್‌ನಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಕರಾಗಿದ್ದರು. "ಗಣಿತದ ನಿರ್ಲಕ್ಷ್ಯವು ಎಲ್ಲಾ ಜ್ಞಾನಕ್ಕೂ ತೊಡಕನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ" ಎಂದು ಅವರು ಹೇಳಿದ್ದಾರೆ. "ಸಾಮಾನ್ಯ ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ ಗಣಿತದ ಉಪಯುಕ್ತತೆಯು ಬ್ಯಾಂಕುಗಳು, ಮಾರಾಟ ಮಳಿಗೆಗಳು, ರೈಲು ನಿಲ್ದಾಣ, ಅಂಚೆ ಕಛೇರಿ, ವಿಮಾ ನಿಗಮಗಳು, ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಭೇಟಿ ಮಾಡಿದಾಗ ಅಥವಾ ರವಾನಿಸುವ ವ್ಯಾಪಾರವನ್ನು ವ್ಯವಹರಿಸುವಾಗ, ರಫ್ತು ಮತ್ತು ಆಮದು ಹಾಗೂ ವಾಣಿಜ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ" ಎಂದು ಅವರು ಹೇಳಿದ್ದಾರೆ.

1.1 ಪೀಠಿಕೆ (Introduction)

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ತನ್ನ ಜೀವನದುದ್ದಕ್ಕೂ ಗೆಲುವಿನ ತುತ್ತ ತುದಿಯನ್ನು ಮುಟ್ಟಲು ಹವಣಿಸುತ್ತಿರುತ್ತಾನೆ. ಇದನ್ನು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲು, ಅವನು ಅಧಿಕ ಸಂಪತ್ತು ಮತ್ತು ಪ್ರಖ್ಯಾತಿ ಗಳಿಸಲು ಕಾರ್ಯಪ್ರವೃತ್ತನಾಗುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಅವನ ಕಾಲವನ್ನು (ಸಮಯವನ್ನು) ಮೀಸಲಾಗಿಡುತ್ತಾನೆ.

ಶಿಲಾ ಯುಗದಿಂದ ಇಂದಿನ ಆಧುನಿಕ ಪ್ರಪಂಚದವರೆಗೆ, ವಸ್ತುಗಳ ವಿನಿಮಯದಿಂದ ಹಣದ ಚಲಾವಣೆಯವರೆಗೆ, ಅವನ ಉತ್ಪಾದನೆ ಮತ್ತು ಜಮೀನಿಗೆ, ಮಾನವನು ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಸಮಾನುಪಾತಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತಿರುತ್ತಾನೆ. ಸೌಂದರ್ಯಕ್ಕೆ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ ತಾಜ್‌ಮಹಲ್ ಮತ್ತು ತಂಜಾವೂರಿನ ಬೃಹದೇಶ್ವರ ದೇವಸ್ಥಾನಗಳಂತಹ ಸ್ಮಾರಕ ಕಟ್ಟಡಗಳು, ಅವುಗಳನ್ನು ಶ್ರೀಮಂತಿಕೆಗೊಳಿಸಲು ಸರಿಯಾದ ಅನುಪಾತೀಯ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ಪೂರ್ವಜರು ಬಳಸಿರುವುದನ್ನು ಜಗತ್ತಿಗೆ ಸಾರುತ್ತಿವೆ.

ಜಗತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಹಲವಾರು ವಿಚಾರಗಳು ಮಳೆ ಮತ್ತು ಸುಗ್ಗಿಕಾಲ, ಪೋಷಕಾಂಶ ಮತ್ತು ಆರೋಗ್ಯ, ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಖರ್ಚು ಮುಂತಾದವುಗಳಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕಾರಣ ಮತ್ತು ಪರಿಣಾಮ ಸಂಬಂಧಗಳಿಂದ ಬೆಸುಗೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ಸಂಯುಕ್ತ ಅನುಪಾತವು ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತದೆ.

ಉಳಿವಿಗಾಗಿ ನಮ್ಮ ಪ್ರಯತ್ನ ಮತ್ತು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗಾಗಿ ನಮ್ಮ ಬಯಕೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಹಣವನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ ಅಥವಾ ಠೇವಣಿ ಹೂಡುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಗಳ ರೂಪದ ಆದ್ಯತೆಯಾಗಿ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸರ್ಕಾರವು ರಕ್ಷಣೆ, ಆರೋಗ್ಯ, ಶಿಕ್ಷಣ ಮತ್ತು ಇತರೆ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳ ಮೇಲೆ ಜವಾಬ್ದಾರಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲಾ ನಾಗರೀಕರಿಗೆ ಇವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಪೂರೈಸಲು ನಾವು ನಮ್ಮ ಆದಾಯದಿಂದ ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ಹಲವಾರು ರೀತಿಯ ತೆರಿಗೆಗಳನ್ನು ಪಾವತಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯವು ನಮ್ಮ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿರುವ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

1.2 ಪುನರಾವರ್ತನೆ: ಲಾಭ, ನಷ್ಟ ಮತ್ತು ಸರಳಬಡ್ಡಿ (Revision: Profit, Loss and Simple Interest)

ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಲಾಭ, ನಷ್ಟ ಮತ್ತು ಸರಳಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕುರಿತು ಅಧ್ಯಯನ ನಡೆಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸ್ಮರಿಸೋಣ.

ಲಾಭ, ನಷ್ಟ ಮತ್ತು ಸರಳಬಡ್ಡಿಗಳ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು

(i) ಲಾಭ ಅಥವಾ ಆದಾಯ = ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ – ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ

(ii) ನಷ್ಟ = ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ – ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ

(iii) ಲಾಭ % = $\frac{\text{ಲಾಭ}}{\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ}} \times 100.$

(iv) ನಷ್ಟ % = $\frac{\text{ನಷ್ಟ}}{\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ}} \times 100$

(v) ಸರಳಬಡ್ಡಿ (I) = $\frac{\text{ಅಸಲು} \times \text{ಕಾಲ} \times \text{ದರ}}{100} = \frac{Pnr}{100}$

(vi) ಮೊತ್ತ = ಅಸಲು + ಬಡ್ಡಿ

1.3 ಶೇಕಡ, ಲಾಭ ಮತ್ತು ನಷ್ಟ, ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಖರ್ಚುಗಳು, ರಿಯಾಯಿತಿ ಹಾಗೂ ತೆರಿಗೆಗಳ ಅನ್ವಯ

1.3.1 ಶೇಕಡದ ಅನ್ವಯ (Application of Percentage)

ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಶೇಕಡಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಅಧ್ಯಯನ ನಡೆಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸೋಣ.

(i) ಶೇಕಡ ಎರಡು = 2% = $\frac{2}{100}$

(ii) 600 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ನ 8% = $\frac{8}{100} \times 600$ = 48 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ

(ii) 125% = $\frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

ಈಗ, ನಾವು ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಶೇಕಡಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದನ್ನು ಕಲಿಯೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.1

2 ರೂಪಾಯಿ 70 ಪೈಸೆಯಲ್ಲಿ 15 ಪೈಸೆಯ ಶೇಕಡ ಎಷ್ಟು?

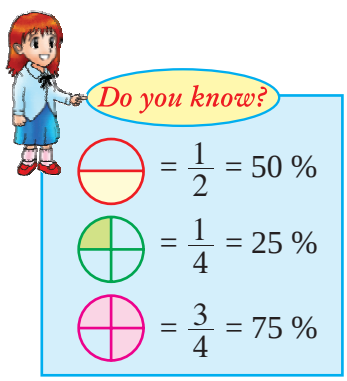
ಪರಿಹಾರ

2 ರೂಪಾಯಿ 70 ಪೈಸೆ = (2 × 100 ಪೈಸೆ + 70 ಪೈಸೆ)

= 200 ಪೈಸೆ + 70 ಪೈಸೆ

= 270 ಪೈಸೆ

ಬೇಕಾದ ಶೇಕಡ = $\frac{15}{270} \times 100 = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9}\%$.



ಉದಾಹರಣೆ 1.2

₹ 1080 ಎಂಬುದು ಒಂದು ಮೊತ್ತದ 12% ಆದರೆ, ಆ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಮೊತ್ತವು ₹ x ಆಗಿರಲಿ.

ದತ್ತ : ಮೊತ್ತದ 12% = ₹ 1080

$$\frac{12}{100} \times x = 1080$$

$$x = \frac{1080 \times 100}{12} = ₹\ 9000$$

$\therefore$ ಮೊತ್ತ = ₹ 9000.

ಉದಾಹರಣೆ 1.3

25 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 72% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಿಪುಣರು. ಎಷ್ಟು ಜನ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಿಪುಣರಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ?

ಪರಿಹಾರ

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಿಪುಣರಾಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಶೇಕಡ = 72%

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಿಪುಣರಾಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 25 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ 72%

$= \frac{72}{100} \times 25 = 18$ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಿಪುಣರಾಗಿರದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $25 - 18 = 7$.

ಉದಾಹರಣೆ 1.4

240 ಕ್ಕೆ 15% ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

240 ರ 15% $= \frac{15}{100} \times 240 = 36$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ $= 240 - 36 = 204$.

ಉದಾಹರಣೆ 1.5

ಒಂದು ಮನೆಯ ಬೆಲೆಯು ಹದಿನೈದು ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಗಳಿಂದ ಹನ್ನೆರಡು ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ ಇಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಇಳಿಕೆಯಾದ ಶೇಕಡವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಮೂಲ ಬೆಲೆ = ₹ 15,00,000

ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಆದ ಬದಲಾವಣೆ = ₹ 12,00,000

ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಆದ ಇಳಿಕೆ = 15,00,000 – 12,00,000 = 3,00,000

$\therefore$ ಇಳಿಕೆಯ ಶೇಕಡ $= \frac{300000}{1500000} \times 100 = 20\%$

ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ

$$\text{ಏರಿಕೆಯ ಶೇಕಡ} = \frac{\text{ಮೊತ್ತದಲ್ಲಾದ ಏರಿಕೆ}}{\text{ಮೂಲ ಮೊತ್ತ}} \times 100$$

$$\text{ಇಳಿಕೆಯ ಶೇಕಡ} = \frac{\text{ಮೊತ್ತದಲ್ಲಾದ ಇಳಿಕೆ}}{\text{ಮೂಲ ಮೊತ್ತ}} \times 100$$

Try these

ಶರತ್ ಮತ್ತು ಭರತ್‌ರ ನಡುವೆ 15 ಸಿಹಿ ತಿನಿಸುಗಳನ್ನು ಹಂಚಲಾಗಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಅವರು ಕ್ರಮವಾಗಿ 20% ಮತ್ತು 80% ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಪಡೆದ ಸಿಹಿ ತಿನಿಸಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

Activity

ನಮ್ಮ ಅಜ್ಜಿಯು ಅವಳ ಬಾಲ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗ್ರಾಂ ಚಿನ್ನದ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಎಂದು ಹೇಳಿದಳು. ಚಿನ್ನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ವಾರ್ತಾ ಪತ್ರಿಕೆಯನ್ನು ಓದಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಮೊದಲನೇ ದಿನದಂದು ಅದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಏರಿಕೆಯ ಶೇಕಡವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) 25 ಹಣ್ಣುಗಳಿರುವ ಒಂದು ಬುಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 5 ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳಿವೆ. ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳ ಶೇಕಡಾಂಶವು ___

(A) 5% (B) 25% (C) 10% (D) 20%

(ii) $\frac{2}{25}$ = _____ %.

(A) 25 (B) 4 (C) 8 (D) 15

(iii) ಒಂದು ಜಾಡಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಸ್ಕತ್ತುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯ 15% ಭಾಗವು 30 ಆಗಿದೆ. ಬಿಸ್ಕತ್ತುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯು _____.

(A) 100 (B) 200 (C) 150 (D) 300

(iv) ಕಳೆದ ವರ್ಷ ಒಂದು ಸ್ಕೂಟರಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 34,000 ಆಗಿದೆ. ಅದು ಈ ವರ್ಷ 25% ಏರಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಆಗ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಾದ ಏರಿಕೆಯು _____.

(A) ₹ 6,500 (B) ₹ 8,500 (C) ₹ 8,000 (D) ₹ 7,000

(v) ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯ ಅವನ ಒಟ್ಟು ವೇತನ ₹ 20,000 ದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ₹ 3,000 ವನ್ನು ಉಳಿಸುತ್ತಾನೆ. ಅವನ ಉಳಿತಾಯದ ಶೇಕಡಾಂಶವು _____ .

(A) 15% (B) 5% (C) 10% (D) 20%

2. (i) ಎಣ್ಣೆಯ ಒಟ್ಟು ಪರಿಮಾಣದ 20% ಭಾಗವು 40 ಲೀಟರುಗಳಾಗಿದೆ. ಎಣ್ಣೆಯ ಒಟ್ಟು ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಲೀಟರುಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) ಪ್ರಯಾಣದ 25% ಭಾಗವು 5,000 ಕಿ.ಮೀ. ನ್ನು ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರಯಾಣದ ಒಟ್ಟು ದೂರವೆಷ್ಟು?

(iii) ಒಂದು ಮೊತ್ತದ 3.5% ಭಾಗವು ₹ 54.25 ಆಗಿದೆ. ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iv) ಒಟ್ಟು ಸಮಯದ 60% ಭಾಗವು 30 ನಿಮಿಷಗಳಾಗಿದೆ. ಒಟ್ಟು ಸಮಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(v) ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮಾರಾಟದಲ್ಲಿ 4% ಮಾರಾಟದ ತೆರಿಗೆಯು ₹ 2 ಆಗಿದೆ. ವಸ್ತುವಿನ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯೇನು?

3. ಮೀನ ಅವಳ ವೇತನದಲ್ಲಿ ₹ 2000 ವನ್ನು ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಬಳಸುತ್ತಾಳೆ. ಅದು ಅವಳ ವೇತನದಲ್ಲಿ 5% ಆಗಿದೆ. ಅವಳ ವೇತನವೆಷ್ಟು?

4. ಒಟ್ಟು ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಳೆತ 25% ಭಾಗವು 1,250 ಹಣ್ಣುಗಳಾಗಿದೆ. ಜಾಡಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶುದ್ಧ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಹನ್ನೆರಡನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ರಾಣಿಯು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಶೇಕಡದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ವಿಷಯಗಳು	ಗರಿಷ್ಠ ಅಂಕಗಳು	ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು	ಅಂಕಗಳ ಶೇಕಡ (100 ಕ್ಕೆ)
(i) ಇಂಗ್ಲಿಷ್	200	180	
(ii) ಕನ್ನಡ	200	188	
(iii) ಗಣಿತ	200	195	
(iv) ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ	150	132	
(v) ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ	150	142	
(vi) ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ	150	140	

6. ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ತಂಡವು ಮತ್ತೊಂದು ಶಾಲೆಯ ವಿರುದ್ಧ 20 ಪಂದ್ಯಗಳನ್ನು ಆಡಿದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆ ಶಾಲೆಯು 25% ಪಂದ್ಯಗಳನ್ನು ಗೆದ್ದಿರುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೆ ಶಾಲೆಯು ಎಷ್ಟು ಪಂದ್ಯಗಳನ್ನು ಗೆದ್ದಿದೆ?

7. ರಾಮನು ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ₹ 10,000 ವನ್ನು ಠೇವಣಿ ಹೂಡಿದ್ದು, ಅದು ವರ್ಷಕ್ಕೆ 18% ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. 5 ವರ್ಷಗಳ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಅವನು ಪಡೆಯುವ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಂದು ಗೊಂಬೆಯ ನಮೂದಿಸಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 1,200 ಆಗಿದೆ. ಅಂಗಡಿಯವನು 15% ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಗೊಂಬೆಯ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆ ಏನು?

9. ಒಂದು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿನ ಸಂದರ್ಶನದಲ್ಲಿ 1,500 ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಸಂದರ್ಶಿಸಲಾಯಿತು. ಅವರಲ್ಲಿ 12% ಆಯ್ಕೆಯಾದರೆ, ಎಷ್ಟು ಜನ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳು ಆಯ್ಕೆಯಾದರು? ಹಾಗೂ ಆಯ್ಕೆಯಾಗದ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಲೋಹವು 30% ತಾಮ್ರವನ್ನು ಮತ್ತು 40% ಸತುವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಹಾಗೂ ಉಳಿದ ಭಾಗವು ನಿಕ್ಕಲ್ ಆಗಿದೆ. 20 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ಮಿಶ್ರ ಲೋಹದಲ್ಲಿರುವ ನಿಕ್ಕಲ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಸೋಮ ಮತ್ತು ಭೀಮ ಇಬ್ಬರು ಅವರ ಗ್ರಾಮದಿಂದ ಪಂಚಾಯತಿ ಚುನಾವಣೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಧಿಸುತ್ತಾರೆ. ಸೋಮನು 11,484 ಮತಗಳನ್ನು ಅಂದರೆ, ಒಟ್ಟು ಮತಗಳಲ್ಲಿ 44% ಅನ್ನು ಗಳಿಸುತ್ತಾನೆ. ಭೀಮನು 36% ಮತಗಳನ್ನು ಗಳಿಸುತ್ತಾನೆ. (i) ಗ್ರಾಮದಲ್ಲಿ ಚಲಾವಣೆಯಾದ ಮತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತು (ii) ಇಬ್ಬರು ಸ್ಪರ್ಧಿಗಳಿಗೂ ಮತವನ್ನು ನೀಡದೆ ಇರುವ ಮತದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಅವನ ಆದಾಯದಲ್ಲಿ 40% ನ್ನು ಆಹಾರಕ್ಕೆ, 15% ನ್ನು ಬಟ್ಟೆಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು 20%ನ್ನು ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆಗೆ ಖರ್ಚು ಮಾಡುತ್ತಾನೆ ಹಾಗೂ ಉಳಿಕೆಯನ್ನು ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಅವನು ಶೇಕಡ ಎಷ್ಟನ್ನು ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ? ಅವನ ಆದಾಯವು ₹ 34,400 ಆದರೆ, ಅವನ ಉಳಿತಾಯದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ರಮ್ಯಾಳು ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ 50 ಅಂಕಗಳಿಗೆ 35 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ 30 ಅಂಕಗಳಿಗೆ 27 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದಳು. ಯಾವ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಅಂಕಗಳಿಂದ ಅವಳು ಉತ್ತಮ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾಳೆ?

14. ಒಬ್ಬ ಕೆಲಸಗಾರನು ₹ 11,250 ನ್ನು ಇನಾಮಾಗಿ ಪಡೆದನು. ಇದು ಅವನ ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನದಲ್ಲಿ 15% ಆಗಿದೆ. ಅವನ ಮಾಸಿಕ ವೇತನವೇನು?

15. ಒಂದು ಉಡುಪಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 2,100 ರಿಂದ ₹ 2,520 ಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಳವಾಗಿದೆ. ಹೆಚ್ಚಳದ ಶೇಕಡವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

Try these

1. 40% = 100% – _____ %
2. ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 25% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶಾಲೆಗೆ ನಡಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತಾರೆ, 65% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಬೈಸಿಕಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಶೇಕಡ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶಾಲೆಯ ವಾಹನದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತಾರೆ. ಶಾಲಾ ವಾಹನದಲ್ಲಿ ಬರುವವರ ಶೇಕಡ ಎಷ್ಟು?
3. ಒಂದು ನಿಗದಿತ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ, 30% ರಷ್ಟು ಹಿಂದಿಯನ್ನು, 50% ರಷ್ಟು ಕನ್ನಡವನ್ನು ಮತ್ತು ಉಳಿದವರು ಫ್ರೆಂಚನ್ನು ದ್ವಿತೀಯ ಭಾಷೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ದ್ವಿತೀಯ ಭಾಷೆಯಾಗಿ ಫ್ರೆಂಚನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವವರ ಶೇಕಡ ಎಷ್ಟು?
4. ಒಂದು ನಗರದಲ್ಲಿ, 30% ಸ್ತ್ರೀಯರು, 40% ಪುರುಷರು ಮತ್ತು ಉಳಿದವರು ಮಕ್ಕಳು ಇರುತ್ತಾರೆ. ಮಕ್ಕಳುಗಳ ಶೇಕಡ ಎಷ್ಟು?

Activity

ಕೃಪಾಳು ಇಬ್ಬರು ವಿಭಿನ್ನ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳಾದ ಶಂಕರ ಮತ್ತು ಆದಿತ್ಯ ಇವರಿಂದ ರೇಷ್ಮೆ ಸೀರೆಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಶಂಕರನು 100 ಗ್ರಾಂ ಕಂಚಿನ ದಾರದೊಂದಿಗೆ 200 ಗ್ರಾಂ ಬೆಳ್ಳಿ ದಾರದಿಂದ, ಆದಿತ್ಯನು 200 ಗ್ರಾಂ ಕಂಚಿನ ದಾರದೊಂದಿಗೆ 300 ಗ್ರಾಂ ಬೆಳ್ಳಿ ದಾರದಿಂದ ಸೀರೆಗಳನ್ನು ನೇಯುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ಬೆಳ್ಳಿ ದಾರದ ಶೇಕಡವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ಮತ್ತು ಯಾರು ಉತ್ತಮ ಗುಣಮಟ್ಟವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
(ಸೂಚನೆ: ಬೆಳ್ಳಿ ದಾರವು ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಗುಣಮಟ್ಟವು ಉತ್ತಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.)

1.3.2 ಲಾಭ ಮತ್ತು ನಷ್ಟಗಳ ಅನ್ವಯಗಳು (Applications of Profit and Loss)

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಲಾಭ ಮತ್ತು ನಷ್ಟದ ಅನ್ವಯನಗಳ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿಯೋಣ.

(i) ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಗೆ ಸೂತ್ರದ ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಣ (Illustration of the formula for S.P.)

ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ರಾಜೇಶನು ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ₹ 80 ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಅವನ ಸ್ನೇಹಿತನಿಗೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದನು. ಅವನು 5% ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕಾದರೆ, ಅವನು ಮಾರಬೇಕಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀವು ಹೇಳುವಿರಾ?

ರಾಜೇಶನು ₹ 80 ಕ್ಕೆ ಪೆನ್ನನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು. ಅದು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ. ಅವನು ಮಾರುವಾಗ 5% ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆದನು. ಇದನ್ನು ಕೊಂಡಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗಿದೆ.

$$\therefore \text{ಲಾಭ} = \text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯ } 5\% = \frac{5}{100} \times 80 = ₹\ 4$$

ಅಲ್ಲಿ ಲಾಭವಿರುವುದರಿಂದ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ > ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ + ಲಾಭ

= 80 + 4 = ₹ 84.

ರಾಜೇಶನು ಮಾರಬೇಕಾದ ಬೆಲೆ = ₹ 84

ಇದೇ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂತ್ರದ ವಿಧಾನದಿಂದ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

$$\text{ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ (S.P.)} = \frac{(100 + \text{ಲಾಭ}\%)}{100} \times \text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ}$$

$$= \frac{(100+5)}{100} \times 80 = \frac{105}{100} \times 80 = ₹\ 84.$$

(ii) ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಗೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುವುದು (Illustration of the formula for C.P.)

ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಒಬ್ಬ ಅಂಗಡಿಯವನು ಒಂದು ಕೈಗಡಿಯಾರವನ್ನು ₹ 540 ಕ್ಕೆ ಮಾರಿದರೆ, 5 % ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕೈಗಡಿಯಾರದ ಬೆಲೆಯು ಏನಾಗಿರಬೇಕು?

ಅಂಗಡಿಯವನು ಕೈಗಡಿಯಾರವನ್ನು ಅದರ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ 5 % ಲಾಭಕ್ಕೆ ಮಾರಿದನು. ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದೆ ಇರುವುದರಿಂದ, ಅದನ್ನು ನಾವು ₹ 100 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ 5% ಲಾಭವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ಲಾಭ = 5% ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ

$= \frac{5}{100} \times 100$

= ₹ 5.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ + ಲಾಭ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

= 100 + 5

= ₹ 105.

ಇಲ್ಲಿ , ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 105 ಆದರೆ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿದೆ.

ಕೈಗಡಿಯಾರದ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ₹ 540, ಆದಾಗ ಕೊಂಡಬೆಲೆ $= \frac{540 \times 100}{105}$ = ₹ 514.29

$\therefore$ ಅಂಗಡಿಯವನು ಕೈಗಡಿಯಾರವನ್ನು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ₹ 514.29 ಆಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂತ್ರದ ವಿಧಾನದಿಂದಲೂ ಸಹ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು.

$$\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} = \left(\frac{100}{100 + \text{ಲಾಭ}\%}\right) \times \text{ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ}$$

$$= \frac{100}{100+5} \times 540$$

$$= \frac{100}{105} \times 540$$

= ₹ 514.29.

ಈಗ ನಾವು ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಾರಾಂಶೀಕರಿಸೋಣ.

1. ಅಲ್ಲಿ ಲಾಭವಿದ್ದಾಗ, (i) $\text{C.P.} = \left(\frac{100}{100 + \text{ಲಾಭ}\%}\right) \times \text{S.P.}$	1. ಅಲ್ಲಿ ನಷ್ಟವಿದ್ದಾಗ, (ii) $\text{C.P.} = \left(\frac{100}{100 - \text{ನಷ್ಟ}\%}\right) \times \text{S.P.}$
2. ಅಲ್ಲಿ ಲಾಭವಿದ್ದಾಗ, (i) $\text{S.P.} = \left(\frac{100 + \text{ಲಾಭ}\%}{100}\right) \times \text{C.P.}$	2. ಅಲ್ಲಿ ನಷ್ಟವಿದ್ದಾಗ, (ii) $\text{S.P.} = \left(\frac{100 - \text{ನಷ್ಟ}\%}{100}\right) \times \text{C.P.}$

ಉದಾಹರಣೆ 1.6

ಹರ್ಷನು ಒಂದು ಬಣ್ಣದ ದೂರದರ್ಶನವನ್ನು ₹ 15,200 ಗಳಿಗೆ ಖರೀದಿಸಿದನು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 20% ನಷ್ಟಕ್ಕೆ ಮಾರಿದನು. ದೂರದರ್ಶನದ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ಏನು?

ಪರಿಹಾರ

ರಾಹುಲ್ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದನು.

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಗಾದ ನಷ್ಟ 20%

$= \frac{20}{100} \times 15200$

= ₹ 3040

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ – ನಷ್ಟ

= 15,200 – 3,040

= ₹ 12,160

ಅಥವಾ

ರೋಷನ್ ಸೂತ್ರದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿದನು.

ಕೊಂಡಬೆಲೆ = ₹ 15, 200

ನಷ್ಟ = 20%

$S.P. = \left(\frac{100 - \text{ನಷ್ಟ } \%}{100} \right) \times C.P.$

$= \frac{100 - 20}{100} \times 15200$

$= \frac{80}{100} \times 15200$

= ₹ 12,160

ರಾಹುಲ್ ಮತ್ತು ರೋಷನ್ ಇಬ್ಬರೂ ಒಂದೇ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದು, ದೂರದರ್ಶನದ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 12,160 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.7

ಒಂದು ಸ್ಕೂಟಿಯನ್ನು ₹ 13,600 ಗಳಿಗೆ ಮಾರಲಾಗಿದ್ದು, ಅದು 15% ನಷ್ಟವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಸ್ಕೂಟಿಯ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೇವಿಯು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಳು.

15% ನಷ್ಟ ಎಂದರೆ,

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ₹ 100, ನಷ್ಟ = ₹ 15

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ

(100 – 15) = ₹ 85

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 85 ಆದರೆ, ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ₹ 100

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ₹13,600 ಆದರೆ,

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ $= \frac{100 \times 13600}{85}$

= ₹ 16,000

ಅಥವಾ

ರೇವತಿಯು ಸೂತ್ರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಳು.

ನಷ್ಟ = 15%.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ₹ 13,600

$C.P. = \left(\frac{100}{100 - \text{ನಷ್ಟ } \%} \right) \times S.P.$

$= \frac{100}{100 - 15} \times 13600$

$= \frac{100}{85} \times 13600$

= ₹ 16,000

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ಕೂಟಿಯ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 16,000 ಆಗಿದೆ.

Try these

ವಸ್ತುಗಳು	ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ₹ ಗಳಲ್ಲಿ	ಲಾಭ/ನಷ್ಟ	ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ₹ ಗಳಲ್ಲಿ
ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರ	16,000	9% ಲಾಭ	
ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಅಲೆಯ ಒಲೆ	13,500	12% ನಷ್ಟ	
ಮರದ ಕಪಾಟು		13% ನಷ್ಟ	6,786
ಸೋಫ (ಸುಖಾಸನ)		12½% ಲಾಭ	7,000
ಹವಾನಿಯಂತ್ರಣ ಸಾಧನ	32,400	7% ಲಾಭ	

ಉದಾಹರಣೆ 1.8

11 ಪೆನ್ನುಗಳ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು 10 ಪೆನ್ನುಗಳ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ನಷ್ಟ ಅಥವಾ ಲಾಭದ ಶೇಕಡವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಪ್ರತಿ ಪೆನ್ನಿನ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ₹ x ಆಗಿರಲಿ.

10 ಪೆನ್ನುಗಳ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ₹ $10x$

11 ಪೆನ್ನುಗಳ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ₹ $11x$

ದತ್ತ : 11 ಪೆನ್ನುಗಳ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ = 10 ಪೆನ್ನುಗಳ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ₹ $10x$

ಇಲ್ಲಿ, ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ > ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ

$\therefore$ ಲಾಭ = ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ – ಕೊಂಡಬೆಲೆ

= $11x - 10x$ = ₹ x

$$\text{ಲಾಭ \%} = \frac{\text{ಲಾಭ}}{\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ}} \times 100 = \frac{x}{10x} \times 100 = 10\%.$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.9

ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಎರಡು ಕೈಗಡಿಯಾರಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ₹ 594 ರಂತೆ ಮಾರಿದನು. ಅವನು ಒಂದರಲ್ಲಿ 10% ಲಾಭವನ್ನು ಮತ್ತು ಮತ್ತೊಂದರಲ್ಲಿ 10% ನಷ್ಟವನ್ನು ಹೊಂದಿದನು. ಅವನು ಹೊಂದಿದ ಪೂರ್ಣ ಶೇಕಡಾವಾರು ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತ : ಒಂದನೇ ಕೈಗಡಿಯಾರದ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ₹ 594, ಲಾಭ% = 10%

$$\therefore \text{ಒಂದನೇ ಕೈಗಡಿಯಾರದ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} = \frac{100}{100 + \text{ಲಾಭ\%}} \times \text{S.P.}$$

$$= \frac{100}{(100+10)} \times 594$$

$$= \frac{100}{110} \times 594 = ₹\ 540.$$

ಅದೇ ರೀತಿ ಅವನು 10% ನಷ್ಟವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಎರಡನೇ ಕೈಗಡಿಯಾರದ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು

$$= \frac{100}{100 - \text{ನಷ್ಟ\%}} \times \text{S.P.}$$

$$= \frac{100}{(100-10)} \times 594 = \frac{100}{90} \times 594 = ₹\ 660.$$

ಒಟ್ಟಾರೆ ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು, ಒಟ್ಟು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಎರಡು ಕೈಗಡಿಯಾರಗಳ ಒಟ್ಟು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ = 540 + 660 = ₹ 1,200.

ಎರಡು ಕೈಗಡಿಯಾರಗಳ ಒಟ್ಟು ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = 594 + 594 = ₹ 1,188.

ನಿವ್ವಳ ನಷ್ಟ = 1,200 – 1,188 = ₹ 12.

$$\text{ನಷ್ಟ \%} = \frac{\text{ನಷ್ಟ}}{\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ}} \times 100$$

$$= \frac{12}{1200} \times 100 = 1\%.$$

1.3.3 ಹೆಚ್ಚುವರಿ ವೆಚ್ಚದ ಅನ್ವಯನ (Application of Overhead Expenses)

ಮಾಯಾಳು ಹವಾನಿಯಂತ್ರಣ ಸಾಧನವನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಅವಳ ತಂದೆಯೊಂದಿಗೆ ತೆರಳಿದಳು. ಅವರು ₹ 18,000 ಕ್ಕೆ ಅದನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದರು. ಖರೀದಿಸಿದ ಅಂಗಡಿಯು ಅವರ ಮನೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಿರಲಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವರು ಹವಾನಿಯಂತ್ರಣ ಸಾಧನವನ್ನು ಅವರ ಮನೆಗೆ ಸಾಗಿಸಲು ವಾಹನದ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಸಾಗಣೆಯ ವೆಚ್ಚವು ₹ 500 ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಹವಾನಿಯಂತ್ರಣ ಸಾಧನದ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ಕೇವಲ ₹ 18,000 ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ **ವಾಹನ ವೆಚ್ಚವು** (ಸಾಗಾಣಿಕೆ ವೆಚ್ಚ) ₹ 500 ಸಹ ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು **ಹೆಚ್ಚುವರಿ ವೆಚ್ಚ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಈಗ,

ಹವಾನಿಯಂತ್ರಣ ಸಾಧನದ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ = ನಿಜವಾದ ಬೆಲೆ + ಸಾಗಾಣಿಕೆ ವೆಚ್ಚ

= 18,000 + 500 = ₹ 18,500

ಮತ್ತೊಂದು ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಕಿಶೋರನ ತಂದೆಯು ಒಬ್ಬ ಚೆನ್ನೈ ವ್ಯಾಪಾರಿಯಿಂದ ₹ 2,75,000 ಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಹಳೆಯ ಮಾರುತಿ ಕಾರನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದರು ಮತ್ತು ಕಾರಿಗೆ ಬಣ್ಣಹಚ್ಚಲು ₹ 25,000 ಗಳನ್ನು ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದರು ಹಾಗೂ ಅವರು ಕಾರನ್ನು ತನ್ನ ಸ್ವಂತ ಗ್ರಾಮಕ್ಕೆ ಸಾಗಿಸಲು ಪುನಃ ₹ 2,000 ಗಳನ್ನು ಖರ್ಚುಮಾಡಿದರು. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ನೀವು ಉತ್ತರಿಸುವಿರಾ.

(i) ಕಾರಿನ ಒಟ್ಟಾರೆ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) ಕಾರಿನ ನಿಜವಾದ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

(iii) ಇಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ವೆಚ್ಚಗಳು ಯಾವುವು?

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಿದ ವೆಚ್ಚ ಮತ್ತು ಸಾಗಾಣಿಕೆ ವೆಚ್ಚಗಳು ಹೆಚ್ಚುವರಿ ವೆಚ್ಚಗಳಾಗಿವೆ.

∴ ಕಾರನ್ನು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ = ನೈಜ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ + ಹೆಚ್ಚುವರಿ ವೆಚ್ಚಗಳು

= 2,75,000 + (25,000 + 2,000)

= 2,75,000 + 27,000 = ₹ 3,02,000.

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು ಒಂದು ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರೋಣ.

ಕೆಲವು ವೇಳೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಾಗ ಅಥವಾ ಮಾರಿದಾಗ, ಅದನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಅಥವಾ ಮಾರುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಕೆಲವು ಅಧಿಕವಾದ ಖರ್ಚು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವೆಚ್ಚಗಳನ್ನು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಗೆ ಸೇರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವೆಚ್ಚಗಳನ್ನು **ಹೆಚ್ಚುವರಿ ವೆಚ್ಚಗಳು** ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇವು ರಿಪೇರಿ, ಕೂಲಿ ಆಳುಗಳು, ಸಾಗಾಣಿಕೆ ಮುಂತಾದ ವೆಚ್ಚಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1.10

ರಾಜು ಒಂದು ಮೋಟಾರು ಸೈಕಲನ್ನು ₹ 36,000 ಗಳಿಗೆ ಖರೀದಿಸಿದನು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಮತ್ತು ಸುಂದರಗೊಳಿಸಲು ಕೆಲವು ಇನ್ನಿತರೆ ಜೋಡಣೆಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದನು. ಅವನು ಮೋಟಾರು ಸೈಕಲನ್ನು 10% ಲಾಭಕ್ಕೆ ಮಾರಿ ₹ 44,000 ಗಳನ್ನು ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯಾಗಿ ಪಡೆದನು. ಮೋಟಾರು ಸೈಕಲಿಗಾಗಿ ಇನ್ನಿತರೆ ಜೋಡಣೆಗಳಿಗೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದನು?

ಪರಿಹಾರ

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರಲಿ.

ಲಾಭ = 10%, ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ₹ 110

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 110 ಆದರೆ, ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ₹ 100 ಆಗಿದೆ.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 44,000 ಆದಾಗ

$$\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} = \frac{44000 \times 100}{110} = ₹\ 40,000$$

∴ ಇನ್ನಿತರೆ ಜೋಡಣೆಗೆ ಖರ್ಚಾದ ಹಣ = 40,000 – 36,000 = ₹ 4,000.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ / ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ	ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ	ಲಾಭ	ನಷ್ಟ
(i) ₹ 7,282		₹ 208	
(ii)	₹ 572	₹ 72	
(iii) ₹ 9,684			₹ 684
(iv)	₹ 1,973	₹ 273	
(v) ₹ 6,76,000			₹ 18,500

2. ಸೂಕ್ತವಾದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ ಮತ್ತು ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ಖಾಲಿ ಬಿಡಿ.

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ	ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ	ಲಾಭ ಮತ್ತು ಲಾಭ %	ನಷ್ಟ ಮತ್ತು ನಷ್ಟ %
(i) ₹ 320	₹ 384		
(ii) ₹ 2,500	₹ 2,700		
(iii) ₹ 380	₹ 361		
(iv) ₹ 40			₹ 2 ನಷ್ಟ
(v) ₹ 5,000		₹ 500 ಲಾಭ	

3. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ 5% ಲಾಭವು ಉಂಟಾದರೆ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ₹ 700 ರ ಬೈಸಿಕಲ್‌ನೊಂದಿಗೆ ₹ 50 ಹೆಚ್ಚುವರಿ ವೆಚ್ಚ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ₹ 50 ಸಾಗಣಾ ವೆಚ್ಚದೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಗಣಕಯಂತ್ರದ ಮೇಜನ್ನು ₹ 1,150 ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಿದೆ.

(iii) ಒಂದು ರುಬ್ಬುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ₹ 2,560 ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಿ, ಅದರ ರಿಪೇರಿಗೆ ₹ 140 ನ್ನು ಖರ್ಚು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

4. ಒಂದು ಮೇಜನ್ನು ₹ 1,320 ಕ್ಕೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡುವಾಗ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು 10% ಲಾಭವನ್ನು ಗಳಿಸುತ್ತಾನೆ. ಮೇಜಿನ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. 16 ಪುಸ್ತಕಗಳ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು 12 ಪುಸ್ತಕಗಳ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಲಾಭದ ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಬ್ಬನು ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ₹ 375 ರಂತೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದನು. ಮೊದಲನೇ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ 25% ಲಾಭವನ್ನು ಮತ್ತು ಮತ್ತೊಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ 25% ನಷ್ಟವನ್ನು ಅವನು ಗಳಿಸಿದನು. ಪೂರ್ಣ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗಾದ ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟ ಎಷ್ಟು? ಹಾಗೂ ಪೂರ್ಣ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟದ ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಆರ್ಯನು ಒಂದು ಮನೆಯನ್ನು ₹ 17,75,000 ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಿದನು ಮತ್ತು ಅದರ ಒಳ ವಿನ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ₹ 1,25,000 ವನ್ನು ಖರ್ಚುಮಾಡಿದನು. ಅವನು 20% ಲಾಭವನ್ನು ಗಳಿಸುವುದರೊಂದಿಗೆ ಮನೆಯನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದನು. ಮನೆಯನ್ನು ಮಾರುವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಮನೆಯನ್ನು ಪುನರ್ ನಿರ್ಮಾಣ ಮಾಡಲು ಅರವತ್ತು ಸಾವಿರ ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದ ನಂತರ ಅಮಲ 20% ಲಾಭಕ್ಕೆ ಆ ಮನೆಯನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದಳು. ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದ ಬೆಲೆಯು ನಲವತ್ತ ಎರಡು ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಗಳಾದರೆ, ಅವಳು ಮನೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ಹಣಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಿದಳು?
9. ಜಯಕುಮಾರನು ನಗರದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಿವೇಶನಗಳ ಜಾಗವನ್ನು ₹ 21,00,000 ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಿದನು. ಅದರ ಸುತ್ತಲು ಗೋಡೆಯನ್ನು ಕಟ್ಟಿಸಲು ₹ 1,45,000 ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದನು. ನಂತರ ಅವನು ₹ 25,00,000 ಗಳಿಗೆ ಅದನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದ್ದು, ಅದಕೋಸ್ಕರವಾಗಿ ವಾರ್ತಾ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಜಾಹೀರಾತಿಗಾಗಿ ₹ 5,000 ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದನು. ಈಗ ಅವನ ಲಾಭದ ಶೇಕಡಾಂಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಎರಡು ಜಾತಿಯ ನಾಯಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ₹ 3,605 ರಂತೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದನು. ಒಂದರಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ 15% ಲಾಭವು, ಮತ್ತೊಂದರಲ್ಲಿ 9% ನಷ್ಟವು ಉಂಟಾಯಿತು. ಅವನ ಒಟ್ಟಾರೆ ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಸುಳಿವು: ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.)

1.3.4 ರಿಯಾಯಿತಿಯ ಅನ್ವಯ (Application of Discounts)

ಪೂಜಾಳು ನಿನ್ನೆಯ ದಿನ ತನ್ನ ತಂದೆ ತಾಯಿಯೊಂದಿಗೆ ಸಂಕ್ರಾಂತಿ ಹಬ್ಬಕ್ಕೆ ಉಡುಪನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಒಂದು ಅಂಗಡಿಗೆ ತೆರಳಿದಳು. ಅವಳು ಹಲವಾರು ನಿಶಾನೆಗಳನ್ನು (ಬ್ಯಾನರ್) ಅಂಗಡಿಗಳಲ್ಲಿ ನೊಡಿದಳು. ಅಲ್ಲಿ ಇರುವ ವಿಷಯ ಅವಳಿಗೆ ಅರ್ಥವಾಗಲಿಲ್ಲ.

ಇದನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಅವಳು ಅಂಗಡಿಗೆ ತೆರಳಿ ಒಂದು ಉಡುಪನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಳು.

ಉಡುಪಿನ ಮೇಲಿರುವ ದರದ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ₹550 ಎಂದು ಹಾಕಲಾಗಿದ್ದು ಅದನ್ನು ಮುಖ ಬೆಲೆ (M.P. - Marked Price) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಅವಳು ಅಂಗಡಿಯವನಿಗೆ ₹ 550 ನೀಡುತ್ತಾಳೆ. ಆದರೆ ಅಂಗಡಿಯವನು ಉಳಿಕೆ ಹಣವನ್ನು ಹಿಂದಿರುಗಿಸಿ, ಅಲ್ಲಿ 20% ರಿಯಾಯಿತಿ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿದನು.

ಇಲ್ಲಿ, 20% ರಿಯಾಯಿತಿ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥವು ಮುಖಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ 20% ರಿಯಾಯಿತಿ ಆಗಿದೆ.

$$\text{ರಿಯಾಯಿತಿ} = \frac{20}{100} \times 550 = ₹\ 110.$$

ರಿಯಾಯಿತಿ ಎಂಬುದು ವಸ್ತುವಿನ **ಮುಖಬೆಲೆ** ಅಥವಾ **ಪಟ್ಟಿ ಬೆಲೆಯ** ಮೇಲಿನ ಕಡಿತವಾಗಿದೆ.

The normal price attached to the article before the discount made is called as Marked Price (M.P.) or List Price of the article.

ಪೂಜಾಳು ಅಂಗಡಿಯವನಿಗೆ ನೀಡಿದ ಹಣ ₹ 440

= ₹ 550 – ₹ 110

= ಮುಖ ಬೆಲೆ–ರಿಯಾಯಿತಿ

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು

ರಿಯಾಯಿತಿ = ಮುಖಬೆಲೆ – ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಮುಖಬೆಲೆ – ರಿಯಾಯಿತಿ

ಮುಖಬೆಲೆ = ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ + ರಿಯಾಯಿತಿ

ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಹಬ್ಬ ಮತ್ತು ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೋ–ಆಪ್‌ಟೆಕ್ಸ್, ಖಾದಿ ಮತ್ತು ಇನ್ನಿತರೆ ಅಂಗಡಿಗಳು ಮಾರಾಟವನ್ನು ಅಧಿಕಗೊಳಿಸಲು ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲೆ 10%, 20%, 30%, ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ರಿಯಾಯಿತಿ ಅಥವಾ ಸೋಡಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಗ್ರಾಹಕರನ್ನು ಆಕರ್ಷಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.11

ಒಂದು ಬೈಸಿಕಲ್‌ನ ಮುಖ ಬೆಲೆಯು ₹ 1,500 ಗಳಾಗಿದ್ದು, ಅದನ್ನು ₹ 1,350 ಗಳಿಗೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ರಿಯಾಯಿತಿಯ ಶೇಕಡವೇನು?

ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತ : ಮುಖ ಬೆಲೆ = ₹ 1500, ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ₹ 1350

ರಿಯಾಯಿತಿಯ ಹಣ = ಮುಖ ಬೆಲೆ – ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ

= 1500 – 1350

= ₹ 150

ಮುಖ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ರಿಯಾಯಿತಿ ಇರುವುದರಿಂದ, ನಾವು ಮುಖ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿ ಬಳಸಬೇಕು.

₹ 1500 ಕ್ಕೆ ರಿಯಾಯಿತಿ = ₹ 150

₹ 100 ಕ್ಕೆ ರಿಯಾಯಿತಿ = $\frac{150}{1500} \times 100$

ರಿಯಾಯಿತಿಯ ಶೇಕಡ = 10%.

ಉದಾಹರಣೆ 1.12

ಒಂದು ಉಡುಪಿನ ಮುಖ ಬೆಲೆಯು ₹ 220 ಆಗಿದೆ. ಮಾರಾಟದ ಮೇಲೆ 20% ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಘೋಷಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿನ ರಿಯಾಯಿತಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ಏನು?

ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತ : ಉಡುಪಿನ (ಪಟ್ಟಿ) ಮುಖ ಬೆಲೆ = ₹ 220, ರಿಯಾಯತಿಯ ದರ = 20%

ರಿಯಾಯಿತಿಯ ಹಣ = $\frac{20}{100} \times 220$

= ₹ 44

∴ ಉಡುಪಿನ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆ = ಮುಖ ಬೆಲೆ – ರಿಯಾಯಿತಿ

= 220 – 44

= ₹ 176.

ಉದಾಹರಣೆ 1.13

ಒಂದು ಕಪಾಟು 5% ರಿಯಾಯಿತಿ ಹೊಂದಿದ ನಂತರ ₹ 5,225 ಗಳಿಗೆ ಮಾರಾಟವಾಯಿತು. ಅದರ ಮುಖ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಕೃಷ್ಣನು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿದನು.
ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ, ಮುಖ ಬೆಲೆಯನ್ನು ₹ 100 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

ರಿಯಾಯಿತಿ ದರ = 5%

ರಿಯಾಯಿತಿ ಹಣ $= \frac{5}{100} \times 100$

= ₹ 5.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಮುಖ ಬೆಲೆ – ರಿಯಾಯಿತಿ

= 100 – 5 = ₹ 95

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ₹ 95 ಆದರೆ, ಮುಖ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 5225 ಆದಾಗ,

ಮುಖ ಬೆಲೆ $= \frac{100}{95} \times 5225$

∴ ಕಪಾಟಿನ ಮುಖ ಬೆಲೆ = ₹ 5,500.

[ಅಥವಾ]

ರಾಮನು ಸೂತ್ರದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿದನು.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ₹ 5225

ರಿಯಾಯಿತಿ = 5%

ಮುಖ ಬೆಲೆ = ?

$$\text{ಮುಖ ಬೆಲೆ} = \frac{100}{100 - \text{ರಿಯಾಯಿತಿ } \%} \times \text{S.P.}$$

$$= \left(\frac{100}{100-5}\right) \times 5225$$

$$= \frac{100}{95} \times 5225$$

= ₹ 5,500.

ಉದಾಹರಣೆ 1.14

ಒಬ್ಬ ಅಂಗಡಿಯವನು ಅವನ ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ 10% ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿಯೂ 20% ಲಾಭವನ್ನು ಗಳಿಸಿದನು. ಅಂಗಡಿಯವನಿಗೆ ವಸ್ತುವು ₹ 450 ಕ್ಕೆ ದೊರಕಿದರೆ ವಸ್ತುವಿನ ಮುಖ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ರಾಹುಲ್ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿದನು.
ಮುಖಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರಲಿ.

ರಿಯಾಯಿತಿ = ಮುಖಬೆಲೆಯ 10%

$= \text{ಮುಖಬೆಲೆಯ } \frac{10}{100} = \frac{10}{100} \times 100$

= ₹ 10

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಮುಖಬೆಲೆ – ರಿಯಾಯಿತಿ

= 100 – 10 = ₹ 90

ಲಾಭ = ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯ 20%

$= \frac{20}{100} \times 450 =$ ₹ 90

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಕೊಂಡಬೆಲೆ + ಲಾಭ

= 450 + 90 = ₹ 540.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹90 ಆದಾಗ ಮುಖಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 540 ಆದಾಗ,

ಮುಖಬೆಲೆ $= \frac{540 \times 100}{90} =$ ₹ 600.

∴ ವಸ್ತುವಿನ ಮುಖಬೆಲೆ = ₹ 600.

[ಅಥವಾ]

ನಿತಿನ್ ಸೂತ್ರದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಿಸಿದನು.
ರಿಯಾಯಿತಿ = 10%, ಲಾಭ = 20%,
ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ = ₹ 450, ಮುಖ ಬೆಲೆ = ?

$$\text{ಮುಖ ಬೆಲೆ} = \frac{100 + \text{ಲಾಭ } \%}{100 - \text{ರಿಯಾಯಿತಿ } \%} \times \text{C.P}$$

$$= \frac{(100+20)}{(100-10)} \times 450$$

$$= \frac{120}{90} \times 450$$

= ₹ 600

ಉದಾಹರಣೆ 1.15

ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು 10% ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿಯೂ 10% ಲಾಭವನ್ನು ಗಳಿಸಿದನು. ₹ 220 ಮುಖಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪುಸ್ತಕದ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ಏನು?

ಪರಿಹಾರ

ಸನತ್ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿದನು.

ಮುಖ ಬೆಲೆ = ₹ 220.

ರಿಯಾಯಿತಿ = ಮುಖಬೆಲೆ 10%

$= \frac{10}{100} \times 220 =$ ₹ 22

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಮುಖಬೆಲೆ – ರಿಯಾಯಿತಿ

= 220 – 22 = ₹ 198

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರಲಿ.

ಲಾಭ = ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯ 10%

$= \frac{10}{100} \times 100 =$ ₹ 10

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ + ಲಾಭ

= 100 + 10

= ₹ 110.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 110 ಆದಾಗ, ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 198 ಆದಾಗ,

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ $= \frac{198 \times 100}{110}$

= ₹ 180.

[ಅಥವಾ]

ಸಾನ್ವಿ ಸೂತ್ರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಿಸಿದಳು.

ರಿಯಾಯಿತಿ = 10%

ಲಾಭ = 10%

ಮುಖ ಬೆಲೆ = ₹ 220

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ $= \frac{100 - \text{ರಿಯಾಯಿತಿ } \%}{100 + \text{ಲಾಭ } \%} \times \text{M.P.}$

$= \frac{100 - 10}{100 + 10} \times 220$

$= \frac{90}{110} \times 220 =$ ₹ 180.

ಉದಾಹರಣೆ 1.16

ಒಂದು ದೂರದರ್ಶನವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ 10% ಮತ್ತು 20% ಕ್ರಮಾನುಗತ ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿದ ನಂತರ ₹ 14,400 ಕ್ಕೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಮುಖ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ₹ 14,400

ಮುಖ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರಲಿ.

ಮೊದಲನೇ ರಿಯಾಯಿತಿ $= 10\% = \frac{10}{100} \times 100 =$ ₹ 10

ಮೊದಲನೇ ರಿಯಾಯಿತಿಯ ನಂತರ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = 100 – 10 = ₹ 90

ಎರಡನೇ ರಿಯಾಯಿತಿ $= 20\% = \frac{20}{100} \times 90 =$ ₹ 18

ಎರಡನೇ ರಿಯಾಯಿತಿಯ ನಂತರ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = 90 – 18 = ₹ 72

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 72 ಆದರೆ, ಮುಖ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 14,400 ಆದಾಗ,

ಮುಖ ಬೆಲೆ $= \frac{14400 \times 100}{72} =$ ₹ 20,000

ಮುಖ ಬೆಲೆ = ₹ 20,000.

ಉದಾಹರಣೆ 1.17

ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ₹ 1,200 ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಿ, ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಗಿಂತ 30% ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದನು. ಅವನು ನಂತರ 20% ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದನು. ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಶೇಕಡಾ ಲಾಭವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ವಸ್ತುವಿನ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರಲಿ.

ಮುಖ ಬೆಲೆ = ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಗಿಂತ 30% ಹೆಚ್ಚು = ₹ 130

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆದರೆ ಮುಖ ಬೆಲೆಯು ₹ 130 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 1200 ಆದಾಗ, ಮುಖ ಬೆಲೆ $= \frac{1200 \times 130}{100} =$ ₹ 1560

ರಿಯಾಯಿತಿ = 1560 ರ 20% $= \frac{20}{100} \times 1560 =$ ₹ 312

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಮುಖ ಬೆಲೆ – ರಿಯಾಯಿತಿ

= 1560 – 312 = ₹ 1248

ಲಾಭ = ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ – ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ

= 1248 –1200 = ₹ 48.

$\therefore$ ಲಾಭ % $= \frac{\text{ಲಾಭ}}{\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ}} \times 100$

$= \frac{48}{1200} \times 100 = 4\%$

Try these

ಒಂದು ಅಂಗಡಿಯು 20% ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿದೆ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಮಾರುವ ಬೆಲೆ ಏನಾಗಿರುತ್ತದೆ?

(i) ಒಂದು ಉಡುಪಿನ ಮುಖಬೆಲೆ ₹ 120 ಆದಾಗ
(ii) ಒಂದು ಚೀಲದ ಮುಖ ಬೆಲೆ ₹ 250 ಆದಾಗ
(iii) ಒಂದು ಜೊತೆ ಪಾದರಕ್ಷೆಯ ಮುಖ ಬೆಲೆ ₹ 750 ಆದಾಗ

1.3.5 ತೆರಿಗೆಯ ಅನ್ವಯ (Application of Tax)

ಮಕ್ಕಳೇ! ನಾವು ವಾರ್ತಾ ಪತ್ರಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ದೂರದರ್ಶನದಲ್ಲಿ ಜನರಿಗೆ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ ತಮ್ಮ ತೆರಿಗೆಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟಿ ಎಂದು ಸಾರುವ ಜಾಹೀರಾತುಗಳನ್ನು ಆಗಾಗ್ಗೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ತೆರಿಗೆ ಎಂದರೇನು? ಸಾಮಾನ್ಯ ಜನರಿಂದ ಸರ್ಕಾರವು ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಏಕೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತದೆ?

ರಸ್ತೆಗಳು, ರೈಲ್ವೆ ನಿಲ್ದಾಣ, ಕೃಷಿ ಸೌಲಭ್ಯ, ನೀರಿನ ಸರಬರಾಜು, ವಿದ್ಯುತ್‌ಶಕ್ತಿ ಮುಂತಾದ ಅಗತ್ಯ ಸೌಲಭ್ಯಗಳನ್ನು ಸರ್ಕಾರವು ಒದಗಿಸಿ ದೇಶವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲು ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಅಗತ್ಯವಾದ ಹಣವನ್ನು ಸರ್ಕಾರವು ಜನರಿಂದ ತೆರಿಗೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತದೆ.

ತೆರಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ವಿಧಗಳಿವೆ.

1. ನೇರ (ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ) ತೆರಿಗೆ (Direct Tax)

ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ, ಆಸ್ತಿ ತೆರಿಗೆ, ವೃತ್ತಿ ತೆರಿಗೆ, ನೀರಿನ ತೆರಿಗೆ ಮುಂತಾದವುಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತೆರಿಗೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸುವುದನ್ನು ನೇರ (ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ) ತೆರಿಗೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇವುಗಳು ಜನರಿಂದ ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ನೇರವಾಗಿ ಪಾವತಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

2. ಪರೋಕ್ಷ ತೆರಿಗೆ (Indirect Tax)

ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ನೇರವಾಗಿ ಪಾವತಿಯಾಗದ ಕೆಲವು ತೆರಿಗೆಗಳು ಪರೋಕ್ಷ ತೆರಿಗೆಗಳಾಗಿದ್ದು ಅವುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಅಬಕಾರಿ ತೆರಿಗೆ (Excise Tax)

ದೇಶದೊಳಗೆ ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ಕೆಲವು ಪದಾರ್ಥಗಳಿಗೆ ಈ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ವಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಭಾರತ ಸರ್ಕಾರವು ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತದೆ.

ಸೇವಾ ತೆರಿಗೆ (Service Tax)

ಫಲಹಾರ ಮಂದಿರ, ಚಿತ್ರ ಮಂದಿರಗಳು, ಲೆಕ್ಕ ಪರಿಶೋಧಕರ ಸೇವೆ, ದೂರವಾಣಿ ಬೆಲೆಪಟ್ಟಿ ಮುಂತಾದವುಗಳಿಗೆ ವಿಧಿಸುವ ತೆರಿಗೆಗಳು ಸೇವಾ ತೆರಿಗೆಗೆ ಸೇರುತ್ತವೆ. ಈ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಬಳಕೆದಾರರಿಂದ ಸೇವೆಯನ್ನು ಒದಗಿಸುವವರು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ಪಾವತಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ (Income Tax)

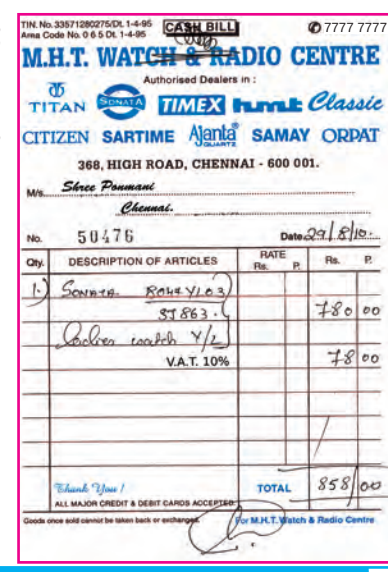
ಇದು ನಿಗದಿತ ಕನಿಷ್ಠ ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಪಾದಿಸುವ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಪ್ರಜೆಯಿಂದ ಸರ್ಕಾರವು ಸಂಗ್ರಹಿಸುವ ಕಂದಾಯದ ಪ್ರಮುಖ ಮೂಲವಾಗಿದೆ. ನಮ್ಮ ದೇಶದ ಪ್ರಾಮಾಣಿಕ ಪ್ರಜೆಯಾಗಿ ನಾವು ನಮ್ಮ ಕರ್ತವ್ಯದ ಮೇಲೆ ಜಾಗೃತರಾಗಿ ಸಮಯಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಬೇಕು.

ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ / ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆ (Sales Tax / Value Added Tax)

ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ

ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮಾರಾಟದ ಮೇಲೆ ಸರ್ಕಾರವು ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ವಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟಗಾರನಿಗೆ ಮಾರಾಟದ ಮೇಲೆ ವಿಧಿಸುವ ತೆರಿಗೆಯೇ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯಾಗಿದೆ. ಖರೀದಿಸುವವನು ಅಗತ್ಯ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸುವಾಗ ಅಗತ್ಯ ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯೊಂದಿಗೆ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಪಾವತಿಸುತ್ತಾನೆ.



ಈ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಸರ್ಕಾರವು ವಸ್ತುವಿನ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ವಿಧಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಬೆಲೆ ಪಟ್ಟಿಯ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಇತ್ತೀಚಿನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು **ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆ (VAT)** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ವಸ್ತುವಿಗೆ ನಾವು ಪಾವತಿಸುವ ಬೆಲೆಗೆ ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯು ಸೇರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಇದರ ಅರ್ಥವಾಗಿದೆ.

Activity

ಈ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಅಗತ್ಯ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರವನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಾ.

1. ವಿದ್ಯುತ್ ಉಪಕರಣಗಳು _____ %
2. ಪೆಟ್ರೋಲ್ _____ %
3. ಡೀಸಲ್ ___ %
4. ಗೃಹ ಬಳಕೆಯ ಸಾಮಾಗ್ರಿಗಳು _____ %
5. ರಾಸಾಯನಿಕಗಳು _____ %

Do you know?

ಕೆಲವು ಅಗತ್ಯ ವಸ್ತುಗಳಾದ ಅಕ್ಕಿ, ಸಕ್ಕರೆ, ಹಾಲು, ಉಪ್ಪು, ಪೆನ್ನು, ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳು ಮತ್ತು ಪುಸ್ತಕಗಳು ಮುಂತಾದವುಗಳಿಗೆ ಸರ್ಕಾರವು ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ವಿನಾಯಿತಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ (Calculation of Sales Tax)

$$\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ಮೊತ್ತ} = \frac{\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರ}}{100} \times \text{ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ}$$

$$\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರ} = \frac{\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ಮೊತ್ತ}}{\text{ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ}} \times 100$$

$$\text{ದರ ಪಟ್ಟಿಯ ಮೊತ್ತ} = \text{ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ} + \text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ಮೊತ್ತ}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.18

ವಿನೋದನು ಸಂಗೀತ ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ₹ 12,000 ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಿದನು. ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರವು 8% ಆದರೆ, ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅವನಿಂದ ಪಾವತಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಟ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಸಂಗೀತ ಉಪಕರಣಗಳ ಬೆಲೆ = ₹ 12,000

ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರ = 8%

$$\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ಮೊತ್ತ} = \frac{8}{100} \times 12000$$

= ₹ 960

ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯೊಂದಿಗೆ ವಿನೋದನಿಂದ ಪಾವತಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ = 12,000 + 960

= ₹ 12,960

ಉದಾಹರಣೆ 1.19

ಒಂದು ಶೈಥ್ಯೀಕರಣ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯೊಂದಿಗೆ ₹ 14,355 ಗಳಿಗೆ ಖರೀದಿಸಲಾಯಿತು. ಶೈಥ್ಯೀಕರಣ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ನೈಜ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 13,050 ಆದರೆ, ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಶೈಥ್ಯೀಕರಣ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗೆ, ದರ ಪಟ್ಟಿಯ ಮೊತ್ತ = ₹ 14,355, ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ = ₹ 13,050.

ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ = ದರ ಪಟ್ಟಿಯ ಮೊತ್ತ – ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ

= 14,355 – 13,050 = ₹ 1,305

$$\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರ} = \frac{\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ಮೊತ್ತ}}{\text{ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ}} \times 100$$

$$= \frac{1305}{13050} \times 100 = 10\%$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.20

ಪ್ರಿಯಾ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ₹ 2,730 ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಿದಳು. ಈ ವಸ್ತುವಿಗೆ ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯು 5% ಆಗಿದೆ. ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಬೆಲೆ ಏನು? ಹಾಗೂ ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯು ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತ : ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯು 5%.

ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದರೆ ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆದರೆ, ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 105 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 105 ಆದರೆ, ನೈಜ ಬೆಲೆಯು ₹ 100.

ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 2,730 ಆದಾಗ, ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ನೈಜ ಬೆಲೆಯು

$$= \frac{100}{105} \times 2730 = ₹\ 2,600$$

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ನೈಜ ಬೆಲೆ = ₹ 2,600

∴ ಮೌಲ್ಯ ವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆ = 2,730 – 2,600 = ₹ 130

Try these

1. 5% ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಖರೀದಿಸಿದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) ₹ 60 ಕ್ಕೆ ತಲೆ ದಿಂಬು (ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ₹ 25 ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಸಾಬೂನಿನ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು.
2. ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ 8% VAT (ವ್ಯಾಟ್) ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ, ಮೂಲ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) ನೀರನ್ನು ಬಿಸಿ ಮಾಡುವ ವಿದ್ಯುತ್ ಉಪಕರಣವನ್ನು ₹ 14,500 ಕ್ಕೆ ಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.
   (ii) ಒಂದು ಲೋಟದ ಸೆಟ್ಟನ್ನು ₹ 200 ಕ್ಕೆ ಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ರಿಯಾಯಿತಿಯು ಯಾವಾಗಲೂ _____ ಯ ಮೇಲಿದೆ.
(A) ಮುಖ ಬೆಲೆ (B) ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ (C) ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ (D) ಬಡ್ಡಿ

(ii) ಮುಖಬೆಲೆ = ₹ 140, ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = ₹ 105 ಆದರೆ, ರಿಯಾಯಿತಿ = _____.
(A) ₹ 245 (B) ₹ 25 (C) ₹ 30 (D) ₹ 35

(iii) _____ = ಮುಖಬೆಲೆ – ರಿಯಾಯಿತಿ.
(A) ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ (B) ಮಾರುವ ಬೆಲೆ (C) ದರ ಪಟ್ಟಿ (D) ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಬೆಲೆ

(iv) ವಸ್ತುವಿನ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುವ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು _____ ತೆರಿಗೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
(A) ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ (B) ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆ (C) ಅಬಕಾರಿ ತೆರಿಗೆ (D) ಸೇವಾ ತೆರಿಗೆ

(v) ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯು ₹ 240 ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ರಿಯಾಯಿತಿಯು ₹ 28 ಆದರೆ, ಅದರ ಮುಖ ಬೆಲೆಯು _____.
(A) ₹ 212 (B) ₹ 228 (C) ₹ 268 (D) ₹ 258

2. ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ಮುಖಬೆಲೆಯು ₹ 450 ಆಗಿದೆ. ಅಂಗಡಿಯವನು ಪುಸ್ತಕ ಪ್ರದರ್ಶನದಲ್ಲಿ ಆ ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ 20% ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿದನು. ಮಾರಾಟ ಮಾಡುವ ಬೆಲೆ ಏನು?

3. ಕ್ರಮವಾಗಿ 10% ಮತ್ತು 20% ಕ್ರಮಾನುಗತ ರಿಯಾಯಿತಿಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ ನಂತರ ದೂರದರ್ಶನವನ್ನು ₹ 5,760 ಗಳಿಗೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಅದರ ಮುಖ ಬೆಲೆ ಏನು?

4. ಶೇಖರ್ ಒಂದು ಗಣಕ ಯಂತ್ರವನ್ನು ₹ 38,000 ಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಮುದ್ರಣ ಯಂತ್ರವನ್ನು ₹ 8,000 ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಿದನು. ಈ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರವು 7% ಆದರೆ, ಈ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಪಾವತಿಸಿದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಒಂದು ಅಡಿಗೆ ಸಾಧನದ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯು ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡು ₹ 19,610 ಆಗಿದೆ. ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯು 6% ಆದರೆ, ಅಡಿಗೆ ಸಾಧನದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಪ್ರಶಾಂತನು ಒಂದು ಉಡುಪಿನ ಖರೀದಿಯಲ್ಲಿ 10% ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆದನು. ಉಡುಪಿನ ಮುಖಬೆಲೆಯು ₹ 5,000 ಆಗಿದೆ. ಅವನು ಖರೀದಿಸಿದ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ 10% ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಅವನು ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಪಾವತಿಸಿದನು?

7. ಒಂದು ಶೈಥ್ಯೀಕರಣ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯು 9% ದರದಲ್ಲಿ ₹ 1,170 ಆಗಿದೆ. ನೈಜ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಅವನ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಗಿಂತ 40% ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿದನು. ಅವನು 5% ರಿಯಾಯಿತಿಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದನು. ಅವನ ನಷ್ಟ ಅಥವಾ ಲಾಭದ ಶೇಕಡ ಏನು?

9. ₹ 11,500 ಗಳನ್ನು ಮುಖಬೆಲೆಯಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ದೂರದರ್ಶನವನ್ನು 10% ರಿಯಾಯಿತಿಯಿಂದ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಹಬ್ಬಗಳ ಕಾರಣದಿಂದ ಅಂಗಡಿಯವನು 5% ಹೆಚ್ಚಿನ ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿದನು. ದೂರದರ್ಶನದ ನಿವ್ವಳ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ₹ 3,500 ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರುವ ಒಂದು ತಂಪು ಮಾಡುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ₹ 2,800 ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಿದನು. ಅಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಶೇಕಡ ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಶಾರದಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ₹ 1,200 ರಂತೆ 15 ಅಂಗಿಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಳು ಮತ್ತು 5% ಲಾಭಕ್ಕೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದಳು. ಗ್ರಾಹಕರು 4% ದರದಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ ಒಂದು ಅಂಗಿಯ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ?

12. ರಿಯಾಯಿತಿ, ಶೇಕಡ ರಿಯಾಯಿತಿ, ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಮುಖ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕ್ರ. ಸಂ	ವಸ್ತುಗಳು	ಮುಖಬೆಲೆ	ರಿಯಾಯಿತಿಯ ದರ	ರಿಯಾಯಿತಿಯ ಮೊತ್ತ	ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆ
(i)	ಸೀರೆ	₹ 2,300	20%		
(ii)	ಪೆನ್ನುಗಳ ಸೆಟ್ಟು	₹ 140			₹ 105
(iii)	ಊಟದ ಮೇಜು		20%		₹ 16,000
(iv)	ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರ	₹ 14,500			₹ 13,775
(v)	ಮಣ್ಣಿನ ಪಾತ್ರೆಗಳ ಸೆಟ್ಟು	₹ 3,224	12½%		

Try these

ಯಾವುದು ಉತ್ತಮ ಅವಕಾಶ? 20% ಮತ್ತು 5% ಗಳ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ರಿಯಾಯಿತಿಗಳು ಅಥವಾ 25% ಏಕ ರಿಯಾಯಿತಿ. ಸೂಕ್ತವಾದ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.

1.4 ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (Compound Interest)

ನೀವು 7 ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ಬಗ್ಗೆ ಹಾಗೂ ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದು ನಿಗಧಿತ ಅವದಿಯ ಕೊನೆಗೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಪ್ರದೀಪನು ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ 4% ವಾರ್ಷಿಕ ದರದಲ್ಲಿ 2 ವರ್ಷಗಳ ನಿಗದಿತ ಅವಧಿಗೆ ₹ 50,000 ಗಳನ್ನು ಸಾಲವಾಗಿ ಪಡೆದುಕೊಂಡನು.

ಪ್ರದೀಪನು ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಹಣ,

$$\text{ಸರಳಬಡ್ಡಿ} = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$= \frac{50000 \times 1 \times 4}{100} = ₹\ 2{,}000$$

ಮೊದಲನೆ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ₹ 2,000 ಸರಳಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಲು ಅವನಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ₹ 2,000 ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಹಳೆಯ ಅಸಲು ₹ 50,000 ಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಈಗ ಮೊತ್ತವು $P + I =$ ₹ 52,000 ಎಂಬುದು ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಅಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಎರಡನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅವನು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಬಡ್ಡಿಯು

$$\text{ಸರಳಬಡ್ಡಿ} = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$= \frac{52000 \times 1 \times 4}{100} = ₹\ 2{,}080$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರದೀಪನು ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು **ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

Do you know?

ಅಸಲಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ನೀಡಿದರೆ ಅದನ್ನು **ಸರಳಬಡ್ಡಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಅಸಲಿನೊಂದಿಗೆ ಗಳಿಸಿದ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಿವುದುನ್ನು **ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬ್ಯಾಂಕುಗಳಲ್ಲಿ, ವಿಮಾ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ, ಅಂಚೆ ಕಛೇರಿಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಇನ್ನಿತರೆ ಸಾಲ ಕೊಡುವ ಮತ್ತು ಠೇವಣಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.21

ರಾಮನು ಒಂದು ಹಣಕಾಸಿನ ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ 15% ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿಯ ದರದಲ್ಲಿ 3 ವರ್ಷಕ್ಕೆ ₹ 8,000 ವನ್ನು ಠೇವಣಿ ಇಟ್ಟನು. 3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ರಾಮನು ಪಡೆದ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಏನು?

ಪರಿಹಾರ

ಹಂತ 1: ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಅಸಲು = ₹ 8,000

$$\text{ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಬಡ್ಡಿ} = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$= \frac{8000 \times 1 \times 15}{100} = ₹\ 1{,}200$$

ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ = $P + I = 8{,}000 + 1{,}200 =$ ₹ 9,200

ಹಂತ 2: ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತವು ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು = ₹ 9,200

ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ $= \frac{P \times n \times r}{100}$

$= \frac{9200 \times 1 \times 15}{100}$ = ₹ 1,380

ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ = P + I = 9,200 + 1,380 = ₹ 10,580

ಹಂತ 3: ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೂರನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು = ₹ 10,580

ಮೂರನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ $= \frac{P \times n \times r}{100}$

$= \frac{10580 \times 1 \times 15}{100}$ = ₹ 1,587

ಮೂರನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ = P + I

= 10,580 + 1,587 = ₹ 12,167

ಆದ್ದರಿಂದ, ರಾಮನು ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಪಡೆದ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯು

A – P = 12,167 – 8,000 = ₹ 4,167.

ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (Deduction of formula for Compound Interest)

ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ನಾವು ಬಳಸಿರುವ ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವು ಬಹಳ ದೀರ್ಘ ಮತ್ತು ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಕಾಲಾವಧಿಯು ಅಧಿಕವಾಗಿರುವಾಗ ಬಹಳ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕಿದೆ.

ಅಸಲು P, ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿಯ ದರ r % ಮತ್ತು ಕಾಲಾವಧಿ ಅಥವಾ ವರ್ಷಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಆದರೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಹಂತ 1 : ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು = P

ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ $= \frac{P \times n \times r}{100}$

$= \frac{P \times 1 \times r}{100} = \frac{Pr}{100}$

ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ = P + I

$= P + \frac{Pr}{100}$

$= \mathbf{P\left(1 + \frac{r}{100}\right)}$

ಹಂತ 2 : ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)$

ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ $= \dfrac{P\left(1+\frac{r}{100}\right)\times 1\times r}{100}$

(ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು)

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\frac{r}{100}$

ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ $= P + I$

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)+P\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\frac{r}{100}$

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)$

$= \mathbf{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2}$

ಹಂತ 3 : ಮೂರನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

ಮೂರನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ $= \dfrac{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times 1\times r}{100}$

(ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು)

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times\frac{r}{100}$

ಮೂರನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ $= P + I$

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2+P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times\frac{r}{100}$

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left(1+\frac{r}{100}\right)$

$= \mathbf{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^3}$

ಇದೇ ರೀತಿ, n ನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತವು $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

ಮತ್ತು 'n' ನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯು $A - P$

ಅಂದರೆ, ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (C. I.) $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - P$

ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು (To Compute Compound Interest)

ಸಂಗತಿ 1 : ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (Compounded Annually)

ಪ್ರತಿವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಅಸಲಿಗೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ, ಬಡ್ಡಿಯು ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ, $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ $= A - P$

ಸಂಗತಿ 2: ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (Compounded Half - Yearly)

ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅರ್ಧ ವರ್ಷಕ್ಕೊಮ್ಮೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ 6 ತಿಂಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಎರಡು ಮಾರ್ಪಾಡು ಕಾಲಾಂತರಗಳು ಅಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕ ದರವು ವಾರ್ಷಿಕ ದರದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ $\left(\frac{r}{2}\right)$ ರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, $A = P\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ $= A - P$

ಸಂಗತಿ 3: ಕಾಲು ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (Compounded Quarterly)

ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಾಲು ವಾರ್ಷಕ್ಕೊಮ್ಮೆ ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿದಾಗ, ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಮಾರ್ಪಾಡು ಕಾಲಾಂತರಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಕಾಲು ವಾರ್ಷಿಕ ದರವು ವಾರ್ಷಿಕ ದರದ ನಾಲ್ಕನೇ ಒಂದರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $\left(\frac{r}{4}\right)$ ರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, $A = P\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{4n}$ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ $= A - P$

ಸಂಗತಿ 4: ಕಾಲವು ವರ್ಷದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿದ್ದಾಗ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (Compounded when time being fraction of a year)

ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಿಹಾಕುವಾಗ ಆದರೆ ಕಾಲವು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾದಾಗ.

ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ ಆದರೆ ಕಾಲವು ಒಂದು ವರ್ಷದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾದಾಗ, ಅಂದರೆ ಉದಾಹರಣೆ $5\frac{1}{4}$ ವರ್ಷಗಳು ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ, ಆಗ ಮೊತ್ತ A ಎಂಬುದು

$$A = \underbrace{P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{5}}_{\text{5 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ}}\underbrace{\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]}_{\text{¼ ವರ್ಷಗಳಿಗೆ}} \text{ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ} = A - P$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.22

₹ 15,625 ಕ್ಕೆ ವಾರ್ಷಿಕ 8% ಬಡ್ಡಿಯ ದರದಲ್ಲಿ 3 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಚಾರಮಾಡಿದ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಮೊತ್ತ $= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{3}$

$= 15625\left(1 + \frac{8}{100}\right)^{3}$

$= 15625\left(1 + \frac{2}{25}\right)^{3}$

$= 15625\left(\frac{27}{25}\right)^{3}$

$= 15625 \times \frac{27}{25} \times \frac{27}{25} \times \frac{27}{25}$

$=$ ₹ 19,683

ಈಗ, ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ $= A - P = 19{,}683 - 15{,}625$

$=$ ₹ 4,058

ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಅಥವಾ ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಅಥವಾ ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ ಒಂದು ವರ್ಷದ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ₹ 100 ಏನಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡೋಣ.

ಕ್ರ. ಸಂ.	ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ	ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ
1	P = ₹ 100 ಗಳಿಗೆ ವಾರ್ಷಿಕ 10% ದರದಲ್ಲಿ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ.	P = ₹ 100 ಗಳಿಗೆ ವಾರ್ಷಿಕ 10% ದರದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ.
2	ಕಾಲಾವಧಿಯನ್ನು 1 ವರ್ಷವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ.	ಕಾಲಾವಧಿಯನ್ನು 6 ತಿಂಗಳುಗಳು ಅಥವಾ ½ ವರ್ಷವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ.
3	$I = \frac{100 \times 10 \times 1}{100}$ = ₹ 10	$I = \frac{100 \times 10 \times 1/2}{100}$ = ₹ 5
4	A = 100 + 10 = ₹ 110	A = 100 + 5 = ₹ 105 ಮುಂದಿನ 6 ತಿಂಗಳುಗಳಿಗೆ, P = ₹ 105
		ಆದ್ದರಿಂದ, $I = \frac{105 \times 10 \times 1/2}{100}$ = ₹ 5.25 ಮತ್ತು A = 105 + 5.25 = ₹ 110.25
5	A = ₹ 110	A = ₹ 110.25

ಆದ್ದರಿಂದ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ, ನಾವು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ದರವನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕ ದರದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.23

ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ ₹ 1000 ಕ್ಕೆ ವಾರ್ಷಿಕ 10% ದರದಲ್ಲಿ 18 ತಿಂಗಳುಗಳಿಗಾಗುವ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ, P = ₹ 1000, r = ವಾರ್ಷಿಕ 10%.

ಮತ್ತು n = 18 ತಿಂಗಳುಗಳು = $\frac{18}{12}$ ವರ್ಷಗಳು = $\frac{3}{2}$ ವರ್ಷಗಳು = $1\frac{1}{2}$ ವರ್ಷಗಳು

$\therefore$ 18 ತಿಂಗಳುಗಳ ನಂತರ ಮೊತ್ತ $= P\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$

$= 1000\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{100}\right)\right]^{2\times\frac{3}{2}}$

$= 1000\left(1 + \frac{10}{200}\right)^{3}$

$= 1000\left(\frac{21}{20}\right)^{3}$

$= 1000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$

= ₹ 1157.625

= ₹ 1157.63

ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ = A – P

= 1157.63 – 1000 = ₹ 157.63

Try these

ಒಂದು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ವಾರ್ಷಿಕ 8% ದರದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿ 3 ತಿಂಗಳುಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದರೆ ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ?

ಉದಾಹರಣೆ 1.24

₹ 20,000 ಕ್ಕೆ ವಾರ್ಷಿಕ 15% ದರದಲ್ಲಿ $2\frac{1}{3}$ ವರ್ಷಗಳಿಗಾಗುವ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ, P = ₹ 20,000, r = ವಾರ್ಷಿಕ15% ಮತ್ತು $n = 2\frac{1}{3}$ ವರ್ಷಗಳು.

$2\frac{1}{3}$ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಮೊತ್ತವು = A $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{r}{100}\right)\right]$

$$= 20000\left(1+\frac{15}{100}\right)^2\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{15}{100}\right)\right]$$

$$= 20000\left(1+\frac{3}{20}\right)^2\left(1+\frac{1}{20}\right)$$

$$= 20000\left(\frac{23}{20}\right)^2\left(\frac{21}{20}\right)$$

$$= 20000\times\frac{23}{20}\times\frac{23}{20}\times\frac{21}{20}$$

= ₹ 27, 772.50

ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ = A – P

= 27,772.50 – 20,000

= ₹ 7,772.50

ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಮೇಲಿನ ವಿಲೋಮ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು (Inverse Problems on Compound Interest)

$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ A, P, r ಮತ್ತು n ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಚರಾಂಶಗಳು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ. ಈ ನಾಲ್ಕು ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಚರಾಂಶಗಳು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ, ನಾಲ್ಕನೇ ಚರಾಂಶವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1.25

ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಂತೆ 2 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ₹ 640 ಎಂಬುದು ₹ 774.40 ಮೊತ್ತವಾದರೆ, ವಾರ್ಷಿಕ ದರವೇನು?

ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತ: P = ₹ 640, A = ₹ 774.40, n = 2 ವರ್ಷಗಳು, r = ?

$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

$$774.40 = 640\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{774.40}{640} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{77440}{64000} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{121}{100} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\left(\frac{11}{10}\right)^2 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{11}{10} = 1+\frac{r}{100}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{11}{10}-1$$

$$\frac{r}{100} = \frac{11-10}{10}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{1}{10}$$

$$r = \frac{100}{10}$$

ದರ r = ವಾರ್ಷಿಕ 10% .

ಉದಾಹರಣೆ 1.26

ವಾರ್ಷಿಕ 5% ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ದರದಲ್ಲಿ ₹ 1600 ಹಣವು ₹ 1852.20 ಆಗಲು ಎಷ್ಟು ಕಾಲ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತ: P = ₹ 1600, A = ₹ 1852.20, r = ವಾರ್ಷಿಕ 5%, n = ?

$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

$$1852.20 = 1600\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$$

$$\frac{1852.20}{1600} = \left(\frac{105}{100}\right)^n$$

$$\frac{185220}{160000} = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$$\frac{9261}{8000} = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$$\left(\frac{21}{20}\right)^3 = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$\therefore n$ = 3 ವರ್ಷಗಳು

Try these

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಲಾವಧಿ ಮತ್ತು ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ವಾರ್ಷಿಕ 8% ದರದಂತೆ 2 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೊತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.
2. ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ವಾರ್ಷಿಕ 4% ದರದಂತೆ 1½ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೊತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

1.5 ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

P ಎಂಬುದು ಅಸಲು, n = 2 ವರ್ಷಗಳು ಮತ್ತು r ಎಂಬುದು ಬಡ್ಡಿಯ ದರ ಆದಾಗ,

2 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಸರಳಬಡ್ಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = $P\left(\frac{r}{100}\right)^2$

ಉದಾಹರಣೆ 1.27

₹ 8,000 ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ವಾರ್ಷಿಕ10% ದರದಲ್ಲಿ 2 ವರ್ಷಗಳಿಗಾಗುವ ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ, P = ₹ 8000, n = 2 ವರ್ಷಗಳು, r = ವಾರ್ಷಿಕ 10%.

ಎರಡು ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $= P\left(\frac{r}{100}\right)^2$

$$= 8000\left(\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= 8000\left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$= 8000 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = ₹\ 80$$

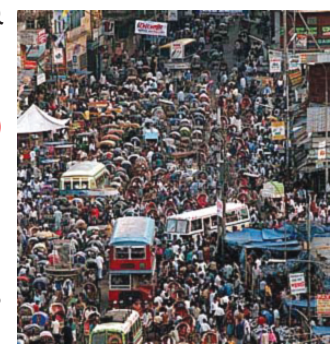
ಅಭ್ಯಾಸ 1.4

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಅಸಲು ₹ ಗಳಲ್ಲಿ	ವಾರ್ಷಿಕ % ದರ	ಕಾಲ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ
(i)	1000	5%	3
(ii)	4000	10%	2
(iii)	18,000	10%	$2\frac{1}{2}$

2. ಪ್ರಿಯದರ್ಶಿನಿಯು ₹ 8,000 ವನ್ನು 2 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ವಾರ್ಷಿಕ 12½% ದರದಂತೆ ರೂಪದರ್ಶಿನಿಯಿಂದ ಪಡೆದುಕೊಂಡಳು. ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ ಪ್ರಿಯದರ್ಶಿನಿಯು ಎಷ್ಟು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ರೂಪದರ್ಶಿನಿಗೆ ಪಾವತಿಸಬೇಕು?
3. ಮಾನಸಳು ₹ 80,000 ಗಳನ್ನು ಒಂದು ವ್ಯವಹಾರಕ್ಕೆ ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಿದಳು. ಅವಳು ವಾರ್ಷಿಕ 5% ದರದಲ್ಲಿ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. (i) ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಅವಳ ಸಾಲದ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು (ii) ಮೂರನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ, ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ₹ 24,000 ಕ್ಕೆ ವಾರ್ಷಿಕ 10% ದರದಲ್ಲಿ 1½ ವರ್ಷಗಳಿಗಾಗುವ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ದ್ರಾವಿಡ್ ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ₹ 8,192 ಗಳನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕ 12½% ದರದಂತೆ18 ತಿಂಗಳುಗಳಿಗೆ ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಅವನು ಪಡೆದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಕಾಲು ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ₹ 15,625 ಗಳಿಗೆ ವಾರ್ಷಿಕ 16% ದರದಂತೆ 9 ತಿಂಗಳುಗಳಿಗಾಗುವ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ವಾರ್ಷಿಕ 4% ಬಡ್ಡಿಯ ದರದಲ್ಲಿ 2 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ₹ 1,632 ವನ್ನು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನಾಗಿ ಪಡೆಯುವ ಅಸಲನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಚೇತನ್ ಒಂದು ದ್ವಿಚಕ್ರವಾಹನವನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ವಾರ್ಷಿಕ 15% ದರದಂತೆ ₹ 26,400 ನ್ನು ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಪಡೆದುಕೊಂಡನು. ಸಾಲವನ್ನು ತೀರಿಸಲು 2 ವರ್ಷಗಳು ಮತ್ತು 4 ತಿಂಗಳುಗಳ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಅವನು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಹಣವೆಷ್ಟು?
9. ಆರ್ಯನು ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ₹ 80,000 ವನ್ನು ಸಾಲವಾಗಿ ಪಡೆದುಕೊಂಡನು. ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು 10% ಆದರೆ, ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು (i) ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಮತ್ತು (ii) ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿದಾಗ 1½ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವನು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಂತೆ ₹ 2,400 ಕ್ಕೆ ವಾರ್ಷಿಕ 5% ದರದಲ್ಲಿ 2 ವರ್ಷಗಳಿಗಾಗುವ ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಗಳಿಗಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಂತೆ ₹ 6,400 ಕ್ಕೆ ವಾರ್ಷಿಕ 6 ¼% ದರದಲ್ಲಿ 2 ವರ್ಷಗಳಿಗಾಗುವ ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಗಳಿಗಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ವಾರ್ಷಿಕ 5% ದರದಲ್ಲಿ 2 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೊಬಲಗಿನ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ₹ 5 ಆದರೆ, ಮೊಬಲಗುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. ನಿತಿನ್ ವಾರ್ಷಿಕ 12% ದರದಂತೆ 3 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ₹ 12,500 ನ್ನು ಸರಳಬಡ್ಡಿಗೆ ಪಡದುಕೊಂಡನು. ನಂದಕುಮಾರನು ವಾರ್ಷಿಕ 10% ದರದಲ್ಲಿ ಅದೇ ಹಣವನ್ನು ಅದೇ ಕಾಲಾವಧಿಗೆ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಗೆ ಪಡೆದುಕೊಂಡನು. ಯಾರು ಹೆಚ್ಚು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪಾವತಿಸುವರು?
14. ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ವಾರ್ಷಿಕ 4% ದರದಂತೆ 1½ ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ₹ 1,32,651 ಮೊತ್ತವಾಗಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಬೇಕು?
15. ಚಂದ್ರಶೇಖರ್ ವಾರ್ಷಿಕ 5% ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ₹ 12,000 ವನ್ನು ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಿದನು. ಅವನು 'n' ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ₹ 13,230 ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡನು. 'n' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
16. 2 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ₹ 640 ಹಣವು ₹ 774.40 ಮೊತ್ತವಾದರೆ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಶೇಕಡಾ ದರವೇನು?
17. ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅರ್ಧ ವರ್ಷಕ್ಕೊಮ್ಮೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ ಒಂದು ಮತ್ತು ಅರ್ಧ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ₹ 2,000 ಹಣವು ₹ 2,315.25 ಮೊತ್ತವಾದರೆ ವಾರ್ಷಿಕ ಶೇಕಡಾ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



1.5.1 ಬೆಲೆ ಏರಿಕೆ ಮತ್ತು ಬೆಲೆ ಇಳಿಕೆ (Appreciation and Depreciation)

a) ಬೆಲೆ ಏರಿಕೆ

ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆ, ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಬೆಳವಣಿಗೆ, ಸ್ವತ್ತಿನ ಮೌಲ್ಯದ ಹೆಚ್ಚಳ, ಕೆಲವು ಬೆಲೆಬಾಳುವ ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆಯ ಹೆಚ್ಚಳ ಮುಂತಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

b) ಬೆಲೆ ಇಳಿಕೆ

ಯಂತ್ರಗಳು, ವಾಹನಗಳ ಬೆಲೆ, ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆ, ಕಟ್ಟಡಗಳ ಮೌಲ್ಯ, ಮುಂತಾದವುಗಳು ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$$

Do you know?

ಪ್ರಪಂಚದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ

ವರ್ಷ	ಜನಸಂಖ್ಯೆ
1700	600,000,000
1800	900,000,000
1900	1,500,000,000
2000	6,000,000,000

3 ಶತಮಾನಗಳಲ್ಲಿ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 10ರ ಗುಣಕವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.28

ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು ಪ್ರತಿವರ್ಷ 7% ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಳವಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 90,000 ಆದರೆ, 2 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ

ಇಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆ P = 90,000, ಹೆಚ್ಚಳದ ದರ $r = 7\%$, ವರ್ಷಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n = 2$.

'n' ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ $= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

$\therefore$ 2 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ $= 90000\left(1 + \frac{7}{100}\right)^2$

$$= 90000\left(\frac{107}{100}\right)^2$$

$$= 90000 \times \frac{107}{100} \times \frac{107}{100}$$

$$= 103041$$

ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ = 1,03,041

ಉದಾಹರಣೆ 1.29

ಒಂದು ಯಂತ್ರದ ಮೌಲ್ಯವು ಪ್ರತಿವರ್ಷವು 5% ಇಳಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಯಂತ್ರಕ್ಕೆ ₹ 30,000 ವನ್ನು ಪಾವತಿಸಿದನು. 3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅದರ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಇಂದಿನ ಯಂತ್ರದ ಮೌಲ್ಯ P = ₹ 30,000, ಇಳಿಕೆಯ ದರ $r = 5\%$,

ವರ್ಷಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n = 3$

'n' ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಯಂತ್ರದ ಮೌಲ್ಯ $= P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$

∴ ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಯಂತ್ರದ ಮೌಲ್ಯ $= 30000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3$

$$= 30000\left(\frac{95}{100}\right)^3$$

$$= 30000 \times \frac{95}{100} \times \frac{95}{100} \times \frac{95}{100}$$

$$= 25721.25$$

ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಯಂತ್ರದ ಮೌಲ್ಯ = ₹ 25,721.25

ಉದಾಹರಣೆ 1.30

ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು ಪ್ರತಿವರ್ಷ 5% ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 1,04,832 ಆದರೆ, 2 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟಾಗಿತ್ತು?

ಪರಿಹಾರ

2 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆ P ಆಗಿರಲಿ .

$$\therefore P\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 = 104832$$

$$P\left(\frac{105}{100}\right)^2 = 104832$$

$$P \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} = 104832$$

$$P = \frac{104832 \times 100 \times 100}{105 \times 105}$$

$$= 95085.71$$

= 95,086 (ಹತ್ತಿರದ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದು)

∴ 2 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 95,086 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.5

1. ಒಂದು ಶಾಲೆಗೆ ದಾಖಲಾದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2000 ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ದಾಖಲಾತಿಯು 5% ಹೆಚ್ಚಿದರೆ, 2 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇರುತ್ತಾರೆ?
2. ₹ 3,50,000 ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಕಾರು ಪ್ರತಿವರ್ಷವು 10% ಇಳಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ. 3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಕಾರಿನ ಬೆಲೆಯೇನು?
3. ಒಂದು ಮೋಟಾರ್ ಸೈಕಲ್ಲನ್ನು ₹ 50,000 ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಬೆಲೆಯು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವು 8% ದರದಲ್ಲಿ ಇಳಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ವರ್ಷದ ನಂತರ ಅದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗಾಲಯದಲ್ಲಿ ನಿಶ್ಚಿತ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪ್ರತಿ ಗಂಟೆಗೆ 2.5% ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಳವಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 5,06,000 ಇದ್ದರೆ ಎರಡು ಗಂಟೆಗಳ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಅದರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ ಜನರು ನಿರುದ್ಯೋಗ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಕಾರಣದಿಂದ ತಮ್ಮ ಹತ್ತಿರದ ನಗರಗಳಿಗೆ ವಲಸೆ ಬರಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರು. 2 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಆ ಗ್ರಾಮದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 6,000 ಆಗಿತ್ತು. ವಲಸೆಯು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವು 5% ದರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಯಂತ್ರದ ಇಂದಿನ ಮೌಲ್ಯವು ₹ 14,580 ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವು 10% ದರದಲ್ಲಿ ಅದರ ಮೌಲ್ಯವು ಇಳಿಕೆಯಾದರೆ, 3 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಯಂತ್ರದ ಮೌಲ್ಯವೇನು?
7. ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಲ್ಲಿ ದೊರಕುವ ಉದ್ಯೋಗಾವಕಾಶಗಳ ಕಾರಣದಿಂದ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವು 9% ಹೆಚ್ಚಳವಾಗುತ್ತದೆ. ಗ್ರಾಮದ ಇಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 11,881 ಆದರೆ, ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಏನು?

1.6 ಸಂಚಿತ ಠೇವಣಿಗಳು ಮತ್ತು ಆವರ್ತಕ ಠೇವಣಿಗಳು (Fixed Deposits and Recurring Deposits)

ಬ್ಯಾಂಕುಗಳು, ಅಂಚೆ ಕಛೇರಿಗಳು ಮತ್ತು ಇನ್ನಿತರೆ ಹಣಕಾಸಿನ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ವಿವಿಧ ಬಡ್ಡಿಯ ದರದಲ್ಲಿ ಸಾರ್ವಜನಿಕರಿಂದ ಠೇವಣಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತವೆ. ಜನರು ಇಂತಹ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿರಂತರ ಅವಧಿಯ ಆದಾಯವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಉಳಿತಾಯವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಾರೆ.

ಇಂತಹ ಹಣಕಾಸು ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ವಿವಿಧ ಉಳಿತಾಯ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಆಯೋಜಿಸಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಯೋಜನೆಗಳೆಂದರೆ,

(i) ಸಂಚಿತ ಠೇವಣಿ ಮತ್ತು (ii) ಆವರ್ತಕ ಠೇವಣಿ

(i) ಸಂಚಿತ ಠೇವಣಿ (Fixed Deposit)

ಈ ವಿಧದ ಠೇವಣಿಯಲ್ಲಿ, ಜನರು ಒಂದು ನಿಗದಿತ ಅವಧಿಗೆ ಗೊತ್ತಾದ ಪರಿಮಾಣದ ಹಣವನ್ನು ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಇಂತಹ ಠೇವಣಿಯನ್ನು ಸಂಚಿತ ಠೇವಣಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. (ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ F. D. ಎನ್ನಬಹುದಾಗಿದೆ.)

ಸೂಚನೆ: ಹೂಡಿಕೆಯು ಕಡಿಮೆ ಅವಧಿಗಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ದೀರ್ಘ ಅವಧಿಗಾಗಿರಬಹುದು. ಠೇವಣಿಗಳ ಅವಧಿಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ಅವರು ಹೆಚ್ಚಿನ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಾರೆ.

(ii) ಆವರ್ತಕ ಠೇವಣಿ (Recurring Deposit)

ಆವರ್ತಕ ಠೇವಣಿಯು (ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ R. D. ಎನ್ನಬಹುದಾಗಿದೆ) ಸಂಚಿತ ಠೇವಣಿಗಿಂತ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಈ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ, ಠೇವಣಿದಾರನು ಅವನ ಉಳಿತಾಯದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಹಣವನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡುವ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯವನ್ನು ಪಡೆದಿರುತ್ತಾನೆ. ಇದನ್ನು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಕೆಲವು ವರ್ಷಗಳ ಅವಧಿಗೆ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಅಂಚೆ ಕಛೇರಿಯಲ್ಲಿ ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ.

ಬ್ಯಾಂಕು ಅಥವಾ ಅಂಚೆ ಕಛೇರಿಯು ಒಟ್ಟು ಠೇವಣಿ ಹಣವನ್ನು ಬಡ್ಡಿಯೊಂದಿಗೆ ಅವಧಿಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಮರುಪಾವತಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ವಿವಿಧ ಠೇವಣಿಯನ್ನು ಆವರ್ತಕ ಠೇವಣಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. (ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ R.D. ಎನ್ನಬಹುದಾಗಿದೆ)

Do you know?

ಆವರ್ತಕ ಠೇವಣಿಗೆ ಮಾಸಿಕ ಕಂತುಗಳನ್ನು ಆ ತಿಂಗಳ ಒಳಗೆ ಯಾವ ದಿನದಲ್ಲಾದರೂ ಪಾವತಿಸಬಹುದು.

ಸೂಚನೆ: ಆವರ್ತಕ ಠೇವಣಿಯ ಮೇಲೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಆವರ್ತಕ ಠೇವಣಿಯ ಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಪಕ್ವ ಮೊತ್ತವನ್ನು (maturity amount) ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು r % ಮತ್ತು 'n' ತಿಂಗಳುಗಳಿಗೆ ಪಾವತಿಸಿದ ಮಾಸಿಕ ಕಂತು 'P' ಆಗಿರಲಿ.

$$\text{ಬಡ್ಡಿ} = \frac{PNr}{100}, \text{ ಇಲ್ಲಿ } N = \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \text{ ವರ್ಷಗಳು}$$

$$\text{ಪಕ್ವತೆಯಿಂದುಂಟಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ } A = Pn + \frac{PNr}{100}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.31

ತರುಣನು ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಎರಡು ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು 5 ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲ ಠೇವಣಿ ಇಟ್ಟನು. ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು ವಾರ್ಷಿಕ 8% ಆದರೆ, ಪಕ್ವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಠೇವಣಿ ಇಟ್ಟ ಅಸಲು P = ₹ 2,00,000, n = 5 ವರ್ಷಗಳು, r = ವಾರ್ಷಿಕ 8%

$$\text{ಬಡ್ಡಿ} = \frac{Pnr}{100} = 200000 \times 5 \times \frac{8}{100}$$

$$= ₹\ 80,000$$

$\therefore$ 5 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ಪಕ್ವ ಬೆಲೆ = 2,00,000 + 80,000 = ₹ 2,80,000.

ಉದಾಹರಣೆ 1.32

ವೈದೀಶನು ಒಂದು ಅಂಚೆ ಕಛೇರಿಯಲ್ಲಿ 5 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ₹ 500 ನ್ನು ಠೇವಣಿ ಇಡುತ್ತಾನೆ. ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು 7.5% ಆದರೆ, 5 ವರ್ಷಗಳ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಅವನು ಪಡೆಯುವ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಠೇವಣಿ ಇಟ್ಟ ಹಣ, P = ₹ 500

ತಿಂಗಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, n = 5 × 12 = 60 ತಿಂಗಳುಗಳು

ಬಡ್ಡಿಯ ದರ, r = $7\frac{1}{2}\% = \frac{15}{2}\%$

ಒಟ್ಟು ಹೂಡಿದ ಠೇವಣಿ = Pn = 500 × 60

= ₹ 30,000

$$\text{ಆವರ್ತಕ ಠೇವಣಿಯ ಅವಧಿ, } N = \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \text{ ವರ್ಷಗಳು}$$

$$= \frac{1}{24} \times 60 \times 61 = \frac{305}{2} \text{ ವರ್ಷಗಳು}$$

$$\text{ಬಡ್ಡಿ, I} = \frac{PNr}{100}$$

$$= 500 \times \frac{305}{2} \times \frac{15}{2 \times 100}$$

$$= ₹\ 5{,}718.75$$

$$\text{ಉಳಿದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ} = Pn + \frac{PNr}{100}$$

$$= 30{,}000 + 5{,}718.75$$

$$= ₹\ 35{,}718.75$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.33

ವಿಶಾಲ್ ಒಂದು ಅಂಚೆ ಕಛೇರಿಯ ಆವರ್ತಕ ಠೇವಣಿಯ ಖಾತೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ₹ 200 ರಂತೆ 5 ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲ ಠೇವಣಿ ಇಟ್ಟನು. ಅವನು ₹ 13,830 ನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡರೆ, ಬಡ್ಡಿಯ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಪಕ್ವ ಮೊತ್ತ , A = ₹ 13,830, P = ₹ 200, $n = 5 \times 12 = 60$ ತಿಂಗಳುಗಳು

$$\text{ಅವಧಿ, N} = \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \text{ ವರ್ಷಗಳು}$$

$$= \frac{1}{12} \times 60 \times \frac{61}{2} = \frac{305}{2} \text{ ವರ್ಷಗಳು}$$

$$\text{ಠೇವಣಿ ಇಟ್ಟ ಮೊತ್ತ} = Pn = 200 \times 60 = ₹\ 12,000$$

$$\text{ಪಕ್ವ ಮೊತ್ತ} = Pn + \frac{PNr}{100}$$

$$13830 = 12000 + 200 \times \frac{305}{2} \times \frac{r}{100}$$

$$13830 - 12000 = 305 \times r$$

$$1830 = 305 \times r$$

$$\therefore r = \frac{1830}{305} = 6\%$$

1.6.1 ಬಾಡಿಗೆ ಖರೀದಿ ಮತ್ತು ಕಂತುಗಳು (Hire Purchase and Instalments)

ಬ್ಯಾಂಕುಗಳು ಮತ್ತು ಹಣಕಾಸಿನ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ಇಂದಿನ ಗ್ರಾಹಕರ ಅಗತ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸಲು ಬಾಡಿಗೆ ಖರೀದಿ ಮತ್ತು ಕಂತುಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿವೆ.

ಬಾಡಿಗೆ ಖರೀದಿ: ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ, ಕೆಲವು ಕಾಲಾವಧಿಗಳವರೆಗೆ ಖರೀದಿದಾರನು ಆ ವಸ್ತುವಿನ ಒಡೆಯನಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಖರೀದಿದಾರನು ಖರೀದಿಸಿದ ವಸ್ತುವಿನ ಪೂರ್ತಿ ಹಣವನ್ನು ಪಾವತಿಸಿದಾಗ ಮಾತ್ರ ಆ ವಸ್ತುವಿನ ಒಡೆಯನಾಗುತ್ತಾನೆ.

ಕಂತುಗಳು: ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯೊಂದಿಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಇನ್ನಿತರ ಖರ್ಚುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಅದನ್ನು ಸಾಲದ ಅವಧಿಯ ತಿಂಗಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ ಹಣವನ್ನು ಕಂತುಗಳು ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಮಾನ ಮಾಸಿಕ ಕಂತುಗಳು (E.M.I.)

ಸಮಾನ ಮಾಸಿಕ ಕಂತುಗಳು ಎಂಬುದು ಕಂತುಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದು, ಕಡಿತಗೊಳಿಸುವ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯೊಂದಿಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಇನ್ನಿತರ ಖರ್ಚುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ನಾವು ಮರುಪಾವತಿಸಬೇಕು. ಒಟ್ಟು ಪಡೆದ ಹಣವನ್ನು ತಿಂಗಳುಗಳ ಅವಧಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಆಗ ದೊರಕುವ ಹಣವನ್ನು ಸಮಾನ ಮಾಸಿಕ ಕಂತುಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$$\text{E.M.I} = \frac{\text{ಅಸಲು} + \text{ಬಡ್ಡಿ}}{\text{ತಿಂಗಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಬಾಡಿಗೆ ಖರೀದಿ ಮತ್ತು ಕಂತುಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ವಿವಿಧ ಯೋಜನೆಗಳು

1. 0% ಬಡ್ಡಿ ಯೋಜನೆ: ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಶುಲ್ಕ ಮತ್ತು 4 ಅಥವಾ 5 ತಿಂಗಳುಗಳ ಕಂತುಗಳನ್ನು ಮುಂಗಡವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.

2. 100% ಹಣಕಾಸು: ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಶುಲ್ಕವನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತವೆ.

3. ರಿಯಾಯಿತಿ ಮಾರಾಟ: ಮಾರಾಟವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲು, ಕಂತುಗಳ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

4. ಆರಂಭ ಪಾವತಿ : ವಸ್ತುವನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಮುಂಗಡವಾಗಿ ಪಾವತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಹಣವನ್ನು ಮುಂಗಡ ಪಾವತಿ ಹಣ ಎಂದು ಸಹ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.34

ಒಂದು ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರದ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 18,940 ಆಗಿದೆ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯು ಕಂತುಗಳ ಮೂಲಕ ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಖರೀದಿಸುವ ವಿವಿಧ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸಿದೆ. ಖರೀದಿಸಲು ಉತ್ತಮ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿ.

ಕ್ರ. ಸಂ.	ವಿವಿಧ ಯೋಜನೆಗಳು	ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ₹ ಗಳಲ್ಲಿ	ಆರಂಭ ಪಾವತಿಗಳು	ಬಡ್ಡಿಯ ದರ	ಪ್ರಕ್ರಿಯಾ ಶುಲ್ಕ	ಅವಧಿ
(i)	75% ಹಣಕಾಸು	18,940	25%	12%	1%	24 ತಿಂಗಳುಗಳು
(ii)	100% ಹಣಕಾಸು	18,940	ಇಲ್ಲ	16%	2%	24 ತಿಂಗಳುಗಳು
(iii)	0% ಹಣಕಾಸು	18,940	ಮುಂಗಡವಾಗಿ 4 E. M. I.	ಇಲ್ಲ	2%	24 ತಿಂಗಳುಗಳು

ಮೇಲಿನ ಯೋಜನೆಗಳಿಗೆ E. M. I. ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) 75% ಹಣಕಾಸು

P = ₹ 18, 940, ಆರಂಭ ಪಾವತಿ = 25%, ದರ = 12%, ಪ್ರಕ್ರಿಯಾ ಶುಲ್ಕ = 1%

ಪ್ರಕ್ರಿಯಾ ಶುಲ್ಕ = ₹ 18, 940 ರ 1%

$= \frac{1}{100} \times 18940 =$ ₹ 189.40 $\simeq$ ₹ 189

ಆರಂಭ ಪಾವತಿ = ₹ 18,940 ರ 25%

$= \frac{25}{100} \times 18940 =$ ₹ 4, 735

ಸಾಲದ ಮೊತ್ತ = 18,940 – 4,735 = ₹ 14,205

ಬಡ್ಡಿ = $\frac{14205 \times 12 \times 2}{100}$

= ₹ 3,409. 20 ≃ ₹ 3,409

E. M. I. = $\frac{\text{ಸಾಲದ ಮೊತ್ತ + ಬಡ್ಡಿ}}{\text{ತಿಂಗಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$

= $\frac{14205 + 3409}{24} = \frac{17614}{24}$

= ₹ 733.92 ≃ ₹ 734

∴ ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ = 4,735 + 14,205 + 3,409 + 189

= ₹ 22,538

(ii) 100% ಹಣಕಾಸು

ಪ್ರಕ್ರಿಯಾ ಶುಲ್ಕ = ₹ 18,940 ರ 2%

= $\frac{2}{100} \times 18940$ = ₹ 378.80 ≃ ₹ 379

ಬಡ್ಡಿಯ ದರ = 16%

ಬಡ್ಡಿ = $18940 \times \frac{16}{100} \times 2$

= ₹ 6060.80 ≃ ₹ 6,061

E. M. I. = $\frac{\text{ಸಾಲದ ಮೊತ್ತ + ಬಡ್ಡಿ}}{\text{ತಿಂಗಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$

= $\frac{18940 + 6061}{24} = \frac{25001}{24}$

= ₹ 1,041.708 ≃ ₹ 1,041.71

= ₹ 1,042

ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ = 6,061 + 18,940 + 379 = ₹ 25,380

(iii) 0% ಬಡ್ಡಿ ಯೋಜನೆ

ಪ್ರಕ್ರಿಯಾ ಶುಲ್ಕ = ₹ 18,940 ರ 2%

= $\frac{2}{100} \times 18940$ = ₹ 378.80 ≃ ₹ 379

E. M. I. = $\frac{\text{ಸಾಲದ ಮೊತ್ತ + ಬಡ್ಡಿ}}{\text{ತಿಂಗಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$

= $\frac{18940 + 0}{24} = \frac{18940}{24}$

= ₹ 789.166 ≃ ₹ 789

ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ = 18,940 + 3,156 + 379 = ₹ 22,475

ಪಾವತಿಸಿದ ಮುಂಗಡ E. M. I. = ₹ 789 × 4 = ₹ 3,156

ಆದ್ದರಿಂದ, 0% ಬಡ್ಡಿ ಯೋಜನೆಯು ಉತ್ತಮವಾದ ಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.35

ಒಂದು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ನ ಬೆಲೆಯು ₹ 20,000 ಆಗಿದೆ. ಸಂಸ್ಥೆಯು ಅದನ್ನು 36 ತಿಂಗಳುಗಳಿಗೆ ನೀಡಿತು, ಆದರೆ 10% ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಿಧಿಸಿತು. ಖರೀದಿದಾರನು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಮಾಸಿಕ ಕಂತುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ನ ಬೆಲೆ = ₹ 20,000, ಬಡ್ಡಿ = ವಾರ್ಷಿಕ 10% , ಅವಧಿ = 36 ತಿಂಗಳುಗಳು (3 ವರ್ಷಗಳು)

$$\text{ಒಟ್ಟು ಬಡ್ಡಿ} = 20000 \times \frac{10}{100} \times 3$$

$$= ₹\ 6,000$$

$$\therefore \text{ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ} = 20,000 + 6,000$$

$$= ₹\ 26,000$$

$$\text{ಮಾಸಿಕ ಕಂತು} = \frac{\text{ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ}}{\text{ತಿಂಗಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$= \frac{26000}{36}$$

$$= ₹\ 722.22$$

$$\simeq ₹\ 722$$

ಅಭ್ಯಾಸ 1.6

1. ಶ್ವೇತಾಳು ₹ 25,000 ವನ್ನು 2 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಂಚಿತ ಠೇವಣಿಯಾಗಿ ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟಳು. ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು ವಾರ್ಷಿಕ 4% ಆದರೆ, ಪಕ್ವ ಹಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ನಿತಿನ್ ಸಂಚಿತ ಠೇವಣಿಯಾಗಿ ₹ 75,000 ವನ್ನು 3 ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟನು. ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು ವಾರ್ಷಿಕ 5% ಆದರೆ, ಪಕ್ವ ಹಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಇಮ್ರಾನ್ ಒಂದು ಅಂಚೆ ಕಛೇರಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ₹ 400 ನ್ನು 2 ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಆವರ್ತಕ ಠೇವಣಿಯಾಗಿ ಇಟ್ಟನು. ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು 12% ಆದರೆ, 2 ನೇ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಅವನು ಪಡೆದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ರಮೇಶನು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಹಣವನ್ನು 8% ದರದಂತೆ 6 ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲ ಒಂದು ಅಂಚೆ ಕಛೇರಿಯಲ್ಲಿ ಠೇವಣಿ ಇಟ್ಟನು ಮತ್ತು 6 ನೇ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ₹ 17,904 ನ್ನು ಪಡೆದನು. ಅವನ ಮಾಸಿಕ ಠೇವಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಕುಮಾರನು ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ₹ 700 ನ್ನು 6 ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲ ಆವರ್ತಕ ಠೇವಣಿಯಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟನು. ಅವನು 6 ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ₹ 64,197 ನ್ನು ಪಡೆದರೆ, ಬಡ್ಡಿಯ ದರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ.
6. ಒಂದು ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಅಲೆ ಒಲೆಯ ಬೆಲೆಯು ₹ 6,000 ಆಗಿದೆ. ಪೂರ್ಣಿಮಾಳು ಅದನ್ನು 5 ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ಖರೀದಿಸಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಸಂಸ್ಥೆಯು ವಾರ್ಷಿಕ 10% ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ದರದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದರೆ, E.M.I. ಮತ್ತು ಅವಳಿಂದ ಪಾವತಿಸಲ್ಪಡುವ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ಶೈಥ್ಯೀಕರಣ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 16,800 ಆಗಿದೆ. ರಂಜಿತನು 0% ಹಣಕಾಸಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ 3 E.M.I. ಯನ್ನು ಮುಂಗಡವಾಗಿ ಪಾವತಿಸಿ ಶೈಥ್ಯೀಕರಣ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತಾನೆ. ರಂಜಿತ್‌ನಿಂದ 3% ಪ್ರಕ್ರಿಯಾ ಶುಲ್ಕವನ್ನು ಸಹ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ. E.M.I. ಮತ್ತು 24 ತಿಂಗಳುಗಳ ಅವಧಿಗೆ ಅವನಿಂದ ಪಾವತಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಂದು ಊಟದ ಮೇಜಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 8,400 ಆಗಿದೆ. ತೇಜಸ್ವಿ ಅದನ್ನು 10 ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ಖರೀದಿಸಲು ಇಚ್ಛಿಸಿದನು. ಸಂಸ್ಥೆಯು ಅದನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕ 5% ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ದರದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದರೆ, E.M.I. ಮತ್ತು ಅವನಿಂದ ಪಾತಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1.7 ಸಂಯುಕ್ತ ಅಥವಾ ಮಿಶ್ರ ಅನುಪಾತ (Compound Variation)

ನೇರ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಈಗ ನಾವು ಸ್ಮರಿಸೋಣ.

ನೇರ ಅನುಪಾತ (Direct Variation)

ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದರ ಏರಿಕೆ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆಯು ಮತ್ತೊಂದರ ಅನುರೂಪ ಏರಿಕೆ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ಅದನ್ನು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ನೇರ ಅನುಪಾತದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ದೂರ ಮತ್ತು ಕಾಲ ಇವುಗಳು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಚಲಿಸಿದ ದೂರವು ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲವು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ (ವೇಗವು ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇದ್ದಾಗ).
2. ಅಸಲು ಮತ್ತು ಬಡ್ಡಿ ಇವುಗಳು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಅಸಲು ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ಪಡೆಯುವ ಬಡ್ಡಿಯು ಸಹ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ.
3. ವಸ್ತುಗಳ ಖರೀದಿ ಮತ್ತು ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದ ಹಣ ಇವುಗಳು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಹೆಚ್ಚು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಹಣವು ಖರ್ಚಾಗುತ್ತದೆ.

ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತ (Indirect Variation or Inverse Variation)

ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದರ ಏರಿಕೆ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆಯು ಮತ್ತೊಂದರ ಅನುರೂಪ ಇಳಿಕೆ ಅಥವಾ ಏರಿಕೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ಅದನ್ನು ನಾವು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಕೆಲಸ ಮತ್ತು ಕಾಲ ಇವುಗಳು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
2. ವೇಗ ಮತ್ತು ಕಾಲ ಇವುಗಳು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಒಂದು ಅಂತರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ವೇಗವು ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
3. ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಆಹಾರದ ಪರಿಮಾಣ ಇವುಗಳು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ದೊರಕುವ ಆಹಾರವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಯುಕ್ತ ಅನುಪಾತ (Compound Variation)

ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅನುಪಾತಗಳ ಸರಪಳಿಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತವೆ. ಇಂತಹವುಗಳನ್ನು ಸಂಯುಕ್ತ ಅನುಪಾತ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಎರಡು ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಅನುಪಾತಗಳ ವಿವಿಧ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಅನುಪಾತ I	ಅನುಪಾತ II
ನೇರ	ನೇರ
ವಿಲೋಮ	ವಿಲೋಮ
ನೇರ	ವಿಲೋಮ
ವಿಲೋಮ	ನೇರ

ಸಂಯುಕ್ತ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸಲು ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಪರಿಹರಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.36

20 ಗಂಡಸರು 112 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಗೋಡೆಯನ್ನು 6 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಿದರೆ, 25 ಗಂಡಸರು 3 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಉದ್ದದ ಗೋಡೆಯನ್ನು ಕಟ್ಟುತ್ತಾರೆ?

ಪರಿಹಾರ

ವಿಧಾನ 1: ಸಮಸ್ಯೆಯು ಗಂಡಸರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದ ಎಂಬ ಚರಾಂಶಗಳ ಮೂರು ಗಣಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆ	ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದ ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ
20	6	112
25	3	x

ಹಂತ 1 : ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದ ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆಯು 20 ರಿಂದ 25 ರವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದವು ಸಹ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮಾನುಪಾತವು $20 : 25 :: 112 : x$ ..... (1)

ಹಂತ 2: ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದ ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 6 ರಿಂದ 3 ಕ್ಕೆ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ, ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದವು ಸಹ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮಾನುಪಾತವು $6 : 3 :: 112 : x$ ..... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ

$$\left.\begin{matrix} 20:25 \\ 6:3 \end{matrix}\right\} :: 112 : x$$

ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂತ್ಯ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = ಮಧ್ಯ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಅಂತ್ಯ ಪದಗಳು		ಮಧ್ಯ ಪದಗಳು		ಅಂತ್ಯ ಪದಗಳು
20	:	25 :: 112	:	x
6	:	3		

ಆದ್ದರಿಂದ, $20 \times 6 \times x = 25 \times 3 \times 112$

$$x = \frac{25 \times 3 \times 112}{20 \times 6} = 70 \text{ ಮೀಟರುಗಳು.}$$

ವಿಧಾನ 2

ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆ	ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದ ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ
20	6	112
25	3	x

ಹಂತ 1: ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದ ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆಯು 20 ರಿಂದ 25 ರವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದವು ಸಹ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

$$\text{ಗುಣಾಕಾರದ ಅಪವರ್ತನ} = \frac{25}{20}$$

ಹಂತ 2: ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದ ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 6 ರಿಂದ 3 ಕ್ಕೆ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ, ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದವು ಸಹ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

$$\text{ಗುಣಾಕಾರದ ಅಪವರ್ತನ} = \frac{3}{6}.$$

$$\therefore x = \frac{25}{20} \times \frac{3}{6} \times 112 = 70 \text{ ಮೀಟರುಗಳು}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.37

6 ಗಂಡಸರು ದಿನಕ್ಕೆ 10 ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿ ಒಂದು ಲಘು ಕೆಲಸವನ್ನು 24 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು 9 ಗಂಡಸರು ದಿನಕ್ಕೆ 8 ಗಂಟೆಗಳು ಕಾಲ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿ ಎಷ್ಟು ದಿನದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು?

ಪರಿಹಾರ

ವಿಧಾನ 1: ಸಮಸ್ಯೆಯು ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆ, ಕೆಲಸದ ಅವಧಿ ಮತ್ತು ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ಚರಾಂಶಗಳ 3 ಗಣಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆ	ಕೆಲಸದ ಅವಧಿ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ)	ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
6	10	24
9	8	x

ಹಂತ 1: ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆಯು 6 ರಿಂದ 9 ಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮಾನುಪಾತವು $9 : 6 :: 24 : x$ ..... (1)

ಹಂತ 2: ದಿನದ ಕೆಲಸದ ಅವಧಿ ಮತ್ತು ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ಕೆಲಸದ ಅವಧಿಯು 10 ರಿಂದ 8 ಕ್ಕೆ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ, ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮಾನುಪಾತವು $8 : 10 :: 24 : x$ ..... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ

$$\left.\begin{matrix} 9:6 \\ 8:10 \end{matrix}\right\} :: 24 : x$$

ಅಂತ್ಯ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = ಮಧ್ಯ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಅಂತ್ಯ ಪದಗಳು		ಮಧ್ಯ ಪದಗಳು		ಅಂತ್ಯ ಪದಗಳು
9	:	6 : : 24	:	x
8	:	10		

ಆದ್ದರಿಂದ, $9 \times 8 \times x = 6 \times 10 \times 24$

$$x = \frac{6 \times 10 \times 24}{9 \times 8} = 20 \text{ ದಿನಗಳು}$$

ಸೂಚನೆ: 1. ನೇರ ಅನುಪಾತವನ್ನು ↓ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಿರಿ. (ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಬಾಣದ ಗುರುತು)
2. ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತವನ್ನು ↑ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಿರಿ. (ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬಾಣದ ಗುರುತು)
3. ಗುಣಾಕಾರದ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಬಾಣದ ಗುರುತನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ತಲೆಯ ಭಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂಶದಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಬಾಲದ ಭಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಛೇದದಲ್ಲಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಎರಡನೇ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ, ಮೇಲಿನ ಟಿಪ್ಪಣಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

ವಿಧಾನ 2 : (ಬಾಣದ ಗುರುತನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ) (Using arrow marks)

ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆ	ಕೆಲಸದ ಅವಧಿ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ)	ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
6	10	24
9	8	x

ಹಂತ 1 : ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆಯು 6 ರಿಂದ 9 ಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

ಗುಣಾಕಾರದ ಅಪವರ್ತನ $= \frac{6}{9}$

ಹಂತ 2: ದಿನದ ಕೆಲಸದ ಅವಧಿ ಮತ್ತು ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ಕೆಲಸದ ಅವಧಿಯು 10 ರಿಂದ 8 ಕ್ಕೆ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ, ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಹ ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

ಗುಣಾಕಾರದ ಅಪವರ್ತನ $= \frac{10}{8}$

$$\therefore x = \frac{6}{9} \times \frac{10}{8} \times 24 = 20 \text{ ದಿನಗಳು.}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 1.7

1. 12 ಜನ ಮರಗೆಲಸದವರು ದಿನಕ್ಕೆ 10 ಗಂಟೆಗಳು ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿ ಪೀಠೋಪಕರಣಗಳ ಕೆಲಸವನ್ನು 18 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದರು. 15 ಮರ ಕೆಲಸದವರು ದಿನಕ್ಕೆ 6 ಗಂಟೆಗಳು ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿದರೆ ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?
2. 80 ಯಂತ್ರಗಳು 6 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವಿಧದ 4,800 ಸಂಚಾರಿ ದೂರವಾಣಿ (mobile) ಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸ ಬಹುದು. ಒಂದು ಯಂತ್ರವು ಒಂದು ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಂಚಾರಿ ದೂರವಾಣಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು? 25 ಯಂತ್ರಗಳು 5 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಂಚಾರಿ ದೂರವಾಣಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತವೆ?
3. 14 ಜನ ಅಚ್ಚುಮೊಳೆ ಜೋಡಿಸುವವರು 5 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ 70 ಪುಟಗಳಿರುವ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, 10 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಜನ ಅಚ್ಚುಮೊಳೆ ಜೋಡಿಸುವವರು ಅದೇ ಪುಸ್ತಕದ 100 ಪುಟಗಳನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತಾರೆ?
4. 2,400 ಚದರ ಮೀಟರ್ ಭೂಮಿಯನ್ನು 10 ದಿನಗಳ ಕಾಲ 12 ಕೆಲಸಗಾರರು ಕೃಷಿ ಮಾಡಿದರೆ, 5,400 ಚದರ ಮೀಟರ್ ಭೂಮಿಯನ್ನು 18 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ ಮಾಡಲು ಎಷ್ಟು ಕೆಲಸಗಾರರ ಅಗತ್ಯವಿದೆ?
5. ಸ್ವಾತಿಯು ಪ್ರತಿದಿನ 4 ಗಂಟೆಗಳು ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿ 18 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ 5 ಸೀರೆಗಳಿಗೆ ಕಸೂತಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಾಳೆ. ಪ್ರತಿದಿನ 6 ಗಂಟೆಗಳು ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿ 10 ಸೀರೆಗಳಿಗೆ ಕಸೂತಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಲು ಅವಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?
6. ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ₹ 2,500 ಠೇವಣಿ ಇಟ್ಟ ಮೊತ್ತವು 6 ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ ₹ 100 ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ₹ 3,200 ಕ್ಕೆ 9 ತಿಂಗಳುಗಳಿಗೆ ಅದೇ ಬಡ್ಡಿಯ ದರದಂತೆ ಬಡ್ಡಿಯು ಎಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ?

1.8 ಕಾಲ ಮತ್ತು ಕೆಲಸ (Time and Work)

ನಾವು ಹಲವು ಜನರ ಕೆಲಸವನ್ನು ಹೋಲಿಸುವಾಗ, ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ಕೆಲಸದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಕಾಲ ಮತ್ತು ಕೆಲಸಗಳು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದವುಗಳು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾಡಲು ಹೆಚ್ಚು ಜನರು ಸೇರಿದರೆ, ಕೆಲಸವು ಕಡಿಮೆ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಾಗ, ಕೆಳಗಿನ ಮುಖ್ಯಾಂಶಗಳನ್ನು ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲೇಬೇಕು.

1. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಒಟ್ಟು ಕೆಲಸವನ್ನು 'n' ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಅವನು ಒಟ್ಟು ಕೆಲಸದ '$\frac{1}{n}$' ರಷ್ಟು ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 4 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಅವನು ಕೆಲಸದ $\frac{1}{4}$ ಭಾಗವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಾನೆ.
2. ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಡುವ ಕೆಲಸದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಒಟ್ಟು ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 1/(1 ದಿನದ ಕೆಲಸ). ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸದ $\frac{1}{10}$ ಭಾಗವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ, ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)} = 1 \times \frac{10}{1} = 10 \text{ ದಿನಗಳು.}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.38

A ಎಂಬುವವನು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 20 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು B ಎಂಬುವವನು ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು 30 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ, ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ?

ಪರಿಹಾರ

1 ದಿನದಲ್ಲಿ A ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ = $\frac{1}{20}$, 1 ದಿನದಲ್ಲಿ B ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ = $\frac{1}{30}$

1 ದಿನದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಇಬ್ಬರಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$

$$= \frac{3+2}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$$

A ಮತ್ತು B ಗಳಿಬ್ಬರಿಂದ ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$$= \frac{1}{1/12} = 12 \text{ ದಿನಗಳು.}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.39

A ಮತ್ತು B ಇಬ್ಬರೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 8 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ A ಒಬ್ಬನೇ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು 12 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. B ಒಬ್ಬನೇ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾಡಲು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ?

ಪರಿಹಾರ

1 ದಿನದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಇಬ್ಬರಿಂದ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ = ಕೆಲಸದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗ

1 ದಿನದಲ್ಲಿ A ನಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ = ಕೆಲಸದ $\frac{1}{12}$ ಭಾಗ.

1 ದಿನದಲ್ಲಿ B ನಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{3-2}{24} = \frac{1}{24}$

ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು B ಒಬ್ಬನೇ ಮಾಡಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{1}{1/24} = 24$ ದಿನಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 1.40

A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು ಒಂದು ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ನಿರತರಾಗಿರುತ್ತಾರೆ. A ಎಂಬುವವನು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 12 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು B ಎಂಬುವವನು ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು 20 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ 3 ದಿನಗಳು ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿ ನಂತರ A ಯು ಹೊರಹೋಗುತ್ತಾನೆ. B ಯು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತಾನೆ?

Try these

A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿ ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ 20, 5 ಮತ್ತು 4 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತಾರೆ. ಎಲ್ಲರೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿದರೆ, ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

1 ದಿನದಲ್ಲಿ A ನಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{12}$

1 ದಿನದಲ್ಲಿ B ನಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{20}$

1 ದಿನದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

$= \frac{5+3}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$

3 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{2}{15} \times 3 = \frac{2}{5}$

ಉಳಿದ ಕೆಲಸ $= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

ಉಳಿದ ಕೆಲಸವನ್ನು 'B'ಯು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{20}} = \frac{3}{5} \times \frac{20}{1}$

$=$ 12 ದಿನಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 1.41

ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು A ಮತ್ತು B ಗಳಿಬ್ಬರೂ 12 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ, B ಮತ್ತು C ಗಳಿಬ್ಬರೂ 15 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ C ಮತ್ತು A ಗಳಿಬ್ಬರೂ 20 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಅವರೆಲ್ಲರೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತಾರೆ?

ಪರಿಹಾರ

1 ದಿನದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಇಬ್ಬರಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{12}$

1 ದಿನದಲ್ಲಿ B ಮತ್ತು C ಇಬ್ಬರಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{15}$

1 ದಿನದಲ್ಲಿ C ಮತ್ತು A ಇಬ್ಬರಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{20}$

1 ದಿನದಲ್ಲಿ (A+B)+(B+C)+(C+A) ಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}$

1 ದಿನದಲ್ಲಿ (2A + 2B + 2C) ಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{5+4+3}{60}$

1 ದಿನದಲ್ಲಿ 2(A + B + C) ಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{12}{60}$

1 ದಿನದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟಿಗೆ A, B ಮತ್ತು C ಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{2} \times \frac{12}{60} = \frac{1}{10}$

$\therefore$ A, B ಮತ್ತು C ಗಳು 10 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸುತ್ತಾರೆ.

1 ದಿನದಲ್ಲಿ A ನಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ

ಅಂದರೆ, [(A + B + C) ಯ ಕೆಲಸ – (B + C) ಯ ಕೆಲಸ] = $\frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{3-2}{30} = \frac{1}{30}$

$\therefore$ A ಯು ಕೆಲಸವನ್ನು 30 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುತ್ತಾನೆ.

1 ದಿನದಲ್ಲಿ B ನಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ

ಅಂದರೆ, [(A + B + C) ಯ ಕೆಲಸ – (C + A) ಯ ಕೆಲಸ] = $\frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{2-1}{20} = \frac{1}{20}$

$\therefore$ B ಯು ಕೆಲಸವನ್ನು 20 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುತ್ತಾನೆ.

1 ದಿನದಲ್ಲಿ C ನಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ

ಅಂದರೆ, [(A + B + C) ಯ ಕೆಲಸ – (A + B)ಯ ಕೆಲಸ] = $\frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{6-5}{60} = \frac{1}{60}$

$\therefore$ C ಯು ಕೆಲಸವನ್ನು 60 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುತ್ತಾನೆ.

ಉದಾಹಾರಣೆ 1.42

A ಯು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 10 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು B ಯು ಅದನ್ನು 15 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಅವರು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ ₹ 1500 ನ್ನು ಗಳಿಸಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಪಡೆದ ಹಣವೆಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ

1 ದಿನದಲ್ಲಿ A ನಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{10}$

1 ದಿನದಲ್ಲಿ B ನಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{15}$

ಅವರ ಕೆಲಸದ ಪ್ರಮಾಣ (ಅನುಪಾತ) $= \frac{1}{10} : \frac{1}{15} = 3 : 2$

ಒಟ್ಟು ಪಾಲು = ₹ 1500

A ನ ಪಾಲು $= \frac{3}{5} \times 1500 =$ ₹ 900

B ನ ಪಾಲು $= \frac{2}{5} \times 1500 =$ ₹ 600

ಉದಾಹಾರಣೆ 1.43

ಎರಡು ನಲ್ಲಿಗಳು ಒಂದು ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯನ್ನು 30 ನಿಮಿಷಗಳು ಮತ್ತು 40 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸುತ್ತವೆ. ಮತ್ತೊಂದು ನಲ್ಲಿಯು ಅದನ್ನು 24 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಖಾಲಿಮಾಡುತ್ತದೆ. ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯು ಖಾಲಿ ಇದ್ದು, ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ನಲ್ಲಿಗಳನ್ನು ತೆರೆದರೆ, ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯು ಎಷ್ಟು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ತುಂಬುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ

1 ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ನಲ್ಲಿಯಿಂದ ನೀರು ತುಂಬುವ ಪರಿಮಾಣ $= \frac{1}{30}$

1 ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ನಲ್ಲಿಯಿಂದ ನೀರು ತುಂಬುವ ಪರಿಮಾಣ $= \frac{1}{40}$

1 ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ನಲ್ಲಿಯಿಂದ ನೀರು ಖಾಲಿಯಾಗುವ ಪರಿಮಾಣ $= \frac{1}{24}$

ಎಲ್ಲಾ 3 ನಲ್ಲಿಗಳನ್ನು ತೆರೆದಾಗ, 1 ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ನೀರು ತುಂಬುವ ಪರಿಮಾಣ

$$= \frac{1}{30} + \frac{1}{40} - \frac{1}{24}$$

$$= \frac{4+3-5}{120} = \frac{7-5}{120}$$

$$= \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯು ತುಂಬಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲ $= \frac{1}{1/60} = 60$ ನಿಮಿಷಗಳು

$= 1$ ಗಂಟೆ

ಅಭ್ಯಾಸ 1.8

1. ಒಬ್ಬ ಪರುಷನು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 4 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಒಬ್ಬ ಮಹಿಳೆಯು ಅದನ್ನು 12 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಇಬ್ಬರೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಕೆಲಸಮಾಡಿದರೆ, ಕೆಲಸವು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ?
2. ಇಬ್ಬರು ಹುಡುಗರು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದರೆ 10 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತಾರೆ. ಮೊದಲನೆ ಹುಡುಗನು ಅವನೊಬ್ಬನೇ 15 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಎರಡನೇ ಹುಡುಗನು ಅವನೊಬ್ಬನೇ ಅದನ್ನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. A, B ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಮೂರು ಗಂಡಸರು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ 8, 12 ಮತ್ತು 16 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತಾರೆ. A ಮತ್ತು B ಇಬ್ಬರು ಒಟ್ಟಿಗೆ 3 ದಿನಗಳು ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ನಂತರ B ಯು ಹೊರಬರುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು C ಯು ಸೇರ್ಪಡೆಯಾಗುತ್ತಾನೆ. A ಮತ್ತು C ಇಬ್ಬರು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತಾರೆ?
4. A ಎಂಬ ನಲ್ಲಿಯು 10 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ತೊಟ್ಟಿಯನ್ನು ತುಂಬಿಸುತ್ತದೆ. B ಎಂಬ ಎರಡನೇ ನಲ್ಲಿಯು 20 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸುತ್ತದೆ. C ಎಂಬ ಮೂರನೇ ನಲ್ಲಿಯು 15 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಖಾಲಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ತೊಟ್ಟಿಯು ಖಾಲಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಎಲ್ಲಾ ನಲ್ಲಿಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ತೆರೆದಾಗ ಎಷ್ಟು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅದು ತುಂಬುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. A ಯು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 20 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು B ಯು ಅದನ್ನು 30 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತಾನೆ. ಅವರಿಬ್ಬರು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತಾರೆ. ₹ 600 ನ್ನು ಕೂಲಿಯಾಗಿ ಪಾವತಿಸಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಪಾಲನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ 12, 24 ಮತ್ತು 8 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಅವರೆಲ್ಲರೂ ಸೇರಿ ಒಂದು ದಿನ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ನಂತರ C ಯು ಗುಂಪಿನಿಂದ ಹೊರಬರುತ್ತಾನೆ. A ಮತ್ತು B ಇಬ್ಬರು ಉಳಿದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತಾರೆ?
7. ಒಂದು ನಲ್ಲಿಯು 15 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯನ್ನು ತುಂಬಿಸುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ನಲ್ಲಿಯು ಅದನ್ನು 20 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಖಾಲಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ತೊಟ್ಟಿಯು ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಖಾಲಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ನಲ್ಲಿಗಳು ಕಾರ್ಯಗತ ಮಾಡಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರೆ, ಎಷ್ಟು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ತೊಟ್ಟಿಯು ತುಂಬುತ್ತದೆ?

ವಿಸ್ತರಣೆ: C.P. = ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ (Cost Price), S.P. = ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ (Selling Price), M.P. = ಮುಖಬೆಲೆ (Marked Price), P = ಅಸಲು (Principal), r = ಬಡ್ಡಿಯ ದರ (Rate of interest), n = ಕಾಲಾವಧಿ (time period), A = ಮೊತ್ತ (Amount), C. I. = ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (Compound Interest)

Concept Summary

- ಶೇಕಡ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥ ನೂರಕ್ಕೆ. ಛೇದದಲ್ಲಿ ನೂರನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಶೇಕಡ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- ಲಾಭದ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತೇವೆ.

  ಲಾಭ = S.P. – C.P.; ಶೇಕಡ ಲಾಭ $= \dfrac{\text{ಲಾಭ}}{\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ}} \times 100.$

  S.P. $= \left(\dfrac{100 + \text{ಲಾಭ}\%}{100}\right) \times$ C.P.; C.P. $= \left(\dfrac{100}{100 + \text{ಲಾಭ}\%}\right) \times$ S.P.
- ನಷ್ಟದ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತೇವೆ.

  ನಷ್ಟ = C.P. – S.P.; ಶೇಕಡ ನಷ್ಟ $= \dfrac{\text{ನಷ್ಟ}}{\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ}} \times 100.$

  S. P. $= \left(\dfrac{100 - \text{ನಷ್ಟ}\%}{100}\right) \times$ C.P.; C.P. $= \left(\dfrac{100}{100 - \text{ನಷ್ಟ}\%}\right) \times$ S.P.
- ರಿಯಾಯಿತಿ ಎಂಬುದು ಮುಖ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಕಡಿತವಾಗಿದೆ.
- ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ಎಂಬುದು ಮುಖ ಬೆಲೆಗೆ ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ನಂತರ ಪಾವತಿಸುವ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.
- ರಿಯಾಯಿತಿ = M.P. – S.P.
- M.P. $= \dfrac{100}{100 - \text{ರಿಯಾಯಿತಿ}\%} \times$ S.P.; S.P. $= \dfrac{100 - \text{ರಿಯಾಯಿತಿ}\%}{100} \times$ M.P.
- C.P. $= \dfrac{100 - \text{ರಿಯಾಯಿತಿ}\%}{100 + \text{ಲಾಭ}\%} \times$ M.P.; M.P. $= \dfrac{100 + \text{ಲಾಭ}\%}{100 - \text{ರಿಯಾಯಿತಿ}\%} \times$ C.P.
- ಶೇಕಡ ರಿಯಾಯಿತಿ $= \dfrac{\text{ರಿಯಾಯಿತಿ}}{\text{ಮುಖ ಬೆಲೆ}} \times 100.$
- ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು

  (i) ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದಾಗ, $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

  (ii) ಅರ್ಧ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ, $A = P\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$

  (iii) ಕಾಲು ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ, $A = P\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{4n}$
- ಬೆಲೆ ಏರಿಕೆ, $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$; ಬೆಲೆ ಇಳಿಕೆ, $A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$
- ಎರಡು ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಸರಳಬಡ್ಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $= P\left(\frac{r}{100}\right)^2$
- A ನ ಒಂದು ದಿನದ ಕೆಲಸ $= \dfrac{1}{\text{A ಯು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$
- 'x' ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದ ಕೆಲಸ = ಒಂದು ದಿನದ ಕೆಲಸ $\times x$.

2

ರೇಖಾಗಣಿತ

2.1 ಪೀಠಿಕೆ

2.2 ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಶೀಲತೆ

2.3 ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ

2.4 ವೃತ್ತಗಳು

ಪೈಥಾಗೊರಸ್

(ಕ್ರಿ.ಪೂ. 582 - 497)

ಇವರು ಸರ್ವಕಾಲಿಕ ಪ್ರಮುಖ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರು. ಇವರು ತಮ್ಮದೇ ಹೆಸರಿನ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಸಂಬಂಧಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಖ್ಯಾತರಾಗಿದ್ದಾರೆ.

2.1 ಪೀಠಿಕೆ (Introduction)

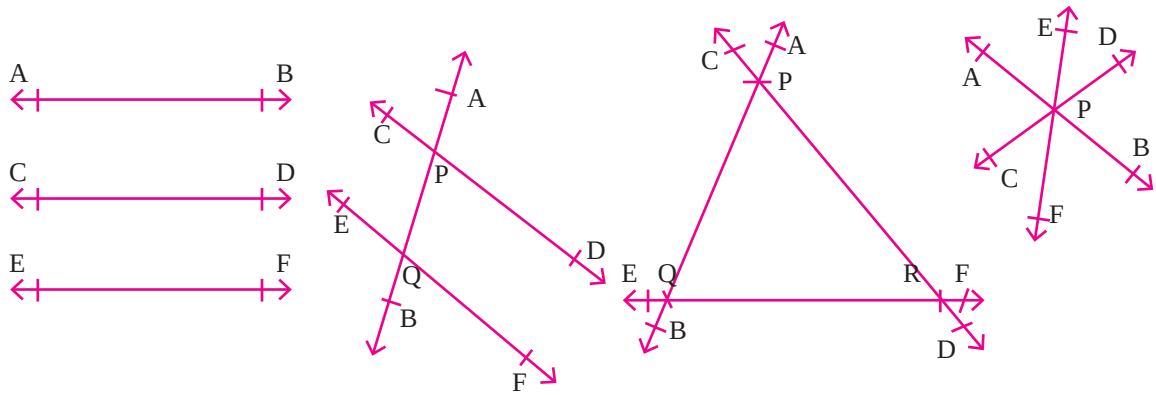
ಕ್ರಿ. ಪೂ. 1000 ವರ್ಷಗಳಿಗೂ ಮೊದಲೇ **ರೇಖಾಗಣಿತ**ವು ಈಜಿಪ್ಟಿಯನ್ನರಿಂದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತು. ಇದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಮೂಲ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಅಥವಾ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಾಧನೆಗಳ ತಾರ್ಕಿಕ ಪದ್ಧತಿಯಾಗಿ ಗ್ರೀಕರಿಂದ ಅಮೂರ್ತಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತು.

ನಮ್ಮ ದಿನನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಹಲವಾರು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ವಿಶೇಷವಾಗಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಹಲವಾರು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಜಮೀನನ್ನು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವು ಜಮೀನಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ತುಂಬಾ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಪಾದದಿಂದ ಶೃಂಗಕ್ಕೆ ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರಿಂದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಶೀಲತೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನಾವು ನೋಡೋಣ.

2.2 ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಶೀಲತೆ (ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥತೆ) (Concurrency in Triangles)

ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಕಂಡುಬರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳೇನು? ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿರಬಹುದು.



(a) (b) (c) (d)

(a) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB ,CD ಮತ್ತು EF ಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವು **ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ.**

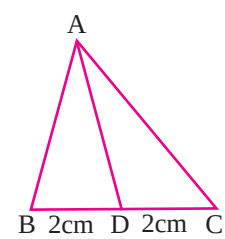
(b) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB ಮತ್ತು CD ಗಳು P ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. AB ಮತ್ತು EF ಗಳು Q ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P, Q ಗಳು **ಎರಡು ಛೇದನಾ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ.**

(c) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, P, Q, R ಗಳು **ಮೂರು ಛೇದನಾ ಬಿಂದುಗಳು.**

ಆದರೆ, (d) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, P ಯು ಮಾತ್ರ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ AB, CD, EF ಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದು P ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತವೆ. ಈ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸಂಗಮಶೀಲ ರೇಖೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. P ಬಿಂದುವನ್ನು ಸಂಗಮ ಬಿಂದು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ, ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರ, ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿಕೇಂದ್ರ. ಈಗ ನಾವು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯುವುದು ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲಿದ್ದೇವೆ.

2.2.1 ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ (Centroid of a Triangle)

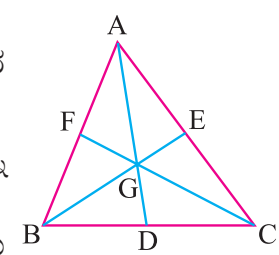


ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ABC ಯು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

D ಯು BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. AD ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ AD ಯು Δ ABC ಯ ಒಂದು ಮಧ್ಯರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

ತ್ರಿಭುಜದ **ಮಧ್ಯರೇಖೆ**ಯು ಶೃಂಗ ಮತ್ತು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವಾಗಿದೆ.



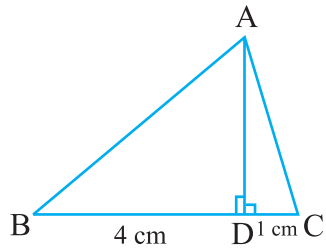
AD, BE, CF ಗಳು Δ ABC ಯ ಮೂರು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳಾಗಿರುವ ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಅವು G ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಶೀಲ (ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ) ವಾಗಿವೆ. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಸಂಗಮಶೀಲವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸಂಗಮಬಿಂದುವನ್ನು **ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ** ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು 'G' ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

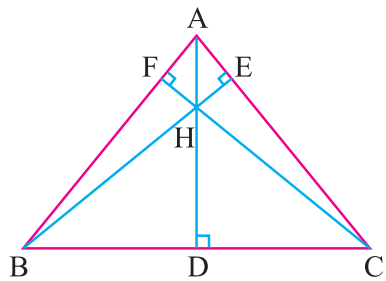
ಸೂಚನೆ : (i) ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು ಪ್ರತಿ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯನ್ನು 2 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.
(ii) ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು ಭೌತಿಕ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

2.2.2 ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (Orthocentre of a Triangle)



ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ABC ಯು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.
A ನಿಂದ BC ಗೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
AD ಯು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$. ಇಲ್ಲಿ D ಯು ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ AD ಯು A ಶೃಂಗದಿಂದಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯವಾಗಿದೆ.

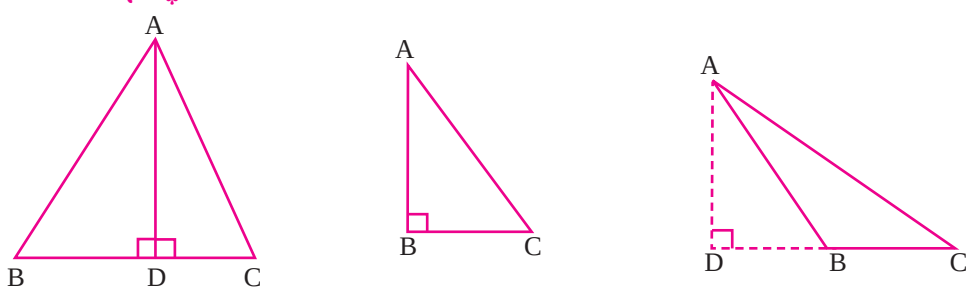


ತ್ರಿಭುಜದ **ಔನ್ನತ್ಯವು** ಒಂದು ಶೃಂಗದಿಂದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವಾದ ರೇಖಾಖಂಡವಾಗಿದೆ. AD, BE, CF ಗಳು ABC ಯ ಮೂರು ಔನ್ನತ್ಯಗಳಾಗಿರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಅವು H ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಶೀಲವಾಗಿವೆ. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಲಂಬಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಔನ್ನತ್ಯಗಳು ಸಂಗಮಶೀಲವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸಂಗಮಬಿಂದುವನ್ನು **ಲಂಬಕೇಂದ್ರ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಲಂಬಕೇಂದ್ರದ ವಿಭಿನ್ನ ಸ್ಥಾನಗಳು (Different positions of orthocentre)



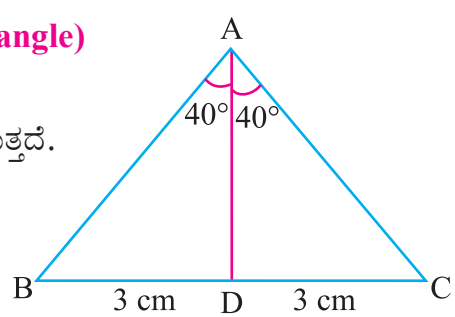
(a) (b) (c)

ಸಂಗತಿ (i) : (a) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ABC ಯು ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವು ΔABC ಯ ಒಳಗಡೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

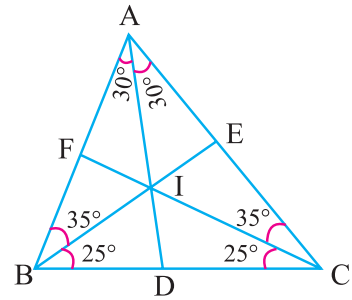
ಸಂಗತಿ (ii) : (b) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ , ABC ಯು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವು ಲಂಬಕೋನದ ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಸಂಗತಿ (iii) : (c) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ , ABC ಯು ವಿಶಾಲಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವು ΔABC ಯ ಹೊರಗಡೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

2.2.3 ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ (ಒಳಕೇಂದ್ರ) (Incentre of a Triangle)



ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ , ABC ಯು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.
$\angle A$ ಯನ್ನು AD ಯು ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ $\angle BAD = \angle DAC$.
ಇಲ್ಲಿ AD ಯನ್ನು $\angle A$ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.



ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಾರ್ಧಕವು ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವಾಗಿದೆ.

AD, BE, CF ಗಳು △ABC ಯ ಮೂರು ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳಾಗಿರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಅವು I ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಶೀಲವಾಗಿವೆ.

ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ.

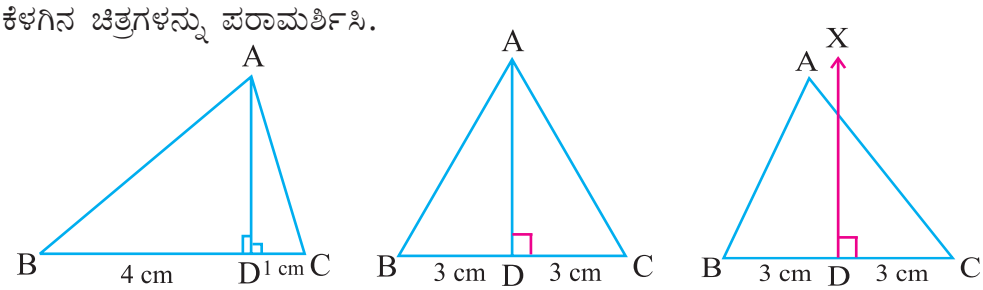
ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು ಸಂಗಮಶೀಲವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸಂಗಮಬಿಂದುವನ್ನು **ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

2.2.4 ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿಕೇಂದ್ರ (Circumcentre of a Triangle)

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಲಂಬಾರ್ಧಕದ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ.

ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ಎಂದರೇನು?

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಾಮರ್ಶಿಸಿ.



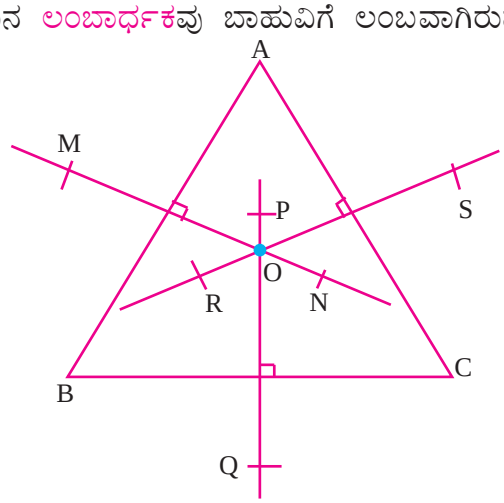
(a) (b) (c)

(a) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AD ಯು A ನಿಂದ BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ BC ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

(b) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AD ಯು BC ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ BD = DC ಮತ್ತು AD ಯು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

(c) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, DX ಯು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು DX ಯು BC ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. BD = DC ಆದರೆ DX ಯು 'A' ಶೃಂಗದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತಿಲ್ಲ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುವಿನ **ಲಂಬಾರ್ಧಕ**ವು ಬಾಹುವಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಬಾಹುವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.



ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

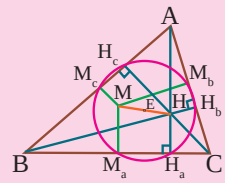
ಇಲ್ಲಿ PQ, RS, ಮತ್ತು MN ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ BC, AC ಮತ್ತು AB ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳಾಗಿದ್ದು, O ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಶೀಲವಾಗಿವೆ. O ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳು ಸಂಗಮಶೀಲವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಸೂಚನೆ: (i) ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ, ಪರಿಕೇಂದ್ರ (O), ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ (G) ಮತ್ತು ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (H) ಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ. ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು **ಯೂಲರ್ (ಆಯ್ಲರ್) ರೇಖೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು OG : GH = 1 : 2.

(ii) ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಪರಿಕೇಂದ್ರ (O), ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ (I), ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (H) ಮತ್ತು ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ (G) ಗಳು ಒಂದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

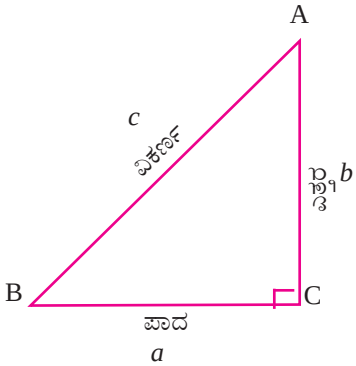
ಯೂಲರ್ (1707-1783)
ಸ್ವಿಟ್ಜರ್‌ಲ್ಯಾಂಡ್



2.3 ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ (Pythagoras Theorem)

2.3.1 ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ

ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, ವಿಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



$\angle C = 90^\circ$ ಯೊಂದಿಗೆ ΔABC ಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$BC = a, CA = b$ ಮತ್ತು $AB = c$.

ಆಗ, $a^2 + b^2 = c^2$.

ಇದನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಹಲವಾರು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ಸರಳವಾದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನಾವು ನೋಡಲಿದ್ದೇವೆ.

ಈಗ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, $(a + b)$ ಬಾಹುವಿನ ಒಂದು ಚೌಕ (ವರ್ಗ)ವನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸೋಣ ಮತ್ತು ರಚನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ ನಾವು ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ $a^2 + b^2 = c^2$ ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸೋಣ.

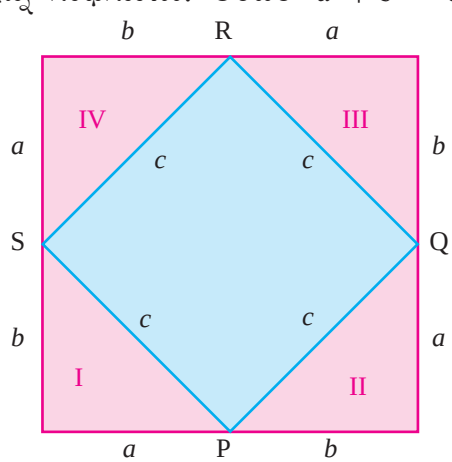
ಯಾವುದೇ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಬಾಹುವಿನ ವರ್ಗ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$(a + b)$ ಬಾಹುವಿನ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= (a + b)^2$

ಚಿತ್ರದಿಂದ,

$(a + b)$ ಬಾಹುವಿನ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= (a + b)^2$

= I, II, III ಮತ್ತು IV ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ + PQRS ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.



ಅಂದರೆ, $(a + b)^2 = 4$ (ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) + (PQRS ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ)

$$(a + b)^2 = 4\left(\frac{1}{2} \times a \times b\right) + c^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

ಇದರಿಂದ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ.

Activity

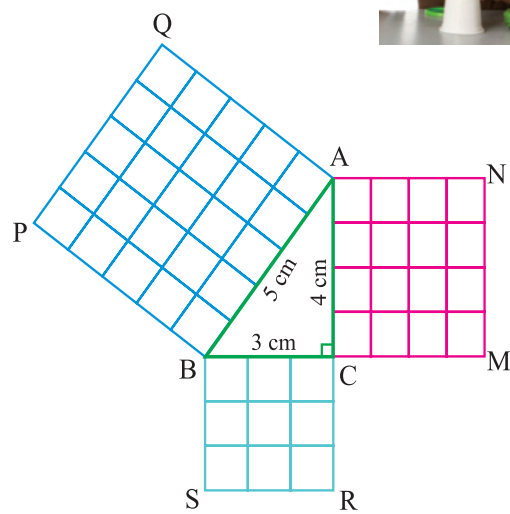
ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ

$\angle C = 90^\circ$, AB = 5 ಸೆಂ.ಮೀ., AC = 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು BC = 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗುವಂತೆ ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ಚೌಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಈ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಒಂದು ಚದರ ಸೆಂ.ಮೀ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ.

ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎಣಿಕೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.



ABPQ ನಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 25

BCRS ನಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 9

ACMN ನಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 16

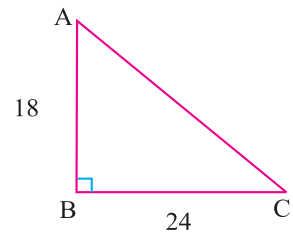
$\therefore$ABPQ ನಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = BCRS ನಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ + ACMN ನಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು **ಪೈಥಾಗೊರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.1

$\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $\angle B = 90^\circ$, AB = 18 ಸೆಂ.ಮೀ., BC = 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AC ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ



ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 18^2 + 24^2$

$= 324 + 576$

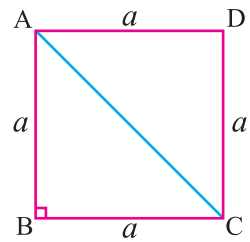
$= 900$

$\therefore AC = \sqrt{900} = 30$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.2

ಒಂದು ಚೌಕವು 40 ಸೆಂ.ಮೀ. ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಕರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?

ಪರಿಹಾರ



ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು 'a' ಆಗಿರಲಿ. AC ಯು ಒಂದು ಕರ್ಣ.

ABCD ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆ $= 4a$ ಮೂಲಮಾನಗಳು

$4a = 40\text{cm}$ [ಕೊಟ್ಟಿದೆ]

$a = \frac{40}{4} = 10$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಚೌಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಕೋನವು 90° ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 10^2 + 10^2 = 100 + 100$

$= 200$

$\therefore AC = \sqrt{200}$

$= \sqrt{2 \times 100} = 10\sqrt{2}$

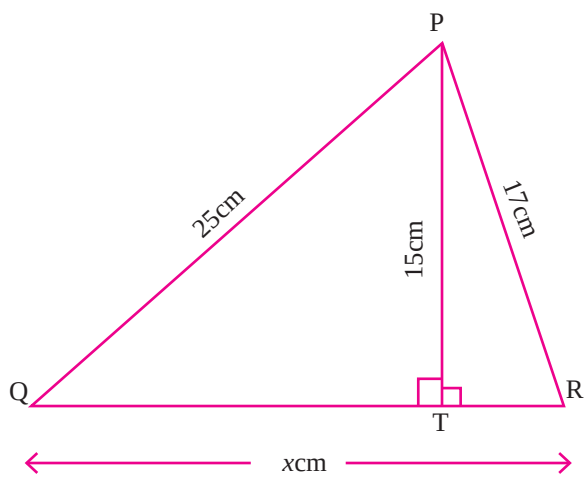
$= 10 \times 1.414 = 14.14$ ಸೆಂ.ಮೀ

ಕರ್ಣ AC = ಕರ್ಣ BD

ಇದರಿಂದ, ಕರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ $= 14.14 + 14.14 = 28.28$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.3

ಚಿತ್ರದಿಂದ PQ = 25 ಸೆಂ.ಮೀ., PR = 17ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು PT = 15ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ PT ಯು ಔನ್ನತ್ಯವಾಗಿದೆ. QR = x ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, x ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಪರಿಹಾರ ಚಿತ್ರದಿಂದ, QR = QT + TR.

QT ಮತ್ತು TR ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು:

PTQ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$\angle PTQ = 90^o$ [PT ಯು ಔನ್ನತ್ಯ]

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $PQ^2 = PT^2 + QT^2$ $\therefore PQ^2 - PT^2 = QT^2$

$\therefore QT^2 = 25^2 - 15^2 = 625 - 225 = 400$

$QT = \sqrt{400} = 20$ ಸೆಂ.ಮೀ. ..... (1)

ಹೀಗೆಯೇ, PTR ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $PR^2 = PT^2 + TR^2$

$\therefore TR^2 = PR^2 - PT^2$

$= 17^2 - 15^2$

$= 289 - 225 = 64$

$TR = \sqrt{64} = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ..... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $QR = QT + TR = 20 + 8 = 28$ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.4

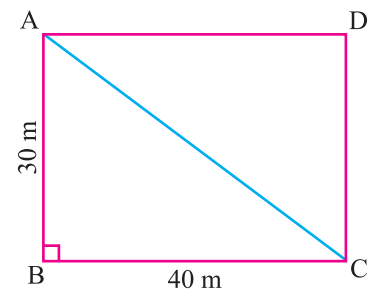
ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರ ಮೈದಾನದ ಅಳತೆಯು 40 ಮೀ. ಮತ್ತು 30 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಮೈದಾನದ ಕರ್ಣದ ಮೂಲಕ ನಡೆದು ಹೋದರೆ ಎಷ್ಟು ದೂರವನ್ನು ಉಳಿಸಬಹುದು?

ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತ: ABCD ಯು ಆಯತಾಕಾರದ ಮೈದಾನ. ಉದ್ದ = 40ಮೀ., ಅಗಲ = 30ಮೀ., $\angle B = 90^\circ$

ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ,

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 30^2 + 40^2 = 900 + 1600$$

$$= 2500$$

$$\therefore AC = \sqrt{2500} = 50 \text{ ಮೀ.}$$

B ನ ಮೂಲಕವಾಗಿ A ನಿಂದ C ವರೆಗೆ ಇರುವ ದೂರ

$= 30 + 40 = 70$ ಮೀ.

ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದ ದೂರ $= 70 - 50 = 20$ ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವು

(A) ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ (B) ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ (C) ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (D) ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ

(ii) ತ್ರಿಭುಜದ ಔನ್ನತ್ಯಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವು

(A) ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ (B) ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ (C) ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (D) ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ

(iii) ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವು

(A) ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ (B) ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ (C) ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (D) ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ

(iv) ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವು

(A) ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ (B) ಪರಿಕೇಂದ್ರ (C) ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (D) ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ

2. ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AB = AC ಮತ್ತು $\angle B = 65^\circ$ ಆಗಿದೆ. ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹು ಯಾವುದು?
3. PQR ತ್ರಿಭುಜವು P ನಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. PQ = 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು PR = 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ,QR ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. AB = 25 ಸೆಂ.ಮೀ., BC = 24 ಸೆಂ.ಮೀ., AC = 7ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂಬವು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳಾಗಬಹುದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.
5. PQR ತ್ರಿಭುಜದ Q ಮತ್ತು R ಕೋನಗಳು 25° ಮತ್ತು 65° ಆಗಿವೆ. ΔPQR ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗುವುದೇ? ಇದರೊಂದಿಗೆ PQ ಯು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು PR ಯು 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, QR ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. 15 ಮೀ. ಉದ್ದದ ಏಣಿಯನ್ನು ನೆಲದಿಂದ x ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಗೋಡೆಗೆ ಓರೆಯಾಗಿಟ್ಟಾಗ 12 ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಿಟಕಿಯನ್ನು ಮುಟ್ಟುತ್ತದೆ. x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಬಾಹುವಿನ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಔನ್ನತ್ಯ (ಎತ್ತರ)ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. 12, 5 ಮತ್ತು 13 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೈಥಾಗೊರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿವೆಯೇ?

9. ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚುವವನೊಬ್ಬನು ನೆಲದಿಂದ 16 ಅಡಿ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡನೇ ಅಂತಸ್ತಿನ ಕಿಟಕಿಯ ಪಾದವನ್ನು ಮುಟ್ಟುವಂತೆ ಒಂದು ಏಣಿಯನ್ನು ಇಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ಏಣಿಯ ಪಾದವು ಮನೆಯಿಂದ 12 ಅಡಿ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಅವನು ಬಣ್ಣವನ್ನು ಮಿಶ್ರಣ ಮಾಡುವಾಗ ಪಕ್ಕದ ಮನೆಯವರ ನಾಯಿಯು ಏಣಿಯನ್ನು ನೂಕಿದಾಗ ಏಣಿಯ ಪಾದವು ಮನೆಯಿಂದ ಇನ್ನೂ 2 ಅಡಿ ದೂರಕ್ಕೆ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆಗ, ಏಣಿಯು ಮನೆಯ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರವನ್ನು ಮುಟ್ಟುತ್ತದೆ?

2.4 ವೃತ್ತಗಳು (Circles)

ನಿಮಗೆ ಕೆಳಗಿನ ವಸ್ತುಗಳ ಪರಿಚಯವಿದೆ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಆಕಾರವನ್ನು ನೀವು ಹೇಳಬಹುದೇ?

(a) ಸೈಕಲಿನ ಚಕ್ರ

(b) ನಮ್ಮ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಲಾಂಛನದಲ್ಲಿರುವ ಅಶೋಕ ಚಕ್ರ.

(c) ಪೂರ್ಣ ಚಂದ್ರ

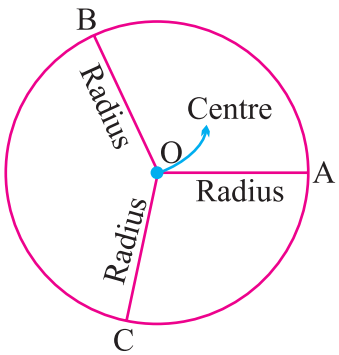
ಖಂಡಿತವಾಗಿ, ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವು ವೃತ್ತವಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರ ದೂರದಲ್ಲಿ P ಬಿಂದುವು ಚಲಿಸಿದಾಗ ವೃತ್ತವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ (Definition of Circle)

ವೃತ್ತವು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರವಾದ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವಾಗಿದೆ.

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವನ್ನು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಸ್ಥಿರ ದೂರವನ್ನು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.



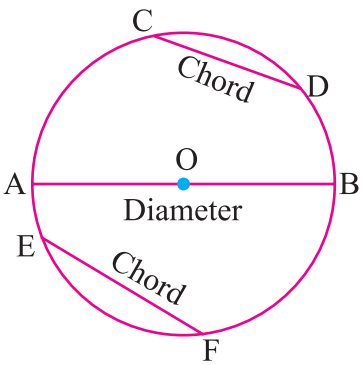
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'O' ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು OA, OB, OC ಗಳು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿವೆ.

ಇಲ್ಲಿ, OA = OB = OC = r

ಸೂಚನೆ: ವೃತ್ತದ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಜ್ಯಾ (Chord)

ಜ್ಯಾವು ಅದರ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, CD, AB ಮತ್ತು EF ಗಳು ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿವೆ.

ಇಲ್ಲಿ, AB ಯು O ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವಿಶೇಷವಾದ ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ.

ವ್ಯಾಸ (Diameter)

ವ್ಯಾಸವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು ವೃತ್ತದ ದೊಡ್ಡ ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AOB ಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ.

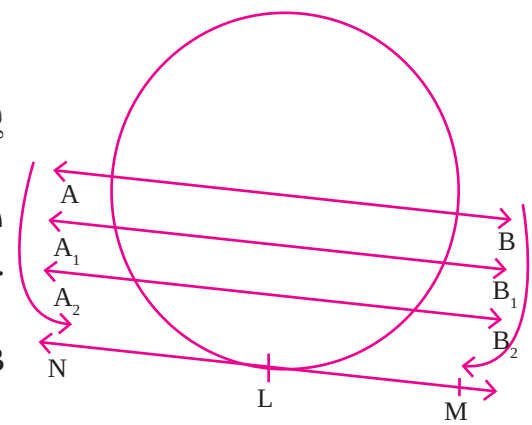
O ಎಂಬುದು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಮತ್ತು OA= OB = ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ.

ಇದರಿಂದ, ವ್ಯಾಸ = 2 × ತ್ರಿಜ್ಯ (ಅಥವಾ) ತ್ರಿಜ್ಯ = (ವ್ಯಾಸ) ÷ 2

ಸೂಚನೆ : (i) ವೃತ್ತದ ಪ್ರತಿ ವ್ಯಾಸದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ.
(ii) ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಗಳು ಸಂಗಮಶೀಲ (ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ) ಆಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತದ ಛೇದಕ (Secant of a Circle)

ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ (ಕತ್ತರಿಸುವ) ರೇಖೆಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಛೇದಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB ರೇಖೆಯು ಛೇದಕವಾಗಿದೆ.

ಇದು ವೃತ್ತವನ್ನು A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ, AB ಛೇದಕವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಚಲಿಸೋಣ. ಇದರ ಹೊಸ ಸ್ಥಾನಗಳು $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, ... ಇತ್ಯಾದಿ ಆಗಿವೆ.

AB ಛೇದಕವು ಕೆಳಗೆ ಚಲಿಸುವಾಗ, A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತವೆ.

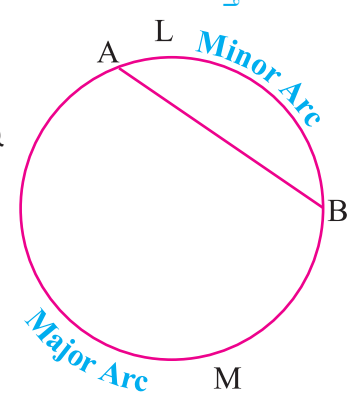
ಆದ್ದರಿಂದ, A ಮತ್ತು B ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಕ್ರಮೇಣವಾಗಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ AB ಛೇದಕವು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು L ನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ, LM ರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಇದು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.

ಸ್ಪರ್ಶಕ (Tangent)

ಸ್ಪರ್ಶಕವು ವೃತ್ತವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವೃತ್ತದ ಕಂಸ (Arc of a Circle)



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB ಯು ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ. AB ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

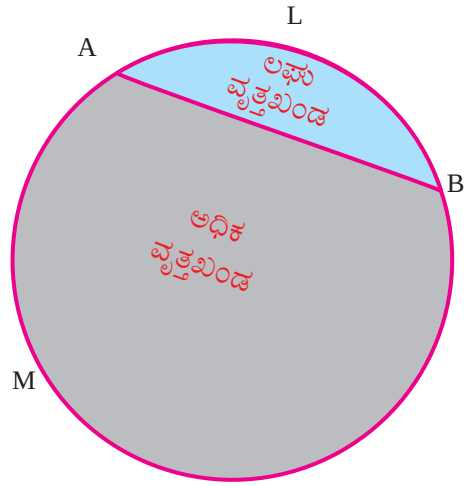
ALB ಮತ್ತು AMB ವಕ್ರ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಕಂಸಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಕಂಸಗಳನ್ನು ‘ ’ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$\overset{\frown}{ALB}$ ಚಿಕ್ಕ ಕಂಸವು **ಲಘು ಕಂಸ**ವಾಗಿದೆ.

$\overset{\frown}{AMB}$ ದೊಡ್ಡ ಕಂಸವು **ಅಧಿಕ ಕಂಸ**ವಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತಖಂಡ (Segment of a Circle)

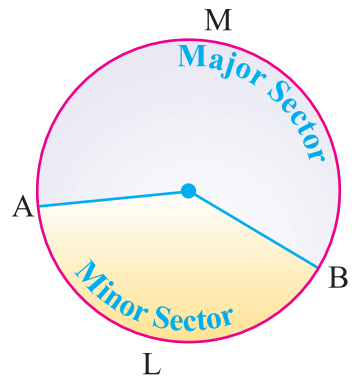


ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತೀಯ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಭಾಗವನ್ನು ವೃತ್ತಖಂಡ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಲಘು ಕಂಸವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು **ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅಧಿಕ ಕಂಸವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು **ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡ (Sector of a Circle)



ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಕಂಸ ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತೀಯ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

OALB ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು **ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

OAMB ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು **ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಪರಿಧಿಗಿರುವ ದೂರವು _____ ಆಗಿದೆ.

(A) ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡ (B) ವೃತ್ತಖಂಡ (C) ವ್ಯಾಸಗಳು (D) ತ್ರಿಜ್ಯ

(ii) ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸದ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವು _____ ಆಗಿದೆ.

(A) ತ್ರಿಜ್ಯ = 2 × ವ್ಯಾಸ (B) ತ್ರಿಜ್ಯ = ವ್ಯಾಸ + 2

(C) ವ್ಯಾಸ = ತ್ರಿಜ್ಯ + 2 (D) ವ್ಯಾಸ = 2 (ತ್ರಿಜ್ಯ)

(iii) ವೃತ್ತದ ದೊಡ್ಡ ಜ್ಯಾವು _____ ಆಗಿದೆ.

(A) ತ್ರಿಜ್ಯ (B) ಛೇದಕ (C) ವ್ಯಾಸ (D) ಸ್ಪರ್ಶಕ

2. ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳ ಮೊತ್ತವು 200 ಮಿ.ಮೀ. ಆದರೆ, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಸೆಂ.ಮೀ. ಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ವೃತ್ತಖಂಡ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖಾನಿಸಿರಿ.

4. ವೃತ್ತದ ಕಂಸವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರಿ.

5. ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಛೇದಕಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರಿ.

Concept Summary

- **ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ :** ಮೂರು ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದು.
- **ಲಂಬಕೇಂದ್ರ :** ಮೂರು ಔನ್ನತ್ಯಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದು.
- **ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ :** ಮೂರು ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದು.
- **ಪರಿಕೇಂದ್ರ :** ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದು.
- **ವೃತ್ತ :** ವೃತ್ತವು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವಾಗಿದೆ.
- **ಜ್ಯಾ :** ಜ್ಯಾವು ಅದರ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡವಾಗಿದೆ.
- **ವ್ಯಾಸ :** ವ್ಯಾಸವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ.
- **ಛೇದಕ :** ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ (ಕತ್ತರಿಸುವ) ರೇಖೆಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಛೇದಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
- **ಸ್ಪರ್ಶಕ :** ಸ್ಪರ್ಶಕವು ವೃತ್ತವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವ ಒಂದು ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ವೃತ್ತಖಂಡ :** ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತೀಯ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಭಾಗಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಖಂಡ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡ :** ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಕಂಸ ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತೀಯ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಗಣಿತ ಸಂಘ ಚಟುವಟಿಕೆ

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳು

$m > n$; $m, n \in \mathbb{N}$ ಆಗಿರುವ $m^2+n^2, m^2-n^2, 2mn$ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ನಾವು ಹಲವಾರು ಪೈಥಾಗೊರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$m = 2$ ಮತ್ತು $n = 1$ ಆದರೆ, $m^2+n^2 = 2^2+1^2 = 5, m^2-n^2 = 2^2-1^2 = 3, 2mn = 2\times2\times1 = 4$.

5 , 3 , 4 ಎಂಬವು ಪೈಥಾಗೊರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿವೆ.

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು ಸಹ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, (5 , 3 , 4) ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು : (10, 6, 8) , (15 , 9, 12), (20 , 12 , 16) , ... ಗಳು ಸಹ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿವೆ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಾ ?

ದತ್ತಾಂಶ ನಿರ್ವಹಣೆ

3

3.1 ಪೀಠಿಕೆ

3.2 ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕದ ರಚನೆಯನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು

3.3 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತಚಿತ್ರ (Histogram) ಮತ್ತು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

3.4 ಸರಳವಾದ ಪೈ–ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

3.5 ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳು

ಆರ್.ಎ. ಫಿಷರ್

[17 ಫೆಬ್ರವರಿ, 1890 – 29 ಜುಲೈ,1962]

ಫಿಷರ್‌ರವರು ದೋಷಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಬಗ್ಗೆ ಆಸಕ್ತಿ ಹೊಂದಿದ್ದರಿಂದ ಕೊನೆಗೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಶೋಧಿಸಲು ನಾಂದಿಯಾಯಿತು. ಇವರು 1915 ಮತ್ತು 1919 ರ ನಡುವೆ ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದ ಶಿಕ್ಷಕರಾಗಿದ್ದರು. ಇವರು ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ, ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಪ್ರಸ್ತುತ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕ್ರಮಗಳಿಂದ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ರಚನೆಯನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದರು. ಇವರನ್ನು "ಆಧುನಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಪಿತಾಮಹ" ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

3.1 ಪೀಠಿಕೆ (Introduction)

ಪ್ರತಿನಿತ್ಯ ನಾವು ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೂಪದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ ಪತ್ರಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಇನ್ನಿತರೆ ಸಂಪರ್ಕ ಮಾಧ್ಯಮಗಳ ಮೂಲಕ ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಮಾಹಿತಿಗಳು ನಮ್ಮ ರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿ ಆಹಾರ ಉತ್ಪಾದನೆ, ಪ್ರಪಂಚದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ, ವಿವಿಧ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ರಫ್ತು ಮತ್ತು ಆಮದು, ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಶಾಲೆಗಳನ್ನು ತೊರೆದ ಮಕ್ಕಳು, ಅಪಘಾತಗಳಿಂದಾದ ಸಾವುಗಳು, ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಆಗಿರಬಹುದು.

ಈ ಎಲ್ಲಾ ಮಾಹಿತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು **ದತ್ತಾಂಶ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ನಿರ್ಧಾರಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳಲು ನಮಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ನಾಗರೀಕನ ಜೀವನದ ಹಾದಿಯಲ್ಲಿ ಮಹತ್ವದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂತಹ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ಸರಿಯಾದ ಮತ್ತು ನಿಖರವಾದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಎಂಬುದು ಬಹಳ ಮುಖ್ಯವಾದುದು.

ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಓದುವುದಕ್ಕೆ, ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾಗಿಲ್ಲದಿರಬಹುದು. ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ವಿವಿಧ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬೇಕಾದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ನಿರ್ವಹಿಸಬೇಕು. ಸಾಮಾನ್ಯ ಮನುಷ್ಯನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಮತ್ತು ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತಿರಬೇಕು.

3.2 ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕದ ರಚನೆಯನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು (Recalling the Formation of Frequency Table)

ನಾವು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಇದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

3.2.1 ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (Formation of frequency table for an ungrouped data)

ಉದಾಹರಣೆ 3.1

ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

15, 17, 17, 20, 15, 18, 16, 25, 16, 15,

16, 18, 20, 28, 30, 27, 18, 18, 20, 25,

16, 16, 20, 28, 15, 18, 20, 20, 20, 25.

ಪರಿಹಾರ

ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆ (x)	ತಾಳೆ ಗುರುತು	ಆವೃತ್ತಿ (f)
15	||||	4
16	~~||||~~	5
17	||	2
18	~~||||~~	5
20	~~||||~~ ||	7
25	|||	3
27	|	1
28	||	2
30	|	1
	ಮೊತ್ತ	**30**

3.2.2 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (Formation of frequency table for a grouped data)

ಉದಾಹರಣೆ 3.2

50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಅಂಕ 100ಕ್ಕೆ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

43, 88, 25, 93, 68, 81, 29, 41, 45, 87, 34, 50, 61, 75, 51, 96, 20, 13, 18, 35, 25, 77, 62, 98, 47, 36, 15, 40, 9, 25, 39, 60, 37, 50, 19, 86, 42, 29, 32, 61, 45, 68, 41, 87, 61, 44, 67, 30, 54, 8.

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಮೌಲ್ಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ = 50

ವ್ಯಾಪ್ತಿ = ಗರಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯ – ಕನಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯ

= 98 – 8 = 90

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು 10 ವರ್ಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿರಿ.

$$\therefore \quad \text{ವರ್ಗಾಂತರದ ಉದ್ದ} = \frac{\text{ವ್ಯಾಪ್ತಿ}}{\text{ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$= \frac{90}{10} = 9$$

50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ವರ್ಗಾಂತರ (C.I)	ತಾಳೆ ಗುರುತು	ಆವೃತ್ತಿ (f)
0 - 10	||	2
10 - 20	||||	4
20 - 30	~~||||~~ |	6
30 - 40	~~||||~~ ||	7
40 - 50	~~||||~~ ||||	9
50 - 60	||||	4
60 - 70	~~||||~~ |||	8
70 - 80	||	2
80 - 90	~~||||~~	5
90 - 100	|||	3
	ಮೊತ್ತ	**50**

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಕೋಷ್ಟೀಕರಿಸಬಹುದು.

ವರ್ಗಾಂತರ (C.I)	0-10	10-20	20- 30	30-40	40- 50	50- 60	60- 70	70- 80	80-90	90-100
ಆವೃತ್ತಿ (*f*)	2	4	6	7	9	4	8	2	5	3

3.3 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (Drawing Histogram and Frequency Polygon for Grouped Data)

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಚಿತ್ರಗಳ ಅಥವಾ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇವುಗಳನ್ನು "ನಕ್ಷೆಗಳು" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಓದಲು ಆಸಕ್ತಿಯುತವಾಗಿರುತ್ತವೆ, ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಉಳಿತಾಯವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಹಲವಾರು ರೀತಿಗಳಿವೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ವಿಧದ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

(i) ಆಯತಚಿತ್ರ ಮತ್ತು

(ii) ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ

3.3.1 ಆಯತಚಿತ್ರ (Histogram)

ನಿರಂತರ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯ ದ್ವಿ–ಆಯಾಮ ನಕ್ಷೀಯ ರೂಪದ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು **ಆಯತಚಿತ್ರ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆಯತಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಸ್ಥಂಭಗಳನ್ನು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಸ್ಥಂಭಗಳ ನಡುವೆ ಸ್ಥಳಾವಕಾಶವಿಲ್ಲದಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಆಯತಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವಿತರಣೆಯ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮೇಲೆ ಆಯತಗಳನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

3.3.1 (a) ನಿರಂತರ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗಳಿಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸುವಿಕೆ (Drawing a histogram for continuous frequency distribution)

ಕಾರ್ಯವಿಧಾನ:

ಹಂತ 1 : ದತ್ತಾಂಶವು ನಿರಂತರವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ನಿರಂತರ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

ಹಂತ 2 : X-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಏಕರೂಪದ ಅಳತೆಯ ಮೇಲೆ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

ಹಂತ 3 : Y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಏಕರೂಪದ ಅಳತೆಯ ಮೇಲೆ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

ಹಂತ 4 : ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಪಾದವಾಗಿ ಮತ್ತು ಅನುಗುಣವಾದ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಎತ್ತರವಾಗಿರುವಂತೆ ಆಯತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

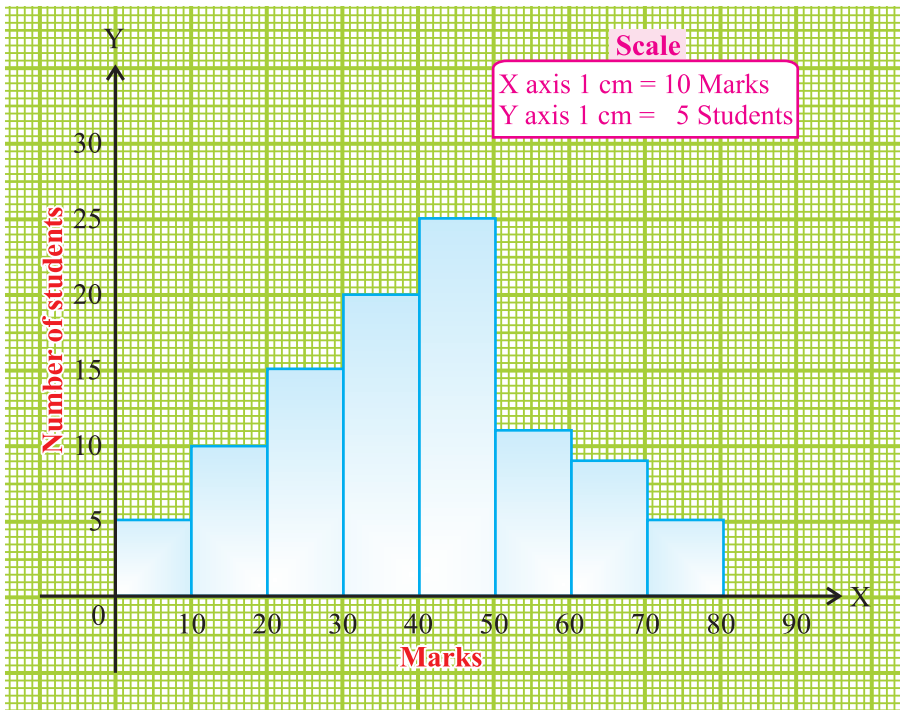
ಉದಾಹರಣೆ 3.3

100 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪರೀಕ್ಷೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕಕ್ಕೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಅಂಕಗಳು	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	5	10	15	20	25	12	8	5

ಪರಿಹಾರ

ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು 10 ಅಂಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. X-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಈ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು, Y- ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರಿ. ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 3.1

ಗಮನಿಸಿ: ಮೇಲಿನ ರೇಖಾಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಸ್ಥಂಭಾಲೇಖಗಳನ್ನು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆಯತಗಳ ಉದ್ದವು (ಎತ್ತರವು) ಅನುಗುಣವಾದ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿವೆ. ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಸಮನಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸ್ಥಂಭಾಲೇಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಅನುಗುಣವಾದ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

3.3.1 (b) ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವಾಗ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸುವಿಕೆ (Drawing a histogram when class intervals are not continuous)

ಉದಾಹರಣೆ 3.4

ಒಂದು ಅರಣ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಮರಗಳ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಎತ್ತರಗಳು (ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
ಮರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	10	15	25	30	45	50	35	20

ಪರಿಹಾರ

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿರದ (ಸಂವೃತ್ತ ವಿಧಾನ) ರೂಪದಲ್ಲಿವೆ. ಇವುಗಳಿರುವಂತೆಯೇ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ನಡುವೆ ಅಂತರ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆಯತಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಂಭಾಲೇಖಗಳು ಯಾವುದೇ ಅಂತರವಿಲ್ಲದೆ ನಿರಂತರವಾಗಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇದಕ್ಕೆ ನಮಗೆ ಸರಿಪಡಿಸುವ ಅಪವರ್ತನವು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

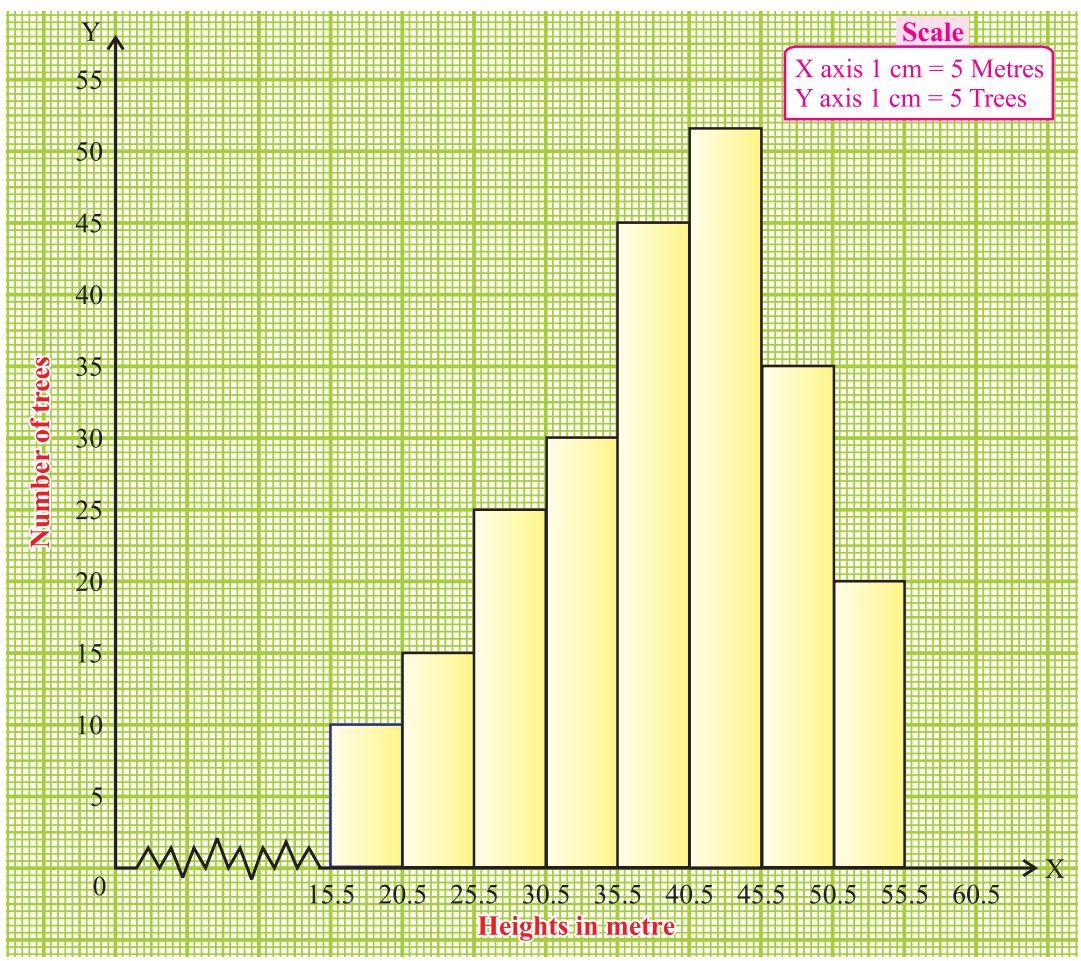
ಸರಿಪಡಿಸುವ ಅಪವರ್ತನ $= \frac{1}{2}$ [ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ – ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ]

$$= \frac{1}{2}(21 - 20) = 0.5$$

ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಕೆಳಮಿತಿಯಿಂದ 0.5 ನ್ನು ನಾವು ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಮೇಲ್ಮಿತಿಗಳಿಗೆ 0.5 ನ್ನು ಕೂಡುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಂತೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಎತ್ತರಗಳು (ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	15.5-20.5	20.5-25.5	25.5-30.5	30.5-35.5	35.5-40.5	40.5-45.5	45.5-50.5	50.5-55.5
ಮರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	10	15	25	30	45	50	35	20

ಈಗ ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ನಿರಂತರ ಆವೃತ್ತಿಯ ವಿತರಣೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 3.2

ಗಮನಿಸಿ: ಆಯತಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 3.2) X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮೊದಲನೆ ಬೆಲೆಯು 15.5 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು 15.5 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬೇಕೆ ಹೊರತು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ವಿರಾಮವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

Do you know?

ವಿರಾಮವನ್ನು ಜಿಗ್–ಜಾಗ್ ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

3.3.2 ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ (Frequency polygon)

ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೀಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿರಂತರ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಪಾರ್ಶ್ವ ಆಯತಗಳ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಈ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು **ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ** ರೇಖಾಖಂಡದಿಂದ ಸೇರಿಸಿದರೆ, ನಾವು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು **ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆವೃತ್ತಿಯ ಕೆಳವರ್ಗ ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿಯ ಮೇಲ್ವರ್ಗವನ್ನು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ತುದಿಗಳನ್ನು ತಳಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ತರುವುದು ರೂಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು.

(i) ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು

(ii) ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳದೆ

3.3.2 (a) ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವಿಕೆ (To draw frequency polygon using histogram)

ಕಾರ್ಯವಿಧಾನ:

ಹಂತ 1 : ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಹಂತ 2 : ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಂದ ಆಯತಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಆಯತಗಳ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಹಂತ 3 : ಸೊನ್ನೆ ಆವೃತ್ತಿಯ ಎರಡು ಊಹಿತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು, ಒಂದನ್ನು ಮೊದಲ ಸ್ಥಂಬದ ಎಡಭಾಗದ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಂಬದ ಬಲಭಾಗದ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಿರಿ. ಈ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು **ಊಹಿತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಹಂತ 4 : ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವವಾಗಿರುವ ಊಹಿತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.5

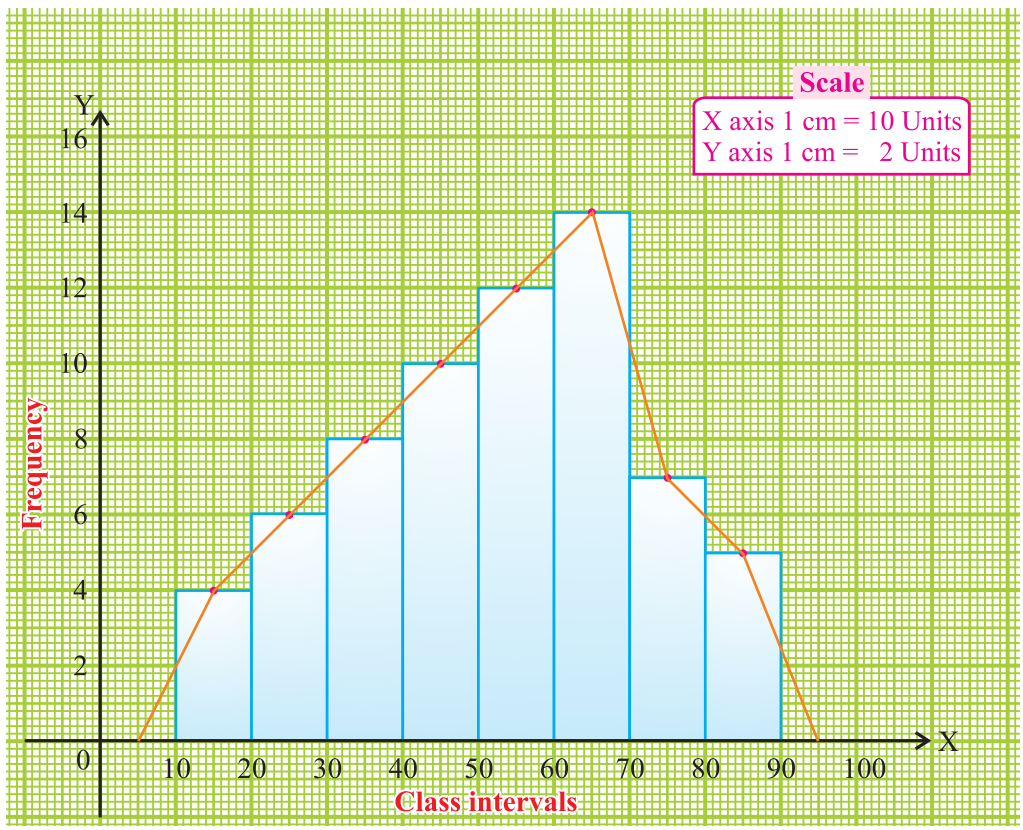
ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
ಆವೃತ್ತಿ	4	6	8	10	12	14	7	5

ಪರಿಹಾರ

ಚಿತ್ರ 3.3 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಸೂಕ್ತ ಅಳತೆಯೊಂದಿಗೆ X- ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು (class-intervals) ಮತ್ತು Y- ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು (frequencies) ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಕ್ರಮಾನುಗತ ಆಯತಗಳ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. 0 -10 ಮತ್ತು 90 -100 ಎಂದು ಊಹಿಸಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಹ ನಾವು ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಳತೆಪಟ್ಟಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ತುದಿಗಳನ್ನು 0 -10 ಮತ್ತು 90 -100 ರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ. ಈಗ ನಾವು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 3.3 ನ್ನು ಪರಾಮರ್ಶಿಸಿ)



ಚಿತ್ರ 3.3

ಉದಾಹರಣೆ 3.6

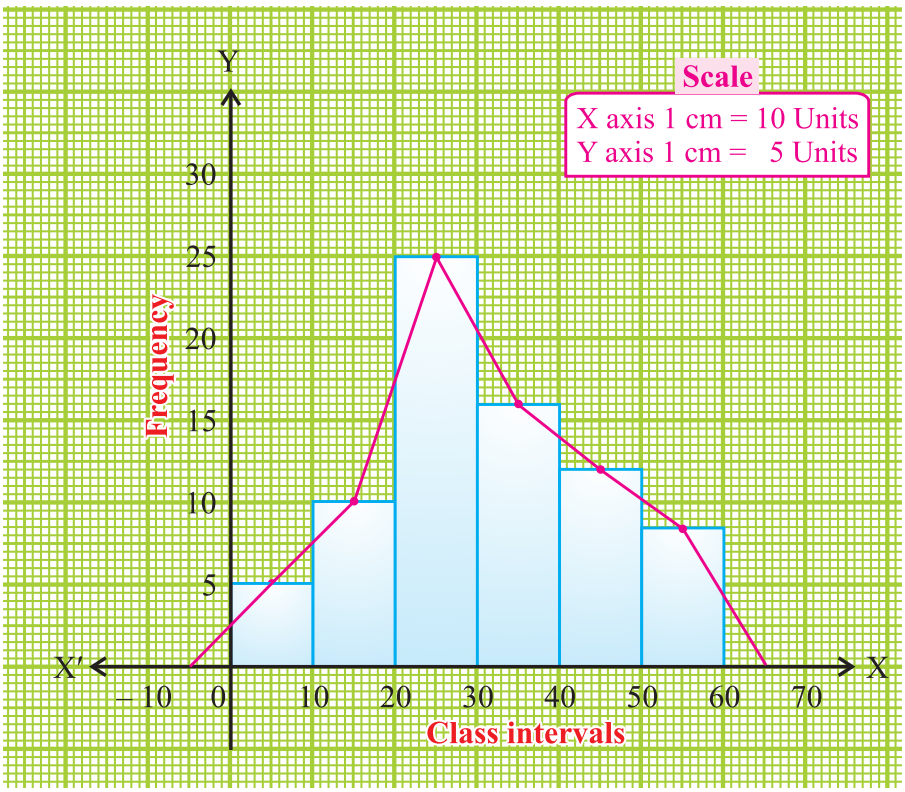
ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
ಆವೃತ್ತಿ	5	10	25	16	12	8

ಪರಿಹಾರ

ಚಿತ್ರ 3.4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಸೂಕ್ತ ಅಳತೆಯೊಂದಿಗೆ X- ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಮತ್ತು Y- ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಈಗ, ಕ್ರಮಾನುಗತ ಆಯತಗಳ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. (-10) - 0 ಮತ್ತು 60 - 70 ಎಂಬ ಊಹಿತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಕೂಡ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಅಳತೆಪಟ್ಟಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ತುದಿಗಳನ್ನು (-10) - 0 ಮತ್ತು 60 - 70 ರ ಊಹಿತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈಗ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು ಸಿಗುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 3.4 ನ್ನು ಪರಾಮರ್ಶಿಸಿ)



ಚಿತ್ರ 3.4

ಗಮನಿಸಿ: ಕೆಲವು ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ಊಹಿತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಲಭಿಸುವುದಿಲ್ಲ. **ಉದಾಹರಣೆಗೆ,** ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪರೀಕ್ಷೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸಂಗತಿಗಳಲ್ಲಿ, ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಅಂಕಗಳ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಕಡೆಗಳಿಗೂ ನಾವು ಹೋಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ಅಂತ್ಯ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಭಾಗಶಃವಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಆಯತಗಳ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಲಂಬೀಯ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರುವಂತೆ ಕೆಳಗೆ ತರಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಸೂಚನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಾವು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

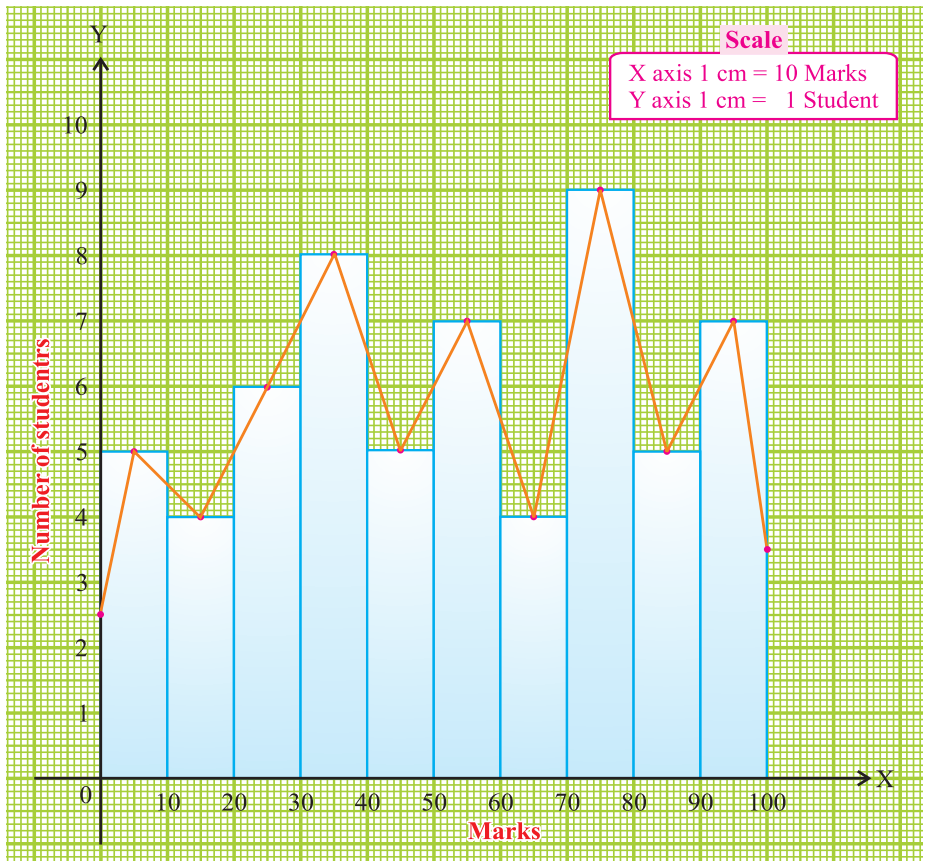
ಉದಾಹರಣೆ 3.7

ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಅಂಕಗಳು	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	5	4	6	8	5	7	4	9	5	7

ಪರಿಹಾರ

X-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಮತ್ತು Y- ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಕ್ರಮಾನುಗತ ಆಯತಗಳ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಅಳತೆಪಟ್ಟಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ. ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ತುದಿಗಳು ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಆಯತಗಳ ಲಂಬ ಅಂಚುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 3.5

3.3.2 (b) ಆಯತ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆಯೇ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವಿಕೆ (To draw a frequency polygon without using histogram)

ಕಾರ್ಯವಿಧಾನ:

ಹಂತ 1 : ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಂತ 2 : X- ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು Y- ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

ಹಂತ 3 : ಪ್ರತಿ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

ಹಂತ 4 : ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಹಂತ 5 : ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಕನಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಗರಿಷ್ಠ ವರ್ಗದ ಗುರುತುಗಳಿಗೆ (ಶೂನ್ಯ ಆವೃತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ಸಂಗತಿಯಂತೆ) ತಕ್ಷಣದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.8

ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಬಳಸದೆಯೇ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
ಆವೃತ್ತಿ	4	6	8	10	12	14	7	5

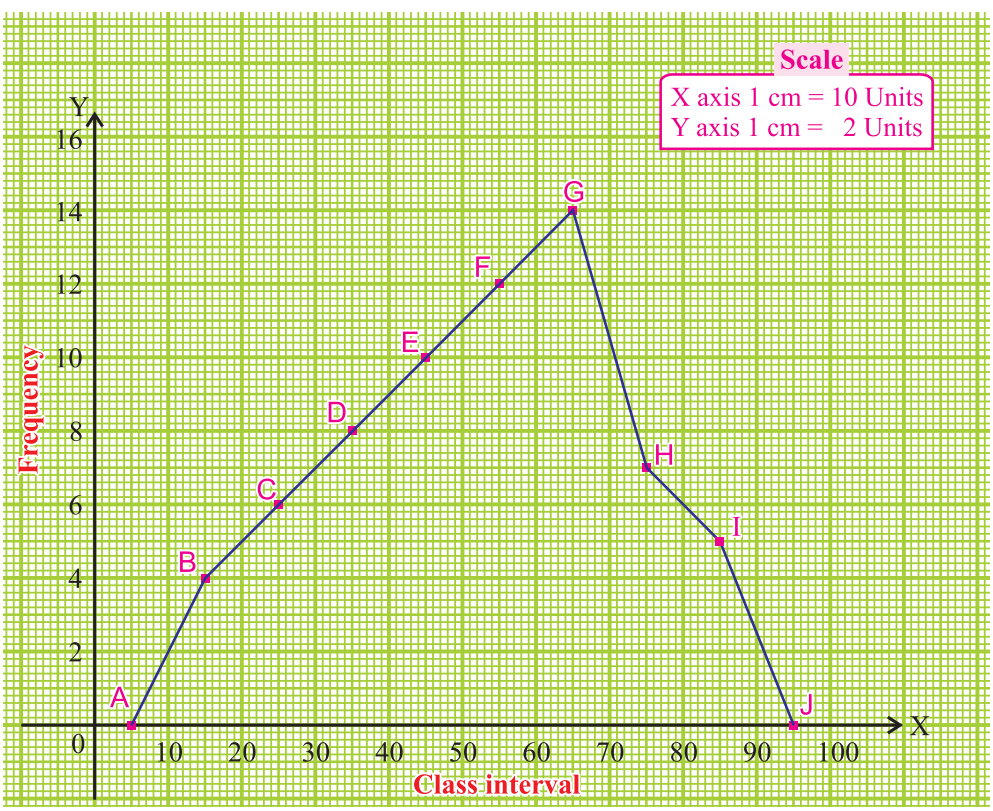
ಪರಿಹಾರ

X-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಮತ್ತು Y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೊನ್ನೆ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ 0-10 ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ 90–100 **ಊಹಿತ ವರ್ಗಗಳನ್ನು** ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ನಾವು ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

ವರ್ಗಾಂತರ	ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ
0-10	**5**	**0**
10-20	15	4
20-30	25	6
30-40	35	8
40-50	45	10
50-60	55	12
60-70	65	14
70-80	75	7
80-90	85	5
90-100	**95**	**0**

ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು A (5, 0), B (15, 4), C (25, 6), D (35, 8), E (45, 10), F (55, 12), G (65, 14), H (75, 7), I (85, 5) ಮತ್ತು J (95, 0) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ABCDEFGHIJ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು, AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ನಾವು ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 3.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 3.6

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರಗಳು	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ಆವೃತ್ತಿ	8	12	6	14	10	5

2. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಪ್ರತಿ ಎಕರೆಗೆ ಇಳುವರಿ (ಕ್ವಿಂಟಾಲ್‌ನಲ್ಲಿ)	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36 - 40
ಭತ್ತ ನಾಟಿ ಮಾಡಿದ ಜಮೀನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	3	5	18	15	6	4

3. ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರುಗಳ ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	4	6	12	10	8	2

4. ಗ್ರಾಮವೊಂದರಲ್ಲಿರುವ ಸಕ್ಕರೆ ಕಾಯಿಲೆ ರೋಗಿಗಳ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ವೀಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	3	6	13	20	10	5

ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

5. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ಆವೃತ್ತಿ	7	10	23	11	8	5

6. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 150 ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ವಿತರಣೆಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿ ಸೂಚ್ಯಂಕ	55-70	70-85	85-100	100-115	115-130	130-145
ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	20	40	30	35	10	15

7. ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಅಂಕಗಳು	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	9	3	4	6	2	3	4	5	7	8

8. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆಯೇ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ	6	11	25	35	18	12	6

9. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆಯೇ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿ.

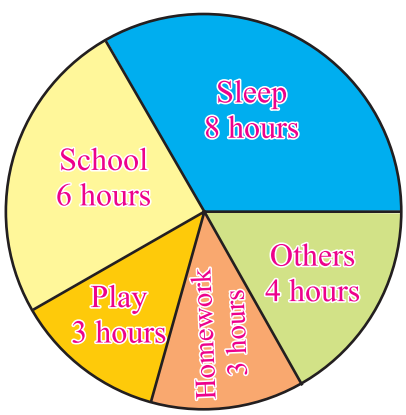
ವರ್ಗಾಂತರ	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
ಆವೃತ್ತಿ	12	16	20	8	10	4

10. ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಗಳು 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಪರೀಕ್ಷೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ (50 ಅಂಕಗಳಿಗೆ) ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
29, 45, 23, 40, 31, 11, 48, 1, 30, 24, 25, 29, 25, 32, 31, 22, 9, 49, 19, 13, 32, 39, 25, 3, 27, 41, 12, 13, 2, 44, 7, 43, 15, 35, 40, 3, 12, 48, 49, 18.

3.4 ಸರಳವಾದ ಪೈ–ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (Construction of Simple Pie-Chart)

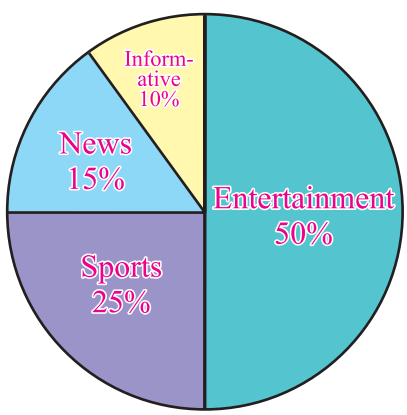
ಚಿತ್ರ 3.7 ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 3.8 ರಲ್ಲಿ ವೃತ್ತೀಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನೀವು ಯಾವಾಗಲಾದರೂ ನೋಡಿದ್ದೀರಾ?

ಒಬ್ಬ ಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ (24 ಗಂಟೆಗಳು) ವ್ಯಯಿಸಿದ ಸಮಯ



ಚಿತ್ರ 3.7

ದೂರದರ್ಶನದಲ್ಲಿ ವೀಕ್ಷಕರು ವೀಕ್ಷಿಸುವ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಚಾನಲ್‌ಗಳು



ಚಿತ್ರ 3.8

ಮೇಲಿನವುಗಳ ಆಕೃತಿಯಂತೆಯೇ ಇರುವುದನ್ನು ವೃತ್ತೀಯ ನಕ್ಷೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. **ವೃತ್ತೀಯ ನಕ್ಷೆಯು** ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಮತ್ತು ಇದರ ಭಾಗಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣ ವೃತ್ತವನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ಗಾತ್ರವು ಅದು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗೆ ಅಥವಾ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡಗಳು ಪೈನಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗಗಳಿಗೆ ಹೋಲಿಕೆಯಾಗುವುದರಿಂದ, ಇದನ್ನು ಪೈ–ನಕ್ಷೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

Do you know?

ಪೈ ಎಂಬುದು ಅಮೇರಿಕನ್ನರ ಆಹಾರ ಪದಾರ್ಥವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಪೈ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 3.7)

$$\left.\begin{array}{r}\text{ನಿದ್ರೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಗಂಟೆಗಳಿಗಾಗಿ}\\ \text{ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ಅನುಪಾತ}\end{array}\right] = \frac{\text{ನಿದ್ರೆಗೆ ವ್ಯಯಿಸುವ ಸಮಯ}}{\text{ಪೂರ್ಣ ದಿನದ ಸಮಯ}} = \frac{8 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}}{24 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}} = \frac{1}{3}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ವೃತ್ತದ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

$$\left.\begin{array}{r}\text{ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಗಂಟೆಗಳಿಗಾಗಿ}\\ \text{ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ಅನುಪಾತ}\end{array}\right] = \frac{\text{ಶಾಲೆಯ ಸಮಯ}}{\text{ಪೂರ್ಣ ದಿನದ ಸಮಯ}} = \frac{6 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}}{24 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}} = \frac{1}{4}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ವೃತ್ತದ $\frac{1}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

$$\left.\begin{array}{r}\text{ಆಟದಲ್ಲಿ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಗಂಟೆಗಳಿಗಾಗಿ}\\ \text{ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ಅನುಪಾತ}\end{array}\right] = \frac{\text{ಆಡುವುದಕ್ಕೆ ವ್ಯಯಿಸುವ ಸಮಯ}}{\text{ಪೂರ್ಣ ದಿನದ ಸಮಯ}} = \frac{3 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}}{24 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}} = \frac{1}{8}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ವೃತ್ತದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

$$\left.\begin{array}{r}\text{ಗೃಹಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಗಂಟೆಗಳಿಗಾಗಿ}\\ \text{ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ಅನುಪಾತ}\end{array}\right] = \frac{\text{ಗೃಹಕಾರ್ಯದ ಸಮಯ}}{\text{ಪೂರ್ಣ ದಿನದ ಸಮಯ}} = \frac{3 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}}{24 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}} = \frac{1}{8}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ವೃತ್ತದ $\frac{1}{8}$ ನೇ ಭಾಗವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

$$\left.\begin{array}{r}\text{ಇತರೆ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ವ್ಯಯಿಸಿದ}\\ \text{ಗಂಟೆಗಳಿಗಾಗಿ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ಅನುಪಾತ}\end{array}\right] = \frac{\text{ಇತರೆ ಕೆಲಸಗಳ ಸಮಯ}}{\text{ಪೂರ್ಣ ದಿನದ ಸಮಯ}} = \frac{4 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}}{24 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}} = \frac{1}{6}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ವೃತ್ತದ $\frac{1}{6}$ ಭಾಗವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಎಲ್ಲಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಮೇಲಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ,

$$\text{ನಮಗೆ ಸಿಗುವ ಮೊತ್ತವು} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{8+6+3+3+4}{24} = \frac{24}{24} = 1$$

ಎಲ್ಲಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಂದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಸಮಯವನ್ನು ವೃತ್ತವನ್ನು ಬಳಸಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಪೂರ್ಣ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು 1 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ವಿವಿಧ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ವಿವಿಧ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕೋನದ ಅಳತೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದಲೂ ಸಹ ಅನುಪಾತ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು. ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ಕೋನದ ಅಳತೆಯ ಉಪಯೋಗದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪೈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸಲಿದ್ದೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.9

ಒಂದು ಕೆಲಸದ ದಿನದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಹಲವಾರು ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಗಂಟೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಪೈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಚಟುವಟಿಕೆ	ನಿದ್ರೆ	ಶಾಲೆ	ಆಟ	ಗೃಹಕಾರ್ಯ	ಇತರೆ
ಗಂಟೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	8	6	3	3	4

ಪರಿಹಾರ

ಒಂದು ದಿನದ 24 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಗಂಟೆಗಳನ್ನು 360° ಯ ಆಂಶಿಕ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿರಿ.

ನಿದ್ರೆಯ ಅವಧಿಯು 8 ಗಂಟೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದನ್ನು $\frac{8}{24} \times 360^0 = 120°$ ಯಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಿದ್ರೆಯ ಅವಧಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 120° ಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು.

ಹೀಗೆಯೇ, ಶಾಲೆ, ಆಟ, ಗೃಹಕಾರ್ಯ ಮತ್ತು ಇತರೆ ಎಂಬ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಡಿಗ್ರಿಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕು. ಇವುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ	ಅವಧಿ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ)	ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ
ನಿದ್ರೆ	8	$\frac{8}{24} \times 360^0 = 120^0$
ಶಾಲೆ	6	$\frac{6}{24} \times 360^0 = 90^0$
ಆಟ	3	$\frac{3}{24} \times 360^0 = 45^0$
ಗೃಹಕಾರ್ಯ	3	$\frac{3}{24} \times 360^0 = 45^0$
ಇತರೆ	4	$\frac{4}{24} \times 360^0 = 60^0$
ಮೊತ್ತ	24	360^0

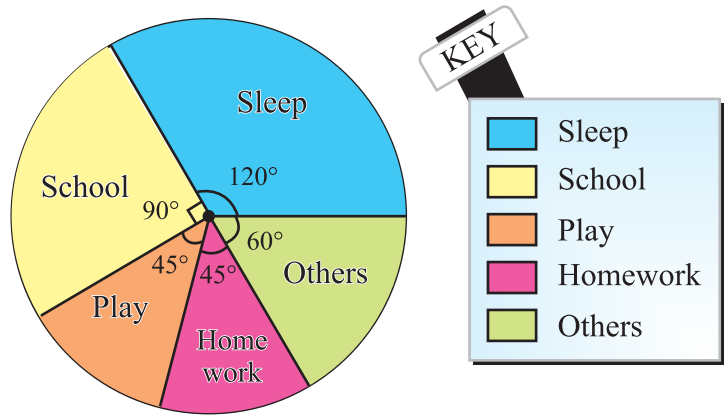
ಪೈ–ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವಿಕೆ (Drawing pie chart)

ಯಾವುದೇ ಅನುಕೂಲವಾದ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ನಾವೀಗ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ. ಈ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 120° ಯನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಈ ಕೋನಕ್ಕೆ ಎರಡನೇ ಬಾಹುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವು ನಿದ್ರೆಗೆ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಗಂಟೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಬಾಹುವಿನಿಂದ ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ 90° ಕೋನವನ್ನು ಅಳೆದು ಎರಡನೇ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವು ಶಾಲೆಯ ಅವಧಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯೇ ಮುಂದುವರಿದು, ಆಟ ಮತ್ತು ಗೃಹಕಾರ್ಯಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡಗಳನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸೋಣ. ಉಳಿದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವು ಕೊನೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು (ಇತರೆಯನ್ನು) ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡಗಳಿಗೆ ವಿವಿಧ ಬಣ್ಣಗಳನ್ನು ಹಚ್ಚುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದ ಪೈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

The time spent by a school student during a day (24 hours)



ಚಿತ್ರ 3.9

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಪೈ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ, ಹಲವಾರು ವೀಕ್ಷಣೆಗಳು ಅಥವಾ ಅಂಗಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ವೃತ್ತವು ಎಲ್ಲಾ ಅಂಗಗಳ ಮೌಲ್ಯದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದ ಒಟ್ಟು ಕೋನ 360° ಯನ್ನು ಅಂಗಗಳ ಮೌಲ್ಯಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ.

$$\text{ಅಂಗದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ} = \left[\frac{\text{ಅಂಗದ ಮೌಲ್ಯ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಮೌಲ್ಯ}} \times 360^0\right]$$

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ಅಂಗಗಳ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಶೇಕಡಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$\text{ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ಅಂಗದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ} = \left[\frac{\text{ಅಂಗದ ಶೇಕಡ ಮೌಲ್ಯ}}{100} \times 360^0\right].$$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಪೈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಹಂತಗಳು:

1. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಪ್ರತಿ ಅಂಗಗಳಿಗೂ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.
2. ಅನುಕೂಲವಾದ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
3. ಈ ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಕ್ಷಿತಿಜ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
4. ಕ್ಷಿತಿಜ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ಮೊದಲ ಅಂಗವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಕ್ಕೆ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವು ಮೊದಲ ಅಂಗವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ, ಎರಡನೇ ಅಂಗದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವು ಎರಡನೆ ಅಂಗವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಗಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವವರೆಗೆ ಮುಂದುವರಿಯಿರಿ.
5. ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಭಿನ್ನವಾದ ಬಣ್ಣವನ್ನು ಹಚ್ಚಿರಿ ಮತ್ತು ಇದು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದನ್ನು ಅಂಗಗಳಿಗೆ ಗುರುತಿಸಿರಿ.
6. ಕೀಲಿಯನ್ನು ನೀಡಿರಿ.
7. ತಲೆಬರಹವನ್ನು ನೀಡಿರಿ.

ಹೀಗೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ನಮಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಪೈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.10

ಒಂದು ಕುಟುಂಬದ ತಿಂಗಳ ಆಯವ್ಯಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವಿವರಗಳು	ಆಹಾರ	ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆ	ಬಟ್ಟೆ	ಶಿಕ್ಷಣ	ಉಳಿತಾಯ	ಇತರೆ
ಖರ್ಚು (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	4800	2400	1600	800	1000	1400

ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಪೈ–ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

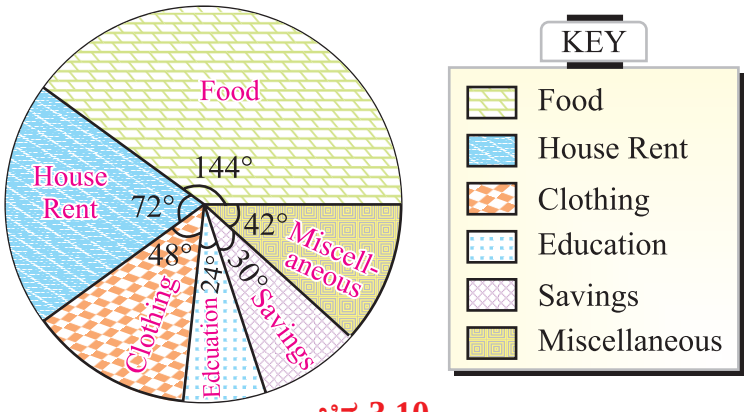
ಪರಿಹಾರ

ಹಲವಾರು ಅಂಗಗಳಿಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

ವಿವರಗಳು	ಖರ್ಚು (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ
ಆಹಾರ	4800	$\frac{4800}{12000} \times 360° = 144°$
ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆ	2400	$\frac{2400}{12000} \times 360° = 72°$
ಬಟ್ಟೆ	1600	$\frac{1600}{12000} \times 360° = 48°$
ಶಿಕ್ಷಣ	800	$\frac{800}{12000} \times 360° = 24°$
ಉಳಿತಾಯ	1000	$\frac{1000}{12000} \times 360° = 30°$
ಇತರೆ	1400	$\frac{1400}{12000} \times 360° = 42°$
ಒಟ್ಟು	**12000**	**360°**

ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ, ನಮಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಪೈ–ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಕುಟುಂಬದ ತಿಂಗಳ ಆಯವ್ಯಯ



ಚಿತ್ರ 3.10

ಉದಾಹರಣೆ 3.11

ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ಎಸ್.ಎಸ್.ಎಲ್.ಸಿ. ವಾರ್ಷಿಕ ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಫಲಿತಾಂಶವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶ	ಪ್ರಥಮ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣ	ದ್ವಿತೀಯ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣ	ತೃತೀಯ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣ	ಅನುತ್ತೀರ್ಣ
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಶೇಕಡ	25%	35%	30%	10%

ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಪೈ–ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

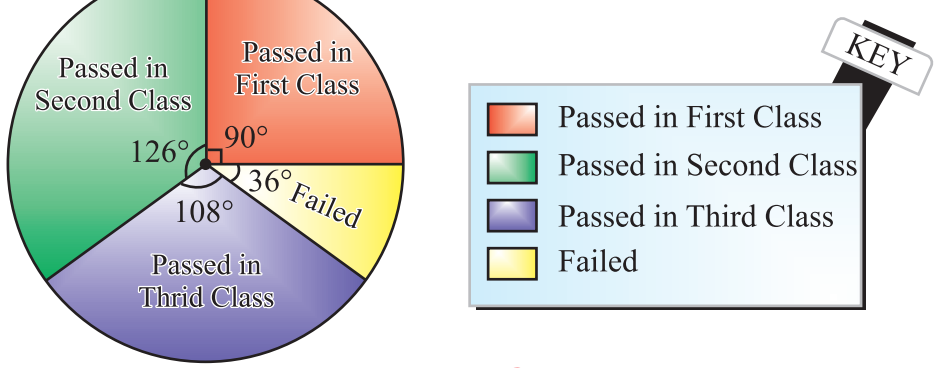
$$\text{ಒಂದು ಅಂಗದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ} = \frac{\text{ಅಂಗದ ಶೇಕಡ ಮೌಲ್ಯ}}{100} \times 360^0$$

ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹಲವಾರು ಅಂಗಗಳಿಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ನಾವು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಫಲಿತಾಂಶ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಶೇಕಡ	ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ
ಪ್ರಥಮ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣ	25%	$\frac{25}{100} \times 360^0 = 90^0$
ದ್ವಿತೀಯ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣ	35%	$\frac{35}{100} \times 360^0 = 126^0$
ತೃತೀಯ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣ	30%	$\frac{30}{100} \times 360^0 = 108^0$
ಅನುತ್ತೀರ್ಣ	10%	$\frac{10}{100} \times 360^0 = 36^\circ$
ಒಟ್ಟು	100%	360^0

ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ, ನಮಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಪೈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಎಸ್.ಎಸ್.ಎಲ್.ಸಿ. ವಾರ್ಷಿಕ ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು



ಚಿತ್ರ 3.11

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

1. ಚೇತನ್ ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅಂಕಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವಿಷಯ	ಕನ್ನಡ	ಇಂಗ್ಲಿಷ್	ಗಣಿತ	ವಿಜ್ಞಾನ	ಸಮಾಜ ವಿಜ್ಞಾನ
ಅಂಕಗಳು	72	60	84	70	74

ಹಲವಾರು ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಅವನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಪೈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

2. 8 ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 36 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾರೆ. ಅವರುಗಳು ವಿವಿಧ ಸಂಘಗಳ ಸದಸ್ಯರುಗಳಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪೈ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

ಸಂಘಗಳು	ಗಣಿತ	ಎನ್.ಸಿ.ಸಿ.	ಜೆ.ಆರ್.ಸಿ.	ಸೇವಾದಳ
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	12	6	10	8

3. ಒಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಲಯದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಮಾತನಾಡುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಭಾಷೆಗಳು	ತಮಿಳು	ತೆಲುಗು	ಮಲೆಯಾಳಂ	ಕನ್ನಡ	ಇಂಗ್ಲಿಷ್	ಇತರೆ
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	36	12	9	6	5	4

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪೈ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

4. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ, 8 ನೇ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಆಸಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗವಹಿಸುವ ಹಲವಾರು ಹವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಪೈ–ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಹವ್ಯಾಸ	ಸಂಗೀತ	ಕುಂಬಾರಿಕೆ	ನೃತ್ಯ	ನಾಟಕ	ಸಮಾಜ ಸೇವೆ
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	20	25	27	28	20

5. ಒಂದು ಮಿಶ್ರಲೋಹವು ಕೆಳಗಿನ ಲೋಹಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪೈ– ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ಲೋಹ	ಚಿನ್ನ	ಸೀಸ	ಬೆಳ್ಳಿ	ತಾಮ್ರ	ಸತು
ತೂಕ (ಗ್ರಾಂ)	60	100	80	150	60

6. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿನದಲ್ಲಿ, ಬೇಕರಿ ಅಂಗಡಿಯೊಂದು ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) ವಿವಿಧ ತಿನಿಸುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಪೈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ತಿನಿಸುಗಳು	ಸಾಮಾನ್ಯ ಬ್ರೆಡ್	ಹಣ್ಣಿನ ಬ್ರೆಡ್	ಕೇಕುಗಳು	ಬಿಸ್ಕತ್ತುಗಳು	ಇತರೆ
ಬೆಲೆ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	320	80	160	120	40

7. ಒಬ್ಬ ಪ್ರಕಾಶಕನು ಒಂದು ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಹಣವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ವಸ್ತು	ಹಾಳೆ	ಮುದ್ರಣ	ಬೈಂಡಿಂಗ್	ಪ್ರಚಾರ	ಗೌರವಧನ
ವ್ಯಯಿಸಿದ ಹಣ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	25	12	6	9	8

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪೈ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

8. ಒಬ್ಬ ಕೃಷಿಕನು ಬೇಸಾಯಕ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಖರ್ಚನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ವಸ್ತು	ಉಳುಮೆ	ಗೊಬ್ಬರ	ಬೀಜಗಳು	ಕ್ರಿಮಿನಾಶಕ	ನೀರಾವರಿ
ಮೊಬಲಗು (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	2000	1600	1500	1000	1100

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪೈ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

9. ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಮೃಗಾಲಯದಲ್ಲಿ 900 ಜೀವಿಗಳಿವೆ.

ಜೀವಿಗಳು	ಸಾಧು ಪ್ರಾಣಿಗಳು	ಪಕ್ಷಿಗಳು	ಭೂಮಿಯ ಇತರೆ ಪ್ರಾಣಿಗಳು	ನೀರು ಪ್ರಾಣಿಗಳು	ಸರೀಸೃಪ
ಜೀವಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	400	120	135	170	75

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪೈ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

10. ಕಾರ್ಖಾನೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಿದ ಐದು ಬಗೆಯ ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪೈ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ವಾಹನ	ಸ್ಕೂಟರ್	ಮೋಟಾರ್ ಬೈಕ್	ಕಾರು	ಜೀಪು	ವ್ಯಾನು
ಸಂಖ್ಯೆ	3000	4000	1500	1000	500

11. ಒಂದು ಆಹಾರವು ಕೆಳಗಿನ ಪೋಷಕಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಪೈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಪೋಷಕಾಂಶಗಳು	ಪ್ರೋಟೀನ್	ಕೊಬ್ಬು	ಕಾರ್ಬೋಹೈಡ್ರೇಟ್	ಅನ್ನಾಂಗಗಳು	ಖನಿಜಗಳು
ಶೇಕಡ	30%	10%	40%	15%	5%

12. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಇಷ್ಟವಾದ ಸ್ವಾಧಯುಕ್ತ ರುಚಿಯ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಂಗಳ ಶೇಕಡವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಸ್ವಾಧಯುಕ್ತ ರುಚಿ	ಚಾಕೊಲೇಟ್	ವೆನಿಲ್ಲಾ	ಸ್ಟ್ರಾಬೆರ್ರಿ	ಇತರೆ ಸ್ವಾಧಯುಕ್ತ ರುಚಿಗಳು
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇಷ್ಟಪಡುವ ಸ್ವಾಧಯುಕ್ತ ರುಚಿಗಳ ಶೇಕಡಾಂಶ	40%	30%	20%	10%

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪೈ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

13. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶಾಲೆಗೆ ಬರಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ವಾಹನಗಳ ವಿಧ	ಬಸ್ಸು	ಸೈಕಲ್	ನಡಿಗೆ	ಸ್ಕೂಟರ್	ಕಾರು
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಶೇಕಡ	40%	30%	15%	10%	5%

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪೈ ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

14. ಭರತನು ತನ್ನ ಆದಾಯದಲ್ಲಿ 20% ನ್ನು ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆಗೆ, 30% ನ್ನು ಆಹಾರಕ್ಕೆ, 10% ನ್ನು ಮಕ್ಕಳ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ, 25% ನ್ನು ಉಳಿತಾಯಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಹಣವನ್ನು ಇನ್ನಿತರೆಗಾಗಿ ವ್ಯಯಿಸುತ್ತಾನೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಗಳಿಗೆ ಪೈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ.

15. ಒಂದು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವವರ ಶೇಕಡವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೆಲಸಗಾರರ ವಿಭಾಗ	ಬೇಸಾಯ	ವ್ಯವಸಾಯದ ಕೂಲಿಗಳು	ಕಾರ್ಖಾನೆಗಳ ಕೆಲಸಗಾರರು	ವಾಣಿಜ್ಯ ಕೆಲಸಗಾರರು	ಇತರೆ
ಶೇಕಡ	40%	25%	12.5%	10%	12.5%

ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಗಳಿಗೆ ಪೈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ.

3.5 ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಗಳು (Measures of Central Tendency)

ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಾದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟೀಕರಿಸಿದ ನಂತರವೂ, ವಿತರಣೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸ್ಪಷ್ಟ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಪೂರ್ಣ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಏಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ವಿವರಿಸುವುದು ಆದರ್ಶನೀಯವಾಗಿದೆ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗೆ ವಿಚಲನೆ ಹೊಂದುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚು ವಿಷಯವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಎಲ್ಲಾ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಅಳತೆಯಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಾಗಿದೆ. ಈ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆ ಅಳತೆಗಳೆಂದರೆ,

(i) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ (ii) ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು (iii) ಬಹುಲಕ

3.5.1 ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ (Arithmetic Mean) (A.M)

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯು ಎಲ್ಲಾ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅನುಪಾತವಾಗಿದೆ.

3.5.1 (a) ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ (Arithmetic mean for ungrouped data)

x ಚರಾಂಶದ n ಸಂಖ್ಯೆಯ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳು $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ಆದರೆ, ಅದರ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು $\bar{x}$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರದಲ್ಲಿರುವ ಚಿಹ್ನೆಯಾದ Σ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಿಗ್ಮ (Sigma) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ಅಥವಾ ಸರಳವಾಗಿ Σx_i ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಂತರ $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸರಾಸರಿ ಅಥವಾ ಮಾಧ್ಯ ಎಂದು ಸಹ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

Σ ಚಿಹ್ನೆಯ ವಿವರಣೆ:

$$\sum_{k=1}^{3} k = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_{n=3}^{6} n = 3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

$$\sum_{n=2}^{4} 2n = 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 = 18$$

$$\sum_{k=1}^{3} 5 = \sum_{k=1}^{3} 5 \times k^0$$

$$= 5 \times 1^0 + 5 \times 2^0 + 5 \times 3^0$$

$$= 5 + 5 + 5 = 15$$

$$\sum_{K=2}^{4} (k-1) = (2-1) + (3-1) + (4-1) = 6$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.12

ಒಂದು ಕಿರು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು 15, 75, 33, 67, 76, 54, 39, 12, 78, 11 ಆಗಿವೆ. ಅವುಗಳ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, $n = 10$

$$\text{A. M} = \bar{x} = \frac{15 + 75 + 33 + 67 + 76 + 54 + 39 + 12 + 78 + 11}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{460}{10} = 46.$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.13

9, 6, 7, 8, 5 ಮತ್ತು x ಬೆಲೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 8 ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೆಲೆಗಳೆಂದರೆ 9, 6, 7, 8, 5 ಮತ್ತು x. ಇಲ್ಲಿ $n = 6$.

ಸೂತ್ರದಿಂದ, $\text{A.M.} = \bar{x} = \dfrac{9+6+7+8+5+x}{6} = \dfrac{35+x}{6}$

ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, $\bar{x} = 8$

ಆಗ, $\dfrac{35+x}{6} = 8$

ಅಂದರೆ, $35 + x = 48$

$x = 48 - 35 = 13$

ಉದಾಹರಣೆ 3.14

ಒಂದು ತರಗತಿಯ 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು 166 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಯಿತು. ಅದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸರಿಯಾದ 150 ಸೆಂ.ಮೀ. ಗೆ ಬದಲಾಗಿ 160 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ನಮೂದಿಸಿರುವುದು ಕಂಡುಬಂದಿತು. ಸರಿಯಾದ ಸರಾಸರಿ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ, $\bar{x} = 166$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $n = 10$

$\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n} = \dfrac{\Sigma x}{10}$

ಅಂದರೆ, $166 = \dfrac{\Sigma x}{10}$ (ಅಥವಾ) $\Sigma x = 1660$

ದೋಷಯುಕ್ತ $\Sigma x = 1660$

ಸರಿಯಾದ Σx = ದೋಷಯುಕ್ತ Σx – ತಪ್ಪು ಬೆಲೆ + ಸರಿಯಾದ ಬೆಲೆ

$= 1660 - 160 + 150 = 1650$

ಆಗ, ಸರಿಯಾದ A.M. $= \dfrac{1650}{10} = 165$ ಸೆಂ.ಮೀ.

3.5.1 (b) ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ (Arithmetic mean for grouped data)

ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅವುಗಳೆಂದರೆ, (i) ನೇರ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು (ii) ಊಹಾತ್ಮಕ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ

(i) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (ನೇರ ವಿಧಾನ)

ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ,

ಚರಾಂಶ	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
ಆವೃತ್ತಿ	f_1	f_2	f_3	$\cdots$	f_n

ಆಗ ಈ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಬಹುದು.

x_1 ಬೆಲೆಯು f_1 ನಷ್ಟು ಬಾರಿ ಸಂಭವಿಸಿದೆ.

x_2 ಬೆಲೆಯು f_2 ನಷ್ಟು ಬಾರಿ ಸಂಭವಿಸಿದೆ.

x_3 ಬೆಲೆಯು f_3 ನಷ್ಟು ಬಾರಿ ಸಂಭವಿಸಿದೆ.

.....

.....

x_n ಬೆಲೆಯು f_n ನಷ್ಟು ಬಾರಿ ಸಂಭವಿಸಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ಗಳು x ಚರಾಂಶದ ವಿಭಿನ್ನ ಬೆಲೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ N ಎಂಬ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(ಅಂದರೆ) $f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = \text{N}$ (ಅಥವಾ) $\sum_{i=1}^{n} f_i = \text{N}$

ಆಗ ವೀಕ್ಷಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಗಳು

$= (x_1 + x_1 + x_1 + \text{---} f_1 \text{ ಬಾರಿ}) + (x_2 + x_2 + x_2 + \text{---} f_2 \text{ ಬಾರಿ}) + \text{---} + (x_n + x_n + x_n + \text{---} f_n \text{ ಬಾರಿ})$

$= f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_n \times x_n = \Sigma f_i x_i$

$$\text{ಆಗ,} \quad \bar{x} = \frac{\text{ವೀಕ್ಷಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಗಳು}}{\text{ಒಟ್ಟು ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fx}{N}$ ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ $\text{N} = \Sigma f$.

ಉದಾಹರಣೆ 3.15

ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	5	10	15	20	25	30
f	4	5	7	4	3	2

ಪರಿಹಾರ

x	f	fx
5	4	20
10	5	50
15	7	105
20	4	80
25	3	75
30	2	60
ಒಟ್ಟು	N = 25	$\Sigma fx = 390$

$$\text{ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ,} \quad \bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N}$$

$$= \frac{390}{25} = 15.6$$

(ii) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (ಊಹಾತ್ಮಕ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ)

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕಡಿಮೆಯಿರುವುದರಿಂದ ಗುಣಾಕಾರವು ತುಂಬಾ ಸರಳವಾಗಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಧಿಕವಾದಾಗ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ನಿರಾಸಕ್ತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ದೋಷಗಳಿಗೆ ಅವಕಾಶ ಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸಲು ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಸರಾಸರಿ (A) ಎಂದು ನಾವು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಊಹಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ A ನ್ನು ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ನಂತರ ನಾವು ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ (A) ಯಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ಚರಾಂಶಗಳಿಗೆ $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ನಾವು ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ, $d_1 = x_1 - A$, $d_2 = x_2 - A$, $d_3 = x_3 - A, \cdots, d_n = x_n - A$

ಈಗ $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$ ಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ ಮತ್ತು Σfdಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಈ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಈಗ, ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$$ (ಇಲ್ಲಿ A ಯು ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು $N = \Sigma f$)

ಈಗ, ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ (ಉದಾಹರಣೆ 3.15) ಊಹಾತ್ಮಕ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಊಹಾತ್ಮಕ ಸರಾಸರಿ A = 15 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

x	f	$d = x - A$	fd
5	4	– 10	– 40
10	5	– 5	– 25
15	7	0	0
20	4	5	20
25	3	10	30
30	2	15	30
ಒಟ್ಟು	**N = 25**		Σfd **= 15**

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ $= \bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$

$$= 15 + \frac{15}{25} = 15 + \frac{3}{5} = \frac{75+3}{5} = \frac{78}{5}$$

$$= 15.6 .$$

3.5.2 ತೂಕದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ (Weighted Arithmetic Mean) (W.A.M.)

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಚರಾಂಶಗಳು ವಿವಿಧ ತೂಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದುದಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಈ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು. ಅಂತಹ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು **ತೂಕದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಚರಾಂಶ x_1 ಎಂಬುದು ತೂಕ w_1 ನಿಂದ ಸಂಬಂಧಿಸಿದುದಾಗಿದೆ, x_2 ಎಂಬುದು ತೂಕ w_2 ನಿಂದ ಸಂಬಂಧಿಸಿದುದಾಗಿದೆ ಇತ್ಯಾದಿ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದಾಗಿ, x_n ಎಂಬುದು ತೂಕ w_n ನಿಂದ ಸಂಬಂಧಿಸಿದುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ,

$$\text{W. A. M.} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.16

ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಬೆಲೆಗಳ ತೂಕದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆಹಾರ ಪದಾರ್ಥ	ಪರಿಮಾಣ (ಕಿ.ಗ್ರಾಂನಲ್ಲಿ) w_i	ಪ್ರತಿ ಕಿ.ಗ್ರಾಂಗೆ ಬೆಲೆ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) x_i
ಅಕ್ಕಿ	25	30
ಸಕ್ಕರೆ	12	30
ಎಣ್ಣೆ	8	70

ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ x- ಬೆಲೆಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಆಹಾರ ಪದಾರ್ಥದ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತೂಕವು (ಕಿ.ಗ್ರಾಂನಲ್ಲಿ) ಪರಿಮಾಣವಾಗಿದೆ.

$$\text{ಆಗ, W.A.M} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n}$$

$$= \frac{25 \times 30 + 12 \times 30 + 8 \times 70}{25 + 12 + 8} = \frac{1670}{45}$$

$$= ₹\ 37.11\ .$$

3.5.3 ಮಧ್ಯಾಂಕ (Median)

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ಅಳತೆಯು ಮಧ್ಯಾಂಕ ಆಗಿದೆ.

3.5.3 (a) ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (To find Median for ungrouped data)

ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

(i) ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ನಂತರ ಮಧ್ಯದ ಪದವೇ ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: 33, 35, 39, 40, 43 ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯದ ಬೆಲೆಯು 39. ಇದು ಈ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿದೆ.

(ii) ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ನಂತರ ಎರಡು ಮಧ್ಯದ ಪದಗಳ ಸರಾಸರಿಯು ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: 33, 35, 39, 40, 43, 48 ರ ಮಧ್ಯಾಂಕವು $\frac{39 + 40}{2} = 39.5$ ಆಗಿದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಒಂದು ಚರಾಂಶವು ಮೊದಲು ಮತ್ತು ನಂತರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆ ಚರಾಂಶದ ಮೌಲ್ಯವು ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.17

17, 15, 9, 13, 21, 7, 32 ರ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ 7, 9, 13, 15, 17, 21, 32.

ಇಲ್ಲಿ, $n = 7$ (ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ)

ಮಧ್ಯಾಂಕ = ಮಧ್ಯದ ಬೆಲೆ

$= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ನೇ ಬೆಲೆ $= \left(\frac{7+1}{2}\right)$ ನೇ ಬೆಲೆ $= 4$ ನೇ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು 15 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.18

ಒಬ್ಬ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಟಗಾರನು ಗಳಿಸಿದ ಓಟಗಳು 13, 28, 61, 70, 4, 11, 33, 0, 71, 92 ಆಗಿವೆ. ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಓಟಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿರಿ. 0, 4, 11, 13, 28, 33, 61, 70, 71, 92.

ಇಲ್ಲಿ $n = 10$ (ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ).

28 ಮತ್ತು 33 ಎಂಬವು ಎರಡು ಮಧ್ಯದ ಪದಗಳಾಗಿವೆ.

$\therefore$ ಮಧ್ಯಾಂಕ = ಎರಡು ಮಧ್ಯದ ಪದಗಳ ಸರಾಸರಿ

$$= \frac{28 + 33}{2} = \frac{61}{2} = 30.5$$

3.5.3 (b) ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (To find Median for grouped data)

ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ (Cumulative frequency)

ಒಂದು ವರ್ಗದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯು ಆ ವರ್ಗದವರೆಗಿನ ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಯ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.19

50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಂಕಗಳು	20	27	34	43	58	65	89
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	4	6	11	12	8	7

ಪರಿಹಾರ

ಅಂಕಗಳು (x)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f)	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
20	2	2
27	4	(2 + 4 =) 6
34	6	(6 + 6 =) 12
43	11	(11 + 12 =) 23
58	12	(23 + 12 =) 35
65	8	(35 + 8 =) 43
89	7	(43 + 7 =) 50

ಇಲ್ಲಿ, ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿ $N = \Sigma f = 50$

$$\therefore \frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

ಮಧ್ಯಾಂಕವು $\left(\frac{N}{2}\right)$ ನೇ ಬೆಲೆ = 25 ನೇ ಬೆಲೆ

ಈಗ, **25 ನೇ ಬೆಲೆಯು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ 35 ರಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಅದರ ಅನುಗುಣವಾದ ಅಂಕವು 58.**

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಧ್ಯಾಂಕ = 58.

3.5.4 ಬಹುಲಕ (Mode)

ಬಹುಲಕವು ಕೂಡ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

3.5.4 (a) ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ (ವಿವಿಕ್ತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ) ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (To find Mode for ungrouped data)

ವೈಯಕ್ತಿಕ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಹಲವು ಸಲ ಸಂಭವಿಸುವ ಬೆಲೆಯೇ ಬಹುಲಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.20

2, 4, 5, 2, 1, 2, 3, 4, 4, 6, 2 ರ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ 2 ಎಂಬುದು ಗರಿಷ್ಠ ನಾಲ್ಕು ಬಾರಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಹುಲಕ = 2 .

ಉದಾಹರಣೆ 3.21

22, 25, 21, 22, 29, 25, 34, 37, 30, 22, 29, 25 ರ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ 22 ಎಂಬುದು 3 ಬಾರಿ ಮತ್ತು 25 ಎಂಬುದು 3 ಬಾರಿ ಸಂಭವಿಸಿದೆ.

$\therefore$ 22 ಮತ್ತು 25 ಗಳೆರಡೂ ಈ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಎರಡು ಬಹುಲಕವಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 3.22

15, 25, 35, 45, 55, 65 ರ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಪ್ರತೀ ಬೆಲೆಯು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಾರಿ ಸಂಭವಿಸಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ದತ್ತಾಂಶವು ಬಹುಲಕವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.

3.5.4 (b) ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ (ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ) ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (To find Mode for grouped data)

ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿದಾಗ, ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ವರ್ಗವು ಬಹುಲಕೀಯ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ. ಬಹುಲಕೀಯ ವರ್ಗದ ವಿಚರ ಬೆಲೆಯು ಬಹುಲಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.23

ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕಕ್ಕೆ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೂಲಿ (₹)	250	300	350	400	450	500
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	10	15	16	12	11	13

ಪರಿಹಾರ

ಕೂಲಿ (₹)	ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
250	10
300	15
350	**16**
400	12
450	11
500	13

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಯು 16 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. **ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ 16 ಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ವಿಚರ (ಕೂಲಿ) ಬೆಲೆಯು 350 ಆಗಿದೆ.** ಇದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕವಾಗಿದೆ.

Do you know?

ಏಕಬಹುಲಕ	ದ್ವಿಬಹುಲಕ	ತ್ರಿಬಹುಲಕ	ಬಹುಬಹುಲಕ
ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ **ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಹುಲಕ** ಇದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು **ಏಕಬಹುಲಕ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.	ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ **ಎರಡು ಬಹುಲಕಗಳು** ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು **ದ್ವಿಬಹುಲಕ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.	ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ **ಮೂರು ಬಹುಲಕ** ಇದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು **ತ್ರಿಬಹುಲಕ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.	ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ **ಮೂರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಹುಲಕಗಳು** ಇದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು **ಬಹುಬಹುಲಕ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
ಉದಾಹರಣೆ : 10, 15, 20, 25, 15, 18, 12, 15. ಇಲ್ಲಿ, ಬಹುಲಕವು 15.	ಉದಾಹರಣೆ: 20, 25, 30, 30, 15, 10, 25. ಇಲ್ಲಿ, 25, 30 ಗಳು ದ್ವಿಬಹುಲಕವಾಗಿದೆ.	ಉದಾಹರಣೆ: 60, 40, 85, 30, 85, 45, 80, 80, 55, 50, 60. ಇಲ್ಲಿ 60, 80, 85 ಗಳು ತ್ರಿಬಹುಲಕವಾಗಿವೆ.	ಉದಾಹರಣೆ: 1, 2, 3, 8, 5, 4, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 2, 7, 4, 1. ಇಲ್ಲಿ 1, 2, 3, 4, 5 ಗಳು ಬಹುಬಹುಲಕವಾಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3

I. ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. 2, 4, 6, 8, 10 , 12, 14, 16 ರ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. 18, 41, x , 36, 31, 24, 37, 35, 27, 36 ಬೆಲೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 31 ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, 5 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 76 ಅಂಕಗಳನ್ನು, 7 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 77 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು 8 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 78 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದರೆ, ಆ ತರಗತಿಯ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ತರಗತಿಯ 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ಎತ್ತರವನ್ನು 160 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಯಿತು. ಅದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಎತ್ತರವನ್ನು 152 ಸೆಂ.ಮೀ. ಗೆ ಬದಲಾಗಿ 132 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ನಮೂದಿಸಿರುವುದು ಕಂಡುಬಂದಿತು. ಸರಿಯಾದ ಸರಾಸರಿ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	15	25	35	45	55	65	75	85
f	12	20	15	14	16	11	7	8

6. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಯಸ್ಸಿನ ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	13	14	15	16	17	18
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	3	8	9	11	6	3

7. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು (A.M ನ್ನು) ಪಡೆಯಿರಿ.

ಅಂಕಗಳು	65	70	75	80	85	90	95	100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	11	3	5	4	7	10	4

8. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿನ 12 ಕೆಲಸಗಾರರ ತೂಕವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ತೂಕಗಳು (ಕಿ.ಗ್ರಾಂಗಳಲ್ಲಿ)	60	64	68	70	72
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	3	4	2	2	1

ಕೆಲಸಗಾರರ ಸರಾಸರಿ ತೂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ತಿಂಗಳಿಗೆ, ಒಂದು ಕುಟುಂಬಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗುವ ಸರಕುಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಕಿನ ತೂಕವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ತೂಕದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸರಕು	ತೂಕಗಳು (ಕಿ.ಗ್ರಾಂನಲ್ಲಿ)	ಪ್ರತಿ ಕಿ.ಗ್ರಾಂನ ಬೆಲೆ (₹ ನಲ್ಲಿ)
ಅಕ್ಕಿ	25	30
ಗೋಧಿ	5	20
ಕಾಳುಗಳು	4	60
ತರಕಾರಿಗಳು	8	25
ಎಣ್ಣೆ	3	65

10. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ತೂಕದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಸ್ತು	ವಸ್ತುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆ	ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ
ಪೌಡರ್	2	₹ 45
ಸೋಪು	4	₹ 12
ಪೆನ್ನು	5	₹ 15
ಸಾಧನ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ	4	₹ 25.50

II. ಮಧ್ಯಾಂಕಗಳ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. ಕೆಳಗಿನ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) 83, 66, 86, 30, 81.
   (ii) 45, 49, 46, 44, 38, 37, 55, 51.
   (iii) 70, 71, 70, 68, 67, 69, 70.
   (iv) 51, 55, 46, 47, 53, 55, 51, 46.

2. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f	9	11	5	6	8	1	3	7

3. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು (ಸೆಂ.ಮೀ.ನಲ್ಲಿ) ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಎತ್ತರ (ಸೆಂ.ಮೀ.ನಲ್ಲಿ)	156	155	154	153	152	151	150
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	8	4	6	10	12	3	7

4. 60 ರೋಗಿಗಳ ಹೃದಯವನ್ನು ಕ್ಷ-ಕಿರಣದ ಮೂಲಕ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹೃದಯದ ವ್ಯಾಸ (ಮಿ.ಮೀ.ನಲ್ಲಿ)	130	131	132	133	134	135
ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	9	15	12	6	11

5. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 43 ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ಸಂಬಳವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಂಬಳ (₹ ನಲ್ಲಿ)	4000	5500	6000	8250	10,000	17,000	25,000
ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	5	4	3	13	8	3

III. ಬಹುಲಕದ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) 74, 81, 62, 58, 77, 74. iii) 43, 36, 27, 25, 36, 66, 20, 25.

ii) 55, 51, 62, 71, 50, 32. vi) 24, 20, 27, 32, 20, 28, 20.

2. ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

x	5	10	15	20	25	30
f	14	25	37	16	8	5

3. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕಕ್ಕೆ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉಷ್ಣತೆ (°c ನಲ್ಲಿ)	29	32.4	34.6	36.9	38.7	40
ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	2	6	4	8	3

4. ಸಮೀಕ್ಷೆಯಿಂದ ಪಡೆದ ಬೇಡಿಕೆಯಿರುವ ವಿವಿಧ ಅಂಗಿಗಳ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಾತ್ರ	38	39	40	41	42	43	44
ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಧರಿಸುವವರು)	27	40	51	16	14	8	6

IV. ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕದ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	10	20	25	30	37	55
f	5	12	14	15	10	4

2. ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯ ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	19	21	23	25	27	29	31
ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	13	15	20	18	16	17	13

3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತೂಕ (ಕಿಲೋ ಗ್ರಾಂನಲ್ಲಿ)	47	50	53	56	60
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	3	7	2	4

Concept Summary

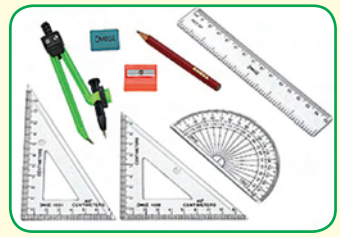
- ಆಯತಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಎರಡು ವಿಧಗಳಾಗಿವೆ.
- ಆಯತಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಾಗ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು X-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಮತ್ತು ಅನುಗುಣವಾದ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು Y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.
- ಆಯತಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಆಯತಗಳ ನಡುವೆ ಸ್ಥಳಾವಕಾಶವಿಲ್ಲದಂತೆ ಆಯತಗಳನ್ನು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಇಡಲಾಗುತ್ತದೆ.
- ಆಯತಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಆಯತಗಳ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ, ಹಿಂದಿನ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.
- ಒಂದು ಅಂಗದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು = $\left[\dfrac{\text{ಅಂಗದ ಮೌಲ್ಯ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಮೌಲ್ಯ}} \times 360^0\right]$
- ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯು ಎಲ್ಲಾ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಡುವಿನ ಅನುಪಾತವಾಗಿದೆ.
- A.M. ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ

  (i) $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$ (ii) $\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

  (iii) $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma fd}{\Sigma f}$, A ಯು ಊಹಾತ್ಮಕ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು $d = x - A$.
- ತೂಕದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ (W.A.M.) = $\dfrac{\Sigma w_i x_i}{\Sigma w_i}$.
- ಒಂದು ಚರಾಂಶವು ಮೊದಲು ಮತ್ತು ನಂತರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆ ಚರಾಂಶದ ಮೌಲ್ಯವು ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿದೆ.
- ಒಂದು ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಕಂಡುಬರುವ ಬೆಲೆಯು ಬಹುಲಕವಾಗಿದೆ.

4 ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

4.1 ಪೀಠಿಕೆ



4.2 ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು

ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ
[ಕ್ರಿ.ಶ. 598 - 670]

7 ನೇ ಶತಮಾನದ ಭಾರತೀಯ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ರಾಜಸ್ಥಾನಿನ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತರವರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೇಲೆ ಹಲವಾರು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ಉಜ್ಜಯನಿಯ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ವೀಕ್ಷಣಾಲಯದ ಮುಖ್ಯಸ್ಥರಾಗಿದ್ದರು. ಇವರು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ "ಬ್ರಹ್ಮಸ್ಫುಟ ಸಿದ್ಧಾಂತ" ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು $\pi \simeq \sqrt{10}$ ಮತ್ತು "n" ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದಾರೆ.

4.1 ಪೀಠಿಕೆ (Introduction)

ಪ್ರಾಚೀನ ಈಜಿಪ್ಟಿಯನ್ನರು ಸಮೀಕ್ಷೆ ಮತ್ತು ಯೋಜನೆಗಳ ರಚನೆಯ ಮೂಲಕ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದರು. ಪ್ರಾಚೀನ ಗ್ರೀಕರು ಅವರ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದರು. ಅವರು ಅಳತೆಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಕೈವಾರವನ್ನು ಬಳಸಿ ವಿವಿಧ ರಚನೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ರೇಖಾಗಣಿವು ಗಣಿತದ ಪುರಾತನ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿದೆ. ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ ಎಂದು ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದು. ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಕರಡು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದರೊಂದಿಗೆ ರೇಖಾಗಣಿತದ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ನೈಜ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದನ್ನು ಅಧ್ಯಯಿಸುತ್ತದೆ.

ಕೆಲವು ಸಮತಲ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಚಿತ್ರಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ, ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಮತ್ತು ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದನ್ನು ಕಲಿಯಲಿದ್ದೇವೆ.

4.2 ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು (Concentric Circles)

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ನಾವು ಅಧ್ಯಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಮೊದಲೇ ವೃತ್ತಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಪರಿಚಿತರಾಗಿದ್ದೇವೆ.

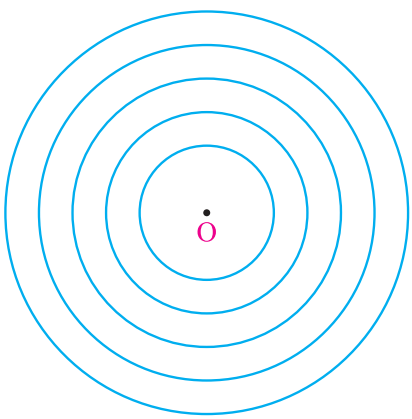
4.2.1 ಪ್ರೇರಣೆ (Motivation)

ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಕಲ್ಲನ್ನು ಸ್ಥಿರ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದಾಗ, ವೃತ್ತೀಯ ಅಲೆಗಳು ಉಂಟಾಗುವುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿರಬಹುದು. ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರವು ಯಾವುದು? ಇದು ಕಲ್ಲು ಬಿದ್ದಂತಹ ಸ್ಥಳವಲ್ಲವೇ? ಹೌದು.

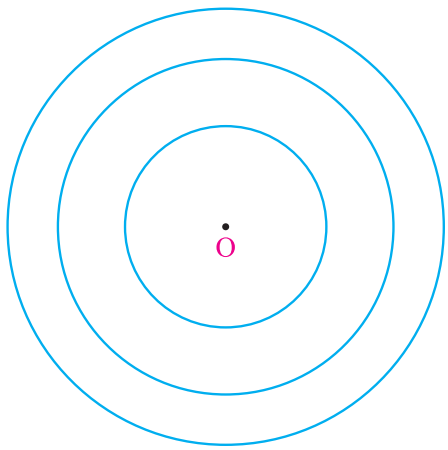
ಒಂದೇ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ಅಳತೆಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು **ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು

ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎಳೆದಿರುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. (ಚಿತ್ರ 4.1 ಮತ್ತು 4.2)

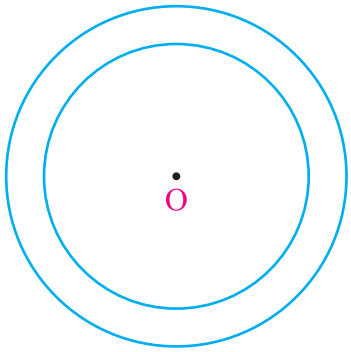


ಚಿತ್ರ 4.1

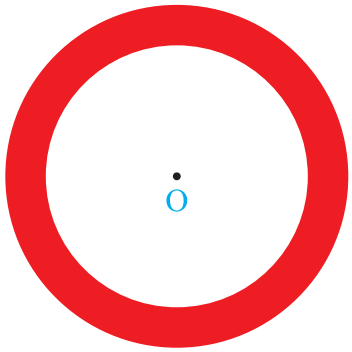


ಚಿತ್ರ 4.2

ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 4.3



ಚಿತ್ರ 4.4

ಚಿತ್ರ 4.3 ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ 4.4 ರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ಕ್ಷೇತ್ರಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣವನ್ನು ತುಂಬಲಾಗಿದೆ. ಬಣ್ಣ ತುಂಬಿದ ಕ್ಷೇತ್ರವನ್ನು **ವೃತ್ತೀಯ ಬಳೆ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

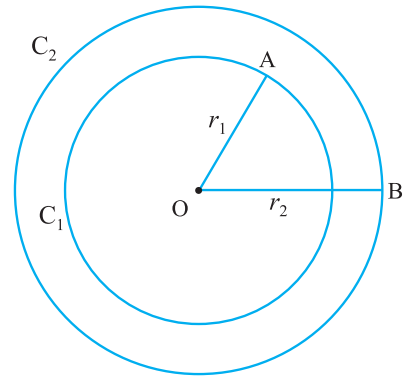
ವಿವರಣೆ: ವೃತ್ತೀಯ ಬಳೆ (Circular Ring)

ಚಿತ್ರ (4.5) ರಲ್ಲಿ, C_1 ಮತ್ತು C_2 ಗಳು ವಿವಿಧ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು r_1 ಮತ್ತು r_2 ಗಳೊಂದಿಗೆ ಒಂದೇ ಕೇಂದ್ರ O ಅನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಾಗಿವೆ.

C_1 ಮತ್ತು C_2 ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವೆ ಆವರಿಸಿರುವ ಕ್ಷೇತ್ರವನ್ನು ವೃತ್ತೀಯ ಬಳೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ವೃತ್ತೀಯ ಬಳೆಯ ಅಗಲ = OB – OA= $r_2 - r_1$, $(r_2 > r_1)$



ಚಿತ್ರ 4.5

4.2.2 ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

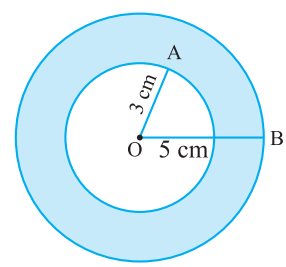
ಉದಾಹರಣೆ 4.1

3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೊಂದಿಗೆ ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ವೃತ್ತೀಯ ಬಳೆಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಿರಿ. ಇದರ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

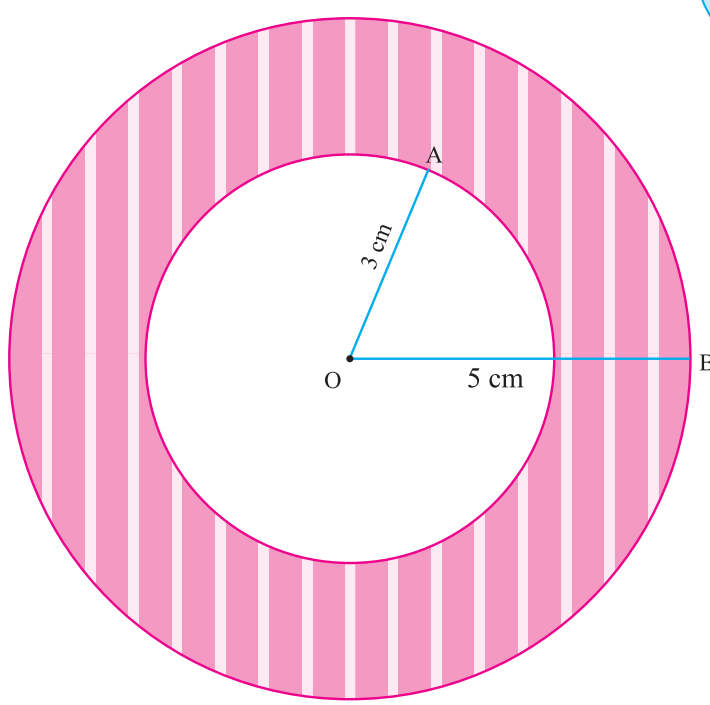
ದತ್ತ: ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 5 ಸೆಂ.ಮೀ.

Rough Diagram



ಚಿತ್ರ 4.6

ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲು



ಚಿತ್ರ 4.7

ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

ಹಂತ 1: ಕರಡು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಹಂತ 2 : ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು O ಅನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಹಂತ 3 : O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಸಿಕೊಂಡು ಮತ್ತು OA = 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಹಂತ 4 : O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಸಿಕೊಂಡು ಮತ್ತು OB = 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ C_1 ಮತ್ತು C_2 ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತೀಯ ಬಳೆಯ ಅಗಲ = OB – OA

= 5 – 3

= 2 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1. **ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತೀಯ ಬಳೆಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

   (i) 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 6 ಸೆಂ.ಮೀ.

   (ii) 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 5.5 ಸೆಂ.ಮೀ.

   (iii) 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 6.8 ಸೆಂ.ಮೀ.

   (iv) 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 6.5 ಸೆಂ.ಮೀ.

   (v) 6.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 8.1 ಸೆಂ.ಮೀ.

   (vi) 5.3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 7 ಸೆಂ.ಮೀ.

Concept Summary

- ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವೆ ಆವರಿಸಿರುವ ಕ್ಷೇತ್ರವನ್ನು ವೃತ್ತೀಯ ಬಳೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- ವೃತ್ತೀಯ ಬಳೆಯ ಅಗಲ $= r_2 - r_1$; $(r_2 > r_1)$

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. i) D ii) C iii) B iv) B v) A
2. i) 200 ಲೀಟರ್‌ಗಳು ii) 20,000 ಕಿ.ಮೀ. iii) ₹ 1,550
   iv) 50 ನಿಮಿಷಗಳು v) ₹ 50
3. ₹ 40,000
4. 5000, 3750
5. i) 90% ii) 94% iii) 98% iv) 88% v) 95% vi) 93%
6. 5
7. ₹ 9,000
8. ₹ 1,020
9. 180, 1320
10. 6 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ
11. i) 26,100 ii) 5,220
12. 25%, ₹ 8,600
13. ಅವಳು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ 20% ನಿಂದ ಉತ್ತಮ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾಳೆ.
14. ₹ 6,250
15. 20%

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. i) ₹ 7490 ii) ₹ 500 iii) ₹ 9,000 iv) ₹ 2,246 v) ₹ 6,57,500
2. i) ಲಾಭ ₹ 64, ಲಾಭ % = 20%
   ii) ಲಾಭ ₹ 200, ಲಾಭ % = 8%
   iii) ನಷ್ಟ ₹ 19, ನಷ್ಟ % = 5%
   iv) S.P. = ₹ 38, ನಷ್ಟ % = 5%
   v) S.P. = ₹ 5,500, ಲಾಭ % = 10%.
3. i) ₹ 787.50 ii) ₹ 1,260 iii) ₹ 2,835
4. ₹ 1,200
5. $33\frac{1}{3}\%$
6. 25%
7. ₹ 22,80,000
8. ₹ 34,40,000
9. $11\frac{1}{9}\%$
10. ಒಟ್ಟಾರೆ ಲಾಭ ₹ 113.68

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. i) A ii) D iii) B iv) B v) C
2. ₹ 360
3. ₹ 8,000
4. ₹ 49,220
5. ₹ 18,433.40
6. ₹ 4,950
7. ₹ 13,000
8. 33%
9. ₹ 9,832.50
10. 20%
11. ಒಂದು ಅಂಗಿಗೆ ₹ 1,310.40
12. i) ರಿಯಾಯಿತಿಯ ಮೊತ್ತ = ₹ 460; S.P. = ₹ 1,840
    ii) ರಿಯಾಯಿತಿಯ ಮೊತ್ತ = ₹ .35; ರಿಯಾಯಿತಿಯ ದರ = 25%
    iii) M.P. = ₹ 20,000; ರಿಯಾಯಿತಿಯ ಮೊತ್ತ = ₹ 4,000
    iv) ರಿಯಾಯಿತಿಯ ದರ = 5%; ರಿಯಾಯಿತಿಯ ಮೊತ್ತ = ₹ 725
    v) ರಿಯಾಯಿತಿಯ ಮೊತ್ತ = ₹ 403; S.P. = ₹ 2,821

ಅಭ್ಯಾಸ 1.4

1. i) A = ₹ 1,157.63, ಬಡ್ಡಿ = ₹ 157.63

   ii) A = ₹ 4,840, ಬಡ್ಡಿ = ₹ 840

   iii) A = ₹ 22,869, ಬಡ್ಡಿ = ₹ 4,869

2. ₹ 2,125

3. i) ₹ 88,200 ii) ₹ 4,410

4. A = ₹ 27,783, C.I. = ₹ 3,783 5. ₹ 9,826

6. C.I. = 1,951 7. ₹ .20,000 8. ₹ 36,659.70

9. i) ₹ 92,400 ii) ₹ 92,610, ವ್ಯತ್ಯಾಸ = ₹ 210

10. ₹ 6 11. ₹ 25 12. ₹ 2,000

13. ನಿತಿನ್ ₹ 924.10 ರ ಅಧಿಕ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಿದನು. 14. P = ₹ 1,25,000

15. 2 ವರ್ಷಗಳು 16. 10% 17. 10%

ಅಭ್ಯಾಸ 1.5

1. 2,205 2. ₹ 2,55,150 3. ₹ 46,000

4. 5,31,616.25 5. 5,415 6. 20,000

7. 10,000

ಅಭ್ಯಾಸ 1.6

1. ₹ 27,000 2. ₹ 86,250 3. ₹ 10,800

4. ₹ 200 5. 9% 6. ₹ 1,250

7. E.M.I. = ₹ 700, ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ = ₹ 19,404 8. E.M.I. = ₹ 875, ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ = ₹ 8,750

ಅಭ್ಯಾಸ 1.7

1. 24 ದಿನಗಳು 2. 10, 1250 3. 10 ಜನ ಅಚ್ಚುಮೊಳೆ ಜೋಡಿಸುವವರು 4. 15 ಕೆಲಸಗಾರರು

5. 24 ದಿನಗಳು 6. ₹ 192

ಅಭ್ಯಾಸ 1.8

1. 3 ದಿನಗಳು 2. 30 ದಿನಗಳು 3. 2 ದಿನಗಳು 4. 12 ನಿಮಿಷಗಳು

5. A = ₹ 360, B = ₹ 240 6. 6 ದಿನಗಳು 7. 1 ಗಂಟೆ

ಅಧ್ಯಾಯ 2

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. i) D ii) C iii) A iv) B
2. ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹು BC. 3. QR = 26 ಸೆಂ.ಮೀ.
4. ಇದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.
5. QR = 5 ಸೆಂ.ಮೀ. 6. $x = 9$ ಮೀ.
7. ಔನ್ನತ್ಯ, $x = 5\sqrt{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ.
8. ಹೌದು 9. $2\sqrt{51}$ ಅಡಿ

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. i) D ii) D iii) C 2. ತ್ರಿಜ್ಯ = 5 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3

I. ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. 9 2. $x = 25$ 3. 77.15 4. 161 ಸೆಂ.ಮೀ. 5. 45

6. 15.45 7. 82.1 8. 65.33 9. ₹ 33 10. ₹ 21

II. ಮಧ್ಯಾಂಕದ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. i) 81 ii) 45.5 iii) 70 iv) 51

2. 3 3. 153 4. 132 5. ₹ 10,000

III. ಬಹುಲಕದ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. i) 74 ii) ಬಹುಲಕ ಇಲ್ಲ iii) 25 ಮತ್ತು 36 iv) 20

2. 15 3. 38.7°C 4. 40

IV. 1. ಸರಾಸರಿ 28; ಮಧ್ಯಾಂಕ 25; ಬಹುಲಕ 30

2. ಸರಾಸರಿ 25; ಮಧ್ಯಾಂಕ 25; ಬಹುಲಕ 23

3. ಸರಾಸರಿ 53.05; ಮಧ್ಯಾಂಕ 53; ಬಹುಲಕ 53