தமிழ்நாடு அரசு

# கணக்கு

## பத்தாம் வகுப்பு

தீண்டாமை
மனிதத்தன்மையற்ற செயல் – பெருங்குற்றம்

**பள்ளிக் கல்வித் துறை**

தமிழ்நாடு அரசு
இலவசப் பாடநூல் வழங்கும்
திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்டது.
(விற்பனைக்கு அன்று)

முதல் பதிப்பு – 2011
மறுபதிப்பு – 2012
(பொதுப்பாடத் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்ட நூல்)

**குழுத்தலைவர்**

**முனைவர். இரா. மூர்த்தி**
இணைப் பேராசிரியர்
கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி)
தமிழ்நாடு அரசு, சென்னை – 600005

**மேலாய்வாளர்கள்**

**முனைவர். கு.பெ. யுவராஜ்**
இணைப் பேராசிரியர்
இராமானுஜன் உயர்கணித ஆராய்ச்சிக் கழகம்
சென்னைப் பல்கலைக் கழகம்
சென்னை – 600 005.

**சா. அரங்கநாதன்**
தலைமை ஆசிரியர் (ஓய்வு)
ஸ்ரீ கோபால் நாயுடு மேல்நிலைப் பள்ளி
பீளமேடு
கோயம்புத்தூர் – 641 004.

**நூலாசிரியர்கள்**

**வ. முனியன்**
தலைமை ஆசிரியர்
சென்னை உயர்நிலைப் பள்ளி
ஜாபர்கான்பேட்டை, சென்னை – 600 083.

**சி. பன்னீர் செல்வம்**
முதுகலை பட்டதாரி ஆசிரியர்
அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி
எம்.ஜி.ஆர் நகர், சென்னை – 600 078.

**வே.சு. சங்கர நாராயணன்**
பட்டதாரி ஆசிரியர்
தூய வளனார் ஆ.இ. மேல்நிலைப் பள்ளி
வேப்பேரி, சென்னை – 600 007.

**சிவ. பாபு**
பட்டதாரி ஆசிரியர்
அரசு மகளிர் மேல்நிலைப் பள்ளி
விழுப்புரம் – 605 602.

**க. செல்வராஜன்**
துணை முதல்வர்
குருநானக் மேல்நிலைப் பள்ளி
வேளச்சேரி, சென்னை – 600 042.

**சாந்தா சுரேஷ்**
பட்டதாரி ஆசிரியர்
சி.எஸ்.ஐ. ஜெசிமோசஸ் மெட்ரிக் மே. நி. பள்ளி
அண்ணாநகர் மேற்கு, சென்னை–600 040.

**அ.வெ. பரந்தாமன்**
பட்டதாரி ஆசிரியர்
தர்மமூர்த்தி இராவ் பகதூர் கலவல கண்ணன் செட்டி
இந்து மேல்நிலைப் பள்ளி
திருவள்ளூர்–602 001.

கணினி தட்டச்சு, வரைகலை : **வி. ஜேம்ஸ் ஆபிரகாம், சோ. லஷ்மி**

நூல் அச்சாக்கம்
**தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் கழகம்**
கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

விலை : ₹

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம். மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது

வெப் ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :

# முகவுரை

தமிழ்நாட்டில், கல்வியில் குறிப்பாக பள்ளிக்கல்வியில் வியத்தகு மாற்றங்கள் நிகழ்ந்ததன் விளைவாக அனைத்து வகைப் பள்ளிகளிலும் ஒரே கல்வி முறை, சீரான பாடத்திட்டம் என்ற அடிப்படையில் பொதுப்பாடத் திட்டம் நடைமுறைப்படுத்தப்படுவது மன நிறைவை அளிக்கிறது. தமிழ்நாடு அரசு அளித்துள்ள இந்த அரிய வாய்ப்பினைக் கல்வியின் ஒட்டு மொத்த வளர்ச்சிக்குப் பயன்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும்.

அனைத்து அறிவியல்களுக்கும் அரசியான கணிதமானது உள்ளார்ந்த மதிப்பினையும், அதற்கே உரிய மிடுக்கும், அழகும் கொண்டு என்றென்றும் சிறந்து விளங்கும் ஒரு பாடமாகத் திகழ்கிறது. அறிவியல், பொறியியல் மற்றும் பிற பாடங்களிலும் கணிதம், பிரிக்க முடியாத இடத்தை வகிக்கிறது. எனவே அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப வளர்ச்சிக்கும் மற்றும் தனிநபர் தாம் தேர்ந்தெடுக்கும் துறையில் சிறந்து விளங்கவும், கணித அறிவு மிகவும் அவசியமாகிறது. அதிக அளவில் எடுக்கக் கூடிய கணிதப் பயிற்சியானது ஒருவருக்கு கணித அறிவை அளிப்பதோடு மட்டுமின்றி, சீரான சிந்திக்கும் திறனையும், சிக்கலானப் பிரச்சனைகளைப் பகுத்தாயும் ஆற்றலையும் அளிக்கும்.

தமிழ்க் கவிஞர்களில் தீர்க்கதரிசியான பொய்யாமொழிப் புலவர், அய்யன் திருவள்ளுவர் சுமார் இரண்டாயிரம் ஆண்டுகளுக்கு முன்பாகவே, கணிதக் கல்வியின் மதிப்பை உணர்த்தும் வகையில்,

> எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
> கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு. – குறள் (392)

என்று கூறியுள்ளார்.

நம் வாழ்வில் நாளும் எழக்கூடிய சிக்கல்களுக்குத் தீர்வு காணும் ஆற்றலும், அவற்றை எதிர்கொள்ளும் திறமையும் அவசியம் நமக்குத் தேவைப்படுகின்றன. கணிதம் என்பது கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண உதவும் கருவி மட்டுமன்று; அது மிகவும் சக்தி வாய்ந்த படைப்பாற்றலை உருவாக்கும் விசையாகவும் உள்ளது. இந்த உண்மைகளை எல்லாம் மாணவர்கள் கருத்தில் கொண்டு, அவர்களின் மனமகிழ்ச்சிக்காகவும், மேன்மைக்காகவும் கணிதத்தை மேன்மேலும் பயில வேண்டும்.

நாட்டின் நல்ல எதிர்கால சந்ததியினரை உருவாக்கத் தேர்ந்த கணிதப்பயிற்சி அவசியமாகும். இப்போது கற்றுக் கொள்ளும் கணிதத்தின் அடிப்படைக் கருத்துகள் உயர்கல்வியில் கணிதம் மற்றும் அறிவியல் பாடங்களுக்கு அடிப்படையாக அமையும். கணிதத்தின் அடிப்படைக் கூறுகளைக் கற்றுக் கொள்வதோடு நின்றுவிடாமல், அவைகளை எவ்வாறு கணக்குகளின் தீர்வுகளைக் காண்பதில்

பயன்படுத்துவது என்பதனையும் அறிந்து கொள்ள வேண்டும். இதனைக் கருத்தில் கொண்டு இந்நூல் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. பல்வேறு நிலைகளில் கணிதம் எப்படி வளர்கிறது; எவ்வாறு பயன்படுகிறது என்று அறிய வைப்பதில் நாங்கள் அதிக கவனம் எடுத்துக் கொண்டுள்ளோம். இந்நூலிலுள்ள அத்தியாயங்கள் அனைத்தும் இயற்கையாக, தர்க்க ரீதியில், நல்ல எடுத்துக்காட்டுக்களுடன் வரிசைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன. மேலும், மாணவர்கள் பயிற்சிகளை மேற்கொண்டு கணிதக் கருத்துகளைப் புரிந்து கொள்ள வாய்ப்பளிக்கும் வகையில் ஒவ்வொரு அத்தியாயமும் ஒழுங்கமைக்கப்பட்டுள்ளது. மாணவர்கள், ஆசிரியர்களின் துணையோடு கணிதத்தின் உள்ளார்ந்த கருத்துகளையும் அவற்றின் தொடர்புகளையும் தெரிந்து கொண்டு அதற்குப் பிறகு பயிற்சிக் கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்பது சிறந்த முறை என நம்புகிறோம்.

எண்களின் அறிவியலை, கணிதம் ஒரு பகுதியாகக் கொண்டு பரந்தும் விரிந்தும் உள்ளது என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும். வகுப்பறையில், மாணவர்கள் கணிதம் கற்பதில் ஆசிரியரின் பங்கு மிகமிக முக்கியமானதாகும். அவரின் உதவியும் ஆலோசனையும் கற்றலில் இன்றியமையாதன. ஆரம்பக் கணிதத்திலிருந்து உயர் கணிதத்திற்கு மாறுகின்ற படிநிலைகளில் ஆசிரியர் மிக முக்கியப் பங்கை வகிக்கிறார். இந்த நோக்கத்தினை நிறைவு செய்யக் கூடியதாகவும், ஒரு ஊக்கியாகவும் இப்பாடநூல் அமையும் என நம்புகிறோம். ஆசிரியர் – மாணவர் இரு வழிப் பரிமாற்றங்களில் உண்மையாக ஈடுபட்டால் இந்நூலின் மூலம் அதிக அளவு பயனடையலாம். கற்பவரை மையப்படுத்தும் வகுப்பறைச் செயல்பாடுகளுக்கு இம்முயற்சி சந்தேகத்திற்கிடமின்றி வழிவகை செய்யும். மாணவர்களுக்குக் கணிதத் தேடுதல் பயணத்திற்கும், எல்லா வகையிலும் திறன்களை வளர்த்துக் கொள்வதற்கும் வழியமைத்துத் தருவதை இந்நூல் முக்கிய நோக்கமாகக் கொண்டுள்ளது. எடுத்துக்காட்டுகளில் சரியாகப் பயிற்சிகளை மேற்கொண்டால், பயிற்சியிலுள்ள கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணும் வழிமுறைகளைச் சரிவரப் புரிந்து கொள்வதற்கு அவை பேருதவி புரியும். அடிப்படைக் கருத்துகளைக் கற்பது, பயிற்சிக் கணக்குகளில் ஈடுபடுவது, பிறகு அதனோடு தொடர்புடைய புதிய கணக்குகளை உருவாக்குவது ஆகியவற்றின் மூலம் ஒருவருடைய கணித அறிவு வளம்பெறும்.

"கணக்குகள் செய்வதன் மூலம் கணிதத்தைக் கற்போம்"
*("We learn Mathematics by doing Mathematics")*

இந்நூலின் மேன்மைக்கு உரிய கருத்துகளை வல்லுநர்கள், ஆசிரியர்கள் மற்றும் மாணவர்கள் வழங்கினால், நாங்கள் மிகவும் மகிழ்ச்சியடைவோம்.

**இரா. மூர்த்தி**
பாடநூல் குழுத்தலைவர்

## பாடத்திட்டம்

| தலைப்பு | பாடப்பொருள் | எதிர்பார்க்கப்படும் கற்றல் பலன்கள் | கற்பித்தலின் பரிமாற்றச் செயல் திட்டங்கள் | பிரிவேளை |
|---|---|---|---|---|
| I. கணங்களும் சார்புகளும் | • அறிமுகம்<br>• கணச் செயல்பாடுகளின் பண்புகள்<br>• டி மார்கனின் விதிகள் – சரிபார்த்தல் வென்படம் பயன்படுத்துதல்<br>• சூத்திரம் $n(A \cup B \cup C)$<br>• சார்புகள் | • கணச் செயல்களின் அடிப்படைக் கருத்துகள் –மீள்பார்வை<br>• கணப் பண்புகளைப் புரிந்து கொள்ளல் பரிமாற்றுப் பண்பு சேர்ப்புப் பண்பு பங்கீட்டுப் பண்பு (மூன்று கணங்களில் மட்டும்)<br>• நிரப்பிக் கணத்தின் விதிகளைப் புரிந்து கொள்ளல்<br>• டி மார்கன் விதிகளைப் புரிந்து கொள்ளல்; வென்படத்தின் மூலம் விளக்குதல்<br>• சொற்றொடர் கணக்குகளைச் சூத்திரம் மூலமும், வென்படம் மூலமும் தீர்த்தல்<br>• சார்புகளின் வரையறை, அவற்றின் வகைகள் மற்றும் அவைகளைக் குறிக்கும் முறைகள் ஆகியவற்றைப் புரிந்து கொள்ளல்<br>• சார்புகளின் வகைகளை எளிய எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் அறிதல் | • அனைத்து விளக்கங்களுக்கும் வென்படத்தைப் பயன்படுத்துதல்<br>• பொருளியல், மருத்துவம், அறிவியல் போன்ற துறைகளிலிருந்து எடுத்துக்காட்டுகள். | 26 |
| II. மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசைகள் மற்றும் தொடர்கள் | • அறிமுகம்<br>• தொடர் வரிசைகள்<br>• கூட்டுத் தொடர் வரிசை (A.P)<br>• பெருக்குத் தொடர்வரிசை (G.P)<br>• தொடர்கள் | • கூட்டுத் தொடர்வரிசை பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகியவற்றைப் புரிந்து கொள்ளல்<br>• கூட்டுத் தொடர்வரிசை பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகியவற்றில் '$n$' ஆவது உறுப்பைக் கண்டறிதல்.<br>• கூட்டுத் தொடர்வரிசை பெருக்குத் தொடர்வரிசை – $n$ உறுப்புகளின் கூடுதலைக் காணல்<br>• சில முடிவுறு தொடர்களின் கூடுதல்களைக் காணல் | • அமைப்பு அணுகு முறையைப் பயன்படுத்துதல்<br>• புள்ளி அமைப்பைத் துணைக் கருவியாகப் பயன்படுத்துதல்<br>• எண் தொடர் அமைப்புகளைக் கொண்டு சூத்திரத்தை தருவித்தல்<br>• நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழல்களிலிருந்து எடுத்துக் காட்டுகள் | 27 |
| III. இயற்கணிதம் | • நேரியல் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்<br>• பல்லுறுப்புக் கோவைகள் | • இரு மாறிகளுடைய ஒரு சோடி நேரியல் சமன்பாடுகள் பற்றிய கருத்தை புரிந்து கொள்ளல். இருமாறிகளுடன் ஒரு சோடி நேரியல் சமன்பாடுகளை, நீக்கல் முறையிலும், குறுக்குப் பெருக்கல் முறையிலும் தீர்த்தல் | • விளக்கமான எடுத்துக்காட்டுகள் | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| III. இயற்கணிதம் | • தொகுமுறை வகுத்தல்<br>• மீப்பெரு பொது வகுத்தி மற்றும் மீச்சிறு பொது மடங்கு<br>• விகிதமுறு கோவைகள்<br>• வர்க்க மூலம்<br>• இருபடிச் சமன்பாடுகள் | • இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் இடையே உள்ளத் தொடர்பினை அறிதல்<br>• கொடுக்கப்பட்ட கோவையின் ஈவு, மீதி ஆகியவற்றை தொகுமுறை வகுத்தல் மூலம் காணல்<br>• தொகுமுறை வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்திக் கொடுக்கப்பட்ட கோவைக்குக் காரணிகளைக் கண்டறிதல்<br>• விகிதமுறு கோவைகளில் மீ.பொ.வ, மீ.பொ.ம ஆகியவற்றுக்கு இடையே உள்ள வேறுபாடுகளைப் புரிந்து கொள்ளல்<br>• விகிதமுறு கோவைகளை சுருக்குதல் (எளிய கணக்குகள்)<br>• வர்க்கமூலத்தைப் புரிந்து கொள்ளல்<br>• இருபடி சமன்பாட்டின் திட்ட வடிவத்தை அறிதல்<br>• இருபடிச் சமன்பாட்டினைத் தீர்த்தல் (மெய்யெண்கள் மூலங்கள் மட்டும்) காரணிப்படுத்தும் முறை, வர்க்க நிரப்பி முறை, இருபடிச் சமன்பாட்டின் சூத்திர முறை.<br>• இருபடிச் சமன்பாடுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு சொற்றொடர்களில் அமைந்த கணக்குகளைத் தீர்த்தல்<br>• தன்மைக்காட்டிக்கும் மூலங்களின் தன்மைக்கும் இடையே உள்ளத் தொடர்பினைத் இணைத்துப் பார்த்தல்<br>• மூலங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் இருபடிச் சமன்பாடுகளை அமைத்தல் | • மெல்லிய அட்டைப் படங்களை துணைக் கருவிகளாகக் கொள்ளல்<br>• துவக்கத்தில் எண்களின் மீ.பொ.வ., மீ.பொ.ம நினைவு கூர்தல்<br>• பின்னங்களின் செயல்பாடுகளுடன் ஒப்பிடல்.<br>• எண்களில் வர்க்கமூலச் செயல்களுடன் ஒப்பிடல்<br>• மூலங்களின் தன்மையினை இயற்கணிதம் மூலமாகவும் வரைபடம் வாயிலாகவும் ஊகித்துணர உதவுதல் | 40 |
| IV. அணிகள் | • அறிமுகம்<br>• அணிகளின் வகைகள்<br>• கூட்டலும் கழித்தலும்<br>• பெருக்கல்<br>• அணிச் சமன்பாடு | • அணிகளை அமைத்தல் வரிசைகளை அறிதல்<br>• அணிகளின் வகைகளைத் தெரிந்து கொள்ளல்<br>• கொடுக்கப்பட்ட அணிகளைக் கூட்டவும் கழிக்கவும் கற்றல்<br>• ஓர் அணியினைத் திசையிலியால் பெருக்குதல் மற்றும் நிரை நிரல் மாற்று அணி<br>• கொடுக்கப்பட்ட (2 x 2, 2 x 3, 3 x 2 வரிசைகள்) அணிகளை ஏற்ற அணிகளால் பெருக்கல்<br>• இருமாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாடுகளை அணிமுறை மூலம் தீர்த்தல் | • செவ்வக வடிவ எண் தொகுப்பைப் பயன்படுத்துதல் நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழல்களைப் பயன்படுத்துதல் எண் செயல்களைப் பயன்படுத்துதல் | 16 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| V. ஆயத்தொலை வடிவியல் | • அறிமுகம் திருப்புதல் : இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்<br>• பிரிவுச் சூத்திரம் நடுப்புள்ளிச் சூத்திரம் நடுக்கோட்டு மையம் சூத்திரம்)<br>• முக்கோணத்தின் மற்றும் நாற்கரத்தின் பரப்பளவு,<br>• நேர்க்கோடு | • இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தூரத்தை நினைவு கூர்தல். இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளியைக் குறித்தல்<br>• பிரிவுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திப் பிரிக்கும் புள்ளியைக் குறித்தல்<br>• முக்கோணத்தின் பரப்பினைக் கணக்கிடுதல்<br>• இரு புள்ளிகள் அல்லது சமன்பாடு, கொடுக்கப்படும் போது ஒரு கோட்டின் சாய்வு கண்டறிதல்<br>• கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தைக் கொண்டு ஒரு கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் கண்டறிதல்<br>• சாய்வு வெட்டுத்துண்டு வடிவம், புள்ளி – சாய்வு வடிவம், இரு புள்ளிகள் வடிவம், வெட்டுத்துண்டு வடிவம் ஆகிய வடிவங்களில் ஒரு கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காணல் ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும், ஒரு கோட்டிற்கு இணையாக, செங்குத்தாக உள்ள கோட்டின் சமன்பாட்டுகளை அறிதல் | | 25 |
| VI. வடிவியல் | • அடிப்படை விகிதசமத் தேற்றம் (நிருபணத்துடன்) அ.வி.ச.தே. மறுதலை (நிருபணத்துடன்) கோண இரு சமவெட்டித் தேற்றம் (நிருபணம் உட்புறம் மட்டும்)<br>• கோண இருசமவெட்டி தேற்றம் – மறுதலை (நிருபணம் உட்புறம் மட்டும்)<br>• வடிவொத்த முக்கோணங்கள் (தேற்றங்கள் நிருபணமின்றி)<br>• பிதாகரஸ் தேற்றம், தொடுகோடு-நாண் தேற்றம் (நிருபணமின்றி) | • தேற்றங்களைப் புரிந்து கொள்ளல், அவற்றை எளிய கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்பதில் பயன்படுத்துதல் | • தாள்களின் மடிப்பில் சமச்சீர் தன்மையை அறிதல், மாற்றங்களின் நுட்பங்களைக் கையாளுதல்<br>• முறையான நிரூபணங்களை அறிதல்<br>• வடிவப்படங்களை வரைதல்<br>• படங்களுடன் கூடியத் தருக்க ரீதியான, படிப்படியான நிருபணங்கள். விளக்கப்படுதல், விவாதிக்கப்படுதல் | 20 |
| VII. முக்கோணவியல் | • அறிமுகம்<br>• முற்றொருமைகள்<br>• உயரங்களும் தூரங்களும் | • முக்கோணவியல் முற்றொருமைகளை அறிதல் அவற்றை எளிய கணக்குகளில் பயன்படுத்துதல்<br>• முக்கோணவியல் விகிதங்களை அறிதல். உயரங்கள், தூரங்கள் கணக்கிட அவற்றைப் பயன்படுத்துதல் (இரு செங்கோண முக்கோணங்களுக்கு மிகையாகாமல்) | • இயற்கணித சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்துதல்<br>• முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பயன்படுத்துதல்<br>• தோராய மதிப்புகளின் தன்மைகளை விளக்குதல் | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| VIII. அளவியல் | • அறிமுகம்<br>• உருளை, கூம்பு, கோளம், அரைக்கோளம், இடைக் கண்டம் ஆகியவற்றின் புறப்பரப்பு, கனஅளவு<br>• இணைந்த உருவங்களின் புறப்பரப்பு கன அளவு<br>• மாறாக் கன அளவு | • உருளை, கூம்பு, கோளம், அரைக் கோளம், இடைக்கண்டம் ஆகியவற்றின் கனஅளவு மற்றும் புறப்பரப்பு அறிதல்<br>• இணைந்த உருவங்களின் புறப்பரப்பு, கனஅளவு (இரண்டு உருவங்கள் மட்டும்)<br>• மாறாக் கனஅளவுகளில் சில கணக்குகள் | • இணைந்த உருவங்களை உருவாக்க முப்பரிமாண மாதிரிகளைப் பயன்படுத்துதல்<br>• மாதிரிகளையும் படங்களையும் துணைக் கருவிகளாக் பயன்படுத்துதல்<br>• நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழல்களிலிருந்து எடுத்துக் காட்டுகளைத் தெரிந்தெடுத்தல் | 24 |
| IX. செய்முறை வடிவியல் | • அறிமுகம்<br>• வட்டங்களுக்குத் தொடுகோடுகள் வரைதல்<br>• முக்கோணங்கள் வரைதல்<br>• வட்ட நாற்கரம் வரைதல் | • வட்டங்களுக்குத் தொடுகோடுகள் வரைதல்<br>• முக்கோணம் வரைதல். அடிப்பக்கம், எதிர் முனையின் உச்சிக் கோணம் மற்றும்<br>- நடுக்கோடு<br>- குத்துயரம் கொடுக்கப்படின்<br>• வட்ட நாற்கரம் வரைதல் | • தொடுகோடுகளின் நீளங்களை இயற்கணித முறையில் சரிபார்த்தலை அறிமுகப்படுத்துதல்<br>• வட்டத்தில் அமையும் கோணங்களின் பண்புகளைப் படம் வரைவதற்கு முன்பு நினைவு கூர்தல்<br>• தொடர்புடைய தேற்றங்களை நினைவு கூர்தல் | 15 |
| X. வரைபடங்கள் | • அறிமுகம்<br>• இருபடி வரைபடம்<br>• சில சிறப்பு வரைபடங்கள் | • இருபடிச் சமன்பாட்டினை வரைபடம் மூலம் தீர்த்தல்<br>• சொற்றொடர் கணக்குகளை வரைபடம் மூலம் தீர்த்தல் | • நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழல்களை அறிமுகப் படுத்துதல் | 16 |
| XI. புள்ளியியல் | • மையப் போக்களவைகளை நினைவு கூர்தல்<br>• பரவுதலின் அளவுகள்<br>• மாறுபாட்டுக்கெழு | • பரவுதல், வீச்சு, திட்ட விலக்கம், பரவற்படி, மாறுபாட்டுக்கெழு (தொகுக்கப்பட்ட, தொகுக்கப்பட்டாத விவரங்கள்) ஆகிய கருத்துகளைப் புரிந்து கொள்ளல்<br>• மாறுபாட்டுக்கெழுவைக் கணக்கிடல் | • தேர்வுகள் விளையாட்டுகள் போன்ற நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழல்களைப் பயன்படுத்துதல் | 10 |
| XII. நிகழ்தகவு | • அறிமுகம்<br>• நிகழ்தகவு தொன்மை வரையறை<br>• நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம் | • சமவாய்ப்புச் சோதனை, சோதனையின் கூறுவெளி, நிகழ்ச்சிகள், விலக்கிய நிகழ்ச்சி, நிரப்பி நிகழ்ச்சிகள், உறுதியான நிகழ்ச்சி, இயலா நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றத்தைப் புரிந்துக் கொள்ளுதல். அதனை எளிய கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண பயன்படுத்துதல் | • நாணயம் சுண்டுதல், பகடை உருட்டுதல், சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டினை எடுத்தல். | 15 |

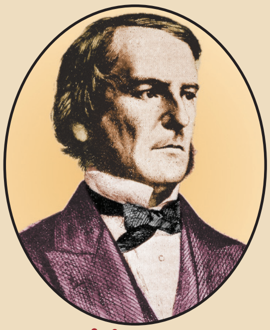
# பொருளடக்கம்

# 1

# கணங்களும் சார்புகளும்

*A set is Many that allows itself to be thought of as a One*
*- Georg Cantor*

- அறிமுகம்
- கணங்கள்
- கணச் செயல்களின் பண்புகள்
- டி மார்கனின் விதிகள்
- சார்புகள்



**ஜார்ஜ் பூலே**
**(GEORGE BOOLE)**
(1815-1864)
இங்கிலாந்து

தருக்க ரீதியான விவாதங்களைக் குறிக்கும் குறியீடுகள் மற்றும் இயற்கணித குறியீடுகளுக் கிடையே நெருங்கிய ஒப்புமை உண்டு என்று பூலே நம்பினார்.

தருக்க ரீதியான தொடர்புகளுக்கு இவர் கணித குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தினார். இவர் காலத்தில் கணிப்பொறிகள் இல்லாதிருந்த போதிலும் அவருடைய பூலியன் இயற்கணிதம், கணிப்பொறி எண் கணிதசெயல்களுக்கு அடித்தளமாக அமைகிறது என்பதனை அறிந்தால் அவர் மகிழ்வடைந்திருப்பார்.

நவீன இலக்க-கணிப்பொறியியலின் தருக்கத்தின் அடிப்படையான பூலியன் தருக்கத்தை கண்டுபிடித்தவர் என்பதால், பூலே கணிப்பொறி அறிவியலின் தந்தை எனப் போற்றப்படுகிறார்.

## 1.1 அறிமுகம்

**கணம்** (set) என்பது கணிதத்தின் அடிப்படைக் கருத்துகளுள் ஒன்றாகும். கணவியலின் குறியீடுகளும் மற்றும் அதன் பயன்பாட்டுக் கலைச்சொற்களும் கணிதத்தின் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கின்றன. எனவே, கணவியலை (set theory) கணிதத்தின் மொழி (language of mathematics) எனக் கூறலாம். 19 ஆம் நூற்றாண்டின் பிற்பகுதியில் ஜார்ஜ் பூலே (George Boole) (1815 - 1864) மற்றும் ஜார்ஜ் கேன்டர் (Georg Cantor) (1845-1918) ஆகிய கணித வல்லுநர்களின் பங்களிப்பினால் தோன்றிய கணவியலானது, 20ஆம் நூற்றாண்டில் கணிதத்தின் அனைத்து பிரிவுகளிலும் நடைபெற்ற வளர்ச்சிகளுக்கு பெருந்துணை புரிந்தது. கணிதத்தில் உள்ள வெவ்வேறு கருத்துகளை ஒன்றிணைக்க, கணவியல் உதவி புரிந்ததின் மூலம் கணிதம் வளர்ச்சியடைந்ததற்கு கணவியல் துணை நின்றது

ஒன்பதாம் வகுப்பில் கணம் பற்றிய கருத்துகள், கணங்களின் சேர்ப்பு, வெட்டு மற்றும் இரு கணங்களின் வித்தியாசம் போன்ற கணச் செயல்களைப் பற்றிய கருத்துகளைக் கற்றுள்ளோம். இங்கு கணங்கள் தொடர்பான மேலும் பல கருத்துகளையும், கணிதத்தில் மற்றுமொரு முக்கிய கருத்தாகிய சார்புகள் பற்றியும் கற்றறிவோம். முதலில் அடிப்படை வரையறைகள் சிலவற்றை எடுத்துக்காட்டுகளுடன் நினைவு கூர்வோம். இங்கு அனைத்து மிகை முழுக்களை $\mathbb{N}$ எனவும் அனைத்து மெய்யெண்களை $\mathbb{R}$ எனவும் குறிப்போம்.

## 1.2 கணங்கள் (Sets)

**வரையறை**

கணம் என்பது நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருட்களின் தொகுப்பாகும். ஒரு கணத்திலுள்ள பொருட்கள் அதன் உறுப்புகள் (elements) எனக் கூறப்படும்.

“நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட” என்பது, ஒரு கணத்தில் ஒரு பொருள் உறுப்பாக அமையுமா அல்லது அமையாதா என்பதனை ஐயமின்றி வரையறுப்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, “சென்னையிலுள்ள அனைத்து உயரமான மனிதர்களின் தொகுப்பு” என்பது ஒரு கணத்தை அமைக்க இயலாது. ஏனெனில், உயரமான மனிதர்கள் என்பதைத் தீர்மானிக்கும் விதிமுறை நன்கு வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே இத்தொகுப்பு ஒரு கணத்தினை வரையறுக்கவில்லை.

குறியீடு

பொதுவாக ஒரு கணத்தைக் குறிக்க $A, B, X, \ldots$ போன்ற ஆங்கில பெரிய எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளைக் குறிக்க $x, y, \ldots$ போன்ற ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். $x$ என்பது $Y$ -ன் ஒரு உறுப்பு என்பதை $x \in Y$ என எழுதுகிறோம். $t$ என்பது $Y$ -ன் ஒரு உறுப்பு அல்ல என்பதை $t \notin Y$ என எழுதுகிறோம்.

**எடுத்துக்காட்டுகள்**

(i) தமிழ்நாட்டிலுள்ள அனைத்து உயர்நிலைப்பள்ளி மாணவர்களின் கணம்.
(ii) தமிழ்நாட்டிள்ள அனைத்து உயர்நிலைப்பள்ளி அல்லது கல்லூரி மாணவர்களின் கணம்.
(iii) அனைத்து மிகை இரட்டை முழுக்களின் கணம்.
(iv) வர்க்கப்படுத்தும்போது குறை எண்ணாக அமையும் முழுக்களின் கணம்.
(v) நிலவில் இறங்கிய அனைத்து மனிதர்களின் கணம்.

$A$, $B$, $C$, $D$, $E$ என்பன முறையே (i), (ii), (iii), (iv), (v) ஆகியவற்றைக் குறிப்பதாக கொள்வோம். இவை நன்கு வரையறுக்கப்பட்டக் கணங்களைக் குறிக்கும். ஒரு முழுவின் வர்க்கம், பூச்சியம் அல்லது மிகை முழு எண் என்பதால் எந்தவொரு முழுவின் வர்க்கமும் குறை எண்ணாக இருக்காது. எனவே, கணம் $D$-ல் எந்த ஒரு உறுப்பும் இல்லை. இம்மாதிரியான கணங்கள் வெற்றுக் கணம் (Empty Set) என அழைக்கப்படும். வெற்றுக் கணத்தை $\phi$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

வரையறை

(i) ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் (finite) இருப்பின் அக்கணம் முடிவுறு கணம் (Finite set) எனப்படும்.
(ii) ஒரு கணம் முடிவுறு கணமாக இல்லாமலிருப்பின், அது முடிவுறாக் கணம் அல்லது முடிவிலி கணம் (Infinite set) எனப்படும்.

மேலே குறிப்பிட்டவற்றில் கணம் $A$ ஒரு முடிவுறு கணம், ஆனால் கணம் $C$ ஒரு முடிவுறாக் கணம் ஆகும். வெற்றுக்கணத்தில் உறுப்புகள் ஏதுமில்லை என்பதை அறியவும். வெற்றுக்கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை பூச்சியம் ஆகும். எனவே, வெற்றுக்கணம் ஒரு முடிவுறு கணம் ஆகும்.

வரையறை

(i) கணம் $X$ ஒரு முடிவுறு கணம் எனில், $X$-ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதன் கண எண் அல்லது ஆதி எண் (Cordinality of a set) எனப்படும். $X$-ன் கண எண்ணை $n(X)$ எனக் குறிப்போம்.
(ii) கணம் $X$ ஒரு முடிவுறாக் கணம் எனில், $X$-ன் கண எண்ணை $\infty$ என்ற குறியால் குறிக்கிறோம்.

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் உள்ள கணங்கள் $A$, $B$ ஆகியவற்றில் $A$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $B$-ன் உறுப்பாகும். இத்தகைய நேர்வுகளில் $A$ என்பது $B$-ன் உட்கணம் எனப்படும்.

ஒன்பதாம் வகுப்பில் கற்ற சில வரையறைகளை நினைவு கூர்வோம்.

**உட்கணம் (Subset)** $X$, $Y$ என்பன இரு கணங்கள் என்க. $X$-லுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் $Y$-ன் உறுப்புகள் எனில், $X$ ஆனது $Y$-ன் உட்கணம் ஆகும். அதாவது $z \in X$ என்பது $z \in Y$ என உணர்த்துவதால், $X$ என்பது $Y$-ன் உட்கணம் ஆகும். $X$ என்பது $Y$-ன் உட்கணம் எனில், $X \subseteq Y$ எனக் குறிக்கிறோம்.

**சம கணங்கள் (Equal sets)** $X$, $Y$ என்ற இரண்டு கணங்களிலும் ஒரே உறுப்புகள் இருந்தால் $X$ மற்றும் $Y$ ஆகியன சம கணங்கள் எனப்படும். இவ்வாறிருக்கும்போது $X = Y$ என குறிக்கின்றோம். மேலும், $X \subseteq Y$ மற்றும் $Y \subseteq X$ எனில், எனில் மட்டுமே $X = Y$ ஆகும்.

**சமான கணங்கள் (Equivalent Sets)** இரு முடிவுறு கணங்கள் $X$ மற்றும் $Y$ என்பனவற்றிற்கு $n(X) = n(Y)$ எனில், இவ்விரு கணங்களும் சமான கணங்கள் எனப்படும். சமான கணங்களில் ஒரே எண்ணிக்கையில் வெவ்வேறான உறுப்புகள் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $P = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$, $Q = \{3, -2\}$ மற்றும் $F = \{3, 2\}$ எனில், $P, Q$ என்பன ஒரே உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளன. எனவே $P = Q$ ஆகும். $F$ மற்றும் $Q$ என்பன சமான கணங்களாகும். ஆனால் $Q \neq F$. சார்புகளைக் கொண்டு முடிவுறாக் கணங்களின் சமானத் தன்மையை வரையறுக்கலாம்.

**அடுக்குக் கணம் (Power Set)** கணம் $A$-ன் அனைத்து உட்கணங்களின் தொகுப்பு $P(A)$ எனில், $P(A)$ என்பது $A$-ன் **அடுக்குக் கணம்** எனப்படும்.

$n(A) = m$ எனில், $P(A)$-ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n[P(A)] = 2^m$ ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, $A = \{a,b,c\}$ எனில், $P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ ஆகும். எனவே, $n[P(A)] = 8$ ஆகும்.

இரு கணங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் இவற்றைக் கொண்டு எவ்வாறு புதிய கணங்களை நாம் உருவாக்க முடியும் ?

இரு கணங்களிலுமுள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் ஒன்று சேர எடுத்துக் கொண்டு, புதிய கணமொன்றை அமைக்கலாம். பொதுவான உறுப்புகளை மட்டும் எடுத்துக் கொண்டு ஒரு கணத்தை அமைக்கலாம். மேலும் ஒரு கணத்தில் இல்லாத மற்றொரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டு ஒரு கணத்தை உருவாக்கலாம். இவ்வாறான கணங்களை அமைக்க பின்வரும் வரையறைகள் தெளிவுபடுத்தும். ஒவ்வொரு வரையறையிலும் அதனை விளக்கும் வகையில் வென்படங்கள் (Venn diagram) கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

## 1.3 கணங்களின் மீதான செயல்கள் (Operations on sets)

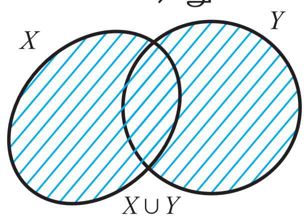
$X, Y$ என்பன கணங்கள் என்க. அவற்றைப் பயன்படுத்தி, பின்வரும் புதிய கணங்களை வரையறுப்போம்.

(i) **சேர்ப்பு (Union)** $X \cup Y = \{z \mid z \in X$ அல்லது $z \in Y\}$

("$X$ சேர்ப்பு $Y$" எனப் படிக்கவும்)

$X \cup Y$-ல் $X$ மற்றும் $Y$ கணங்களின் அனைத்து உறுப்புகளும் உள்ளன. படம் 1.1 இதை விளக்குகிறது.

$X \subseteq X \cup Y$ மற்றும் $Y \subseteq X \cup Y$ என்பது தெளிவாகின்றது.



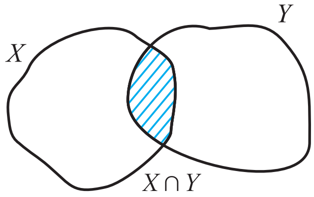
படம் 1.1

(ii) **வெட்டு (Intersection)** $X \cap Y = \{z \mid z \in X$ மற்றும் $z \in Y\}$

("$X$ வெட்டு $Y$" எனப் படிக்கவும்)

$X \cap Y$-ல் $X$ மற்றும் $Y$ கணங்களின் பொதுவான உறுப்புகள் மட்டுமே உள்ளன. படம் 1.2 இதை விளக்குகிறது.

$X \cap Y \subseteq X$ மற்றும் $X \cap Y \subseteq Y$ என்பது தெளிவாகின்றது.



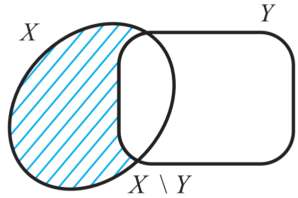
படம் 1.2

(iii) **கண வித்தியாசம் (Set difference)**

$X \setminus Y = \{z \mid z \in X$ ஆனால் $z \notin Y\}$

("$X$ வித்தியாசம் $Y$" எனப் படிக்கவும்)

$X \setminus Y$ என்ற கணத்தில் $Y$-ல் இல்லாத $X$-ன் உறுப்புகள் மட்டுமே உள்ளன. இதை படம் 1.3 விளக்குகிறது. சில நூலாசிரியர்கள் $A \setminus B$ ஐ $A - B$ எனவும் எழுதுவர். $A \setminus B$ என்ற குறியீடு கணிதத்தில் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. எனவே, நாமும் $A \setminus B$-யினை பயன்படுத்துவோம்.



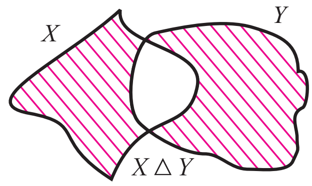
படம் 1.3

(iv) **சமச்சீர் வித்தியாசம் (Symmetric Difference)**

$X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$

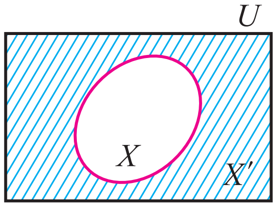
("$X$ சமச்சீர் வித்தியாசம் $Y$" எனப் படிக்கவும்).

$X \triangle Y$ என்ற கணத்தில் $X \cap Y$-ல் இல்லாத ஆனால், $X \cup Y$-ல் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் உள்ளன.



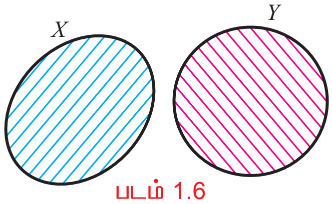
படம் 1.4

(v) **நிரப்பி (Complement)** $U$ என்பது அனைத்துக் கணம் என்க. $X \subseteq U$ எனில், $U \setminus X$ என்பது $U$-ஐப் பொருத்து $X$-ன் நிரப்பிக் கணம் (கணநிரப்பி) ஆகும். அனைத்துக் கணம் குறிப்பிடப்பட்டால், $U \setminus X$ என்பதை $X'$ எனக் குறிப்பிடலாம். அது $X$-ன் கணநிரப்பி எனப்படுகிறது. $A \setminus B$ என்னும் கண வித்தியாசம் $A$-ஐப் பொறுத்து $B$-ன் கணநிரப்பியாகும்.



படம் 1.5

(vi) **வெட்டாக் கணங்கள் (Disjoint sets)** கணங்கள் $X$ மற்றும் $Y$-ல் பொதுவான உறுப்புகள் ஏதும் இல்லையெனில், அவை வெட்டாக் கணங்கள் எனப்படும். அதாவது $X \cap Y = \phi$ எனில், $X$ மற்றும் $Y$ என்பன வெட்டாக் கணங்களாகும்.



படம் 1.6

$A$ மற்றும் $B$ வெட்டாக் கணங்கள் எனில், $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ஆகும்.

**குறிப்புரை**

வென்படங்களில் கணங்களைக் குறிக்க பொதுவாக வட்டங்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். ஆயினும், கணத்தினைக் குறிக்க ஏதாவது ஒரு மூடிய வளைவரையினையும் (any closed curve) பயன்படுத்தலாம். கணத்தில் உறுப்புகளை எழுதும் போது ஒரு உறுப்பினை ஒரு முறைக்கு மேல் எழுதுவதை அனுமதிப்பதில்லை.

இப்பொழுது சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

$A = \{x \mid x$ என்பது 12 ஐ விடச் சிறிய மிகை முழு$\}$,

$B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 15\}$, $C = \{-2, -1, 0, 1, 3, 5, 7\}$ என்க.

(i) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ அல்லது $x \in B\}$

$= \{x \mid x$ என்பது 12 ஐ விடச் சிறிய மிகை முழு அல்லது $x = 12$ அல்லது $15\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15\}$.

(ii) $C \cap B = \{y \mid y \in C$ மற்றும் $y \in B\} = \{1, 7\}$.

(iii) $A \setminus C = \{x \mid x \in A$ ஆனால் $x \notin C\} = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(iv) $A \triangle C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$

$= \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\} \cup \{-2, -1, 0\} = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(v) $U = \{x \mid x$ ஒரு முழு$\}$ என்பதை அனைத்துக்கணம் என்க.

பூச்சியம் மிகையுமல்ல குறையுமல்ல என்பதை அறிக. ஆகவே $0 \notin A$.

இப்பொழுது, $A' = U \setminus A = \{x : x$ என்பது ஒரு முழு ஆனால் $A$ - ன் உறுப்பல்ல$\}$

$= \{x \mid x$ என்பது பூச்சியம் அல்லது ஒரு குறை முழு அல்லது 12-க்குச் சமமான மற்றும் 12-ஐ விடப் பெரிய மிகை முழு$\}$

$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0\} \cup \{12, 13, 14, 15, \cdots\}$

$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 12, 13, 14, 15, \cdots\}$.

சில பயனுள்ள முடிவுகளை பின்வருமாறு பட்டியலிடுவோம்.

$U$ என்பது அனைத்துக் கணம் மற்றும் $A, B$ என்பன $U$-ன் உட் கணங்கள் என்க.

(i) $A \setminus B = A \cap B'$ (ii) $B \setminus A = B \cap A'$

(iii) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$ (iv) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

(v) $(A \setminus B) \cap B = \phi$ (vi) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

## 1.4 கணச் செயல்களின் பண்புகள் (Properties of set operations)

கணச் செயல்களின் சில பண்புகளை காண்போம். $A$, $B$ மற்றும் $C$ என்ற ஏதேனும் மூன்று கணங்களுக்கு பின்வரும் பண்புகள் மெய்யாகும்.

### I. பரிமாற்றுப் பண்பு (Commutative property)

(i) $A \cup B = B \cup A$ (கணங்களின் சேர்ப்பு, பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது)

(ii) $A \cap B = B \cap A$ (கணங்களின் வெட்டு, பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது)

### II. சேர்ப்புப் பண்பு (Associative property)

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (கணங்களின் சேர்ப்பு, சேர்ப்புப் பண்பு உடையது)

(ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (கணங்களின் வெட்டு, சேர்ப்புப் பண்பு உடையது)

### III. பங்கீட்டுப் பண்பு (Distributive property)

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (கணங்களின் வெட்டு, சேர்ப்பின் மீது பங்கீட்டுப் பண்பு உடையது)

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (கணங்களின் சேர்ப்பு, வெட்டின் மீது பங்கீட்டுப் பண்பு உடையது)

பொதுவாக, கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களைக் கொண்டே இப்பண்புகளை நிரூபிக்கலாம். மேலே கூறப்பட்டுள்ள பண்புகளை எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் சரிபார்த்தலுக்குப் பதிலாக, கணித ரீதியில் நிரூபணத்தைக் கொடுப்பது உகந்ததாகும். இது, இப்பாடநூலின் வரம்பிற்கு அப்பாற்பட்டது. இருப்பினும், கணித நிரூபணத்தைப் புரிந்து கொள்ளவும், அதனைப் பாராட்டவும், ஒரு பண்பை எடுத்துக் கொண்டு அதற்குரிய நிரூபணத்தைக் கொடுப்போம்.

#### I. (i) கணங்களின் சேர்ப்புக்கான பரிமாற்றுப் பண்பு

$A$, $B$ ஆகிய இரு கணங்களை எடுத்துக் கொண்டு, $A \cup B$ மற்றும் $B \cup A$ ஆகியன சமகணங்கள் என நிறுவுவோம். இரு கணங்களில் ஒரே உறுப்புகளிருப்பின் அவை சம கணங்கள் என்பதை அறிவோம். முதலில் $A \cup B$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $B \cup A$-ன் உறுப்பு என நிறுவுவோம்.

$z \in A \cup B$ என்பது ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு என்க. $A$ மற்றும் $B$-ன் சேர்ப்பின் வரையறையின்படி, $z \in A$ அல்லது $z \in B$.

அதாவது, ஒவ்வொரு $z \in A \cup B \implies z \in A$ அல்லது $z \in B$

$\implies z \in B$ அல்லது $z \in A$

ஆகவே, $B \cup A$-ன் வரையறையின்படி $z \in B \cup A$ (1)

ஒவ்வொரு $z \in A \cup B$ -க்கும் (1) உண்மையாதலால், $A \cup B$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $B \cup A$-ன் உறுப்பு என்பது மெய்யாகும்.

ஆகவே, உட்கணத்தின் வரையறையின்படி $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$.

தற்போது, $y \in B \cup A$ என்ற ஏதேனும் ஒரு உறுப்பை எடுத்துக் கொண்டு, $y$ ஆனது $A \cup B$-ன் உறுப்பு எனக் காட்டுவோம்.

இப்பொழுது, ஒவ்வொரு $y \in B \cup A \implies y \in B$ அல்லது $y \in A$

$\implies y \in A$ அல்லது $y \in B$

$A \cup B$-ன் வரையறையின்படி, $y \in A \cup B$ (2)

ஒவ்வொரு $y \in B \cup A$-க்கு (2) ஆனது மெய் என்பதால், $B \cup A$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $A \cup B$-ன் உறுப்பு என்பது மெய்யாகும். ஆகவே, உட்கணத்தின் வரையறையின்படி $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$. ஆகவே, $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$ மற்றும் $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$ எனக் காட்டியுள்ளோம். இது $(A \cup B) = (B \cup A)$ எனில், எனில் மட்டுமே நிகழும். மேற்கூறப்பட்ட முறைகளில் மற்ற பண்புகளையும் நிரூபிக்கலாம்.

## கணிதத்தில் நிரூபணங்கள் (Proofs in Mathematics)

கணிதத்தில் ஒரு கூற்று எப்பொழுதும் மெய்யானால், அது மெய்க்கூற்று எனப்படும். ஒரு கூற்று ஏதேனும் ஒரு நிகழ்வில் மெய்யாக இல்லை என்றாலும், அது தவறான கூற்று எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, பின்வரும் சில கூற்றுகளைக் கருதுவோம்.

(i) எந்த ஒரு மிகை ஒற்றை முழுவும் ஒரு பகா எண் ஆகும்.

(ii) ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்துக் கோணங்களின் கூடுதல் $180^\circ$

(iii) ஒவ்வொரு பகா எண்ணும் ஒரு ஒற்றை முழு

(iv) $A, B$ என்ற எந்த இரு கணங்களுக்கும் $A \setminus B = B \setminus A$

பல ஒற்றை மிகை முழுக்கள் பகா எண்ணாக இருந்தாலும் கூட கூற்று (i) தவறானது. ஏனெனில், $9, 15, 21, 45$ போன்ற முழுக்கள் மிகை ஒற்றை எண்கள். ஆனால், பகா எண்களல்ல.

எந்த முக்கோணத்தை எடுத்துக் கொண்டாலும் அதன் அனைத்து கோணங்களின் கூடுதல் $180^\circ$. ஆகவே, வாக்கியம் (ii) மெய்யாகும்.

கூற்று (iii) தவறானது. ஏனெனில், பகா எண் $2$ ஒரு இரட்டை முழுவாகும். ஆனால் கூற்று (iii) எண் $2$ ஐத் தவிர மற்ற ஒவ்வொரு பகா எண்ணுக்கும் உண்மையாகும். ஒரு கூற்றினை மெய்யென நிரூபிக்க வேண்டுமெனில், அனைத்து நிகழ்வுகளிலும் அது மெய்யானது என நாம் நிரூபிக்க வேண்டும். ஏதாவது ஒரு நிகழ்வில் அது தவறு என நிரூபிக்கப்பட்டால், அக்கூற்று தவறாகும். கூற்று (iv) தவறானது. அடிப்படையாக $A\setminus B$ ஐ அமைக்கும் போது, $A$-யிலிருந்து $B$-ன் அனைத்து உறுப்புகளையும் நீக்குகிறோம். அதே போல் $B \setminus A$-க்கு $B$-யிலிருந்து $A$-ன் அனைத்து உறுப்புகளும் நீக்கப்படும். $A = \{2, 5, 8\}$ மற்றும் $B = \{5, 7, -1\}$ என்க.

இங்கு $A \setminus B = \{2, 8\}$ மற்றும் $B \setminus A = \{7, -1\}$. ஆகவே, $A \setminus B \neq B \setminus A$.

எனவே, கூற்று (iv) என்பது தவறானது.

### எடுத்துக்காட்டு 1.1

$A = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$ மற்றும் $B = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$ என்ற கணங்களுக்கு பின்வருவனவற்றை சரிபார்க்கவும். மேலும், வென்படம் மூலமும் சரிபார்க்கவும்.

(i) கணங்களின் சேர்ப்பு பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது

(ii) கணங்களின் வெட்டு பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது

**தீர்வு**

(i) கணங்களின் சேர்ப்பு பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது என சரிபார்ப்போம்.

இப்பொழுது, $A \cup B = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\} \cup \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$

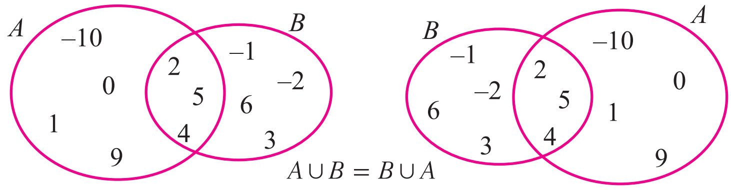
$$= \{-10, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\} \quad (1)$$

$$B \cup A = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\} \cup \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$$

$$= \{-10, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\} \quad (2)$$

ஆகவே (1) மற்றும் (2)-லிருந்து கொடுக்கப்பட்ட கணங்கள் A, B-களுக்கு $A \cup B = B \cup A$ என சரிபார்க்கப்பட்டது.

வென்படம் மூலம், (படம் 1.7) கணங்களின் சேர்ப்பு என்பது பரிமாற்று பண்பு உடையது என சரிபார்க்கப்பட்டது.

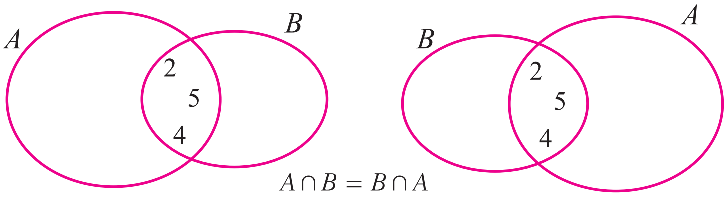



படம் 1.7

(ii) கணங்களின் வெட்டு பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது என சரிபார்ப்போம்.

$$A \cap B = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\} \cap \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$$
$$= \{2, 4, 5\}. \qquad (1)$$
$$B \cap A = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\} \cap \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$$
$$= \{2, 4, 5\}. \qquad (2)$$

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $A \cap B = B \cap A$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.




படம் 1.8

வென்படம் மூலம் (படம் 1.8) $A \cap B = B \cap A$ என சரிபார்க்கப்பட்டது.

**எடுத்துக்காட்டு 1.2**

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{3, 4, 5, 6\},\ C = \{5, 6, 7, 8\}$ எனில்,

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ எனக்காட்டுக.

(ii) வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ என்பதை சரிபார்க்கவும்.

**தீர்வு**

(i) $B \cup C = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

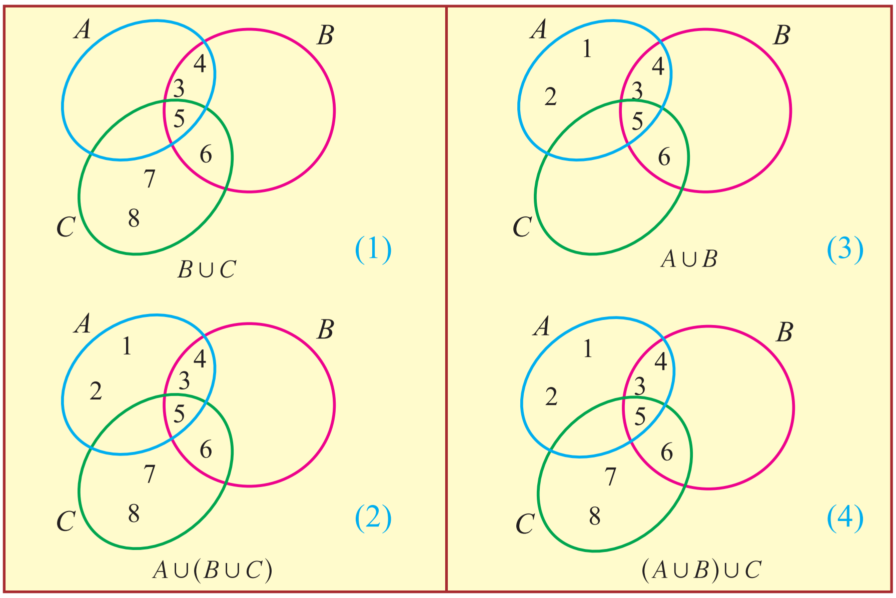
$\therefore \quad A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad (1)$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore \quad (A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad (2)$

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ என சரிபார்க்கப்பட்டது.

(ii) தகுந்த வென்படங்கள் பின்வருமாறு உள்ளன.




படம் 1.9

படம் 1.9-ல் (2) மற்றும் (4) ஆகியவற்றிலிருந்து கணங்களின் சேர்ப்பு ஆனது சேர்ப்புப் பண்பினை நிறைவு செய்கிறது.

## எடுத்துக்காட்டு 1.3

$A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,c,e\}$ மற்றும் $C=\{a,e\}$ எனில்,

(i) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ எனக் காட்டுக.

(ii) வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ என சரிபார்க்கவும்.

### தீர்வு

(i) கொடுக்கப்பட்டவை : $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,c,e\}$, $C=\{a,e\}$.

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ என்பதை சரிபார்ப்போம்.

முதலில், $A\cap(B\cap C)$-ஐ காண்போம்.

$$B\cap C=\{a,c,e\}\cap\{a,e\}=\{a,e\}$$

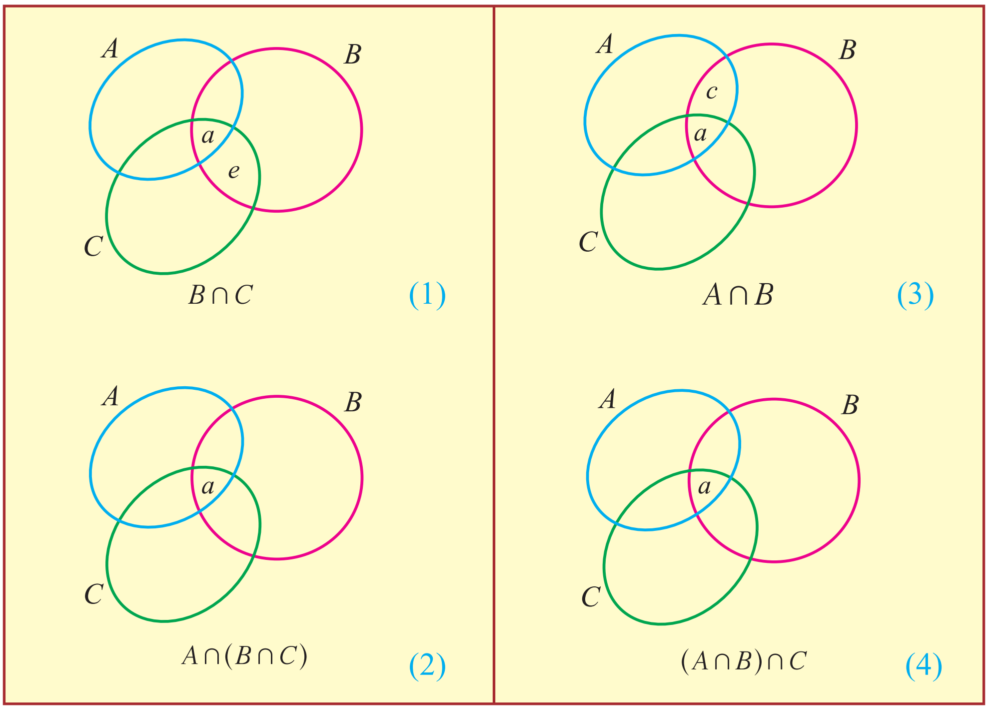
எனவே, $A\cap(B\cap C)=\{a,b,c,d\}\cap\{a,e\}=\{a\}$. (1)

அடுத்ததாக, $A\cap B=\{a,b,c,d.\}\cap\{a,c,e\}=\{a,c\}$

$(A\cap B)\cap C=\{a,c\}\cap\{a,e\}=\{a\}$ (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ என சரிபார்க்கப்பட்டது.

(ii) தகுந்த வென்படங்கள் பின்வருமாறு.




படம் 1.10

படம் 1.10-ல் (2) மற்றும் (4)-லிருந்து $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

## எடுத்துக்காட்டு 1.4

$A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{a,e,i,o,u\}$, $C=\{c,d,e,u\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில்,

(i) $A\setminus(B\setminus C)\neq(A\setminus B)\setminus C$ எனக் காட்டுக.

(ii) வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A\setminus(B\setminus C)\neq(A\setminus B)\setminus C$ என சரிபார்க்கவும்.

**தீர்வு**

(i) $(B \setminus C) = \{a,e,i,o,u\} \setminus \{c,d,e,u\} = \{a,i,o\}$.

எனவே, $A \setminus (B \setminus C) = \{a,b,c,d,e\} \setminus \{a,i,o\} = \{b,c,d,e\}$. (1)

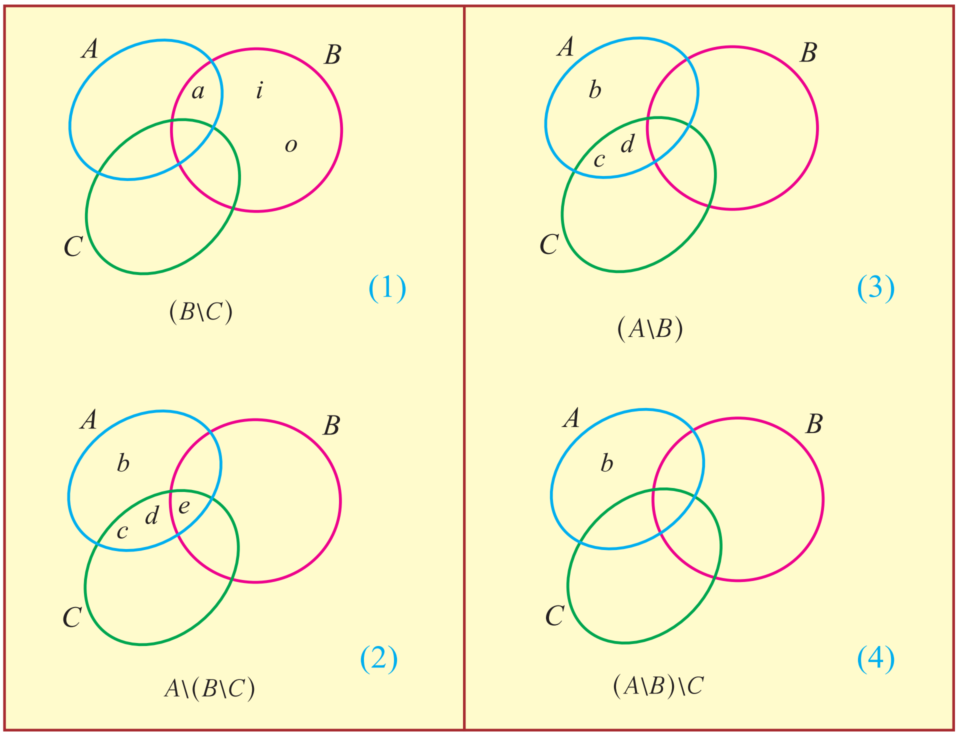
தற்போது, $A \setminus B = \{a,b,c,d,e\} \setminus \{a,e,i,o,u\} = \{b,c,d\}$.

எனவே, $(A \setminus B) \setminus C = \{b,c,d\} \setminus \{c,d,e,u\} = \{b\}$. (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$ என நிறுவப்பட்டது.

ஆகவே, கணங்களின் வித்தியாசம் சேர்ப்புப் பண்பு உடையதல்ல.

(ii) தகுந்த வென்படங்கள் பின்வருமாறு.




படம் 1.11

(2) மற்றும் (4)-களிலிருந்து $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

ஆதலால், கணங்களின் வித்தியாசம் சேர்ப்புப் பண்பு உடையதல்ல.

**குறிப்புரை**

பொதுவாக கணங்களின் வித்தியாசம் சேர்ப்புப் பண்பினை நிறைவு செய்யாவிட்டாலும், $A, B, C$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று வெட்டாக் கணங்கள் எனில், $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ ஆகும். இதை எளிதில் நிரூபிக்கலாம். $B$ மற்றும் $C$ ஆகியன வெட்டாக் கணங்கள். எனவே, $B \setminus C = B$ ஆகும். மேலும், $A, B$ ஆகியன வெட்டாக் கணங்கள். எனவே $A \setminus B = A$ ஆகும். ஆகவே, $A \setminus (B \setminus C) = A$.

மேலும், $A \setminus B = A$ மற்றும் $A, C$ ஆகியன வெட்டாக் கணங்களாகும். எனவே, $A \setminus C = A$. ஆதலால், $(A \setminus B) \setminus C = A$. ஆகவே, $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ என்பது உண்மையாகும். இவ்வாறு, வெட்டாக் கணங்களின் வித்தியாசம் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது என நிறுவப்பட்டது.

**எடுத்துக்காட்டு 1.5**

$A = \{0,1,2,3,4\}$, $B = \{1,-2,3,4,5,6\}$ மற்றும் $C = \{2,4,6,7\}$ என்க.

(i) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ எனக்காட்டுக.

(ii) வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ என சரிபார்க்கவும்.

**தீர்வு**

(i) தற்போது, $B\cap C = \{1,-2,3,4,5,6\}\cap\{2,4,6,7\} = \{4,6\}$

ஆகவே, $A\cup(B\cap C) = \{0,1,2,3,4\}\cup\{4,6\} = \{0,1,2,3,4,6\}$. (1)

மேலும், $A\cup B = \{0,1,2,3,4\}\cup\{1,-2,3,4,5,6\}$

$= \{-2,0,1,2,3,4,5,6\}$,

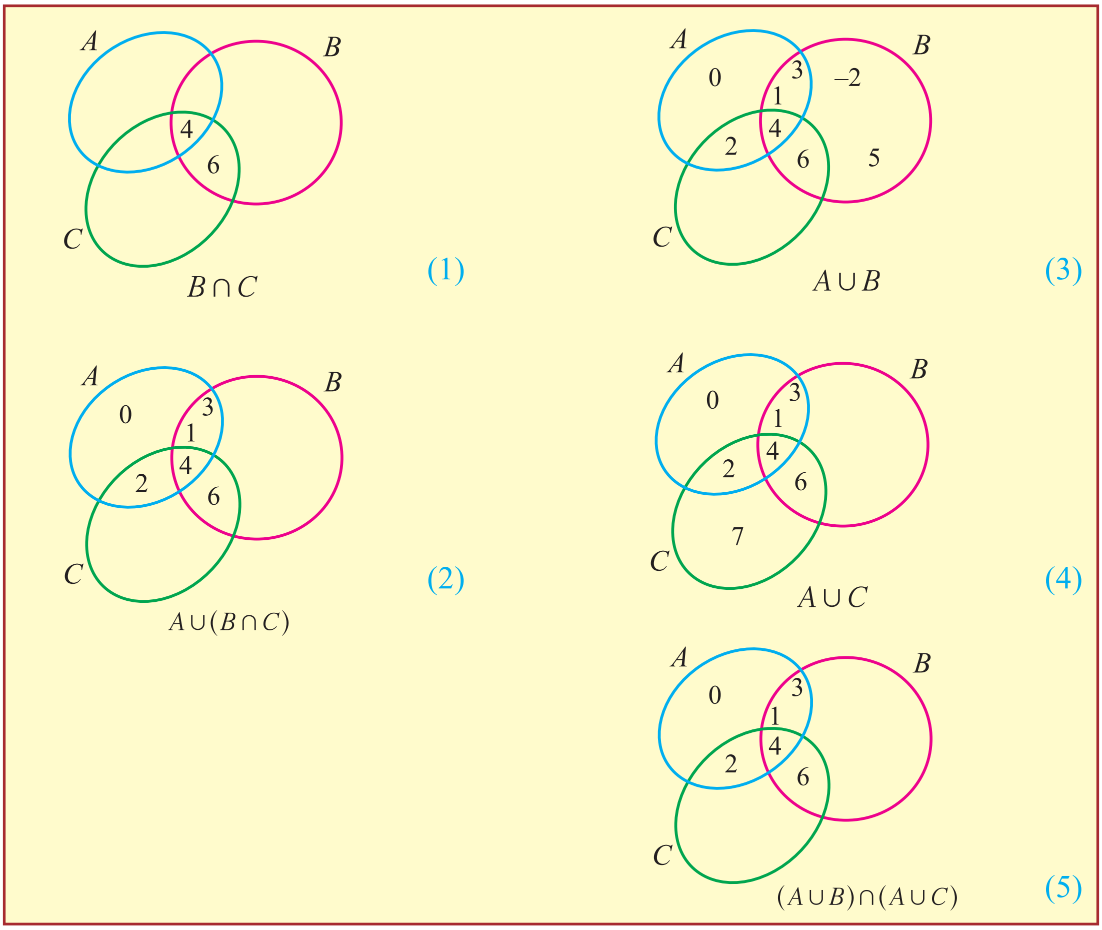
$A\cup C = \{0,1,2,3,4\}\cup\{2,4,6,7\} = \{0,1,2,3,4,6,7\}$.

ஆகவே, $(A\cup B)\cap(A\cup C) = \{-2,0,1,2,3,4,5,6\}\cap\{0,1,2,3,4,6,7\}$

$= \{0,1,2,3,4,6\}$. (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

(ii) தகுந்த வென்படங்கள் பின்வருமாறு.




படம் 1.12

(2) மற்றும் (5)-லிருந்து $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

### எடுத்துக்காட்டு 1.6

$A = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\}$ மற்றும்

$C = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3\}$ எனில், $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ எனக் காட்டுக.

**தீர்வு** A என்ற கணத்தில் $-3$ மற்றும் அதைவிட அதிகமான ஆனால், 4 ஐ விட குறைவான அனைத்து மெய்யெண்களும் உள்ளன.


மேலும், $A = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\}$-ல் எண் 4 சேர்க்கப்படவில்லை.

கணம் $B$-ல், 5 ஐ விடச் சிறிய அனைத்து மிகை முழுக்களும் உள்ளன.

மேலும், $B = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, 4\}$

ஆகவே, $B \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{-5, -3, -1, 0, 1, 3\}$

$= \{1, 2, 3, 4, -5, -3, -1, 0\}$

எனவே, $A \cap (B \cup C) = A \cap \{1, 2, 3, 4, -5, -3, -1, 0\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$. (1)

மேலும், $A \cap B = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3\}$;

$A \cap C = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\} \cap \{-5, -3, -1, 0, 1, 3\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 3\}$.

எனவே, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3\} \cup \{-3, -1, 0, 1, 3\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$. (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ என்பது தெளிவாகிறது.

## பயிற்சி 1.1

1. $A \subset B$ எனில், $A \cup B = B$ எனக் காட்டுக (வென்படத்தைப் பயன்படுத்தவும்).
2. $A \subset B$ எனில், $A \cap B$ மற்றும் $A \setminus B$ ஆகியவற்றைக் காண்க. (வென்படத்தைப் பயன்படுத்துக).
3. $P = \{a, b, c\}, Q = \{g, h, x, y\}$ மற்றும் $R = \{a, e, f, s\}$ எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

   (i) $P \setminus R$ (ii) $Q \cap R$ (iii) $R \setminus (P \cap Q)$.
4. $A = \{4, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ மற்றும் $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

   (i) $A \cup (B \cap C)$ (ii) $A \cap (B \cup C)$ (iii) $A \setminus (C \setminus B)$
5. $A = \{a, x, y, r, s\}, B = \{1, 3, 5, 7, -10\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களுக்கு, கணங்களின் சேர்ப்பு செயலானது, பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது என்பதை சரிபார்க்கவும்.
6. $A = \{l, m, n, o, 2, 3, 4, 7\}$ மற்றும் $B = \{2, 5, 3, -2, m, n, o, p\}$ ஆகியவற்றிற்கு கணங்களின் வெட்டு, பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது என்பதை சரிபார்க்கவும்.

7. $A = \{x \mid x$ என்பது $42$-ன் பகாக் காரணி$\}$, $B = \{x \mid 5 < x \le 12, x \in \mathbb{N}\}$ மற்றும் $C = \{1,4,5,6\}$ எனில், $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ என்பதை சரிபார்க்கவும்.

8. $P = \{a,b,c,d,e\}, Q = \{a,e,i,o,u\}$ மற்றும் $R = \{a,c,e,g\}$ ஆகிய கணங்களின் வெட்டு, சேர்ப்புப் பண்பு உடையது என்பதை சரிபார்க்கவும்.

9. $A = \{5,10,15,20\}, B = \{6,10,12,18,24\}$ மற்றும் $C = \{7,10,12,14,21,28\}$ ஆகிய கணங்களுக்கு $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ என்பது மெய்யாகுமா என ஆராய்க. உன் விடைக்கு தக்க காரணம் கூறுக.

10. $A = \{-5, -3, -2, -1\}, B = \{-2, -1, 0\}$ மற்றும் $C = \{-6, -4, -2\}$ என்க. $A \setminus (B \setminus C)$ மற்றும் $(A \setminus B) \setminus C$ ஆகியவற்றைக் காண்க. இதிலிருந்து கிடைக்கும் கண வித்தியாசச் செயல்பாட்டின் பண்பினைக் கூறுக.

11. $A = \{-3, -1, 0, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{-1, -2, 3, 4, 5, 6\}$ மற்றும் $C = \{-1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ ஆகியவற்றிற்கு பின்வருவனவற்றை சரிபார்க்கவும்.

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iii) வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ மற்றும் $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ஆகியனவற்றை சரிபார்க்கவும்.

## 1.5 டி மார்கனின் விதிகள் (De Morgan's laws)

அகஸ்டஸ் டி மார்கனின் (Augustus De Morgan) தந்தை (ஆங்கிலேயர்) இந்தியாவில் கிழக்கிந்தியக் கம்பெனியில் பணியில் இருந்தார். டி மார்கன் (1806-1871) இந்தியாவில், தமிழ்நாட்டிலுள்ள மதுரையில் பிறந்தார். அவர் 7 மாதக் குழந்தையாய் இருந்த போது அவருடைய குடும்பம் இங்கிலாந்திற்கு குடிபெயர்ந்தது. அவர் இங்கிலாந்தில், கேம்பிரிட்ஜ்ல் உள்ள டிரினிடி கல்லூரியில் (Trinity college, Cambridge, England) கல்வி பயின்றார். அடிப்படை கணச் செயல்களான சேர்ப்பு, வெட்டு மற்றும் நிரப்பி ஆகியவைகளை தொடர்புபடுத்தும் வகையில் டி மார்கனின் விதிகள் உள்ளன.

### கண வித்தியாசத்திற்கான டி மார்கனின் விதிகள் (De Morgan's laws for set difference)

$A$, $B$, $C$ என்பன ஏதேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்,

(i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (ii) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

### கண நிரப்பிக்கான டி மார்கனின் விதிகள் (De Morgan's laws for complementation)

கணம் $A$ மற்றும் $B$-களை உட்கணங்களாகக் கொண்ட அனைத்துக் கணம் $U$ எனில்,

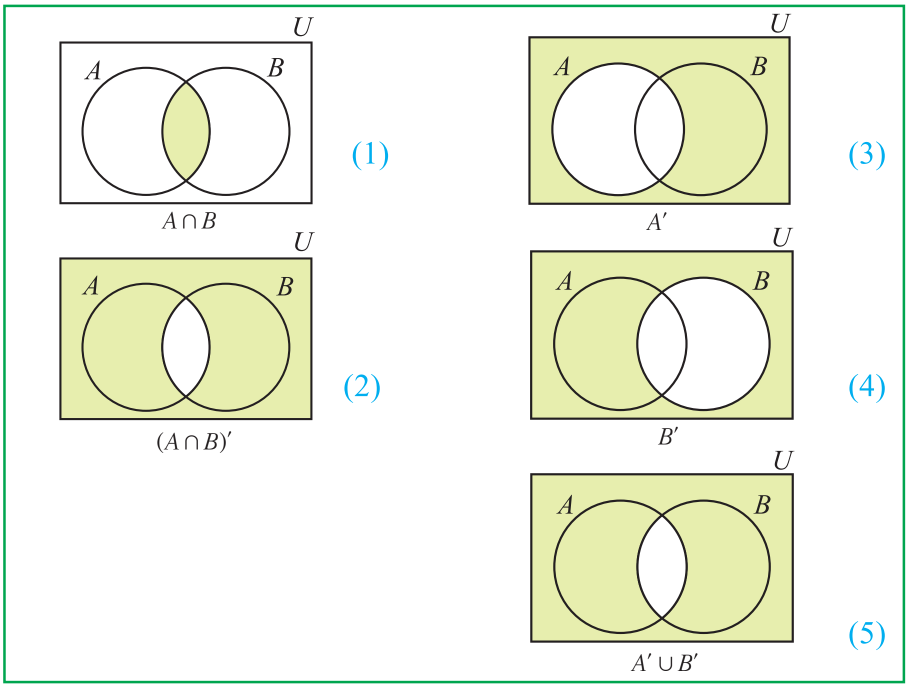
(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

ஏதேனும் ஒரு கணம் $D$ எனில், $D' = U \setminus D$ என்பதால், கண வித்தியாச விதிகளின் நிரூபணத்திலிருந்து கணநிரப்பி விதிகளின் நிரூபணத்தைப் பெறலாம் என்பதைக் கவனிக்கவும். இதற்கு நிரூபணம் தராமல், இவ்விதிகளைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்பதைக் கற்றுக் கொள்வோம்.

## எடுத்துக்காட்டு 1.7

வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $(A \cap B)' = A' \cup B'$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

**தீர்வு**



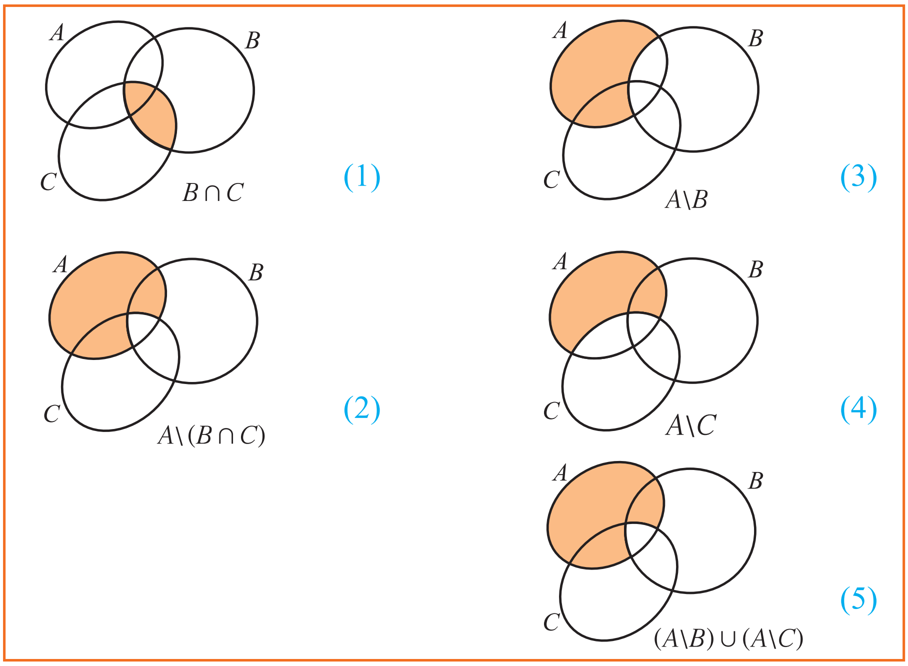

படம் 1.13

(2) மற்றும் (5)-லிருந்து $(A \cap B)' = A' \cup B'$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

## எடுத்துக்காட்டு 1.8

வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ என்னும் டி மார்கனின் கண வித்தியாச விதியினைச் சரிபார்க்கவும்.

**தீர்வு**




படம் 1.14

(2) மற்றும் (5)-லிருந்து $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

**எடுத்துக்காட்டு 1.9**

$U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A = \{-2, 2, 3, 4, 5\}$ மற்றும் $B = \{1, 3, 5, 8, 9\}$ என்க. டி மார்கனின் கண நிரப்பி விதிகளைச் சரிபார்க்கவும்.

**தீர்வு** முதலில் $(A \cup B)' = A' \cap B'$ என்பதைச் சரிபார்ப்போம்.

$$A \cup B = \{-2, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 3, 5, 8, 9\} = \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}$$

எனவே, $(A \cup B)' = U \setminus \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\} = \{-1, 0, 6, 7, 10\}$. (1)

மேலும், $A' = U \setminus A = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$B' = U \setminus B = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}$.

ஆகவே, $A' \cap B' = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}$

$= \{-1, 0, 6, 7, 10\}$. (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $(A \cup B)' = A' \cap B'$ என அறிகிறோம்

இவ்வாறே, மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களுக்கு $(A \cap B)' = A' \cup B'$ எனவும் சரிபார்க்கலாம். இது பயிற்சிக்காக விடப்படுகின்றது.

**எடுத்துக்காட்டு 1.10**

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\}$, $B = \{1, 2, c, d, e\}$ மற்றும் $C = \{d, e, f, g, 2, y\}$ என்க. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ என்பதை சரிபார்க்கவும்.

**தீர்வு**

$$\begin{aligned} B \cup C &= \{1, 2, c, d, e\} \cup \{d, e, f, g, 2, y\} \\ &= \{1, 2, c, d, e, f, g, y\} \end{aligned}$$

ஆகவே, $A \setminus (B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\} \setminus \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}$

$= \{a, b, x, z\}$. (1)

மேலும், $A \setminus B = \{a, b, f, g, x, y, z\}$ மற்றும் $A \setminus C = \{a, b, c, x, z\}$

ஆகவே, $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{a, b, x, z\}$. (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

## பயிற்சி 1.2

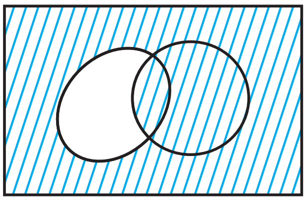
1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களை, வென்படங்களின் மூலம் காட்டுக.

(i) $U = \{5, 6, 7, 8, \cdots, 13\}$, $A = \{5, 8, 10, 11\}$ மற்றும் $B = \{5, 6, 7, 9, 10\}$

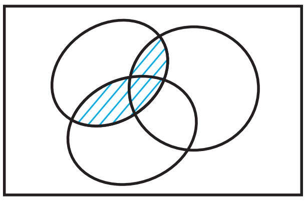
(ii) $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $M = \{b, d, f, g\}$ மற்றும் $N = \{a, b, d, e, g\}$

2. நிழலிட்டுக் (கோடிட்டு) காட்டப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பகுதியையும் குறியீட்டு முறையில் எழுதுக. $U, A, B, C, \cup, \cap$, $'$ மற்றும் $\setminus$ ஆகிய குறியீடுகளை தேவையான இடங்களில் பயன்படுத்துக.

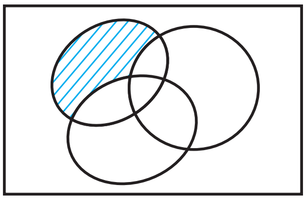
(i)



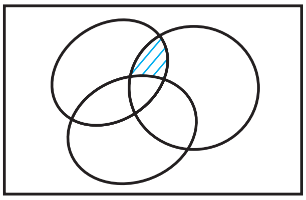
(ii)



(iii)



(iv)



3. $A, B$ மற்றும் $C$ ஆகிய மூன்று கணங்களுக்கு பின் வருவனவற்றை விளக்கும் வென்படங்கள் வரைக.

(i) $A \cap B \cap C$

(ii) A மற்றும் B என்பன $C$-யின் உட்கணங்கள். மேலும் அவைகள் வெட்டாக் கணங்கள்.

(iii) $A \cap (B \setminus C)$ (iv) $(B \cup C) \setminus A$ (v) $A \cup (B \cap C)$

(vi) $C \cap (B \setminus A)$ (vii) $C \cap (B \cup A)$

4. வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$ என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

5. $U = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$, $A = \{8, 16, 24\}$ மற்றும் $B = \{4, 16, 20, 28\}$ எனில், $(A \cup B)'$ மற்றும் $(A \cap B)'$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

6. $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, b, f, g\}$ மற்றும் $B = \{a, b, c\}$ எனில், டி மார்கனின் கண நிரப்பி விதிகளைச் சரிபார்க்கவும்.

7. பின்வரும் கணங்களைக் கொண்டு டி மார்கனின் கண வித்தியாச விதிகளைச் சரிபார்க்கவும். $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, $B = \{1, 2, 5, 7\}$ மற்றும் $C = \{3, 9, 10, 12, 13\}$.

8. $A = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$, $B = \{1, 5, 10, 15, 20, 30\}$ மற்றும் $C = \{7, 8, 15, 20, 35, 45, 48\}$ ஆகிய கணங்களுக்கு $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

9. வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றைச் சரியா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (iv) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

## 1.6 கணங்களின் ஆதி எண் அல்லது கண எண் (Cardinality of sets)

ஒன்பதாம் வகுப்பில் $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, இரு கணங்களைக் கொண்ட கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்பதை அறிந்து கொண்டோம். இச்சூத்திரம் $A, B$ மற்றும் $A\cap B$ ஆகியவற்றின் ஆதி எண்கள் கொடுக்கப்பட்டால் $A\cup B$ என்ற கணத்தின் ஆதி எண்ணைக் கணக்கிட உதவுகிறது. $A, B$ மற்றும் $C$ என்ற மூன்று கணங்களைக் கொண்டு $A\cup B\cup C$ என்ற கணத்தின் ஆதி எண் எவ்வாறு கண்டறிவது? இதற்கான சூத்திரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$n(A\cup B\cup C)= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C).$$

இச்சூத்திரத்தின் பயன்பாட்டினைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் விளக்குகின்றன.

### எடுத்துக்காட்டு 1.11

ஒரு குழுவில் 65 மாணவர்கள் கால்பந்தும், 45 பேர் ஹாக்கியும், 42 பேர் கிரிக்கெட்டும் விளையாடுகிறார்கள். 20 பேர் கால்பந்தாட்டமும் ஹாக்கியும், 25 பேர் கால்பந்தாட்டமும் கிரிக்கெட்டும், 15 பேர் ஹாக்கியும் கிரிக்கெட்டும் மற்றும் 8 பேர் மூன்று விளையாட்டுகளையும் விளையாடுகிறார்கள். அக்குழுவில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ஒவ்வொரு மாணவனும் குறைந்தது ஒரு விளையாட்டினை விளையாடுவார் எனக் கொள்க.)

**தீர்வு** $F, H$ மற்றும் $C$ என்பன முறையே கால்பந்தாட்டம், ஹாக்கி, கிரிக்கெட் ஆடுபவர்களின் கணங்களைக் குறிக்கட்டும். ஆகவே, $n(F)=65, n(H)=45$ மற்றும் $n(C)=42$.

மேலும், $n(F\cap H)=20$, $n(F\cap C)=25$, $n(H\cap C)=15$ மற்றும் $n(F\cap H\cap C)=8$.

குழுவிலுள்ள மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் காண்போம்.

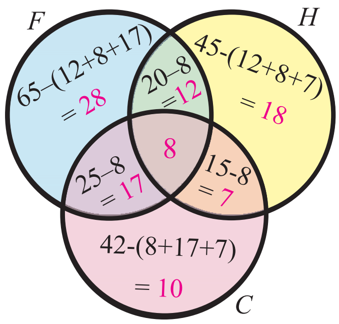
அதாவது, $n(F\cup H\cup C)$-ஐக் காண்போம்.

சூத்திரத்தின்படி,
$$\begin{aligned} n(F\cup H\cup C) &= n(F)+n(H)+n(C)-n(F\cap H)\\ &\quad -n(H\cap C)-n(F\cap C)+n(F\cap H\cap C)\\ &= 65+45+42-20-25-15+8 = 100. \end{aligned}$$

ஆகவே, குழுவிலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 100.

#### மாற்று முறை

வென்படத்தைப் பயன்படுத்தி இதே கணக்கிற்குத் தீர்வு காண முடியும். இக்காலத்தில் வென்படங்களையும் தருக்க முறையையும் பயன்படுத்தி அன்றாட வாழ்க்கையில் நிகழும் சில கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண இயலும். இந்த கணக்கிற்குரிய வென்படங்கள், ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் மூன்று கணங்களைக் கொண்டது. ஒவ்வொன்றும் ஒரு விளையாட்டைக் குறிக்கும். படத்தைப் பார்த்து, கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுக்களைக் கொண்டு, கவனமாகக் கணக்கிட்டு, விளையாட்டு வீரர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்போம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை படத்தில் குறிப்போம்.



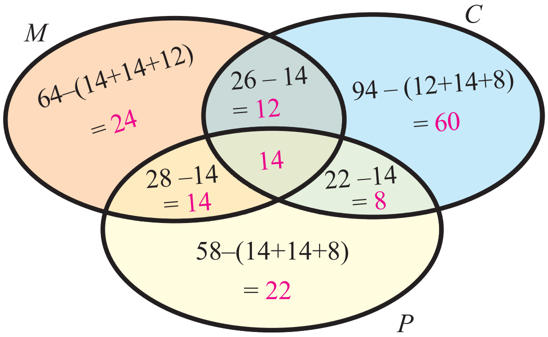
படம் 1.15

ஆகவே, குழுவில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $=28+12+18+7+10+17+8=100$.

### எடுத்துக்காட்டு 1.12

பல்கலைக்கழக மாணவர்களின் கணக்கெடுப்பில், 64 பேர் கணிதம், 94 பேர் கணிப்பொறி அறிவியல், 58 பேர் இயற்பியல் ஆகிய பாடங்களைக் கற்கின்றனர். 28 பேர் கணிதமும் இயற்பியலும், 26 பேர் கணிதமும் கணிப்பொறி அறிவியலும், 22 பேர் கணிப்பொறி அறிவியலும் இயற்பியலும் மற்றும் 14 பேர் மூன்று பாடங்களையும் கற்கின்றனர். கணக்கெடுப்பில் கலந்துக் கொண்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. மேலும், ஒரு பாடத்தை மட்டும் கற்கின்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை வென்படத்தில் குறிப்பிடுவோம்.




படம் 1.16

$M$, $C$ மற்றும் $P$ என்பன முறையே கணிதம், கணிப்பொறி அறிவியல் மற்றும் இயற்பியல் கற்கும் மாணவர்களைக் குறிக்கும் கணங்கள் என்க. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை வென்படத்தில் குறிப்போம்.

$$n(M\cap C\cap P) = 14$$

$$n(M\cap C\cap P') = 26-14 = 12$$

$$n(M\cap P\cap C') = 28-14 = 14$$

$$n(C\cap P\cap M') = 22-14 = 8$$

கணக்கெடுப்பின் போது இருந்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$$= 24+12+60+8+22+14+14 = 154$$

கணிதம் மட்டும் கற்கின்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 64-(14+14+12) = 24$

கணிப்பொறி அறிவியல் மட்டும் கற்கின்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$$= 94-(12+14+8) = 60$$

இயற்பியல் மட்டும் கற்கின்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 58-(14+14+8) = 22$

எனவே, ஒரு பாடத்தை மட்டும் கற்கின்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 24+60+22 = 106$.

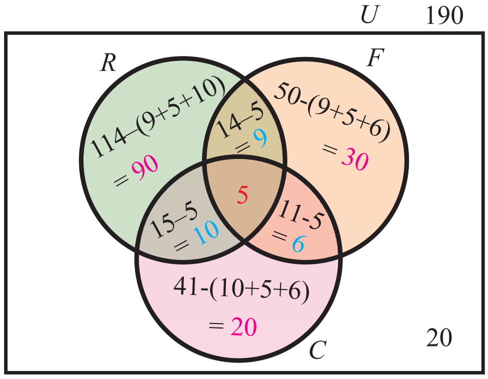
### எடுத்துக்காட்டு 1.13

ஒரு வானொலி நிலையம் 190 மாணவர்களிடம் அவர்கள் விரும்பும் இசையின் வகைகளைத் தீர்மானிக்க ஒரு கணக்கெடுப்பு நடத்தியது. 114 பேர் மேற்கத்திய இசையையும், 50 பேர் கிராமிய இசையையும், 41 பேர் கர்நாடக இசையையும், 14 பேர் மேற்கத்திய இசையையும் கிராமிய இசையையும், 15 பேர் மேற்கத்திய இசையையும் கர்நாடக இசையையும், 11 பேர் கர்நாடக இசையையும் கிராமிய இசையையும் மற்றும் 5 பேர் இம்மூன்று இசைகளையும் விரும்புகின்றனர் எனக் கணக்கெடுப்பில் வெளிப்பட்டது. இத்தகவல்களிலிருந்து பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) மூன்று வகை இசைகளையும் விரும்பாத மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.

(ii) இரு வகை இசைகளை மட்டும் விரும்பும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.

(iii) கிராமிய இசையை விரும்பி மேற்கத்திய இசையை விரும்பாத மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.




படம் 1.17

**தீர்வு** $R, F$ மற்றும் $C$ ஆகியன முறையே மேற்கத்திய இசை, கிராமிய இசை மற்றும் கர்நாடக இசை விரும்பும் மாணவர்களின் கணங்களைக் குறிக்கட்டும். வென்படத்தில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் குறிப்போம்.

இங்கு, $n(R\cap F)=14,\ n(R\cap C)=15,\ n(C\cap F)=11$ மற்றும் $n(R\cap F\cap C)\ =5$

எனவே, $n(R\cap F\cap C')\ =14-5=9$

$n(R\cap C\cap F')\ =15-5=10$

$n(F\cap C\cap R')\ =11-5=6.$

(i) வென்படத்திலிருந்து, ஏதேனும் ஒரு வகை இசையையாவது விரும்பும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $90+9+30+6+20+10+5=170.$

கணக்கெடுக்கப்பட்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $=190.$

ஆகவே, மூன்று வகை இசைகளையும் விரும்பாதவர்களின் எண்ணிக்கை $=190-170=20.$

(ii) ஏதேனும் இருவகை இசைகளை மட்டும் விரும்புபவர்கள் எண்ணிக்கை $=9+6+10=25.$

(iii) கிராமிய இசையை விரும்பி, மேற்கத்திய இசையை விரும்பாத மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $=30+6=36.$

## பயிற்சி 1.3

1. $A, B$ என்பன இரு கணங்கள் மற்றும் $U$ என்பது அனைத்துக் கணம் என்க. மேலும் $n(U)=700$, $n(A)=200, n(B)=300$ மற்றும் $n(A\cap B)=100$ எனில், $n(A'\cap B')$ஐக் காண்க.

2. $n(A)=285, n(B)=195, n(U)=500$ மற்றும் $n(A\cup B)=410$ எனில், $n(A'\cup B')$-ஐக் காண்க.

3. $A, B$ மற்றும் $C$ ஏதேனும் மூன்று கணங்கள் என்க. மேலும், $n(A)=17,\ n(B)=17,\ n(C)=17,\ n(A\cap B)=7,\ n(B\cap C)=6,\ n(A\cap C)=5$ மற்றும் $n(A\cap B\cap C)=2$ எனில், $n(A\cup B\cup C)$ -ஐக் காண்க.

4. பின்வரும் கணங்களுக்கு $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$ என்பதை சரிபார்க்கவும். (i) $A=\{4,5,6\}, B=\{5,6,7,8\}$ மற்றும் $C=\{6,7,8,9\}$

   (ii) $A=\{a,b,c,d,e\}, B=\{x,y,z\}$ மற்றும் $C=\{a,e,x\}$.

5. ஒரு கல்லூரியில் சேருவதற்கு 60 மாணவர்கள் வேதியியலிலும், 40 பேர் இயற்பியலிலும், 30 பேர் உயிரியலிலும் பதிவு செய்துள்ளனர். 15 பேர் வேதியியலிலும் இயற்பியலிலும்,10 பேர் இயற்பியலிலும் உயிரியலிலும் மற்றும் 5 பேர் உயிரியலிலும் வேதியியலிலும் பதிவு செய்துள்ளனர். மூன்று பாடங்களிலும் ஒருவருமே பதிவு செய்யவில்லை எனில், ஏதேனும் ஒரு பாடத்திற்காவது பதிவு செய்துள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

6. ஒரு நகரத்தில் 85% பேர் தமிழ் மொழி, 40% பேர் ஆங்கில மொழி மற்றும் 20% பேர் இந்தி மொழி பேசுகிறார்கள். 32% பேர் தமிழும் ஆங்கிலமும், 13% பேர் தமிழும் இந்தியும் மற்றும் 10% பேர் ஆங்கிலமும் இந்தியும் பேசுகிறார்கள் எனில், மூன்று மொழிகளையும் பேசத் தெரிந்தவர்களின் சதவீதத்தினைக் காண்க.

7. 170 வாடிக்கையாளர்களில் 115 பேர் தொலைக்காட்சியையும், 110 பேர் வானொலியையும் மற்றும் 130 பேர் பத்திரிக்கைகளையும் பயன்படுத்திகிறார்கள் என்பதை ஒரு விளம்பர நிறுவனம் கண்டறிந்தது. மேலும், 85பேர் தொலைக்காட்சி மற்றும் பத்திரிக்கையையும், 75 பேர் தொலைக்காட்சி மற்றும் வானொலியையும், 95 பேர் வானொலி மற்றும் பத்திரிக்கையையும்,

70 பேர் மூன்றினையும் பயன்படுத்துகிறார்கள் எனவும் கண்டறிந்தது. வென்படத்தில் விவரங்களைச் குறித்து, பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) வானொலியை மட்டும் பயன்படுத்துபவர்களின் எண்ணிக்கை.
(ii) தொலைக்காட்சியை மட்டும் பயன்படுத்துபவர்களின் எண்ணிக்கை.
(iii) தொலைக்காட்சி மற்றும் பத்திரிக்கைகளைப் பயன்படுத்தி வானொலியைப் பயன்படுத்தாதவர்களின் எண்ணிக்கை.

8. 4000 மாணவர்கள் பயிலும் ஒரு பள்ளியில், 2000 பேருக்கு பிரெஞ்சு, 3000 பேருக்குத் தமிழ் மற்றும் 500 பேருக்கு இந்தி தெரியும். மேலும், 1500 பேருக்கு பிரெஞ்சு மற்றும் தமிழ், 300 பேருக்கு பிரெஞ்சு மற்றும் இந்தி, 200 பேருக்கு தமிழ் மற்றும் இந்தி, 50 பேருக்கு இம்மூன்று மொழிகளும் தெரியும் எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) மூன்று மொழிகளும் தெரியாதவர்களின் எண்ணிக்கை.
(ii) ஏதேனும் ஒரு மொழியாவது தெரிந்தவர்களின் எண்ணிக்கை.
(iii) இரு மொழிகள் மட்டுமே தெரிந்தவர்களின் எண்ணிக்கை.

9. 120 குடும்பங்கள் உள்ள ஒரு கிராமத்தில் 93 குடும்பங்கள் சமையல் செய்வதற்கு விறகைப் பயன்படுத்துகின்றனர். 63 குடும்பங்கள் மண்ணெண்ணெயினைப் பயன்படுத்துகிறார்கள். 45 குடும்பங்கள் சமையல் எரிவாயுவைப் பயன்படுத்துகிறார்கள். 45 குடும்பங்கள் விறகு மற்றும் மண்ணெண்ணெய், 24 குடும்பங்கள் மண்ணெண்ணெய் மற்றும் எரிவாயு, 27 குடும்பங்கள் எரிவாயுமற்றும்விறகு ஆகியவற்றைப்பயன்படுத்துகின்றனர். விறகு, மண்ணெண்ணெய்மற்றும் சமையல் எரிவாயு இம்மூன்றையும் பயன்படுத்தும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

## 1.7 உறவுகள் (Relations)

முன் பாடப்பகுதியில் கணங்களைப் பற்றி கற்றறிந்தோம். கொடுக்கப்பட்ட கணங்களிலிருந்து சேர்ப்பு, வெட்டு மற்றும் நிரப்பி ஆகியவற்றினால் புதிய கணங்களை உண்டாக்குவது பற்றியும் கற்றோம். இங்கு, மற்றொரு முறையில், கொடுக்கப்பட்ட கணங்கள் $A$ மற்றும் $B$-யிலிருந்து ஒரு புதிய கணத்தை உருவாக்குவது பற்றிக் காண்போம். இப்புதிய கணம், பிற முக்கிய கணிதக் கருத்துக்களான உறவு மற்றும் சார்பு ஆகியனவற்றை வரையறுக்க பயன்படுகிறது.

வெற்றுக் கணங்களல்லாத $A$ மற்றும் $B$ ஆகியவற்றிலிருந்து $A \times B$ (‘$A$ கிராஸ் $B$’ என படிக்கவும்) என்ற புதிய கணத்தை உருவாக்குவோம். இது $A$, $B$ ஆகியவற்றின் கார்டீசியன் பெருக்கற்பலன் (cartesian product) என அழைக்கப்படும்.

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ மற்றும் $b \in B\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இவ்வாறே, $B \times A = \{(b,a) \mid b \in B$ மற்றும் $a \in A\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

(i) சோடி $(a, b)$-ல் உறுப்புகளின் வரிசை மிகவும் முக்கியம் ஆகும். அதாவது, $a \neq b$ எனில், $(a, b) \neq (b, a)$ ஆகும்.
(ii) கார்டீசியன் பெருக்கல் $A \times B$ ல் கணங்கள் $A$ மற்றும் $B$ சம கணங்களாகவும் இருக்கலாம்.

இப்போது நாம் ஒரு எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம்.

ஒரு கைப்பேசி கடைக்காரர் மூன்று வித்தியாசமான கைப்பேசிகளை விற்கிறார். அவற்றை நாம் $C_1, C_2, C_3$ என அழைப்போம். $C_1$ இன் விலை ₹ 1200, $C_2$ இன் விலை ₹ 2500 மற்றும் $C_3$ இன் விலை ₹ 2500 என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$A = \{ C_1, C_2, C_3 \}$ மற்றும் $B = \{ 1200, 2500 \}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

ஆகவே, $A \times B = \{ (C_1, 1200), (C_1, 2500), (C_2, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 1200), (C_3, 2500) \}$

ஆனால், $B \times A = \{ (1200, C_1), (2500, C_1), (1200, C_2), (2500, C_2,), (1200, C_3), (2500, C_3) \}$.

மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, $A \neq B$ எனில், $A \times B \neq B \times A$ என எளிதில் காணலாம்.

$A \times B$-ன் ஒரு உட்கணம் $F = \{(C_1, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 2500)\}$ என்க.

மேலே உள்ள வரிசைச் சோடிகளில் முதல் கூறு ஒவ்வொன்றும் ஒரேயொரு $B$-ன் உறுப்புடன் தொடர்புடையது. முதல் இடத்தில் உள்ள எந்த கூறும் இரண்டாம் இடத்தில், ஒன்றைவிட அதிகமான $B$-ன் உறுப்புடன் சோடி சேரவில்லை.

$F$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு சோடியிலுள்ள இரண்டாவது கூறு, முதல் கூறின் விலையைக் காட்டுகிறது. அடுத்ததாக, $B \times A$-ன் உட்கணம் $E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$ என்க.

இதில் முதல் கூறு 2500 ஆனது, இரு வெவ்வேறு $A$-ன் உறுப்புகள் $C_2$ மற்றும் $C_3$ ஆகியவற்றுடன் தொடர்புபடுத்துப்பட்டுள்ளது.

**வரையறை**

$A$ மற்றும் $B$ ஆகியன வெற்றுக் கணங்கள் அல்ல என்க. $A$-யிலிருந்து $B$-க்கு உள்ள ஒரு உறவு $R$ ஆனது $A \times B$-ன் வெற்றுக்கணமில்லாத உட்கணமாகும். அதாவது, $R \subseteq A \times B$.

$R$-ன் மதிப்பகம் (Domain) $= \{x \in A \mid (x, y) \in R,$ ஏதேனும் ஒரு $y \in B\}$

$R$-ன் வீச்சகம் (Range) $= \{y \in B \mid (x, y) \in R,$ ஏதேனும் ஒரு $x \in A\}$.

## 1.8 சார்புகள் (Functions)

**பீட்டர் டிரிச்லெட்**
(1805-1859)
ஜெர்மனி

எண்ணியல், பகுப்பாய்வியல் மற்றும் இயந்திரவியல் ஆகிய கணிதவியல் பிரிவுகளில் டிரிச்லெட் முக்கிய பங்களிப்பினைச் செய்துள்ளார்.

நவீன கணிதக் கருத்தான சார்பினையும், அதற்குரிய குறியீடான $y = f(x)$-யையும் 1837-ல் இவர் அறிமுகப்படுத்தினார். மேலும் அனைவராலும் நன்கு அறியப்பட்டக் கொள்கையான பிஜியன் ஹோல் கொள்கையை (Pigeonhole principle) அமைத்தார்.

**வரையறை**

$A$ மற்றும் $B$ என்பன இரு வெற்றற்ற கணங்கள் என்க. $A$-யிலிருந்து $B$-க்கு உள்ள ஒரு உறவு $f \subseteq A \times B$ ஆனது,

(i) உறவு $f$-ன் மதிப்பகம் = கணம் $A$.

(ii) $(x, y) \in f$ எனில், ஒவ்வொரு $x \in A$-க்கு ஒரேயொரு $y \in B$ உள்ளது.

ஆகியனவற்றை நிறைவு செய்யுமானால், அது ஒரு சார்பு (function) எனப்படும்.

$A$-யிலிருந்து $B$-க்கு உள்ள ஒரு சார்பானது மேற்கண்ட (i) மற்றும் (ii) நிபந்தனையுடன் அமையும் ஒரு உறவாகும்.

சார்பினை கோர்த்தல் அல்லது உருமாற்றம் (mapping or transformation) எனவும் கூறலாம்.

$A$-யிலிருந்து $B$-க்கு உள்ள ஒரு சார்பு $f : A \to B$ எனக் குறிக்கப்படும். $(x, y) \in f$ எனில், $y = f(x)$ என எழுதலாம்.

உறவு என்ற கருத்தைப் பயன்படுத்தாமல், பின்வருமாறு சார்பின் வரையறையை மாற்றித் தெளிவாக அமைக்க முடியும். இவ்வாறு மாற்றி அமைக்கப்படுவதை, சார்பின் பயன்பாட்டு வரையறையாகக் கொள்ளலாம்.

**வரையறை**

$A$ மற்றும் $B$ என்பன வெற்றற்ற இரு கணங்கள் என்க. $A$-யிலிருந்து $B$-க்கு ஒரு சார்பு எனப்படுவது, $A$ என்ற கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு $x$-ம் $B$ என்னும் கணத்திலுள்ள $y$ என்ற ஒரேயொரு உறுப்போடு தொடர்புபடுத்தும் ஒரு விதி ஆகும். $y = f(x)$ என்பது, $y$ ஆனது $x$-ல் ஒரு சார்பு என பொருள்படும்.

$f: A \to B$ என்னும் சார்பின் மதிப்பகம் (Domain) $A$ எனவும், அதன் துணை மதிப்பகம் (Co-domain) $B$ எனவும் அழைக்கப்படும். $y$ என்பது $x$-ன் நிழல் உரு (image) எனவும் $x$ என்பது $y$-ன் முன் உரு (preimage) எனவும் அழைக்கப்படும். $f$-ன் அனைத்து நிழல் உருக்களையும் கொண்ட கணமானது $f$-ன் வீச்சகம் (range) என அழைக்கப்படும். வீச்சகமானது, சார்பு $f$-ன் துணை மதிப்பகத்தின் ஒரு உட்கணம் ஆகும்.

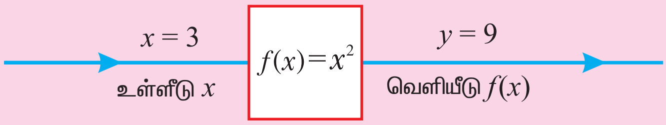
மேலே கூறப்பட்டுள்ள, சார்பின் புதிய வரையறையானது 1837 ஆம் ஆண்டில், நிக்கோலாய் லாபாச்வெஸ்கி (Nikolai Labachevsky) மற்றும் பீட்டர் டிரிச்லெட் (Peter Dirichlet)ஆகியோரால் தனித்தனியே கண்டறியப்பட்டதாகும். அதற்கு முன்பு சார்புக்கான தெளிவான வரையறை இல்லை.

பிரிவு 1.7-ல் கூறப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டில், $F \subseteq A \times B$ என்ற உறவு, சார்புகளுக்கான நிபந்தனைகள் (i) மற்றும் (ii) ஆகியவற்றை நிறைவு செய்வதால், $F = \{(C_1, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 2500)\}$ என்பது ஒரு சார்பாகும்.

$(2500, C_2), (2500, C_3) \in E$ ஆகியன மேலேயுள்ள நிபந்தனை (ii) ஐ நிறைவு செய்யவில்லை என்பதால், $E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$ என்பது ஒரு சார்பாகாது.

**குறிப்புரை**

(i) உள்ளீடாக அமையும் ஒவ்வொரு மதிப்பு $x$-க்கும் ஒரேயொரு மதிப்பு $y$-ஐ வெளியீடாக தருகின்ற ஒரு இயந்திரமாக சார்பு $f$ ஐக் கருதலாம்.




(ii) ஒரு சார்பை வரையறுக்க மதிப்பகம், துணை மதிப்பகம் மற்றும் மதிப்பகத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பினையும் துணை மதிப்பகத்தின் ஒரேயொரு உறுப்போடு தொடர்பு படுத்தும் விதி ஆகியன நமக்குத் தேவை.

### எடுத்துக்காட்டு 1.14

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ மற்றும் $B = \{-1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$ என்க.

$R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 10), (4, 9)\} \subseteq A \times B$ ஒரு உறவு எனில், $R$ ஐ ஒரு சார்பு எனக் காட்டுக. அதன் மதிப்பகம், துணை மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகம் ஆகியனவற்றைக் காண்க.

**தீர்வு** $R$-ன் மதிப்பகம் $= \{1, 2, 3, 4\} = A$.

ஒவ்வொரு $x \in A$ -க்கு $y = R(x)$ என்றவாறு ஒரேயொரு $y \in B$ உள்ளது.

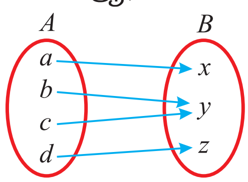
எனவே, $R$ ஒரு சார்பாகும். $R$-ன் துணை மதிப்பகம் $B$ ஆகும்.

$R(1) = 3, R(2) = 6, R(3) = 10$ மற்றும் $R(4) = 9$ என்பதால், $R$-ன் வீச்சகம் $= \{3, 6, 10, 9\}$.

### எடுத்துக்காட்டு 1.15

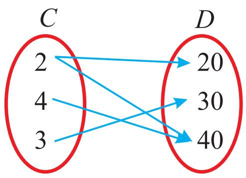
கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அம்புக்குறிப் படங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு சார்பினைக் குறிக்கின்றனவா என ஆராய்க.

(i)




படம் 1.18

(ii)




படம் 1.19

**தீர்வு** அம்புக்குறிப் படம் (i)-ல் $A$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் ஒரேயொரு நிழல்உரு உள்ளது. ஆகவே, அது ஒரு சார்பாகும்.

அம்புக்குறிப் படம் (ii)-ல் உறுப்பு 2- க்கு 20 மற்றும் 40 என்ற இரு நிழல் உருக்கள் உள்ளன. எனவே, இது ஒரு சார்பாகாது.

**எடுத்துக்காட்டு 1.16**

$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ என்க. பின்வரும் ஒவ்வொரு உறவும், $X$-லிருந்து $X$ -க்கு ஒரு சார்பாகுமா என ஆராய்க. உன் விடைக்கு ஏற்ற விளக்கம் தருக.

(i) $f = \{ (2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4) \}$

(ii) $g = \{ (3, 1), (4, 2), (2, 1) \}$ (iii) $h = \{ (2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3) \}$

**தீர்வு**

(i) $f = \{ (2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4) \}$

$X$-ன் உறுப்பு 2 ஆனது வெவ்வேறான உறுப்புகள் 3 மற்றும் 1 ஆகியவற்றுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, $f$ ஒரு சார்பல்ல.

(ii) $g=\{(3,1),(4,2),(2,1)\}$ எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 1 எனும் $X$-ன் உறுப்பிற்கு ஒரு நிழல்உரு $X$-ல் இல்லை. அதாவது, $g$-ன் மதிப்பகம் $\{2, 3, 4\} \neq X$. எனவே, $g$ என்பது ஒரு சார்பல்ல.

(iii) $h = \{ (2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3) \}$

$X$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $X$-ன் ஒரேயொரு உறுப்போடு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, $h$ ஆனது ஒரு சார்பு ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 1.17**

$A = \{ 1, 4, 9, 16 \}$-லிருந்து $B = \{ -1, 2, -3, -4, 5, 6 \}$-க்கு பின்வரும் உறவுகளில் எவை சார்பாகும்? அவ்வாறு சார்பு எனில், அதன் வீச்சகத்தைக் காண்க.

(i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$

(ii) $f_2 = \{ (1, -4), (1, -1), (9, -3), (16, 2) \}$

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$

(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$

**தீர்வு** (i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$

$A$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $B$-ன் ஒரேயொரு உறுப்புடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, $f_1$ ஒரு சார்பு ஆகும்.

மேலும், $f_1$-ன் வீச்சகம் $= \{-1, 2, -3, -4\}$.

(ii) $f_2 = \{ (1,-4), (1,-1), (9,-3), (16, 2) \}$. இங்கு 1 ஆனது இரு வெவ்வேறான நிழல்உருக்கள் $-4$ மற்றும் $-1$ ஆகியவற்றுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது.

ஆகவே, $f_2$ ஒரு சார்பல்ல.

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$.

$A$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $B$-ன் ஒரேயொரு உறுப்போடு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. எனவே, $f_3$ ஒரு சார்பாகும். மேலும், $f_3$-ன் வீச்சகம் $= \{ 2 \}$ ஆகும்.

(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$.

$A$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $B$-ன் ஒரேயொரு உறுப்போடு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, $f_4$ ஒரு சார்பாகும். மேலும், $f_4$-ன் வீச்சகம் $= \{ 2, 5, -4\}$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 1.18**

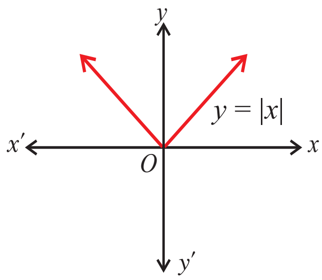
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ எனும்போது} \\ -x, & x < 0 \text{ எனும்போது} \end{cases},$$

$\{ (x,y) \mid y = |x|, x \in \mathbb{R} \}$ என்ற உறவு, சார்பை வரையறுக்கிறதா? அதன் வீச்சகம் காண்க.

**தீர்வு** $x$-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் $y = |x|$ என்ற ஒரு தனித்த (ஒரேயொரு) மதிப்பு உள்ளது.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட உறவு, ஒரு சார்பினை வரையறுக்கிறது. சார்பின் மதிப்பகம் அனைத்து மெய்யெண்களின் கணம் $\mathbb{R}$ ஆகும். ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக்கும் $|x|$ ஆனது எப்போதும் பூச்சியமாகவோ அல்லது மிகை மெய்யெண்ணாகவோ இருப்பதால், இச்சார்பினால் கிடைக்கும் நிழல்உருக்கள் மிகை மெய்யெண்களாகும்.

ஆகவே, இதன் வீச்சகம் குறை மெய்யெண்கள் அல்லாத (மிகை மெய்யெண் அல்லது பூச்சியம்) எண்களின் கணம் ஆகும்.




படம் 1.20

குறிப்புரை

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ எனும்போது} \\ -x, & x < 0 \text{ எனும்போது} \end{cases},$$ என்றவாறு அமையும் சார்பு $y = |x|, x \in \mathbb{R}$, என்பது மட்டுச் சார்பு அல்லது அறச் சார்பு (modulus or absolute value function) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $|-8| = -(-8) = 8$. மேலும், $|8| = 8$.

## 1.8.1 சார்புகளைக் குறிக்கும் முறை (Representation of functions)

$f : A \to B$ என்ற சார்பினை பின்வரும் முறைகளில் குறிக்கலாம்.

(i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (a set of ordered pairs) (ii) அட்டவணை (a table)

(iii) அம்புக்குறிப் படம் (an arrow diagram) (iv) வரைபடம் (a graph)

(i) $f = \{(x, y) : y = f(x), x \in A\}$ என்றவாறு அமையும் அனைத்து வரிசைச் சோடிகளின் கணமாக, சார்பு $f : A \to B$-ஐக் குறிக்கலாம்.

(ii) $x$-ன் மதிப்புகள் மற்றும் $f$ ஆல் பெறப்படும் நிழல்உருக்கள் ஆகியனவற்றைக் கொண்டு ஒரு அட்டவணையை அமைக்கலாம்.

(iii) ஒரு அம்புக்குறிப் படத்தில் $f$-ன் மதிப்பகத்தின் உறுப்புகளையும் அவற்றிற்குரிய நிழல்உருக்களையும் அம்புக்குறிகள் மூலம் தொடர்புப்படுத்திக் காட்டலாம்.

(iv) $f = \{(x, y) : y = f(x), x \in A\}$-ல் உள்ள அனைத்து வரிசை சோடிகளை, ஒரு தளத்தில் புள்ளிகளாகக் குறிக்கலாம். அனைத்துப் புள்ளிகளையும் குறிக்கும் படம் $f$-ன் வரைபடமாகும்.

சார்புகளை பல்வேறு விதங்களில் குறிப்பதை சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலமாக விளக்குவோம்.

பல சார்புகளுக்கு அவற்றின் வரைபடத்தைப் பெற முடியும். ஆனால் ஒவ்வொரு வரைபடமும் ஒரு சார்பினைக் குறிக்காது.

ஒரு வரைபடம் சார்பாகுமா என்பதைத் தீர்மானிக்க பின்வரும் சோதனையை பயன்படுத்தலாம்.

### 1.8.2 குத்துக்கோடு சோதனை (Vertical line test)

வரைபடத்தை, ஒவ்வொரு குத்துக்கோடும் அதிகபட்சம் ஒரேயொரு புள்ளியில் வெட்டினால், அவ்வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும்.

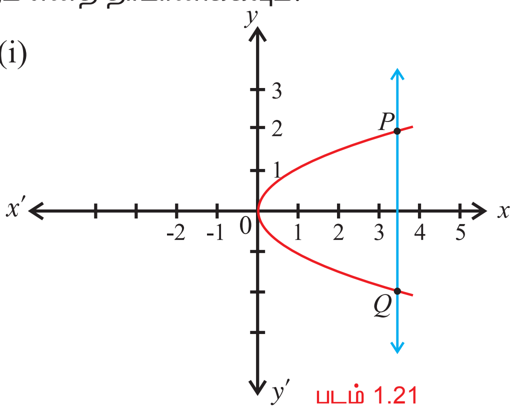
குறிப்பு

சில குத்துக்கோடுகள் வரைபடத்தை வெட்டாமலும் இருக்கலாம். ஏதேனும் ஒரு குத்துக்கோடு வரைபடத்தை ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிகளில் வெட்டினால், அந்த வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்காது. ஏனெனில், $x$-ன் ஒரு மதிப்புக்கு, $y$-க்கு குறைந்தது இரண்டு மதிப்புகள் இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, $y^2 = x$ என்பது ஒரு சார்பல்ல.

**எடுத்துக்காட்டு 1.19**

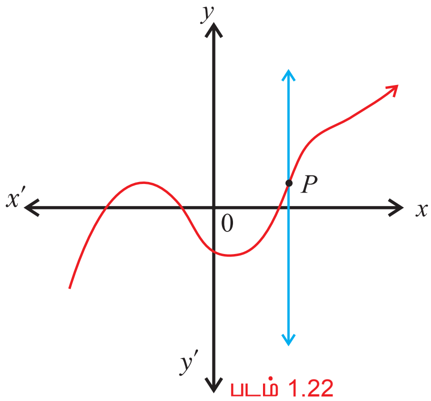
குத்துக்கோடு சோதனையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வரைபடங்களில் எவை சார்பினைக் குறிக்கும் எனத் தீர்மானிக்கவும்.

(i)



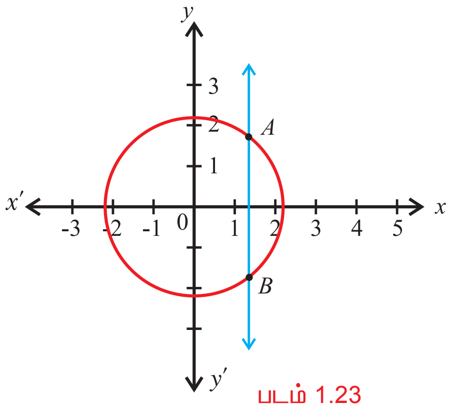

படம் 1.21

(ii)



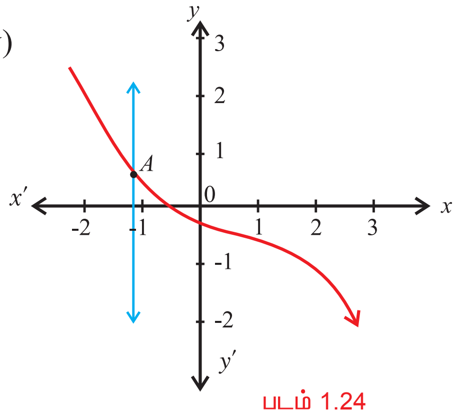

படம் 1.22

(iii)




படம் 1.23

(iv)




படம் 1.24

**தீர்வு**

(i) ஒரு குத்துக்கோடு, வரைபடத்தை $P$ மற்றும் $Q$ ஆகிய இரு புள்ளிகளில் வெட்டுவதால், கொடுக்கப்பட்ட வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்காது.

(ii) எந்த ஒரு குத்துக்கோடும் வரைபடத்தை அதிகபட்சமாக ஒரேயொரு புள்ளியில் வெட்டுவதால், இந்த வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும்.

(iii) ஒரு குத்துக்கோடு வரைபடத்தை $A$ மற்றும் $B$ என்ற இரு புள்ளிகளில் வெட்டுவதால், இந்த வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்காது.

(iv) கொடுக்கப்பட்ட வரைபடமானது குத்துக்கோடு சோதனையை நிறைவு செய்வதால், வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும்.

## எடுத்துக்காட்டு 1.20

$A = \{0, 1, 2, 3\}$ மற்றும் $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ என்பன இரு கணங்கள் என்க. $f : A \to B$ என்னும் சார்பு $f(x) = 2x + 1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இச்சார்பினை (i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (ii) அட்டவணை (iii) அம்புக்குறிப் படம் (iv) வரைபடம் ஆகியவற்றால் குறிக்க.

**தீர்வு** $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $f(x) = 2x + 1$. ஆகவே,

$f(0) = 2(0) + 1 = 1$, $f(1) = 2(1)+1 = 3$, $f(2) = 2(2) + 1 = 5$, $f(3) = 2(3) + 1 = 7$

### (i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு $f$-ஐ பின்வரும் வரிசைச் சோடிகளின் கணமாக எழுதலாம்.

$$f = \{(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)\}.$$

### (ii) அட்டவணை அமைப்பு

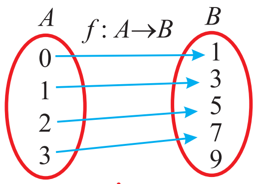
சார்பு $f$ ஐ கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையால் குறிப்போம்.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 3 | 5 | 7 |

### (iii) அம்புக்குறிப் படம்

சார்பு $f$-ஐ ஒரு அம்புக்குறிப் படத்தால் குறிப்போம். கணங்கள் $A$ மற்றும் $B$ ஆகியவற்றை இரண்டு மூடிய வளைவரைகளால் குறிப்போம்.

$A$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $B$-ல் உள்ள அதன் ஒரேயொரு நிழல் உருவுடன் அம்புக்குறியால் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது.



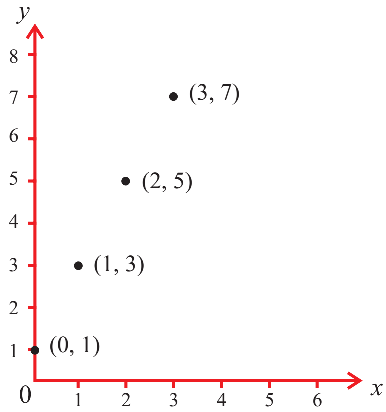

படம் 1.25

### (iv) வரைபடம்

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(0,1),(1,3),(2,5),(3,7)\}$$

எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7) ஆகிய புள்ளிகள், படம் 1.26-ல் காட்டியுள்ளவாறு தளத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

அனைத்துப் புள்ளிகளும் சேர்ந்து சார்பினுடைய வரைபடத்தை குறிக்கின்றது.



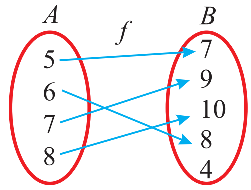

படம் 1.26

### 1.8.3 சார்புகளின் வகைகள் (Types of functions)

சார்புகளின் பண்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு, சார்புகளை சில குறிப்பிட்ட வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

**(i) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு அல்லது 1-1 சார்பு (One-One function)**

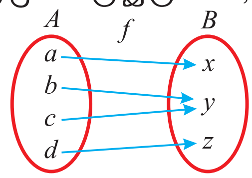
$f : A \to B$ என்பது ஒரு சார்பு என்க. $A$-ன் வெவ்வேறான உறுப்புகளை $B$-ல் உள்ள வெவ்வேறு உறுப்புகளுடன் $f$ ஆனது தொடர்புபடுத்துமானல், $f$ என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு ஆகும். அதாவது $A$-ல் உள்ள உறுப்புகள் $u$, $v$ என்பன $u \neq v$ எனும்போது $f(u) \neq f(v)$ என இருந்தால் $f$ என்பது 1-1 சார்பு ஆகும். இதிலிருந்து $f$ ஆனது 1-1 சார்பு எனில், $A$-ல் உள்ள ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளின் நிழல் உருக்களாக $B$-ன் எந்த ஒரு உறுப்பும் இருக்கக்கூடாது. ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு என்பது ஒருபுறச் சார்பு (injective function) எனவும் அழைக்கப்படும். படம் 1.27, ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பினைக் குறிக்கிறது.




படம் 1.27

**(ii) மேல் சார்பு (Onto function)**

$f : A \to B$ என்ற சார்பில் $B$-யிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் $A$-யில் ஒரு முன்உரு இருப்பின், $f$ ஒரு மேல் சார்பு (onto) எனப்படும். $f(a) = b$ என்பதற்கிணங்க ஒவ்வொரு $b \in B$-க்கும் குறைந்தது ஒரு உறுப்பு $a \in A$ இருப்பின், சார்பு $f$ என்பது மேல் சார்பு எனப்படும். இது $f$-ன் வீச்சகம் $B$ என்று கூறுவதற்குச் சமம். ஒரு மேல் சார்பை மேல்புறச் சார்பு (surjective function) எனவும் அழைக்கலாம். படம் 1. 28 மேல் சார்பைக் குறிக்கிறது.

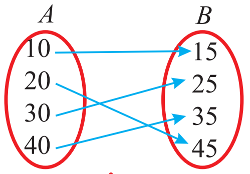



படம் 1.28

**(iii) ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு (One-One and onto function)**

சார்பு $f$ என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகவும் மற்றும் மேல் சார்பாகவும் இருக்குமேயானால், $f : A \to B$ என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு அல்லது இருபுறச் சார்பு (bijective function) எனப்படும்.

$f : A \to B$ என்ற சார்பில் $A$-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகள் $B$-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகளோடு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளதாலும், $B$-யின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $A$-யில் உள்ள ஒரு உறுப்பின் நிழல் உருவாக இருப்பதாலும் $f$ ஆனது ஒரு ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பாகும்.




படம் 1.29

**குறிப்பு**

(i) $f : A \to B$ என்பது ஒரு மேல் சார்பு எனில், எனில் மட்டுமே $B = f$-ன் வீச்சகம் ஆகும்.

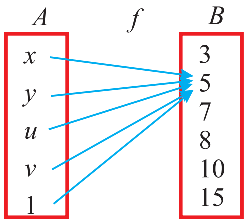
(ii) $f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$ எனவும், $B$-யின் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் $A$-யில் ஒரே ஒரு முன்உரு இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே, $f : A \to B$ என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பாக இருக்கும்.

(iii) $f : A \to B$ என்பது இருபுறச் சார்பு மற்றும் $A$, $B$ ஆகியன முடிவுறு கணங்கள் எனில், $A$, $B$ களின் ஆதி எண்கள் (கண எண்கள்) சமமாக இருக்கும். படம் 1.29 ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பைக் குறிக்கிறது.

(iv) $f : A \to B$ ஆனது ஒரு இருபுறச் சார்பு எனில், $A$ மற்றும் $B$ என்பன சமான கணங்களாக இருக்கும்.

(v) ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு 'ஒன்றுக்கு ஒன்றான கோர்த்தல்' (one-one correspondence) என்றும் கூறப்படும்.

### (iv) மாறிலிச் சார்பு (constant function)



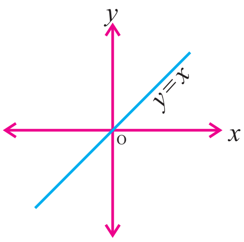
படம் 1.30

$A$-யில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளும் $B$-யில் உள்ள ஒரே ஒரு உறுப்பினை நிழல் உருவாகக் கொண்டால், $f : A \to B$ என்பது ஒரு மாறிலிச் சார்பு எனப்படும். மாறிலிச் சார்பின் வீச்சகம் ஒருறுப்பு கணம் (singleton set) ஆகும்.

$A = \{ x, y, u, v, 1 \}$, $B = \{ 3, 5, 7, 8, 10, 15 \}$ என்க.

சார்பு $f : A \to B$ என்பது ஒவ்வொரு $x \in A$-க்கு $f(x) = 5$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. படம் 1.30 ஆனது ஒரு மாறிலிச் சார்பினைக் குறிக்கிறது.

### (v) சமனிச் சார்பு (identity function)



படம் 1.31

$A$ ஒரு வெற்றற்ற கணம் என்க. அனைத்து $a \in A$-க்கும் $f(a) = a$ என இருந்தால், $f : A \to A$ என்பது $A$-ன் சமனிச் சார்பு எனப்படும். அதாவது, சமனிச் சார்பில் $A$-யிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதனுடனேயே தொடர்புப்படுத்தப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \mathbb{R}$ என்க. $x \in \mathbb{R}$-க்கு $f(x) = x$ என வரையறுக்கப்படும் சார்பு $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்பது சமனிச் சார்பாகும். $\mathbb{R}$-ன் மீதான சமனிச் சார்பின் வரைபடத்தை படம் 1.31 குறிக்கிறது.

### எடுத்துக்காட்டு 1.21

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \mathbb{N}$ மற்றும் $f : A \to B$ ஆனது $f(x) = x^2$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது $f$-ன் வீச்சகத்தைக் காண்க. மேலும், சார்பின் வகையைக் காண்க.

**தீர்வு** $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$; $B = \{ 1, 2, 3, 4, \cdots \}$

$f : A \to B$ ஆனது $f(x) = x^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore\ f(1) = 1^2 = 1$ ; $f(2) = 4$ ; $f(3) = 9$ ; $f(4) = 16$ மற்றும் $f(5) = 25$.

எனவே, $f$-ன் வீச்சகம் $= \{ 1, 4, 9, 16, 25 \}$

வெவ்வேறான உறுப்புகள் வெவ்வேறு நிழல் உருக்களோடு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளதால், இது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு ஆகும். மேலும், $3 \in B$ இருப்பினும் $f(x) = x^2 = 3$ என்பதற்கிணங்க எந்த ஒரு உறுப்பு $x \in A$-ம் இல்லாததால், இது மேல் சார்பு அல்ல.

**குறிப்புரை**

$g(x) = x^2$ என்றவாறு அமைந்த $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பினைக் கருதுக. $u = 1$ மற்றும் $v = -1$ எனில், $u \neq v$. ஆனால் $g(u) = g(1) = 1 = g(-1) = g(v)$. ஆகவே, சார்பு $g$ ஆனது ஒரு ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பல்ல. எனவே, சூத்திரம் மட்டுமே ஒரு ஒன்றுக்கு ஒன்றான அல்லது மேல் சார்பினை உருவாக்காது. ஒரு சார்பினை ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு என தீர்மானிக்க விதி, மதிப்பகம் மற்றும் துணை மதிப்பகம் ஆகியவற்றை கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

## எடுத்துக்காட்டு 1.22

சார்பு $f : [1,\ 6) \longrightarrow \mathbb{R}$ ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & 1 \le x < 2 \\ 2x - 1, & 2 \le x < 4 \\ 3x^2 - 10, & 4 \le x < 6 \end{cases} \qquad ( [1\ ,6) = \{\{x \in \mathbb{R} : 1 \le x < 6\ \})$$

(i) $f(5)$  (ii) $f(3)$  (iii) $f(1)$  (iv) $f(2) - f(4)$  (v) $2\ f(5) - 3\ f(1)$

ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

### தீர்வு

(i) $f(5)$-ன் மதிப்பைக் காண்போம். 5 ஆனது 4-க்கும் 6-க்கும் இடையில் உள்ளது.

எனவே, $f(x) = 3x^2 - 10$ இல் $x = 5$ என பிரதியிட வேண்டும்.

ஆகவே, $f(5) = 3(5^2) - 10 = 65$

(ii) $f(3)$-ன் மதிப்பைக்காண்போம். 3 ஆனது 2-க்கும் 4-க்கும் இடையில் உள்ளது.

எனவே, $f(x) = 2x - 1$ இல் $x = 3$ என பிரதியிட வேண்டும்.

ஆகவே, $f(3) = 2(3) - 1 = 5.$

(iii) $f(1)$-ன் மதிப்பைக் காண்போம். 1 ஆனது $1 \le x < 2$ என்ற இடை வெளியில் உள்ளது.

எனவே, $f(x) = 1 + x$ இல் $x = 1$ என பிரதியிட வேண்டும்.

ஆகவே, $f(1) = 1 + 1 = 2.$

(iv) $2 \le x < 4$ என்ற இடைவெளியில் $x = 2$ உள்ளது. எனவே, $f(2) = 2(2) - 1 = 3.$

மேலும், $4 \le x < 6$ என்ற இடைவெளியில் $x = 4$ உள்ளது.

எனவே, $f(4) = 3(4^2) - 10 = 3(16) - 10 = 48 - 10 = 38$

ஆகவே, $f(2) - f(4) = 3 - 38 = -35.$

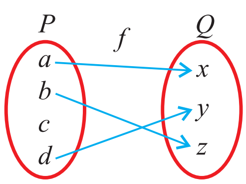
(v) $f(5) = 3(5^2) - 10 = 65.$ மேலும், $f(1) = 1 + 1 = 2.$

எனவே, $2\ f(5) - 3\ f(1) = 2(65) - 3(2) = 130 - 6 = 124.$

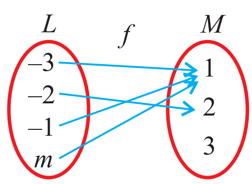
## பயிற்சி 1.4

1. பின்வரும் அம்புக்குறிப் படங்கள் சார்பைக் குறிக்கின்றனவா எனக் கூறுக. உன் விடைக்குத் தகுந்த காரணம் கூறுக.

(i)




(ii)




2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள $F = \{ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1) \}$ எனும் சார்பிற்கு, மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. $A = \{\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14\ \}$; $B = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5\ \}$ மற்றும் $f_i : A \to B$ , $i = 1,2,3.$ என்க. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை எவ்வகைச் சார்பினைக் குறிக்கும்? விடைக்கான தகுந்த காரணம் தருக.

(i) $f_1 = \{\ (10, 1), (11, 2), (12, 3), (13, 5), (14, 3)\ \}$

(ii) $f_2 = \{\ (10, 1), (11, 1), (12, 1), (13, 1), (14, 1)\ \}$

(iii) $f_3 = \{\ (10, 0), (11, 1), (12, 2), (13, 3), (14, 5)\ \}$

4. $X = \{\ 1, 2, 3, 4, 5\ \}$, $Y = \{\ 1, 3, 5, 7, 9\ \}$ என்க. $X$-லிருந்து $Y$-க்கான உறவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றில் எவை சார்பாகும்? உன் விடைக்கான தகுந்த காரணம் தருக. மேலும், அவை சார்பு எனில், எவ்வகைச் சார்பாகும்?

(i) $R_1 = \{\ (x, y) | y = x + 2,\ x \in X,\ y \in Y\ \}$

(ii) $R_2 = \{\ (1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 5)\ \}$

(iii) $R_3 = \{\ (1, 1), (1, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 7)\ \}$

(iv) $R_4 = \{\ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1)\ \}$

5. $R = \{(a, -2), (-5, b), (8, c), (d, -1)\}$ என்பது சமனிச் சார்பைக் குறிக்குமெனில், $a, b, c$ மற்றும் $d$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

6. $A = \{\ -2, -1, 1, 2\ \}$ மற்றும் $f = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) :\ x \in A\right\}$ எனில், $f$-ன் வீச்சகத்தைக் காண்க. மேலும், $f$ என்பது $A$-யிலிருந்து $A$-க்கு ஒரு சார்பாகுமா?

7. $f = \{\ (2, 7), (3, 4), (7, 9), (-1, 6), (0, 2), (5, 3)\ \}$ என்பது

$A = \{-1, 0, 2, 3, 5, 7\ \}$ -யிலிருந்து $B = \{\ 2, 3, 4, 6, 7, 9\ \}$ -க்கு ஒரு சார்பு என்க. $f$ என்ற சார்பு

(i) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகுமா? (ii) மேல் சார்பாகுமா?

(iii) ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பாகுமா?

8. $f = \{\ (12, 2), (13, 3), (15, 3), (14, 2), (17, 17)\ \}$ என்ற சார்பில் 2 மற்றும் 3 ஆகியவற்றின் முன்உருக்களைக் காண்க.

9. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணை ஆனது, $A = \{\ 5, 6, 8, 10\ \}$-யிலிருந்து $B = \{\ 19, 15, 9, 11\ \}$-க்கு $f(x) = 2x - 1$ என்றவாறு அமைந்த ஒரு சார்பு எனில், $a$ மற்றும் $b$ ஆகியனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க?

| $x$ | 5 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $a$ | 11 | $b$ | 19 |

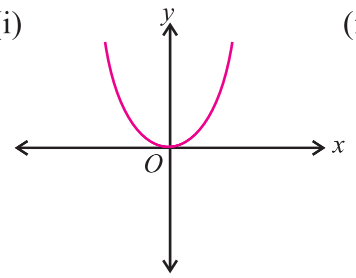
10. $A = \{\ 5, 6, 7, 8\ \}$; $B = \{\ -11, 4, 7, -10, -7, -9, -13\ \}$ என்க.
$f = \{(x,y) :\ y = 3 - 2x,\ x \in A,\ y \in B\ \}$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) $f$-ன் உறுப்புகளை எழுதுக (ii) அதன் துணை மதிப்பகம் யாது?

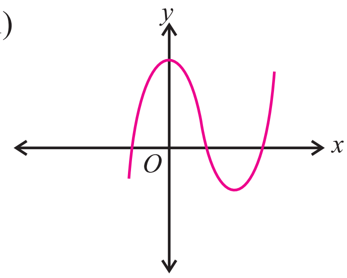
(iii) வீச்சகம் காண்க (iv) எவ்வகைச் சார்பு எனக் காண்க.

11. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைபடங்களில் எவை சார்பினைக் குறிக்கின்றன? விடைக்கான தகுந்த காரணம் தருக.

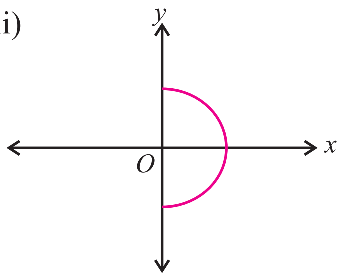
(i)



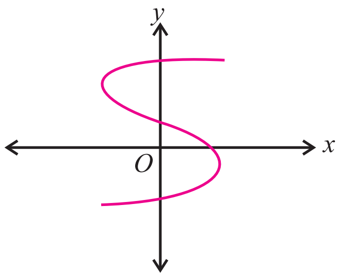

(ii)



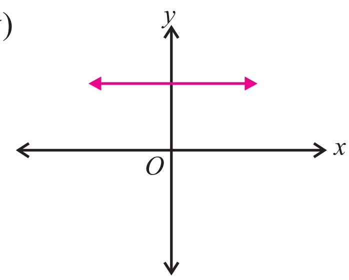

(iii)




(iv)




(v)




12. கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு $f = \{ (-1, 2), (-3, 1), (-5, 6), (-4, 3) \}$ ஐ

(i) அட்டவணை (ii) அம்புக்குறி படம் ஆகியவற்றின் மூலம் குறிக்கவும்.

13. $A = \{ 6, 9, 15, 18, 21 \}$; $B = \{ 1, 2, 4, 5, 6 \}$ மற்றும் $f : A \to B$ என்பது

$f(x) = \dfrac{x-3}{3}$ என வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின் சார்பு $f$ -ஐ

(i) அம்புக்குறி படம் (ii) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

(iii) அட்டவணை (iv) வரைபடம் ஆகியவற்றின் மூலம் குறிக்கவும்.

14. $A = \{4, 6, 8, 10 \}$ மற்றும் $B = \{ 3, 4, 5, 6, 7 \}$ என்க. $f : A \to B$ என்பது

$f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. சார்பு $f$ -ஐ

(i) அம்புக்குறி படம் (ii) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (iii) அட்டவணை ஆகியவற்றின் மூலம் குறிக்கவும்.

15. சார்பு $f : [-3, 7) \to \mathbb{R}$ கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1; & -3 \le x < 2 \\ 3x - 2; & 2 \le x \le 4 \\ 2x - 3; & 4 < x < 7 \end{cases}$$

பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $f(5) + f(6)$ (ii) $f(1) - f(-3)$

(iii) $f(-2) - f(4)$ (iv) $\dfrac{f(3) + f(-1)}{2f(6) - f(1)}$

16. சார்பு $f:[-7,6)\to\mathbb{R}$ கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1; & -7\le x<-5 \\ x+5; & -5\le x\le 2 \\ x-1; & 2<x<6 \end{cases}$$

பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $2f(-4)+3f(2)$ (ii) $f(-7)-f(-3)$ (iii) $\dfrac{4f(-3)+2f(4)}{f(-6)-3f(1)}$

## பயிற்சி 1.5

**சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.**

1. $A$ மற்றும் $B$, என்பன இரண்டு கணங்கள் என்க. $A\cup B=A$ என்பதற்குத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு.

   (A) $B\subseteq A$ (B) $A\subseteq B$ (C) $A\ne B$ (D) $A\cap B=\phi$

2. $A\subset B$ எனில், $A\cap B=$

   (A) $B$ (B) $A\backslash B$ (C) $A$ (D) $B\backslash A$

3. $P$ மற்றும் $Q$ என்பன ஏதேனும் இரண்டு கணங்கள் எனில், $P\cap Q=$

   (A) $\{x: x\in P$ அல்லது $x\in Q\}$ (B) $\{x: x\in P$ மற்றும் $x\notin Q\}$

   (C) $\{x: x\in P$ மற்றும் $x\in Q\}$ (D) $\{x: x\notin P$ மற்றும் $x\in Q\}$

4. $A=\{p, q, r, s\}$, $B=\{r, s, t, u\}$ எனில், $A\backslash B=$

   (A) $\{p, q\}$ (B) $\{t, u\}$ (C) $\{r, s\}$ (D) $\{p, q, r, s\}$

5. $n[p(A)]=64$ எனில், $n(A)=$

   (A) 6 (B) 8 (C) 4 (D) 5

6. A, B மற்றும் C ஆகிய ஏதேனும் மூன்று கணங்களுக்கு, $A\cap(B\cup C)=$

   (A) $(A\cup B)\cup(B\cap C)$ (B) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$

   (C) $A\cup(B\cap C)$ (D) $(A\cup B)\cap(B\cup C)$

7. $A, B$ ஆகிய இரண்டு கணங்களுக்கு, $\{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\}\cap(A\cap B)=$

   (A) $\phi$ (B) $A\cup B$ (C) $A\cap B$ (D) $A'\cap B'$

8. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவைகளில் தவறான கூற்று எது?

   (A) $A\setminus B=A\cap B'$ (B) $A\setminus B=A\cap B$

   (C) $A\setminus B=(A\cup B)\cap B'$ (D) $A\setminus B=(A\cup B)\setminus B$

9. $A, B$ மற்றும் $C$ ஆகிய மூன்று கணங்களுக்கு $B\setminus(A\cup C)=$

   (A) $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ (B) $(B\setminus A)\cap(B\setminus C)$

   (C) $(B\setminus A)\cap(A\setminus C)$ (D) $(A\setminus B)\cap(B\setminus C)$

10. $n(A) = 20$ , $n(B) = 30$ மற்றும் $n(A \cup B) = 40$ எனில், $n(A \cap B) =$

(A) 50 (B) 10 (C) 40 (D) 70

11. $\{ (x, 2), (4, y) \}$ ஒரு சமனிச் சார்பைக் குறிக்கிறது எனில், $(x, y) =$

(A) (2, 4) (B) (4, 2) (C) (2, 2) (D) (4, 4)

12. $\{ (7, 11), (5, a) \}$ ஒரு மாறிலிச்சார்பைக் குறிக்கிறது எனில், '$a$'-ன் மதிப்பு

(A) 7 (B) 11 (C) 5 (D) 9

13. $f(x) = (-1)^x$ என்பது $\mathbb{N}$ -லிருந்து $\mathbb{Z}$- க்கு வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது. $f$ -ன் வீச்சகம்

(A) $\{ 1 \}$ (B) $\mathbb{N}$ (C) $\{ 1, -1 \}$ (D) $\mathbb{Z}$

14. $f = \{ (6, 3), (8, 9), (5, 3), (-1, 6) \}$ எனில், 3-ன் முன் உருக்கள்

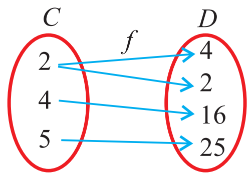
(A) 5 மற்றும் –1 (B) 6 மற்றும் 8 (C) 8 மற்றும் –1 (D) 6 மற்றும் 5

15. $A = \{ 1, 3, 4, 7, 11 \}$ மற்றும் $B = \{-1, 1, 2, 5, 7, 9 \}$ என்க.
$f = \{ (1, -1), (3, 2), (4, 1), (7, 5), (11, 9) \}$ என்றவாறு அமைந்த சார்பு $f : A \to B$ என்பது

(A) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு (B) மேல் சார்பு

(C) இருபுறச் சார்பு (D) சார்பு அல்ல

16. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம் குறிக்கும் சார்பு, ஒரு




(A) மேல் சார்பு (B) மாறிலிச் சார்பு

(C) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு (D) சார்பு அல்ல

17. $A = \{ 5, 6, 7 \}, B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ என்க. $f(x) = x - 2$ என்றவாறு வரையறை செய்யப்பட்ட சார்பு $f : A \to B$இன் வீச்சகம்,

(A) $\{ 1, 4, 5 \}$ (B) $\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ (C) $\{ 2, 3, 4 \}$ (D) $\{ 3, 4, 5 \}$

18. $f(x) = x^2 + 5$ எனில், $f(-4) =$

(A) 26 (B) 21 (C) 20 (D) –20

19. ஒரு சார்பின் வீச்சகம் ஓருறுப்புக் கணமானால், அது ஒரு

(A) மாறிலிச் சார்பு (B) சமனிச் சார்பு

(C) இருபுறச் சார்பு (D) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு

20. $f : A \to B$ ஒரு இருபுறச் சார்பு மற்றும் $n(A) = 5$ எனில், $n(B) =$

(A) 10 (B) 4 (C) 5 (D) 25

## நினைவில் கொள்க

### கணங்கள்

- கணம் என்பது நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருட்களின் தொகுப்பாகும்.
  - கணங்களின் சேர்ப்பு, பரிமாற்றுப் பண்பு மற்றும் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது.
  - கணங்களின் வெட்டு, பரிமாற்றுப் பண்பு மற்றும் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது.
  - கணங்களின் வித்தியாசம் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையதல்ல.
  - கணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று வெட்டாக் கணங்களாயிருப்பின் அவற்றின் வித்தியாசம் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது.
- பங்கீட்டு விதிகள்
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- கண வித்தியாசத்திற்கான டி மார்கனின் விதிகள்
  - $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
  - $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$
- கண நிரப்பிக்கான டி மார்கனின் விதிகள்
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$
  - $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- கணங்களின் சேர்ப்பின் கண எண்ணைக் (ஆதி எண்) கண்டறியும் சூத்திரங்கள்
  - $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
  - $n(A \cup B \cup C)$
    $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$

### சார்புகள்

- $A$, $B$ என்னும் இரு கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கற்பலன்
  $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ என வரையறுக்கப்படும்.
- $A$-யிலிருந்து $B$-க்கு உறவு $R$ என்பது $A \times B$-ன் வெற்றற்ற ஒரு உட்கணம் ஆகும். அதாவது, $R \subseteq A \times B$.
- $f : X \to Y$ என்ற சார்பு கீழ்க் காணும் நிபந்தனைகளின் படி வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது:
  ஒவ்வொரு $x \in X$ ம் ஒரேயொரு $y = f(x) \in Y$ உடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது.
- ஒவ்வொரு சார்பினையும் ஒரு வரைபடத்தின் மூலம் குறிக்கலாம். ஆயினும், பொதுவாக இதன் மறுதலை மெய்யாகாது.

- ஒவ்வொரு குத்துக்கோடும் வரைபடத்தை அதிகபட்சம் ஒரு புள்ளியில் வெட்டினால் அவ்வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும்.

- (i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

  (ii) அம்புக்குறிப் படம்

  (iii) அட்டவணை

  (iv) வரைபடம்

  ஆகியவற்றால் ஒரு சார்பினைக் குறிக்கலாம்.

- சார்பு $y = |x|$ எனும் மட்டுச் சார்பு அல்லது அறச் சார்பு என்பதின் வரையறை :

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ எனும்போது} \\ -x, & x < 0 \text{ எனும்போது} \end{cases}$$

- சார்புகளின் வகைகள் பின்வருமாறு
  - ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு (வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு வெவ்வேறு நிழல் உருக்கள்).
  - மேல் சார்பு ( $f$-ன் வீச்சகம் = $f$-ன் துணை மதிப்பகம் )
  - இருபுறச் சார்பு ( ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு )
  - மாறிலிச் சார்பு ( $f$-ன் வீச்சகம் ஒருறுப்புக்கணம் )
  - சமனிச் சார்பு ( ஒவ்வொரு உறுப்பின் நிழல்உரு அதே உறுப்பாகும் )

**உங்களுக்குத் தெரியுமா?**

'மில்லினியம் பரிசு கணக்குகள்' (Millennium Prize problems) என்பன அமெரிக்காவில் உள்ள 'கிளே கணித நிறுவனம்' (Clay Mathematics Institute) 2000 ஆம் ஆண்டில் அறிவித்த ஏழு கணக்குகளாகும். ஆகஸ்ட் 2010 வரை ஆறு கணக்குகள் தீர்வு காணப்படாமல் உள்ளன. ஒரு கணக்கின் சரியானத் தீர்வுக்கு 1000,000 அமெரிக்க டாலர்கள், அந்நிறுவனத்தால் பரிசுத் தொகையாக அறிவிக்கப்பட்டுள்ளது. அந்த ஏழு கணக்குகளில் 'பாய்ன்கேர் கன்ஜெக்ச்சர்' (Poincare conjecture) என்பது மட்டுமே ரஷ்ய கணித மேதை கிரிகோரி பெரில்மேன் (Girigori Perelman) என்பவரால் 2010-ல் தீர்க்கப்பட்டது. ஆயினும், அதற்குரிய பரிசினைப் பெற அவர் மறுத்து விட்டார்.

(மெய் அல்லது மெய்யல்ல என நிரூபிக்கப்பட வேண்டிய கணிதக் கூற்றினை கன்ஜெக்ச்சர் (conjecture) என்போம்)

2

# மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசைகளும் தொடர்களும்

*Mathematics is the Queen of Sciences, and arithmetic is the Queen of Mathematics* - C.F.Gauss

- அறிமுகம்
- தொடர்வரிசைகள்
- கூட்டுத் தொடர்வரிசை (A.P.)
- பெருக்குத் தொடர்வரிசை (G.P.)
- தொடர்கள்

**லியோநார்டோ பிசானோ (பிபோனாகி)**
Leonardo Pisano (Fibonacci)
(1170-1250)
இத்தாலி

பண்டைக்காலக் கணிதத்திற்கு புத்துயிரூட்டுவதில் பிபோனாகி முக்கியப் பங்காற்றினார். அவருடைய பெயர் நவீன கணித வல்லுநர்களுக்கு, முக்கியமாக பிபோனாகியின் பெயரால் அழைக்கப்பட்ட எண்களில் அமைந்த தொடர்வரிசையின் காரணமாக அறிமுகமாயிற்று. பிபோனாகி எண்களை அவர் புதியதாக கண்டறியவில்லை. ஆனால் அவற்றை ஒரு தொடர் வரிசையின் உதாரணமாகப் பயன்படுத்தினார்.

## 2.1 அறிமுகம்

இப்பாடத்தில் மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசைகளைப் பற்றியும், தொடர்களைப் பற்றியும் கற்போம். தொடர்வரிசை என்பது நீண்ட வரலாறு கொண்ட அடிப்படைக் கணிதக் கருத்தாகும். மேலும், தொடர்வரிசைகள் பிற கணிதக் கருத்துக்களை மேம்படுத்துவதற்கும் இயல்பான வாழ்க்கைச் சூழ்நிலைகளை கணிதமயமாக்குவதற்கும் பயன்படும் கருவியாக அமைகின்றன.

$\mathbb{N}$ மற்றும் $\mathbb{R}$ என்பன முறையே அனைத்து மிகை முழுக்களையும் மற்றும் மெய்யெண்களையும் குறிக்கும் என்பதை நினைவுக் கூறுவோம்.

பின்வரும் நடைமுறை நிகழ்வுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

(i) இஸ்ரோ (ISRO) விஞ்ஞானிகள், சம கால இடைவெளியில் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்கு கடல் மட்டத்திலிருந்து செயற்கைக் கோளின் உயரத்தைக் கண்காணித்து பதிவு செய்தனர்.

(ii) இரயில்வே அமைச்சகம், சென்னை மத்திய தொடர் வண்டி நிலையத்தை தினசரி எத்தனை பேர் பயன்படுத்துகின்றனர் என்பதை அறிய விரும்பியது. ஆகவே, மத்திய தொடர்வண்டி நிலையத்திற்கு நாள்தோறும் வருவோரின் எண்ணிக்கையை தொடர்ந்து 180 நாட்களுக்கு பதிவு செய்தது.

(iii) 9 ஆம் வகுப்பில் பயிலும் ஆர்வமுள்ள ஒரு மாணவன் $\sqrt{5} = 2.236067978\cdots$ என்ற விகிதமுறா எண்ணின் தசமப் பகுதியில் உள்ள தசம எண்களை அறிய விரும்பி பின்வருமாறு எழுதினார் : $2, 3, 6, 0, 6, 7, 9, 7, 8, \cdots$ .

(iv) 1-ஐத் தொகுதியாகக் கொண்ட அனைத்து மிகை பின்னங்களையும் ஒரு மாணவன் கண்டறிய விரும்பி பின்வருமாறு எழுதினார் : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ .

(v) ஒரு கணித ஆசிரியை, தன் வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் பெயர்களை அகர வரிசையில் எழுதி, அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களை பின்வருமாறு எழுதினார் :
75, 95, 67, 35, 58, 47, 100, 89, 85, 60.

(vi) அதே ஆசிரியை, அதே மதிப்பெண்களின் விவரத்தை பின்வருமாறு ஏறுவரிசையில் எழுதினார் :

35, 47, 58, 60, 67, 75, 85, 89, 95, 100.

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகள் ஒவ்வொன்றின் தொகுப்பிலுள்ள மெய்யெண்களை குறிப்பிட்ட வரிசைப்படி பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன.

இந்த வரிசைஅமைப்புகளில் (iii) மற்றும் (iv)-களில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் உள்ளன. (i) (ii), (v) மற்றும் (vi)-களில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் உள்ளன. ஆனால், (v) மற்றும் (vi)-களில் ஒரே தொகுப்பிலுள்ள எண்கள் மாறுபட்ட வரிசையில் உள்ளன.

## 2.2 தொடர்வரிசைகள் (Sequences)

**வரையறை**

மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசை என்பது, குறிப்பிட்ட வரிசையில் அமைக்கப்பட்ட அல்லது பட்டியலிடப்பட்ட மெய்யெண்களின் வரிசையாகும்.

(i) ஒரு தொடர்வரிசை முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால், அது முடிவுறு தொடர்வரிசை (finite sequence) எனப்படும்.

(ii) ஒரு தொடர்வரிசையில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருப்பின், அது முடிவுறாத் தொடர்வரிசை ( infinite sequence) எனப்படும்.

முடிவுறு தொடர்வரிசையை $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ அல்லது $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ எனவும், முடிவுறாத் தொடர்வரிசையை $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ அல்லது $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ எனவும் குறிப்போம். இங்கு $a_k$ என்பது தொடர்வரிசையின் $k$-ஆவது உறுப்பைக் குறிக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, தொடர்வரிசையில் $a_1$ என்பது முதல் உறுப்பு எனவும் $a_7$ என்பது 7 ஆம் உறுப்பு எனவும் குறிப்பிடப்படும்.

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் (i), (ii), (v) மற்றும் (vi) என்பன முடிவுறு தொடர்வரிசைகளாகும். ஆனால், (iii) மற்றும் (iv) ஆகியவற்றில் உள்ள தொடர்வரிசைகள் முடிவுறாத் தொடர்வரிசைகளாகும்.

எண்களின் தொகுப்பைத் தொடர்வரிசையாக அமைத்தால், அத்தொடர்வரிசை தெளிவான முதல் உறுப்பு, இரண்டாம் உறுப்பு, மூன்றாம் உறுப்பு, எனத் தொடர்ச்சியாக பிற உறுப்புக்களையும் கொண்டிருக்கும். முன்பே தொடர்வரிசைக்கு சில எடுத்துக்காட்டுக்களைக் கண்டோம். மேலும், பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளைக் கருத்தில் கொள்வோம்.

(i) $2, 4, 6, 8, \cdots, 2010.$ (முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள்)

(ii) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots.$ ($1$ மற்றும் $-1$ ஆகியவற்றிற்கு இடையில் உறுப்புகள் ஊசலாடுகின்றன)

(iii) $\pi, \pi, \pi, \pi, \pi.$ (உறுப்புகள் ஒத்துள்ளன எனவே இது மாறிலித் தொடர்வரிசை)

(iv) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \cdots$ . (பகா எண்களின் பட்டியல்)

(v) $0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333, \cdots$ . (முடிவிலி எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள்)

(vi) $S = \{a_n\}_1^{\infty}$, இங்கு நாணயத்தை தொடர்ந்து சுண்டும் போது $n$-ஆவது விளைவில் தலை அல்லது பூ கிடைத்தால் $a_n$ -ன் மதிப்பு முறையே 1 அல்லது 0 ஆகும்.

மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் (i) மற்றும் (iii) என்பன முடிவுறு தொடர்வரிசைகள் மற்றவை முடிவுறாத் தொடர்வரிசைகள் ஆகும். (i)-லிருந்து (v) வரையிலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில்

உள்ள தொடர்வரிசைகளில் உறுப்புகள் ஒரு குறிப்பிட்ட அமைப்பு அல்லது விதியின் படி வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. எனவே, அத்தகைய தொடர்வரிசைகளில் குறிப்பிட்ட நிலையில் உறுப்புகளைக் கண்டறியலாம். ஆனால், (vi)-ல் உள்ள தொடர்வரிசையில் குறிப்பிட்ட நிலையில் உள்ள உறுப்பினைத் தீர்மானிக்க இயலாது. அது 1 அல்லது 0 ஆக இருக்கும். இங்கு 'அமைப்பு' என்னும் சொல்லை, ஒரு தொடர்வரிசையில் $n$-ஆவது உறுப்பை அதன் முந்தைய உறுப்புகள் அமைந்துள்ள வகையைக் கொண்டு அறிதல் என்னும் பொருளில் பயன்படுத்துகிறோம். பொதுவாக தொடர்வரிசைகளை சார்புகளாகவும் கருதலாம்.

### 2.2.1 தொடர்வரிசைகளை சார்புகளாக அறிதல் (Sequences viewed as functions)

மெய்யெண்களாலான ஒரு முடிவுறு தொடர்வரிசை $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ அல்லது $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ என்பதை $f(k) = a_k,\ k = 1, 2, 3, \cdots, n$ என வரையறுக்கப்பட்ட $f : \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\} \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பாகக் கருதலாம்.

மெய்யெண்களாலான ஒரு முடிவுறாத் தொடர்வரிசை $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ அல்லது $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ஐ $g(k) = a_k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ என வரையறுக்கப்பட்ட $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பாகக் கருதலாம்.

இங்கு '$\forall$' என்ற குறியீடு "எல்லாவற்றிற்குமாக" (for all) எனப் பொருள்படும். தொடர்வரிசை $\{a_k\}_1^{\infty}$-ன் பொது உறுப்பு $a_k$ தரப்பட்டால், தொடர்வரிசையை முழுமையாக அமைக்க முடியும். ஆகவே, தொடர்வரிசை என்பது ஒரு சார்பு ஆகும். அதன் மதிப்பகம் இயல் எண்களின் கணம் $\mathbb{N} = \{\ 1, 2, 3, \cdots, \}$ ஆகவோ அல்லது இயல் எண்களின் சில உட்கணங்களாகவோ இருக்கும். அதன் வீச்சகம் மெய்யெண்களின் ஒரு உட்கணமாக இருக்கும்.

**குறிப்புரை**

சார்பானது ஒரு தொடர்வரிசையாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை. எடுத்துக்காட்டாக, சார்பு $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ஆனது $f(x) = 2x + 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$ என அமையுமானால், அது ஒரு தொடர்வரிசையாகாது. ஏனெனில், இச்சார்பின் வீச்சகத்தின் உறுப்புகளை தொடர்வரிசையில் அமைக்க முடியாது. மேலும், இச்சார்பின் மதிப்பகம் ஆனது இயல் எண்களின் கணம் $\mathbb{N}$ ஆகவோ அல்லது இயல் எண்களின் உட்கணம் $\{1, 2, \cdots, n\}$ ஆகவோ அமையப் பெறவில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.1**

$n$-ஆவது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ள பின்வரும் தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

$$c_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

**தீர்வு** இங்கு, $$c_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$n = 1$ எனில், $$c_1 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1.$$

$n = 2$ எனில், $$c_2 = \frac{2(2+1)(4+1)}{6} = \frac{2(3)(5)}{6} = 5.$$

$n = 3$ எனில், $$c_3 = \frac{3(3+1)(7)}{6} = \frac{(3)(4)(7)}{6} = 14.$$

எனவே, தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் முறையே 1, 5 மற்றும் 14.

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில், பொது உறுப்பின் சூத்திரம் நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பையும் நேரடியாகக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டில், மற்றொரு முறையில் தொடர்வரிசை அமைத்தலைக் காணலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.2**

பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் முதல் ஐந்து உறுப்புகளை காண்க.

(i) $a_1 = -1, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{n+2}, \quad n > 1$ மற்றும் $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $F_1 = F_2 = 1$ மற்றும் $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 3, 4, \cdots$.

**தீர்வு**

(i) $a_1 = -1$ மற்றும் $a_n = \frac{a_{n-1}}{n+2}, \quad n > 1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே,

$$a_2 = \frac{a_1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3+2} = \frac{-\frac{1}{4}}{5} = -\frac{1}{20}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4+2} = \frac{-\frac{1}{20}}{6} = -\frac{1}{120}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{5+2} = \frac{-\frac{1}{120}}{7} = -\frac{1}{840}$$

$\therefore$ தொடர்வரிசையின் முதல் ஐந்து உறுப்புகள் $-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{120}$ மற்றும் $-\frac{1}{840}$.

(ii) $F_1 = F_2 = 1$ மற்றும் $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n = 3, 4, 5, \cdots$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இப்பொழுது, $F_1 = 1, F_2 = 1$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

$\therefore$ இத்தொடர்வரிசையின் முதல் ஐந்து உறுப்புகள் முறையே $1, 1, 2, 3, 5$.

**குறிப்புரை**

$F_1 = F_2 = 1$ மற்றும் $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 3, 4, \cdots$ என்பதிலிருந்து பெறப்படும் தொடர்வரிசை பிபோனாகி (Fibonacci sequence) தொடர்வரிசை எனப்படும். இதன் உறுப்புகள் $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$. சூரியகாந்திப் பூவில் உள்ள விதைகளின் அமைப்புபோன்று பிபோனாகி தொடர்வரிசை இயற்கையில் காணப்படுகிறது.

சூரியகாந்திப் பூவில் விதைகள் சுருள் சுருளாக எதிர் எதிர் திசைகளில் அமைந்துள்ளன. அந்தச் சுருள்களின் எண்ணிக்கை பிபோனாகி தொடர்வரிசையில் உள்ள அடுத்தடுத்த எண்களைக் குறிக்கிறது.

**பயிற்சி 2.1**

1. $n$-ஆவது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்ட பின்வரும் தொடர்வரிசை ஒவ்வொன்றிலும் முதல் மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

(i) $a_n = \frac{n(n-2)}{3}$ (ii) $c_n = (-1)^n 3^{n+2}$ (iii) $z_n = \frac{(-1)^n n(n+2)}{4}$

2. ஒவ்வொரு தொடர்வரிசையின் $n$-ஆவது உறுப்பு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவை ஒவ்வொன்றிலும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள உறுப்புகளைக் காண்க.

(i) $a_n = \dfrac{n+2}{2n+3}$; $a_7, a_9$ (ii) $a_n = (-1)^n 2^{n+3}(n+1)$; $a_5, a_8$

(iii) $a_n = 2n^2 - 3n + 1$; $a_5, a_7$. (iv) $a_n = (-1)^n(1 - n + n^2)$; $a_5, a_8$

3. $$a_n = \begin{cases} n(n+3), & n \in \mathbb{N} \text{ மற்றும் } n \text{ இரட்டைப்படை எண் எனும்போது} \\ \dfrac{2n}{n^2+1}, & n \in \mathbb{N} \text{ மற்றும் } n \text{ ஒற்றைப்படை எண் எனும்போது} \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசையின் 18- வது மற்றும் 25-வது உறுப்புகளைக் காண்க.

4. $$b_n = \begin{cases} n^2, & n \in \mathbb{N} \text{ மற்றும் } n \text{ இரட்டைப்படை எண் எனும்போது} \\ n(n+2), & n \in \mathbb{N} \text{ மற்றும் } n \text{ ஒற்றைப்படை எண் எனும்போது} \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசையின் 13 ஆவது மற்றும் 16ஆவது உறுப்புகளைக் காண்க.

5. $a_1 = 2,\ a_2 = 3 + a_1$ மற்றும் $a_n = 2a_{n-1} + 5,\ \ n > 2$, எனக்கொண்டத்தொடர்வரிசையின் முதல் 5 உறுப்புகளைக் காண்க.

6. $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ மற்றும் $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ \ n > 3$, எனக் கொண்டத் தொடர்வரிசையின் முதல் 6 உறுப்புகளைக் காண்க.

## 2.3 கூட்டுத் தொடர்வரிசை அல்லது கூட்டு விருத்தி (Arithmetic Sequence or Arithmetic Progression, A.P.)

இப்பகுதியில் சில சிறப்புத் தொடர்வரிசைகளைக் காண்போம்.

**வரையறை**

$a_{n+1} = a_n + d,\ \ n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $d$ ஒரு மாறிலியாக இருப்பின், தொடர்வரிசை $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ஐ ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை என்போம். இங்கு $a_1$ என்பது முதல் உறுப்பு மற்றும் மாறிலி $d$ என்பது பொது வித்தியாசம் என்றும் கூட்டுத் தொடர்வரிசையை கூட்டு விருத்தி எனவும் அழைப்பர். இதனைச் சுருக்கமாக A.P. எனவும் குறிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை. இங்கு, $a_1 = 2$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d = 3$ ஒரு மாறிலி.

(ii) $-4, -4, -4, -4, \cdots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை.
இங்கு, $a_1 = -4$ மற்றும் $d = 0$ ஒரு மாறிலி.

(iii) $2,\ 1.5,\ 1,\ 0.5,\ 0,\ -0.5,\ -1.0,\ -1.5, \cdots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை.
இங்கு, $a_1 = 2$ மற்றும் $d = -0.5$ ஒரு மாறிலி.

### கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொதுவடிவம் (General form of an Arithmetic Progression)

கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொதுவடிவத்தை அறிந்து கொள்வோம். ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ -ன் முதல் உறுப்பை $a$ எனவும் பொது வித்தியாசத்தை $d$ எனவும் எடுத்துக் கொள்க.

எனவே, $a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

ஆகவே, $n = 1, 2, 3$ எனில்,

$$a_2 = a_1 + d = a + d = a + (2-1)d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a+d) + d = a + 2d = a + (3-1)d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a+2d) + d = a + 3d = a + (4-1)d$$

இம்முறையைத் தொடர, $n$-ஆவது உறுப்பினை பின்வருமாறு காணலாம்.

$$a_n = a_{n-1} + d = [a + (n-2)d] + d = a + (n-1)d.$$

எனவே, ஒவ்வொரு $n \in \mathbb{N}$-க்கும் $a_n = a + (n-1)d$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகவே, ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை அல்லது கூட்டு விருத்தி (A.P.)
$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots,\ a+(n-1)d,\ a+nd, \cdots$ என அமையும்.

மேலும், ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பிற்கான சூத்திரம்

$$t_n = a + (n-1)d\ ,\quad \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

**குறிப்பு**

(i) ஒரு தொடர்வரிசை முடிவுறு தொடர்வரிசையாகவும் இருக்கலாம். கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் $n$ உறுப்புகள் மட்டுமே உள்ளது எனில், கடைசி உறுப்பு $l = a + (n-1)d$ ஆகும்.

(ii) $l = a + (n-1)d$ என்பதை $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$ எனவும் எழுதலாம். முதல் உறுப்பு, கடைசி உறுப்பு மற்றும் பொது வித்தியாசம் ஆகியனக் கொடுக்கப்பட்டால் கூட்டுத் தொடர்வரிசையிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் கண்டறிய இச்சூத்திரம் பயன்படும்.

(iii) ஒரு A.P.-ன் தொடர்ச்சியான 3 உறுப்புகளை $m-d,\ m,\ m+d$ எனக் கொள்ளலாம். இங்கு பொது வித்தியாசம் $d$ ஆகும்.

(iv) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான 4 உறுப்புகளை $m-3d,\ m-d,\ m+d,\ m+3d$ எனக் கொள்ளலாம். இங்கு பொது வித்தியாசம் $2d$.

(v) கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் ஒவ்வொரு உறுப்புடனும் ஒரே மாறிலியைக் கூட்டினாலும் கழித்தாலும் அத்தொடர்வரிசை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையாகவே இருக்கும்.

(vi) கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கினாலும் ,வகுத்தாலும் அத்தொடர்வரிசை கூட்டுத் தொடர்வரிசையாகவே இருக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.3**

பின்வருவனவற்றுள் எவைக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் (A.P.) உள்ளது?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \cdots$ .  (ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$ .

**தீர்வு**

(i) $n \in \mathbb{N}$, $t_n$ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசையின் $n$ ஆவது உறுப்பு என்க.

$$\therefore \qquad t_1 = \frac{2}{3},\ t_2 = \frac{4}{5},\ t_3 = \frac{6}{7}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$$

$$t_3 - t_2 = \frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{30-28}{35} = \frac{2}{35}$$

இங்கு, $t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை அல்ல. அதாவது, A.P. அல்ல.

(ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசையாகும்.

இங்கு, $t_1 = 3m-1,\ t_2 = 3m-3,\ t_3 = 3m-5, \cdots$.

$$\therefore \quad t_2 - t_1 = (3m-3)-(3m-1) = -2$$

$$t_3 - t_2 = (3m-5)-(3m-3) = -2$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டத் தொடர்வரிசையானது $3m-1$ முதல் உறுப்பாகவும் மற்றும் பொது வித்தியாசம் $-2$ ஆகவும் கொண்ட ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.4**

பின்வரும் கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது வித்தியாசத்தைக் காண்க.

(i) $5, 2, -1, -4, \cdots$. (ii) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{17}{6}$

**தீர்வு**

(i) முதல் உறுப்பு $a = 5$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d = 2-5 = -3$.

(ii) $a = \frac{1}{2}$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$.

**எடுத்துக்காட்டு 2.5**

$20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, \cdots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உறுப்பு $t_n$ ஒரு குறை எண்ணாக அமைய $n$-ன் மிகச்சிறிய மிகை முழு மதிப்பு யாது ?

**தீர்வு** இங்கு, $a = 20,\ d = 19\frac{1}{4} - 20 = -\frac{3}{4}$.

$t_n < 0$ என்று அமையுமாறு $n$-ன் மீச்சிறு மிகை முழு மதிப்பைக் காண்பதானது,

மிகச்சிறிய $n \in \mathbb{N}$-ற்கு $a + (n-1)d < 0$-ஐத் தீர்ப்பதற்கு ஒப்பாகும்.

ஆகவே, மிகச்சிறிய $n \in \mathbb{N}$-ற்கு $20 + (n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < 0$.

$$(n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < -20 \implies (n-1)\times\frac{3}{4} > 20$$

(அசமன்பாட்டினை இருபுறமும் $-1$ ஆல் பெருக்க)

$$\therefore \quad n-1 > 20\times\frac{4}{3} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}.$$

ஆகவே, $n > 26\frac{2}{3} + 1$. அதாவது, $n > 27\frac{2}{3} = 27.66$

எனவே, இந்த அசமன்பாட்டினை நிறைவுச் செய்யும் மிகச்சிறிய மிகை முழு $n = 28$.

$\therefore$ கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் குறை எண் கொண்ட உறுப்பு, 28 ஆவது உறுப்பு $(t_{28})$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.6**

ஒரு பூந்தோட்டத்தில் முதல் வரிசையில் 23 ரோஜாச் செடிகள், இரண்டாம் வரிசையில் 21 ரோஜாச் செடிகள் மூன்றாம் வரிசையில் 19 ரோஜாச் செடிகள் என்ற முறையில் ரோஜாச் செடிகள் ஒரு தொடர்வரிசைஅமைப்பில் உள்ளன. கடைசி வரிசையில் 5 ரோஜாச் செடிகள் இருப்பின், அப்பூந்தோட்டத்தில் எத்தனை வரிசைகள் உள்ளன?

**தீர்வு** பூந்தோட்டத்தில் உள்ள வரிசைகளின் (நிரைகள்) எண்ணிக்கை $n$ என்க.

$1, 2, 3, \cdots, n$-ஆவது வரிசைகளில் உள்ள ரோஜாச் செடிகளின் எண்ணிக்கை முறையே $23, 21, 19, \cdots, 5$ ஆகும்.

இங்கு, $t_k - t_{k-1} = -2 \quad (k = 2, \cdots, n)$

எனவே, $23, 21, 19, \cdots, 5$ ஆகிய எண்கள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் (A.P.)அமைந்துள்ளன.

மேலும், $a = 23, \quad d = -2, \; l = 5$ என்பதால்,

$$\therefore\ n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{5-23}{-2} + 1 = 10.$$

எனவே, அப்பூந்தோட்டத்தில் 10 வரிசைகளில் ரோஜா செடிகள் உள்ளன.

### எடுத்துக்காட்டு 2.7

2010-ல் ஒருவர் ஆண்டு ஊதியம் ₹ 30,000 எனப் பணியில் சேருகிறார். மேலும் ஒவ்வொரு வருடமும் ₹600-ஐ ஆண்டு ஊதிய உயர்வாகப் பெறுகிறார். அவருடைய ஆண்டு ஊதியம் எந்த வருடத்தில் ₹39,000-ஆக இருக்கும்?

**தீர்வு** $n$ ஆவது வருடத்தில் அவருடைய ஆண்டு ஊதியம் ₹39,000 ஆக இருக்கும் எனக் கொள்க.

$2010, 2011, 2012, \cdots, [2010 + (n-1)]$ ஆகிய வருடங்களில் அவருடைய ஆண்டு ஊதியம் முறையே ₹30,000, ₹30,600, ₹31,200, $\cdots$ , ₹39000.

ஆண்டு ஊதியங்களின் தொடர்வரிசை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்கிறது.

ஒவ்வொரு உறுப்பையும் 100 ஆல் வகுக்க $300, 306, 312, \cdots, 390$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசை கிடைக்கிறது.

எனவே, $a = 300, \; d = 6, \; l = 390.$

$$n = \frac{l-a}{d} + 1$$

$$= \frac{390-300}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16$$

எனவே, 16 ஆவது ஆண்டில் ஊதியம் ₹ 39,000 ஆகும்.

ஆண்டு ஊதியம் ₹ 39,000-ஐ 2025-ஆம் ஆண்டு பெறுவார்.

### எடுத்துக்காட்டு 2.8

மூன்று எண்களின் விகிதம் $2 : 5 : 7$ என்க. முதலாம் எண், இரண்டாம் எண்ணிலிருந்து 7-ஐக் கழித்துப் பெறப்படும் எண் மற்றும் மூன்றாம் எண் ஆகியன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை ஏற்படுத்தினால், அவ்வெண்களைக் காண்க.

**தீர்வு** அவ்வெண்களை $2x, 5x$ மற்றும் $7x$ என்க. $(x \neq 0)$

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின் படி $2x, 5x - 7, 7x$ என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

$\therefore\ (5x-7) - 2x = 7x - (5x-7) \implies 3x - 7 = 2x + 7 \implies x = 14.$

தேவையான அவ்வெண்கள் 28, 70, 98 ஆகும்.

## பயிற்சி 2.2

1. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு 6 மற்றும் பொது வித்தியாசம் 5 எனில், அத்தொடர்வரிசையும், அதன் பொது உறுப்பையும் காண்க.

2. 125, 120, 115, 110, $\cdots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது வித்தியாசத்தையும் 15 ஆவது உறுப்பையும் காண்க.

3. $24,\ 23\frac{1}{4},\ 22\frac{1}{2},\ 21\frac{3}{4}, \cdots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் 3 என்பது எத்தனையாவது உறுப்பு ஆகும்?

4. $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \ \cdots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 12 ஆவது உறுப்பு யாது ?

5. 4, 9, 14, $\cdots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 17 ஆவது உறுப்பைக் காண்க.

6. பின்வரும் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள மொத்த உறுப்புகளைக் காண்க.

   (i) $-1,\ -\frac{5}{6},\ -\frac{2}{3}, \cdots, \frac{10}{3}$.  (ii) 7, 13, 19, $\cdots$, 205.

7. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 9 ஆவது உறுப்பு பூச்சியம் எனில், 19 ஆவது உறுப்பின் இருமடங்கு 29 ஆவது உறுப்பு என நிரூபி.

8. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் 10 மற்றும் 18 ஆவது உறுப்புகள் முறையே 41 மற்றும் 73 எனில், 27 ஆவது உறுப்பைக் காண்க.

9. 1, 7, 13, 19,$\cdots$ மற்றும் 100, 95, 90, $\cdots$ ஆகிய கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் $n$ ஆவது உறுப்பு சமமெனில், $n$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

10. 13ஆல் வகுபடும் ஈரிலக்க மிகை முழு எண்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

11. ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டித் தயாரிப்பாளர் ஏழாவது ஆண்டில் 1000 தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளையும், பத்தாவது ஆண்டில் 1450 தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளையும் தயாரித்தார். ஒவ்வொரு ஆண்டும் தயாரிக்கும் தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை சீராகவும் ஒரு மாறிலி எண் அளவும் அதிகரித்தால், முதலாம் ஆண்டிலும், 15 ஆவது ஆண்டிலும் தயாரிக்கப்பட்ட தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

12. ஒருவர், முதல் மாதம் ₹640, 2ஆம் மாதம் ₹720, 3ஆம் மாதம் ₹800-ஐ சேமிக்கிறார். அவர் தன்னுடைய சேமிப்பை இதே தொடர்வரிசையில் தொடர்ந்தால், 25ஆவது மாதம் அவர் சேமிக்கும் தொகையைக் காண்க.

13. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 6 மற்றும் அவற்றின் பெருக்குத் தொகை $-120$ எனில், அம்மூன்று எண்களைக் காண்க.

14. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 18 மற்றும் அவ்வுறுப்புகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 140 எனில், அம்மூன்று எண்களைக் காண்க.

15. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $m$-ஆவது உறுப்பின் $m$ மடங்கு அதன் $n$-ஆவது உறுப்பின் $n$ மடங்குக்குச் சமமெனில், அக்கூட்டுத் தொடவரிசையின் $(m+n)$-ஆவது உறுப்பு பூச்சியம் எனக்காட்டுக.

16. ஒருவர் வருடத்திற்கு தனிவட்டி 14% தரும் முதலீட்டில் ₹25,000-ஐ முதலீடு செய்தார். ஒவ்வொரு வருட முடிவிலும் கிடைக்கும் அசல் மற்றும் தனிவட்டி சேர்ந்த மொத்தத் தொகை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்குமா? அவ்வாறெனில், 20 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு முதலீட்டில் உள்ள தொகையைக் காண்க.

17. $a, b, c$ ஆகியன கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருப்பின் $(a-c)^2 = 4(b^2 - ac)$ என நிறுவுக.

18. $a, b, c$ ஆகியன கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருப்பின் $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ ஆகியன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருக்கும் என நிறுவுக.

19. $a^2, b^2, c^2$ ஆகியன கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருப்பின் $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ ஆகியனவும் கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் இருக்கும் எனக்காட்டுக.

20. $a^x = b^y = c^z,\ x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ மற்றும் $b^2 = ac$ எனில், $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ ஆகியன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

## 2.4 பெருக்குத் தொடர்வரிசை அல்லது பெருக்கு விருத்தி (Geometric Sequence or Geometric Progression, G.P.)

**வரையறை**

$n \in \mathbb{N}$-க்கு $a_{n+1} = a_n r$ (இங்கு $r$ என்பது ஒரு பூச்சியமற்ற ஒரு மாறிலி) என அமைந்த தொடர்வரிசை $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை **(Geometric Sequence)** எனப்படும். ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையை பெருக்கு விருத்தி **(Geometric Progression)** எனவும் கூறலாம். இங்கு, $a_1$ என்பது முதல் உறுப்பு மற்றும் $r$ என்பது பொது விகிதம் **(common ratio)** எனப்படும்.

பெருக்குத் தொடர்வரிசைக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகளை இங்குக் காண்போம்.

(i) $3,\ 6,\ 12,\ 24, \cdots$ .

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$ என்றவாறு அமைந்த

தொடர் வரிசை $\{a_n\}_1^\infty$ ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

இங்கு, $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2 \neq 0$ என்பதால் $3,\ 6,\ 12,\ 24, \cdots$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

(ii) $\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \cdots$ .

இங்கு, $\dfrac{-\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \dfrac{\frac{1}{81}}{-\frac{1}{27}} = \dfrac{-\frac{1}{243}}{\frac{1}{81}} = -\frac{1}{3} \neq 0.$

எனவே, கொடுக்கப்பட்டத் தொடர்வரிசையானது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

### பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொதுவடிவம் (General form of a G.P)

ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$-ன் முதல் உறுப்பு $a$ மற்றும் பொதுவிகிதம் $r$ எனில், அனைத்து $n \in \mathbb{N}$-க்கு, $a_1 = a$ மற்றும் $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ஆகும்.

அதாவது, அனைத்து $n \in \mathbb{N}$-க்கு, $a_{n+1} = r\,a_n$ ஆகும்.

இதிலிருந்து $n = 1, 2, 3$ எனப் பிரதியிட,

$$a_2 = a_1 r = ar = ar^{2-1}$$
$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2 = ar^{3-1}$$
$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3 = ar^{4-1}$$

மேலும், இம்முறையைத் தொடர,

$a_n = a_{n-1} r = (ar^{n-2})r = ar^{n-1}$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே, ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் $n$-ஆவது உறுப்பு $a_n = ar^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$, ஆகும்.

மேலும், ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையானது $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ ar^n, \cdots$. என்ற வடிவில் இருக்கும்.

ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பினைக் காணும் சூத்திரம்

$t_n = ar^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \cdots$ ஆகும்.

ஒரு தொடர்வரிசையில் முதல் சில உறுப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால், அத்தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையா அல்லது இல்லையா என எவ்வாறு தீர்மானிப்பது?

$\frac{t_{n+1}}{t_n} = r$, இங்கு $n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $r$ ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலி, என்றவாறு அமையும் தொடர்வரிசை $\{t_n\}_1^{\infty}$ ஆனது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்.

குறிப்பு

(i) தொடர்வரிசையில் முதல் உறுப்பினைத் தவிர்த்து, எந்த ஒரு உறுப்புக்கும், அதன் முந்தைய உறுப்புக்கும் உள்ள விகிதமானது, பூச்சியமற்ற ஒரு மாறிலி எனில், அத்தொடர்வரிசை, பெருக்குத் தொடர்வரிசை எனப்படும்.

(ii) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கினாலும் அல்லது வகுத்தாலும் கிடைக்கும் தொடர்வரிசை, ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகவே அமையும்.

(iii) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளை $\frac{a}{r}, a, ar$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம். இங்கு $r$ என்பது பொது விகிதம்.

(iv) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த நான்கு உறுப்புகளை $\frac{a}{r^3},\ \frac{a}{r},\ ar,\ ar^3$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம். (இங்கு பொது விகிதம் $r^2$)

## எடுத்துக்காட்டு 2.9

பின்வருவனவற்றில் எவை பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்?

(i) $5, 10, 15, 20, \cdots$ . (ii) $0.15, 0.015, 0.0015, \cdots$ . (iii) $\sqrt{7},\ \sqrt{21},\ 3\sqrt{7},\ 3\sqrt{21}, \cdots$.

**தீர்வு**

(i) அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் பொது விகிதத்தை எடுத்துக்கொண்டால் $\frac{10}{5} \neq \frac{15}{10}$. எனவே, இத்தொடர்வரிசையில் பொது விகிதமில்லை.

ஆகவே, இத்தொடர்வரிசை, ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை அல்ல.

(ii) இங்கு, $\frac{0.015}{0.15} = \frac{0.0015}{0.015} = \cdots = \frac{1}{10}$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகவே, பொது விகிதம் $= \frac{1}{10}$ ஆகும். எனவே, இது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்.

(iii) இங்கு, $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{3\sqrt{7}} = \cdots = \sqrt{3}$. இதன் பொது விகிதம் $\sqrt{3}$ ஆகும்.

எனவே, இத்தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

## எடுத்துக்காட்டு 2.10

பின்வரும் பெருக்குத் தொடர்வரிசைகளின் பொது விகிதத்தையும் மற்றும் அதன் பொது உறுப்பையும் காண்க.

(i) $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \cdots$ .  (ii) $0.02, 0.006, 0.0018, \cdots$ .

**தீர்வு**

(i) கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்.

ஆகவே, பொது விகிதம் $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \cdots$.

எனவே, $r = \dfrac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}$. மேலும், முதல் உறுப்பு $\frac{2}{5}$ ஆகும்.

எனவே, பொது உறுப்பு,

$$t_n = ar^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

$$\Longrightarrow \quad t_n = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

(ii) கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொதுவிகிதம்

$$r = \frac{0.006}{0.02} = 0.3 = \frac{3}{10}.$$

முதல் உறுப்பு = $0.02$

எனவே, இத்தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பு

$$t_n = (0.02)\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

## எடுத்துக்காட்டு 2.11

ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் நான்காவது உறுப்பு $\frac{2}{3}$ மற்றும் அதன் ஏழாவது உறுப்பு $\frac{16}{81}$ எனில், அப்பெருக்குத் தொடர்வரிசையைக் காண்க.

**தீர்வு** $t_4 = \frac{2}{3}$ ; $t_7 = \frac{16}{81}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பிற்கான சூத்திரம், $t_n = ar^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \cdots$ என்பதை பயன்படுத்துவோம்.

$$\Longrightarrow \qquad t_4 = ar^3 = \frac{2}{3} \text{ மற்றும் } t_7 = ar^6 = \frac{16}{81} \text{ ஆகும்.}$$

தற்போது, முதல் உறுப்பு $a$ மற்றும் பொதுவிகிதம் $r$ ஆகியவற்றைக் காண்போம்.

$t_7$-ஐ $t_4$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{t_7}{t_4} = \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{16}{81}}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{27}.$$

$$\Longrightarrow \qquad r^3 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{ என்பதிலிருந்து } r = \frac{2}{3}.$$

$r$-ன் மதிப்பை $t_4$-ல் பிரதியிட,

$$t_4 = \frac{2}{3} \Longrightarrow ar^3 = \left(\frac{2}{3}\right).$$

$$\Longrightarrow \qquad a\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{2}{3}. \qquad \therefore \quad a = \frac{9}{4}.$$

எனவே, பெருக்குத் தொடர்வரிசை : $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ ar^n, \cdots$ ஆகும்.

அதாவது, $\text{G.P.} = \frac{9}{4},\quad \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right),\quad \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2, \cdots$ ஆகும்.

### எடுத்துக்காட்டு 2.12

ஒரு நுண்ணுயிர் பரிசோதனையில் ஒவ்வொரு மணி நேரமும் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை இரட்டிப்பாகிறது. பரிசோதனையின் தொடக்கத்தில் 30 பாக்டீரியாக்கள் இருந்தன. 14 ஆவது மணி நேர முடிவில் உள்ள பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

**தீர்வு** தொடர்ந்து ஒவ்வொரு மணிநேர முடிவிலும் இருக்கக் கூடிய பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை இரு மடங்காகிறது.

நுண்ணுயிர் சோதனையின் தொடக்கத்தில் உள்ள பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை $= 30$

முதல் மணிநேர முடிவில் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை $= 2(30)$

2ஆம் மணிநேர முடிவில் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை $= 2(2(30)) = 30(2^2)$

இவ்வாறு தொடரும் பொழுது, ஒவ்வொரு மணிநேர முடிவிலும் உள்ள பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையை அமைக்கிறது. அதன் பொதுவிகிதம் $r = 2$.

$n$ மணிநேர முடிவில் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை $t_n$ என்று குறிப்பிட்டால்,

$t_n = 30\,(2^n)$ என்பது பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பாகும்.

ஆகவே, 14 ஆவது மணிநேர முடிவில் உள்ள பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை $t_{14} = 30\,(2^{14})$.

### எடுத்துக்காட்டு 2.13

ஆண்டுக்கு 10% வீதம் கூட்டு வட்டி அளிக்கும் ஒரு வங்கியில், ஒருவர் ₹500-ஐ வைப்புத் தொகையாக செலுத்துகிறார். 10 ஆண்டு முடிவில் அவருக்குக் கிடைக்கும் மொத்த தொகை எவ்வளவு?

**தீர்வு** அசல் = ₹500 மற்றும் கூட்டு வட்டி வீதம் 10%

ஒரு வருடத்திற்கான வட்டி $= 500\left(\frac{10}{100}\right) = 50$.

2 ஆவது வருடத்திற்கான அசல் = முதல் வருட அசல் + வட்டி

$$= 500 + 500\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)$$

2 ஆவது வருடத்திற்கான வட்டி $= \left(500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\right)\left(\frac{10}{100}\right)$.

3 ஆவது வருடத்திற்கான அசல் $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right) + 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\frac{10}{100}$

$$= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^2$$

இவ்வாறு தொடர்ந்தால்,

$n$ ஆவது ஆண்டிற்கு அசல் $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1}$.

$(n-1)$ ஆவது ஆண்டு முடிவில் கிடைக்கும் மொத்த தொகை = $n$ ஆவது ஆண்டிற்கான அசல்.

ஆகவே, $n$ ஆவது ஆண்டு முடிவில் கிடைக்கும் மொத்த தொகை

$$= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1} + 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1}\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(\frac{11}{10}\right)^n$$

10 ஆவது வருடமுடிவில் கிடைக்கும் மொத்த தொகை = ₹ $500\left(\frac{11}{10}\right)^{10}$.

**குறிப்புரை**

மேலேயுள்ள முறையைப் பயன்படுத்தி கூட்டுவட்டிக் கணக்குகளில் மொத்தத் தொகை காணும் பின்வரும் சூத்திரத்தை அமைக்க முடியும்.

$$A = P(1+i)^n,$$

இங்கு $A$ என்பது $n$ ஆவது ஆண்டு முடிவில் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகை, $P$ என்பது அசல், $i = \frac{r}{100}$ , $r$ என்பது ஆண்டு வட்டி வீதம் மற்றும் $n$ என்பது ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை.

## எடுத்துக்காட்டு 2.14

ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் $\frac{13}{12}$ மற்றும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் $-1$ எனில், பொது விகிதத்தையும் மேலும் அவ்வுறுப்புகளையும் காண்க.

**தீர்வு** பெருக்குத் தொடரின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் $\frac{a}{r}, a, ar$ என்க.

இப்போது, $\frac{a}{r} + a + ar = \frac{13}{12}$

$$\Longrightarrow \quad a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{13}{12} \quad \Longrightarrow \quad a\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right) = \frac{13}{12} \qquad (1)$$

மேலும், $\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1$

$$\Longrightarrow \quad a^3 = -1 \quad \therefore \quad a = -1$$

$a = -1$ ஐ சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிட, நமக்குக் கிடைப்பது

$$(-1)\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right) = \frac{13}{12}$$

$$\implies \quad 12r^2 + 12r + 12 = -13r$$

$$12r^2 + 25r + 12 = 0$$

$$(3r+4)(4r+3) = 0$$

$$r = -\frac{4}{3} \text{ அல்லது } -\frac{3}{4}$$

$r = -\frac{4}{3}$ , $a = -1$ எனும் போது, தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$.

$r = -\frac{3}{4}$ , $a = -1$ எனும்போது, தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$ என பின்நோக்கு வரிசையில் இருக்கும்.

## எடுத்துக்காட்டு 2.15

$a, b, c, d$ என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில் $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$ என நிறுவுக.

**தீர்வு** $a, b, c, d$ என்பன பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன.

முதல் உறுப்பு $a$ மற்றும் பொது விகிதம் $r$ எனக் கொள்க.

எனவே, $b = ar, \quad c = ar^2, \quad d = ar^3$

$$\begin{aligned}(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 &= (ar-ar^2)^2 + (ar^2-a)^2 + (ar^3-ar)^2\\ &= a^2[(r-r^2)^2 + (r^2-1)^2 + (r^3-r)^2]\\ &= a^2[r^2 - 2r^3 + r^4 + r^4 - 2r^2 + 1 + r^6 - 2r^4 + r^2]\\ &= a^2[r^6 - 2r^3 + 1] = a^2[r^3-1]^2\\ &= (ar^3-a)^2 = (a-ar^3)^2 = (a-d)^2\end{aligned}$$

## பயிற்சி 2.3

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் எது பெருக்குத் தொடர்வரிசை எனக் காண்க. பெருக்குத் தொடர்வரிசைகளாக உள்ளனவற்றின் பொது விகிதம் காண்க.

   (i) $0.12, 0.24, 0.48, \cdots$. (ii) $0.004, 0.02, 0.1, \cdots$. (iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \cdots$.

   (iv) $12, 1, \frac{1}{12}, \cdots$. (v) $\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \cdots$. (vi) $4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \cdots$.

2. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, \cdots$ என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் 10 ஆவது உறுப்பையும், பொது விகிதத்தையும் காண்க.

3. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் 4ஆவது மற்றும் 7 ஆவது உறுப்புகள் முறையே 54 மற்றும் 1458 எனில், அத்தொடர்வரிசையைக் காண்க.

4. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் மற்றும் ஆறாவது உறுப்புகள் முறையே $\frac{1}{3}, \frac{1}{729}$ எனில், அப்பெருக்குத் தொடர்வரிசையைக் காண்க.

5. பின்வரும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் கொடுக்கப்பட்ட உறுப்பு எத்தனையாவது உறுப்பு எனக் காண்க.

(i) $5,\ 2,\ \frac{4}{5},\ \frac{8}{25},\cdots$-ல் $\frac{128}{15625}$ என்ற உறுப்பு (ii) $1,\ 2,\ 4,\ 8,\cdots$ -ல் $1024$ என்ற உறுப்பு

6. $162,\ 54,\ 18,\cdots$ மற்றும் $\frac{2}{81},\ \frac{2}{27},\ \frac{2}{9},\cdots$ ஆகிய பெருக்குத் தொடர்வரிசைகளின் $n$ ஆவது உறுப்பு சமமெனில், $n$-ன் மதிப்பு காண்க.

7. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு 3 மற்றும் ஐந்தாவது உறுப்பு 1875 எனில், அதன் பொது விகிதம் காண்க.

8. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் $\frac{39}{10}$ மற்றும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் 1 எனில், அத்தொடர்வரிசையின் பொது விகிதத்தையும், அம்மூன்று உறுப்புக்களையும் காண்க.

9. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த 3 உறுப்புகளின் பெருக்குத் தொகை 216 மற்றும் அவைகளில் இரண்டிரண்டு உறுப்புக்களின் பெருக்கற்பலன்களின் கூடுதல் 156 எனில், அந்த உறுப்புகளைக் காண்க.

10. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 7 மற்றும் அவற்றின் தலைகீழிகளின் கூடுதல் $\frac{7}{4}$ எனில், அவ்வுறுப்புகளைக் காண்க.

11. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 13 மற்றும் அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 91 எனில், அத்தொடர்வரிசையைக் காண்க.

12. ஒருவர் ஆண்டிற்கு 5% கூட்டு வட்டி தரும் ஒரு வங்கியில் ₹1000-ஐ வைப்பு நிதியாக வைத்தால், 12 ஆம் வருடமுடிவில் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகையைக் காண்க.

13. ஒரு நிறுவனம் ₹ 50,000-க்கு ஒரு அச்சுப்பிரதி இயந்திரத்தை வாங்குகிறது. அவ்வியந்திரம் ஒவ்வொரு ஆண்டும் தன் மதிப்பில் 15% இழக்கிறது என மதிப்பிடப்படுகிறது. 15 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அந்த அச்சுப்பிரதி இயந்திரத்தின் மதிப்பு என்ன?

14. $a, b, c, d$ ஆகியன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமைந்தால்,
$(a-b+c)(b+c+d)=ab+bc+cd$ எனக்காட்டுக.

15. $a, b, c, d$ ஆகியன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமைந்தால் $a+b,\ \ b+c,\ \ c+d$ என்பவையும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமையும் என நிறுவுக.

## 2.5 தொடர்கள் (Series)

பின்வரும் கணக்கை எடுத்துக் கொள்வோம்.

ஒருவர் ஆண்டு ஊதியம் ₹25,000 பெறும் பணியில் 1990 ஆம் ஆண்டு சனவரி முதல் தேதியன்று சேர்ந்தார். ஒவ்வொரு ஆண்டும் ஆண்டிற்கான ஊதிய உயர்வு ₹500 பெற்றார். 2010 ஆம் ஆண்டு சனவரி முதல் தேதி வரையில் அவர் பெற்ற மொத்த ஊதியம் எவ்வளவு?

முதலில் அவருடைய ஆண்டு ஊதியம் பின்வரும் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்கிறது என அறியலாம்.

$25000,\ 25500,\ 26000,\ 26500,\cdots,\ (25000+19(500))$.

20 வருடங்களில் அவர் பெற்ற ஊதியத்தைக் கூட்டினால் இக்கணக்கிற்கான விடை கிடைக்கும்.

$\therefore$ மொத்த ஊதியம் $= 25000+25500+26000+26500+\cdots+(25000+19(500))$.

ஆதலால், தொடர்வரிசையின் உறுப்புகளின் கூடுதல் காண ஒரு வழிவகைக் காண வேண்டும்.

**வரையறை**

தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளை கூட்டல் குறி '+' ஆல் இணைத்து அவைகளின் கூடுதல்களாக எழுதுவதே தொடர் எனப்படும். ஒரு தொடரில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருப்பின், அது முடிவுறுத் தொடர் (Finite Series) எனப்படும். ஒரு தொடரில் முடிவிலி எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருப்பின், அது முடிவுறாத் தொடர் (Infinite Series) எனப்படும்.

$S = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசையை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒவ்வொரு $n \in \mathbb{N}$-க்கும் $S_n = a_1 + a_2 + , \cdots + a_n, n = 1, 2, 3, \cdots,$ என பகுதியின் கூடுதலை வரையறுக்கிறோம். $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது தொடர்வரிசை $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ -ன் பகுதி கூடுதல்களின் தொடர்வரிசை ஆகும்.

வரிசைப்படுத்தப்பட்ட $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty})$ என்பது தொடர்வரிசை $\{a_n\}_1^{\infty}$-ல் உள்ள உறுப்புகளின் முடிவுறாத் தொடர் எனப்படும். இந்த முடிவுறாத் தொடரினை $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ அல்லது சுருக்கமாக $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ எனக் குறிப்போம். இங்கு Sigma என்றழைக்கப்படும் குறியான $\sum$ என்பது கூடுதலைக் குறிக்கும்.

முடிவுறுத் தொடர் என்பது முடிவுறு உறுப்புகளின் கூடுதல் என்பதை எளிதில் அறியலாம். முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளடங்கிய தொடர் வரிசையின் கூடுதலை நாம் எவ்வாறு அறிய முடியும்? உயர் வகுப்புகளில் கணிதத்தில் இதைப்பற்றி கற்க இருக்கிறோம். தற்போது, குறிப்பாக முடிவுறுத் தொடர்களின் கூடுதல் காணுதலைப் பற்றிக் கற்போம்.

இப்பகுதியில் கூட்டுத் தொடர் மற்றும் பெருக்குத் தொடர் ஆகியவற்றைக் கற்க உள்ளோம்.

### 2.5.1 கூட்டுத் தொடர் (Arithmetic Series)

ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையிலிருப்பின், அத்தொடர் ஒரு கூட்டுத் தொடர் எனப்படும்.

**ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையிலுள்ள முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல்**
(Sum of first n terms of the Arithmetic sequence)

ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு $a$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d$ என்க.

அக்கூட்டுத் தொடர்வரிசை $a,\ a+d,\ a+2d, ...,\ a+(n-1)d, \cdots$ ஆகும்.

$S_n$ என்பது கூட்டு தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் என்க.

ஆகவே, $S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots\ (a+(n-1)d)$

$$\Longrightarrow\ S_n = na + (\ d + 2d + 3d + \cdots\ + (n-1)d\ )$$
$$= na + d(1 + 2 + 3 + \cdots\ + (n-1)\,)$$

தற்போது, $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ என்ற கூடுதல் கண்டுபிடிக்கப்பட்டால், இந்த சூத்திரத்தை சுருக்க இயலும்.

கூடுதல் $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ ஆனது $1,\ 2, \cdots, (n-1)$ எனும் கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் கூடுதலாகும்.

தற்போது, முதல் $n$ மிகை முழுக்களின் கூட்டற்பலனைக் காண்போம்.

$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots\ + (n-2) + (n-1) + n$ என்க. (1)

மேலேயுள்ள கூட்டலைக் காண பின்வரும் ஒரு எளிய செயலைச் செய்வோம்.

(1) ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2) ஆகியனவற்றைக் கூட்ட,

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1). \qquad (3)$$

சமன்பாடு (3)-ன் வலதுபுறத்தில் $(n+1)$ உறுப்புகள் உள்ளன.

(1) மற்றும் (2) ஆகிய ஒவ்வொன்றிலும் $n$ உறுப்புகள் உள்ளன

(1)-ஐயும் (2)-ஐயும் கூட்ட $n$ எண்ணிக்கையுள்ள $(n+1)$ மட்டுமே உள்ளன.

(3)-ஐச் சுருக்க $2S_n = n(n+1)$.

எனவே, முதல் $n$ மிகை முழுக்களின் கூடுதல் $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

ஆகவே, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. (4)

இச்சூத்திரம் மிகை முழுக்களின் கூடுதல் காண ஒரு பயனுள்ள சூத்திரம் ஆகும்.

**குறிப்புரை**

மேலே குறிப்பிட்டுள்ள கூடுதல் காணும் முறையானது, ஜெர்மனி நாட்டைச் சார்ந்தவரும், கணிதத்தின் இளவரசர் எனப் புகழப்பட்டவருமான கணிதவியலறிஞர் கார்ல் பிரெடரிக் காஸ் (Carl Fredrick Gauss) என்பார் 100 வரையிலுள்ள மிகை முழு எண்களின் கூடுதலைக் காணும்போது பயன்படுத்தியதாகும். அவருக்கு ஐந்து வயது இருக்கும் போது அவருடைய பள்ளி ஆசிரியர் கொடுத்தக் கணக்கு இதுவாகும். உயர் வகுப்பில் கணிதத்தைக் கற்கும் போது மேலேயுள்ள சூத்திரத்தைத் தருவிக்க வேறுசில முறைகளைக் கற்க உள்ளோம்.


*Carl Fredrick Gauss*
(1777 – 1855)

ஒரு பொதுவான கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதலை தற்போது காண்போம். $a, a+d, a+2d, \cdots,$-ன் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல்,

$$\begin{aligned} S_n &= na + [d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d] \\ &= na + d[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)] \\ &= na + d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) \qquad \text{(சூத்திரம் (4) ஐப் பயன்படுத்த)} \\ &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \qquad (5) \end{aligned}$$

ஆகவே, $S_n = \frac{n}{2}[a + (a + (n-1)d)] = \frac{n}{2}$ (முதல் உறுப்பு + கடைசி உறுப்பு)

$$= \frac{n}{2}(a + l).$$

முதல் உறுப்பு $a$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d$ எனக்கொண்ட ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல்

(i) $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ (பொது வித்தியாசம் $d$ கொடுக்கப்பட்டால்)

(ii) $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ (கடைசி உறுப்பு $l$ கொடுக்கப்பட்டால்)

**எடுத்துக்காட்டு 2.16**

$5+11+17+\cdots+95$ என்ற கூட்டுத் தொடரின் கூடுதல் காண்க.

**தீர்வு** $5+11+17+\cdots+95$ என்ற கூட்டுத்தொடரில்

$a=5,\quad d=11-5=6,\qquad l=95.$

தற்போது, $n=\dfrac{l-a}{d}+1$

$$\implies \qquad n=\frac{95-5}{6}+1=\frac{90}{6}+1=16.$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் 16 உறுப்புகள் உள்ளன.

எனவே, $S_n=\dfrac{n}{2}[l+a]$

ஆகவே, $S_{16}=\dfrac{16}{2}[95+5]=8(100)=800.$

**எடுத்துக்காட்டு 2.17**

$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots$ என்ற தொடரின் முதல் $2n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

**தீர்வு** $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots$ $2n$ உறுப்புகள் வரை கூடுதல் S என்க.

ஆகவே, கூடுதல் $\mathrm{S}=1-4+9-16+25-\cdots$ $2n$ உறுப்புகள் வரை

$=(1-4)+(9-16)+(25-36)+\cdots$ $n$ அடைப்புக்குறிகள் வரை.

$=-3+(-7)+(-11)+\cdots$ $n$ உறுப்புகள் வரை.

இத்தொடர், ஒரு கூட்டுத்தொடராகும். மேலும் $a=-3$, $d=-7-(-3)=-4$ ஆகும்.

எனவே, கூடுதல் $=\dfrac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$=\dfrac{n}{2}[2(-3)+(n-1)(-4)]$

$=\dfrac{n}{2}[-6-4n+4]=\dfrac{n}{2}[-4n-2]$

$\therefore$ கூடுதல் $\mathrm{S}=\dfrac{-2n}{2}(2n+1)=-n(2n+1).$

**எடுத்துக்காட்டு 2.18**

ஒரு கூட்டுத் தொடரில் முதல் 14 உறுப்புகளின் கூடுதல் $-203$ மற்றும் அடுத்த 11 உறுப்புகளின் கூடுதல் $-572$ எனில், அத்தொடரைக் காண்க.

**தீர்வு** $S_{14}=-203$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$\implies \frac{14}{2}[2a+13d]=-203$$

$$\implies 7[2a+13d]=-203$$

$$\implies 2a+13d=-29. \qquad (1)$$

மேலும், அடுத்த 11 உறுப்புகளின் கூடுதல் $= -572$.

தற்போது, $S_{25} = S_{14} + (-572)$

$\Longrightarrow \quad S_{25} = -203 - 572$

$\Longrightarrow \quad \frac{25}{2}[2a + 24d] = -775$

$\Longrightarrow \quad 2a + 24d = -31 \times 2$

$\Longrightarrow \quad a + 12d = -31 \qquad (2)$

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றைத் தீர்க்க, $a = 5$ , $d = -3$.

எனவே, தேவையான கூட்டுத்தொடர் $5 + (5-3) + (5 + 2(-3)) + \cdots$ ஆகும்.

அதாவது, $5 + 2 - 1 - 4 - 7 - \cdots$ என்பது தேவையான கூட்டுத் தொடர் ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.19**

$24 + 21 + 18 + 15 + \cdots$ என்ற கூட்டுத் தொடரில் தொடர்ச்சியாக எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் $-351$ கிடைக்கும்?

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூட்டுத்தொடரில், $a = 24$, $d = -3$ மற்றும் $S_n = -351$.

தற்பொழுது, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = -351$

$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[2(24) + (n-1)(-3)] = -351$

$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[48 - 3n + 3] = -351$

$\Longrightarrow \quad n(51 - 3n) = -702$

$\Longrightarrow \quad n^2 - 17n - 234 = 0$

எனவே, $(n-26)(n+9) = 0$

$\therefore \quad n = 26$ அல்லது $n = -9$

இங்கு $n$ என்பது தேவையான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை என்பதால் $n$-ன் மதிப்பு குறை எண்ணாக இருக்கக்கூடாது. எனவே கூடுதல் $-351$ எனக் கிடைக்க 26 உறுப்புகளை கூட்ட வேண்டும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.20**

8 ஆல் வகுபடும் அனைத்து மூன்றிலக்க இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க.

**தீர்வு**

8 ஆல் வகுபடும் மூன்றிலக்க இயல் எண்கள் 104, 112, 120, $\cdots$, 992 ஆகும்.
அவற்றின் கூடுதல், $S_n = 104 + 112 + 120 + 128 + \cdots + 992$.

இங்கு, $a = 104$, $d = 8$ , $l = 992$.

$\therefore \quad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{992 - 104}{8} + 1$

$= \frac{888}{8} + 1 = 112$.

ஆகவே, $S_{112} = \frac{n}{2}[a + l] = \frac{112}{2}[104 + 992] = 56(1096) = 61376$.

எனவே, 8 ஆல் வகுபடும் அனைத்து மூன்றிலக்க இயல் எண்களின் கூடுதல் = 61376.

**எடுத்துக்காட்டு 2.21**

ஒரு பலகோணத்தின் உட்கோணங்களின் அளவுகளை வரிசைப்படி எடுத்துக் கொண்டால், அவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்கின்றன. அக்கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் மிகக் குறைந்த கோண அளவு $85^\circ$ மற்றும் மிக உயர்ந்த கோண அளவு $215^\circ$ எனில், அந்தப் பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

**தீர்வு** பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை $n$ என்க.

கோணங்களின் அளவுகள் ஒரு கூட்டுத்தொடர்வரிசையை அமைப்பதால் பலகோணத்தின் கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதல்

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + l \text{ இங்கு, } a = 85\,,\ l = 215.$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a+l] \qquad (1)$$

ஒரு பலகோணத்தின் உட்கோணங்களின் கூடுதல் = $(n-2)\times 180^0$ என அறிவோம்.

ஆகவே, $$S_n = (n-2)\times 180$$

சமன்பாடு (1)-லிருந்து, $\frac{n}{2}[a+l] = (n-2)\times 180$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[85+215] = (n-2)\times 180$$

$$\Longrightarrow \quad 150n = 180(n-2) \quad \Longrightarrow \quad n = 12.$$

ஆகவே, பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை 12 ஆகும்.

**பயிற்சி 2.4**

1. பின்வருவனவற்றின் கூடுதல் காண்க.
   (i) முதல் 75 மிகை முழுக்கள் (ii) முதல் 125 இயல் எண்கள்

2. $n$ ஆவது உறுப்பு $3+2n$ என்றவாறு அமைந்த ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் 30 உறுப்புகளின் கூட்டற்பலனைக் காண்க.

3. பின்வரும் கூட்டுத்தொடர்களின் கூட்டற்பலனைக் காண்க.
   (i) $38 + 35 + 32 + \cdots + 2$. (ii) $6 + 5\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2} + \cdots$ 25 உறுப்புகள் வரை.

4. பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்ட கூட்டுத் தொடர்களின் கூடுதல் $S_n$ காண்க.
   (i) $a = 5,\ n = 30,\ l = 121$ (ii) $a = 50,\ n = 25,\ d = -4$

5. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$ என்ற தொடரின் முதல் 40 உறுப்புகளின் கூட்டற்பலனைக் காண்க.

6. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் முதல் 11 உறுப்புகளின் கூடுதல் 44 மற்றும் அதன் அடுத்த 11 உறுப்புகளின் கூடுதல் 55 எனில், அத்தொடரைக் காண்க.

7. $60, 56, 52, 48, \cdots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பிலிருந்து தொடர்ச்சியாக எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் 368 கிடைக்கும்?

8. 9 ஆல் வகுபடும் அனைத்து மூன்றிலக்க இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க.

9. ஒரு கூட்டுத் தொடரின் 3 ஆவது உறுப்பு 7 மற்றும் அதன் 7 ஆவது உறுப்பானது 3 ஆவது உறுப்பின் மூன்று மடங்கை விட 2 அதிகம். அத்தொடரின் முதல் 20 உறுப்புகளின் கூட்டற்பலனைக் காண்க.

10. 300-க்கும் 500-க்கும் இடையேயுள்ள 11 ஆல் வகுபடும் அனைத்து இயல் எண்களின் கூட்டற்பலன் காண்க.

11. $1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + x = 148$ எனில், $x$-ன் மதிப்பினைக் காண்க.

12. 100-க்கும் 200-க்கும் இடையேயுள்ள 5 ஆல் வகுபடாத அனைத்து இயல் எண்களின் கூட்டற்பலனைக் காண்க.

13. ஒரு கட்டுமான குழுமம், ஒரு பாலத்தை கட்டி முடிக்கத் தாமதமாகும் போது, தாமதமாகும் ஒவ்வொரு நாளுக்கும் அபராதத்தொகைக் கட்டவேண்டும். முதல் நாள் தாமதத்திற்கு அபராதம் ₹4000 மேலும் அடுத்துவரும் ஒவ்வொரு நாளுக்கும் முந்தைய நாளை விட ₹1000 அதிகம் செலுத்த வேண்டியிருக்கும். வரவு செலவுத்திட்டத்தின்படி அக்குழுமம் மொத்த அபராதத்தொகையாக ₹1,65,000 செலுத்த இயலும் எனில், எத்தனை நாட்களுக்கு பாலம் முடிக்கும் பணியை தாமதப்படுத்தலாம்?

14. 8% வீதம் தனிவட்டி தரும் நிறுவனத்தில் ஒவ்வொரு ஆண்டும் ₹1000 வைப்புத் தொகையாக செலுத்தப்படுகிறது. ஒவ்வொரு ஆண்டின் இறுதியில் பெறும் வட்டியைக் கணக்கிடுக. பெறும் வட்டித்தொகைகள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்குமா? அவ்வாறு அமைக்க முடியுமானால், 30 ஆண்டுகளின் முடிவில் கிடைக்கும் மொத்த வட்டியைக் காண்க.

15. ஒரு தொடரின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் $3n^2 - 2n$ எனில், அத்தொடரானது ஒரு கூட்டுத் தொடர் என நிறுவுக.

16. ஒரு கடிகாரம் ஒரு மணிக்கு ஒரு முறை, 2 மணிக்கு இரு முறை, 3 மணிக்கு மூன்று முறை என்றவாறு, தொடர்ந்து சரியாக ஒவ்வொரு மணிக்கும் ஒலி எழுப்பும் எனில், ஒரு நாளில் அக்கடிகாரம் எத்தனை முறை ஒலி எழுப்பும்?

17. முதல் உறுப்பு $a,$ இரண்டாம் உறுப்பு $b$ மற்றும் கடைசி உறுப்பு $c$ எனக் கொண்ட ஒரு கூட்டுத் தொடரின் கூட்டற்பலன் $\dfrac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ எனக்காட்டுக.

18. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் $(2n+1)$ உறுப்புகள் இருப்பின் ஒற்றைப்படை உறுப்புகளின் கூட்டற்பலனுக்கும், இரட்டைப்படை உறுப்புகளின் கூட்டற்பலனுக்கும் இடையேயுள்ள விகிதம் $(n+1):n$ என நிறுவுக.

19. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் முதல் $m$ உறுப்புகளின் கூட்டற்பலனுக்கும், முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டற்பலனுக்கும் இடையேயுள்ள விகிதம் $m^2 : n^2$ எனில், $m$ ஆவது உறுப்பு மற்றும் $n$ ஆவது உறுப்பு ஆகியவைகள் $(2m-1):(2n-1)$ என்ற விகிதத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.

20. ஒரு தோட்டக்காரர் சரிவக வடிவில் சுவர் ஒன்றினை அமைக்க திட்டமிடுகிறார். சரிவகத்தின் நீண்ட முதல் வரிசைக்கு 97 செங்கற்கள் தேவைப்படுகிறது. பின்பு ஒவ்வொரு வரிசையின் இருபுறமும் இரண்டிரண்டு செங்கற்கள் குறைவாக வைக்க வேண்டும். அவ்வடிவமைப்பில் 25 வரிசைகளிருப்பின், அவர் வாங்க வேண்டிய செங்கற்களின் எண்ணிக்கை எத்தனை?

### 2.5.2 பெருக்குத் தொடர் (Geometric series)

ஒரு தொடரின் உறுப்புகள், பெருக்குத் தொடர் வரிசை ஒன்றை அமைக்குமானால், அத்தொடர் பெருக்குத் தொடர் எனப்படும். $r \neq 0$ என்ற பொது விகிதத்தைக் கொண்ட ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை $a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots$ எனக் கொள்க. இத்தொடர் வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதலைக் காண்போம்.

தற்போது, $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ (1)

$r = 1$ எனில், (1)-லிருந்து $S_n = na$ ஆகும்.

$r \neq 1$ எனில், (1) -லிருந்து,

$$rS_n = r(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \qquad (2)$$

(1)-ல் இருந்து (2)-ஐக் கழிக்க,

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$$

$$\Longrightarrow \qquad S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

எனவே, $$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}\ ; \quad r \neq 1.$$

ஒரு பெருக்குத் தொடரின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, & (r \neq 1 \text{ எனில்}) \\ na & (r = 1 \text{ எனில்}) \end{cases}$$

இங்கு $a$ என்பது முதல் உறுப்பு, $r$ என்பது பொது விகிதம்.

**குறிப்புரை**

$-1 < r < 1$ எனில்,

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \frac{a}{1 - r}\ .$$

முடிவிலி எண்ணிக்கையில் மிகை எண்களின் கூடுதல் ஒரு முடிவுறு மதிப்பைக் கொடுக்கலாம் என்பதை அறிக.

**எடுத்துக்காட்டு 2.22**

$16 - 48 + 144 - 432 + \cdots$ என்ற பெருக்குத் தொடரில் உள்ள முதல் 25 உறுப்புகளின் கூடுதலைக் காண்க.

**தீர்வு** இங்கு $a = 16,\ r = -\dfrac{48}{16} = -3 \neq 1.$

எனவே, $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, $r \neq 1$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$S_{25} = \frac{16(1 - (-3)^{25})}{1 - (-3)} = \frac{16(1 + 3^{25})}{4} = 4(1 + 3^{25}).$$

## எடுத்துக்காட்டு 2.23

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்ட ஒவ்வொரு பெருக்குத் தொடருக்கும் $S_n$ ஐக் காண்க.

(i) $a = 2,\ t_6 = 486,\ n = 6$ (ii) $a = 2400,\ r = -3,\ n = 5$

**தீர்வு**

(i) இங்கு, $a = 2,\ t_6 = 486,\ n = 6$

தற்போது, $t_6 = 2(r)^5 = 486$

$\Longrightarrow\ r^5 = 243 \quad \therefore\ r = 3.$

மேலும், $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ ; இங்கு $r \neq 1$

ஆகவே, $S_6 = \dfrac{2(3^6 - 1)}{3 - 1} = 3^6 - 1 = 728.$

(ii) இங்கு, $a = 2400,\ r = -3,\ n = 5$

$$S_5 = \frac{a(r^5 - 1)}{r - 1}\ ;\ \text{இங்கு } r \neq 1.$$

$$= \frac{2400[(-3)^5 - 1]}{(-3) - 1}$$

எனவே, $S_5 = \dfrac{2400}{4}(1 + 3^5) = 600(1 + 243) = 146400.$

## எடுத்துக்காட்டு 2.24

$2 + 4 + 8 + \cdots$ என்ற பெருக்குத் தொடரில், முதல் உறுப்பிலிருந்து தொடர்ச்சியாக எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால், கூடுதல் 1022 கிடைக்கும்?

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெருக்குத் தொடர் $2 + 4 + 8 + \cdots$.

கூடுதல் 1022 பெறத்தேவையான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n$ என்க.

இங்கு $a = 2,\ r = 2,\ S_n = 1022.$

$n$ ஐக் காண,

$$S_n = \frac{a[r^n - 1]}{r - 1}\ ;\ \text{இங்கு } r \neq 1.$$

$$= (2)\left[\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right] = 2(2^n - 1).$$

ஆனால், $S_n = 1022.$ ஆகவே, $2(2^n - 1) = 1022$

$\Longrightarrow\ 2^n - 1 = 511$

$\Longrightarrow\ 2^n = 512 = 2^9. \quad \therefore\ n = 9.$

எனவே, கூடுதல் 1022-ஐப் பெற முதல் 9 உறுப்புகளைக் கூட்ட வேண்டும்.

## எடுத்துக்காட்டு 2.25

ஒரு பெருக்குத் தொடரின் முதல் உறுப்பு 375 மற்றும் அதன் 4 ஆவது உறுப்பு 192 எனில், அதன் பொது விகிதத்தையும், முதல் 14 உறுப்புகளின் கூடுதலையும் காண்க.

**தீர்வு** பெருக்குத் தொடரின் முதல் உறுப்பு $a$ மற்றும் அதன் பொது விகிதம் $r$ என்க.

$a = 375, \quad t_4 = 192.$

தற்போது, $t_n = ar^{n-1} \implies t_4 = 375\, r^3 \implies 375\, r^3 = 192$

$$r^3 = \frac{192}{375} \implies r^3 = \frac{64}{125}$$

$$r^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \implies r = \frac{4}{5}$$ இதுவே தேவையான பொது விகிதமாகும்.

மேலும், $S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$ ; இங்கு $r \neq 1$.

$$S_{14} = \frac{375\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14} - 1\right]}{\frac{4}{5} - 1} = (-1) \times 5 \times 375 \times \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14} - 1\right]$$

$$= (375)(5)\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right] = 1875\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right].$$

குறிப்பு

மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டில்,

$r \neq 1$ என்பதால், $S_n = a\left[\frac{1 - r^n}{1 - r}\right]$-ஐ $S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$-க்கு பதிலாகவும் பயன்படுத்தலாம்.

## எடுத்துக்காட்டு 2.26

பொது விகிதம் மிகை எண்ணாக இருக்கும் ஒரு பெருக்குத் தொடரில் 4 உறுப்புகள் உள்ளன. முதல் இரண்டு உறுப்புகளின் கூடுதல் 8 மற்றும் அதன் கடைசி இரண்டு உறுப்புகளின் கூடுதல் 72 எனில், அத்தொடரைக் காண்க.

**தீர்வு** 4 உறுப்புகளின் கூடுதல் $a + ar + ar^2 + ar^3$ என்க. $r > 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மேலும், $a + ar = 8$ மற்றும் $ar^2 + ar^3 = 72$

தற்போது, $ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar) = 72$

$\implies r^2(8) = 72 \quad \therefore \quad r = \pm 3$

$r > 0$ என்பதால், $r = 3$ ஆகும்.

எனவே, $a + ar = 8 \implies a = 2$

ஆகவே, அப்பெருக்குத் தொடர் $2 + 6 + 18 + 54$ ஆகும்.

## எடுத்துக்காட்டு 2.27

$6 + 66 + 666 + \cdots$ எனும் தொடரில் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

**தீர்வு** $S_n = 6 + 66 + 666 + \cdots$ $n$ உறுப்புகள் வரை என்க.

$S_n = 6(1 + 11 + 111 + \cdots$ $n$ உறுப்புகள் வரை)

$= \frac{6}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots$ $n$ உறுப்புகள் வரை) (9 ஆல் பெருக்கி, 9ஆல் வகுக்க)

$= \frac{2}{3}[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \cdots$ $n$ அடைப்புக்குறிகள்வரை]

$= \frac{2}{3}[(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots$ $n$ உறுப்புகள் வரை) $- n$]

ஆகவே, $S_n = \frac{2}{3}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right].$

### எடுத்துக்காட்டு 2.28

ஒரு தொண்டு நிறுவனம் ஒரு நகரத்திலுள்ள 25 வீதிகளில் மரக்கன்றுகளை நடும்பொருட்டு, முதல் வீதியில் ஒரு மரக்கன்றும், இரண்டாம் வீதியில் இரு மரக்கன்றுகள், மூன்றாம் வீதியில் 4 மரக்கன்றுகள், நான்காவது வீதியில் 8 மரக்கன்றுகள் என்ற முறையில் நடுவதற்கு திட்டமிடுகிறது. அவ்வேலையை முடிக்கத் தேவையான மரக்கன்றுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

**தீர்வு** 25 வீதிகளில் ஒவ்வொன்றிலும் நடுவதற்குத் தேவையான மரங்களின் எண்ணிக்கை ஒரு பெருக்குத் தொடரை அமைக்கிறது. $S_n$ என்பது தேவையான மரக்கன்றுகளின் எண்ணிக்கை என்க.

ஆகவே, $S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$ 25 உறுப்புகள் வரையில்

இங்கு, $a = 1, \quad r = 2, \quad n = 25$

எனவே, $$S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$$

$$S_{25} = (1)\ \frac{[2^{25} - 1]}{2 - 1}$$

$$= 2^{25} - 1$$

எனவே, தேவையான மரக்கன்றுகளின் எண்ணிக்கை $2^{25} - 1$ ஆகும்.

### பயிற்சி 2.5

1. $\frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \cdots$ என்ற பெருக்குத் தொடரின் முதல் 20 உறுப்புகளின் கூடுதலைக் காண்க.
2. $\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$ என்ற பெருக்குத் தொடரின் முதல் 27 உறுப்புகளின் கூடுதலைக் காண்க.
3. பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்ட பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல் $S_n$ காண்க.
   (i) $a = 3,\ t_8 = 384,\ n = 8.$ (ii) $a = 5,\ r = 3,\ n = 12.$
4. பின்வரும் முடிவுறு தொடர்களின் கூடுதல் காண்க.
   (i) $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots + (0.1)^9$ (ii) $1 + 11 + 111 + \cdots$ 20 உறுப்புகள் வரை.
5. பின்வரும் தொடர்களில், எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால்
   (i) $3 + 9 + 27 + \cdots$ கூடுதல் 1092 கிடைக்கும்?
   (ii) $2 + 6 + 18 + \cdots$ கூடுதல் 728 கிடைக்கும் ?
6. ஒரு பெருக்குத் தொடரில் இரண்டாவது உறுப்பு 3 மற்றும் அதன் பொது விகிதம் $\frac{4}{5}$ எனில், கூட்டுத் தொடரிலுள்ள முதல் உறுப்பிலிருந்து தொடர்ச்சியாக 23 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.
7. பொது விகிதம் மிகை எண்ணாக உள்ள ஒரு பெருக்குத் தொடரில் 4 உறுப்புகள் உள்ளன. அதன் முதல் இரண்டு உறுப்புகளின் கூடுதல் 9 மற்றும் கடைசி இரண்டு உறுப்புகளின் கூடுதல் 36 எனில், அத்தொடரைக் காண்க.
8. பின்வரும் தொடர்களின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.
   (i) $7 + 77 + 777 + \cdots$. (ii) $0.4 + 0.94 + 0.994 + \cdots$.
9. தொற்றுநோய் பரவும் காலத்தில், முதல் வாரத்தில் 5 பேருக்கு உடல்நலக் குறைவு ஏற்பட்டது. உடல்நலக்குறைவுற்ற ஒவ்வொருவரும் இரண்டாவது வார இறுதியில் 4 பேருக்கு அத்தொற்று நோயைப் பரப்புவர். இவ்வகையில் தொற்றுநோய் பரவினால் 15 ஆவது வார இறுதியில் எத்தனை பேர், அத்தொற்றுநோயினால் பாதிக்கப்பபடுவர்?

10. நற்பணி செய்த ஒரு சிறுவனுக்குப் பரிசளிக்க விரும்பிய தோட்டக்காரர் சில மாம்பழங்களை பரிசாக அளிக்க முன்வந்தார். அச்சிறுவன் உடனடியாக 1000 மாம்பழங்களைப் பெற்றுக் கொள்ளலாம் அல்லது முதல் நாளில் 1 மாம்பழம், இரண்டாம் நாளில் 2 மாம்பழங்கள், மூன்றாம் நாளில் 4 மாம்பழங்கள், நான்காம் நாளில் 8 மாம்பழங்கள் $\cdots$ எனுமாறு 10 நாட்களுக்குப் பெற்றுக் கொள்ளலாம் என இரு வாய்ப்புகள் அளித்தார். அச்சிறுவன் அதிக எண்ணிக்கையுள்ள மாம்பழங்களைப் பெற எந்த வாய்ப்பினை தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்?

11. இரட்டைப்படை எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு பெருக்குத் தொடரின் ஒற்றைப் படை எண்களால் குறிக்கப்படும் உறுப்புகளின் கூடுதலின் மூன்று மடங்கு, அப்பெருக்குத் தொடரிலுள்ள அனைத்து உறுப்புகளின் கூடுதலுக்குச் சமமெனில், அதன் பொது விகிதத்தைக் காண்க.

12. ஒரு பெருக்குத் தொடரின் முதல் $n$, $2n$ மற்றும் $3n$ ஆகிய உறுப்புகளின் கூடுதல்கள் முறையே $S_1, S_2$ மற்றும் $S_3$ எனில், $S_1(S_3 - S_2) = (S_2 - S_1)^2$ என நிறுவுக.

**குறிப்புரை**

$a = 1$ மற்றும் பொதுவிகிதம் $x \neq 1$ எனக்கொண்ட ஒரு பெருக்குத் தொடரின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$ ஆகும்.

மேலேயுள்ள சமன்பாட்டின் இடப்புறம் உள்ள கோவையானது படி $(n-1)$-ஐக் கொண்ட $x$-ன் மீது அமைந்த ஒரு சிறப்பு பல்லுறுப்புக் கோவை என்பதை அறிக. சில முடிவுறு தொடர்களில் கூடுதலைக் காண இந்த சூத்திரம் உதவும்.

### 2.5.3 சிறப்புத் தொடர்கள் (Special Series) $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ மற்றும் $\sum_{k=1}^{n} k^3$

$\Sigma$ என்ற குறியீட்டை கூடுதலுக்காக நாம் முன்பே பயன்படுத்தியுள்ளோம். இக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி சில முடிவுறு தொடர்களின் எடுத்துக்காட்டுகள் பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன.

| வரிசை எண் | குறியீடு | விரிவாக்கம் |
|---|---|---|
| 1. | $\sum_{k=1}^{n} k$ அல்லது $\sum_{j=1}^{n} j$ | $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ |
| 2. | $\sum_{n=2}^{6} (n-1)$ | $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ |
| 3. | $\sum_{d=0}^{5} (d+5)$ | $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ |
| 4. | $\sum_{k=1}^{n} k^2$ | $1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2$ |
| 5. | $\sum_{k=1}^{10} 3 = 3\sum_{k=1}^{10} 1$ | $3[1 + 1 + \cdots 10$ உறுப்புகள்$] = 30$ |

நாம் முன்பே, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ எனும் சூத்திரத்தை வருவித்தோம்.

இதனையே $a = 1$ , $d = 1$, $l = n$ என எடுத்துக் கொண்டு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் கூடுதலைப் பயன்படுத்தி, $S_n = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{n}{2}(1+n)$ எனக் காணலாம்.

இதனை, சிக்மா குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ என எழுதலாம்.

பின்வருவனவற்றிற்கு சூத்திரங்களைத் தருவிப்போம்.

(i) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$, (ii) $\sum_{k=1}^{n} k^2$ (iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3$

**நிரூபணம்:**

(i) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$ என்பதின் மதிப்பினைக் காண்போம்.

இது $a = 1$, $d = 2$, $l = (2n-1)$ என்றவாறு அமைந்த $n$ உறுப்புகளுள்ள ஒரு கூட்டுத் தொடராகும்.

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}(1+2n-1) = n^2 \qquad (S_n = \frac{n}{2}(a+l))$

அதாவது, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ (1)

**குறிப்புரை**

1. சூத்திரம் (1)-ஐ பின்வரும் மற்றொரு முறையிலும் காணலாம்.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}2k - \sum_{k=1}^{n}1 = 2\left(\sum_{k=1}^{n}k\right) - n = \frac{2(n)(n+1)}{2} - n = n^2.$$

2. (1)-லிருந்து $1+3+5+\cdots+l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2$. ஏனெனில், $l = 2n-1 \Longrightarrow n = \frac{l+1}{2}$.

(ii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ என்று நாம் அறிவோம்.

$\therefore k^3 - (k-1)^3 = k^2 + k(k-1) + (k-1)^2$ (இங்கு $a = k$, $b = k-1$ எனக் கொள்க)

$\Longrightarrow \quad k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ (2)

$k = 1$ எனில், $1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$

$k = 2$ எனில், $2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$

$k = 3$ எனில், $3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$

$k = n$ எனில், $n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$. இம்முறை தொடர,

$k = 1, 2, \cdots, n$-களுக்குரிய சமன்பாடுகளை இருபுறமும் நிரல்கள்வழிக் கூட்ட

$$n^3 = 3[1^2+2^2+\cdots+n^2] - 3[1+2+\cdots+n] + n$$

$$\Longrightarrow \quad 3[1^2+2^2+\cdots+n^2] = n^3 + 3[1+2+\cdots+n] - n$$

$$3\left[\sum_{k=1}^{n}k^2\right] = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

ஆகவே, $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (3)$$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3$

பின்வரும் அமைப்பை கூர்ந்து நோக்குவோம்.

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1 &&= (1)^2\\
1^3 + 2^3 &= 9 &&= (1+2)^2\\
1^3 + 2^3 + 3^3 &= 36 &&= (1+2+3)^2\\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 100 &&= (1+2+3+4)^2.
\end{aligned}$$

இவ்வமைப்பை $n$ உறுப்புகள் வரை தொடர்ந்தால்,

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 &= [1+2+3+\cdots+n]^2\\
&= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2
\end{aligned}$$

எனவே, $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \qquad (4)$$

(i) முதல் $n$ இயல் எண்களின் கூடுதல் $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(ii) முதல் $n$ ஒற்றைப்படை இயல் எண்களின் கூடுதல், $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

(iii) கடைசிஉறுப்பு $l$ தரப்பட்டால், முதல் $n$ ஒற்றைப்படை இயல் எண்களின் கூடுதல்

$$1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$

(iv) முதல் $n$ இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(v) முதல் $n$ இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல்

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

**எடுத்துக்காட்டு 2.29**

பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதல் காண்க.

(i) $26 + 27 + 28 + \cdots + 60$ (ii) $1 + 3 + 5 + \cdots$ 25 உறுப்புகள் வரை

(iii) $31 + 33 + \cdots + 53$.

**தீர்வு**

(i) $26 + 27 + 28 + \cdots + 60 = (1+2+3+\cdots+60) - (1+2+3+\cdots+25)$

$$= \sum_1^{60} n - \sum_1^{25} n$$

$$= \frac{60(60+1)}{2} - \frac{25(25+1)}{2}$$

$$= (30 \times 61) - (25 \times 13) = 1830 - 325 = 1505.$$

(ii) இங்கு $n = 25$

$\therefore\ 1 + 3 + 5 + \cdots$ (25 உறுப்புகள் வரை) $= 25^2 = 625.$ $\quad \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2\right)$

(iii) $31 + 33 + \cdots + 53$

$$= (1 + 3 + 5 + \cdots + 53) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 29)$$

$$= \left(\frac{53+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{29+1}{2}\right)^2 \qquad \left(1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2\right)$$

$$= 27^2 - 15^2 = 504.$$

## எடுத்துக்காட்டு 2.30

பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதலைக் காண்க.

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2$ (ii) $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

(iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$.

### தீர்வு

(i) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = \sum_1^{25} n^2$$

$$= \frac{25(25+1)(50+1)}{6} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{(25)(26)(51)}{6}$$

$\therefore\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = 5525.$

(ii) $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 35^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 11^2)$$

$$= \sum_1^{35} n^2 - \sum_1^{11} n^2$$

$$= \frac{35(35+1)(70+1)}{6} - \frac{11(12)(23)}{6}$$

$$= \frac{(35)(36)(71)}{6} - \frac{(11)(12)(23)}{6}$$

$$= 14910 - 506 = 14404.$$

(iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 51^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 50^2)$$

$$= \sum_1^{51} n^2 - 2^2[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2]$$

$$= \sum_1^{51} n^2 - 4\sum_1^{25} n^2$$

$$= \frac{51(51+1)(102+1)}{6} - 4 \times \frac{25(25+1)(50+1)}{6}$$

$$= \frac{(51)(52)(103)}{6} - 4\times \frac{25(26)(51)}{6}$$

$$= 45526 - 22100 = 23426.$$

**எடுத்துக்காட்டு 2.31**

பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதலைக் காண்க.

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 20^3$ (ii) $11^3 + 12^3 + 13^3 + \cdots + 28^3$

**தீர்வு**

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots 20^3 = \sum_1^{20} n^3$

$$= \left(\frac{20(20+1)}{2}\right)^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

$$= \left(\frac{20\times 21}{2}\right)^2 = (210)^2 = 44100.$$

(ii) $11^3 + 12^3 + \cdots + 28^3$ என்பதை பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$11^3 + 12^3 + \cdots + 28^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 28^3) - (1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3)$$

ஆகவே, $11^3 + 12^3 + \cdots + 28^3 = \sum_1^{28} n^3 - \sum_1^{10} n^3$

$$= \left[\frac{28(28+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{10(10+1)}{2}\right]^2$$

$$= 406^2 - 55^2 = (406+55)(406-55)$$

$$= (461)(351) = 161811.$$

**எடுத்துக்காட்டு 2.32**

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$ எனில், $k$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** $k$ என்பது ஒரு மிகை முழு எண். மேலும்,

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = 4356 = 6\times6\times11\times11$

வர்க்கமூலம் எடுக்க, $\frac{k(k+1)}{2} = 66$

$\Longrightarrow \quad k^2 + k - 132 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (k+12)(k-11) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 11$ அல்லது $k = -12$

$k$ என்பது ஒரு மிகை எண் என்பதால், $k = 11$ ஆகும்.

### எடுத்துக்காட்டு 2.33

(i) $1+2+3+\cdots+n = 120$ எனில், $1^3+2^3+3^3+\cdots n^3$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = 36100$ எனில், $1+2+3+\cdots+n$-ன் மதிப்பைக் காண்க

**தீர்வு**

(i) $1+2+3+\cdots+n = 120$ எனவே, $\frac{n(n+1)}{2} = 120$

$$\therefore \quad 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 120^2 = 14400$$

(ii) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = 36100$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 36100 = 19\times19\times10\times10$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2} = 190$$

ஆகவே, $1+2+3+\cdots+n = 190.$

### எடுத்துக்காட்டு 2.34

11 செ.மீ, 12 செ.மீ, 13 செ.மீ, $\cdots$, 24 செ.மீ ஆகியனவற்றை முறையே பக்க அளவுகளாகக் கொண்ட 14 சதுரங்களின் மொத்தப் பரப்பு காண்க.

**தீர்வு** 14 சதுரங்களின் பரப்புகளின் கூடுதல் $11^2+12^2+\cdots+24^2$ என்ற தொடரை அமைக்கிறது.

சதுரங்களின் மொத்தப் பரப்பு $= 11^2+12^2+13^2+\cdots+24^2$

$$= (1^2+2^2+3^2+\cdots+24^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$$

$$= \sum_1^{24} n^2 - \sum_1^{10} n^2$$

$$= \frac{24(24+1)(48+1)}{6} - \frac{10(10+1)(20+1)}{6}$$

$$= \frac{(24)(25)(49)}{6} - \frac{(10)(11)(21)}{6}$$

$$= 4900 - 385$$

$= 4515$ ச.செ.மீ.

## பயிற்சி 2.6

1. பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதலைக் காண்க.

   (i) $1 + 2 + 3 + \cdots + 45$ (ii) $16^2 + 17^2 + 18^2 + \cdots + 25^2$

   (iii) $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$ (iv) $7 + 14 + 21 \cdots + 490$

   (v) $5^2 + 7^2 + 9^2 + \cdots + 39^2$ (vi) $16^3 + 17^3 + \cdots + 35^3$

2. பின்வருவனவற்றிற்கு $k$-ன் மதிப்புக் காண்க.

   (i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 6084$ (ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 2025$

3. $1 + 2 + 3 + \cdots + p = 171$ எனில், $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + p^3$-யின் மதிப்பைக் காண்க.

4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 8281$ எனில், $1 + 2 + 3 + \cdots + k$-யின் மதிப்பைக் காண்க.

5. 12 செ.மீ, 13 செ.மீ, $\cdots$, 23 செ.மீ ஆகியனவற்றை முறையே பக்க அளவுகளாகக் கொண்ட 12 சதுரங்களின் மொத்தப் பரப்பளவுக் காண்க.

6. 16 செ.மீ, 17 செ.மீ, 18 செ.மீ, $\cdots$, 30 செ.மீ ஆகியனவற்றை முறையே பக்க அளவுகளாகக் கொண்ட 15 கனச்சதுரங்களின் கனஅளவுகளின் கூடுதல் காண்க.

## பயிற்சி 2.7

**சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.**

1. பின்வருவனவற்றுள் எது மெய்யானக் கூற்றல்ல?

   (A) இயல் எண்களின் கணம் $\mathbb{N}$-ல் வரையறை செய்யப்பட்ட மெய்யெண் மதிப்புடையச் சார்பு ஒரு தொடர்வரிசையாகும்.

   (B) ஒவ்வொரு சார்பும் ஒரு தொடர் வரிசையினைக் குறிக்கும்.

   (C) ஒரு தொடர்வரிசை, முடிவிலி எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கலாம்.

   (D) ஒரு தொடர்வரிசை, முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கலாம்.

2. $1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$ என்ற தொடர்வரிசையின் 8 ஆவது உறுப்பு

   (A) 25 (B) 24 (C) 23 (D) 21

3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \cdots$ என்ற தொடர்வரிசையில், உறுப்பு $\frac{1}{20}$ -க்கு அடுத்த உறுப்பு

   (A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{22}$ (C) $\frac{1}{30}$ (D) $\frac{1}{18}$

4. $a, b, c, l, m$ என்பன கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருப்பின் $a - 4b + 6c - 4l + m =$

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

5. $a, b, c$ என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில், $\frac{a-b}{b-c} =$

   (A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{c}$ (C) $\frac{a}{c}$ (D) 1

6. $100n + 10$ என்பது ஒரு தொடர்வரிசையின் $n$ ஆவது உறுப்பு எனில், அது

(A) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை (B) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை

(C) ஒரு மாறிலித் தொடர்வரிசை

(D) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையும் அல்ல பெருக்குத் தொடர்வரிசையும் அல்ல

7. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையிலுள்ளன. மேலும் $\dfrac{a_4}{a_7} = \dfrac{3}{2}$ எனில், 13வது உறுப்பு

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) 0 (C) $12a_1$ (D) $14a_1$

8. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனில், $a_5, a_{10}, a_{15}, \cdots$ என்ற தொடர்வரிசையானது

(A) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை

(B) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை

(C) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையும் அல்ல பெருக்குத் தொடர்வரிசையும் அல்ல

(D) ஒரு மாறிலித் தொடர்வரிசை

9. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகள் $k + 2, 4k - 6, 3k - 2$ எனில், $k$ -ன் மதிப்பு

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

10. $a, b, c, l, m. n$ என்பன கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்துள்ளன எனில், $3a + 7, 3b + 7, 3c + 7, 3l + 7, 3m + 7, 3n + 7$ என்ற தொடர்வரிசை

(A) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை

(B) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை

(C) ஒரு மாறிலித் தொடர்வரிசை

(D) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையும் அல்ல பெருக்குத் தொடர்வரிசையும் அல்ல

11. ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் 3 ஆவது உறுப்பு 2 எனில், அதன் முதல் 5 உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன்

(A) $5^2$ (B) $2^5$ (C) 10 (D) 15

12. $a, b, c$ என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில், $\dfrac{a-b}{b-c} =$

(A) $\dfrac{a}{b}$ (B) $\dfrac{b}{a}$ (C) $\dfrac{a}{c}$ (D) $\dfrac{c}{b}$

13. $x, 2x + 2, 3x + 3$ என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையிலிருப்பின் $5x, 10x + 10, 15x + 15$ என்ற தொடர்வரிசையானது

(A) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை

(B) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை

(C) ஒரு மாறிலித் தொடர்வரிசை

(D) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையும் அல்ல பெருக்குத் தொடர்வரிசையும் அல்ல

14. $-3, -3, -3, \cdots$ என்ற தொடர்வரிசையானது

(A) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை மட்டும்

(B) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை மட்டும்

(C) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையும் அல்ல பெருக்குத் தொடர்வரிசையும் அல்ல

(D) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை மற்றும் பெருக்குத் தொடர்வரிசை

15. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் நான்கு உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் 256, அதன் பொது விகிதம் 4 மற்றும் அதன் முதல் உறுப்பு மிகை எண் எனில், அந்தப் பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 3 வது உறுப்பு

(A) 8 (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{32}$ (D) 16

16. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் $t_2 = \frac{3}{5}$ மற்றும் $t_3 = \frac{1}{5}$ எனில், அதன் பொதுவிகிதம்

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) 5

17. $x \neq 0$ எனில், $1 + \sec x + \sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x + \sec^5 x =$

(A) $(1+\sec x)(\sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x)$ (B) $(1+\sec x)(1+\sec^2 x + \sec^4 x)$

(C) $(1-\sec x)(\sec x + \sec^3 x + \sec^5 x)$ (D) $(1+\sec x)(1+\sec^3 x + \sec^4 x)$

18. $t_n = 3 - 5n$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $n$ ஆவது உறுப்பு எனில், அக்கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புக்களின் கூடுதல்

(A) $\frac{n}{2}[1-5n]$ (B) $n(1-5n)$ (C) $\frac{n}{2}(1+5n)$ (D) $\frac{n}{2}(1+n)$

19. $a^{m-n}, a^m, a^{m+n}$ என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது விகிதம்

(A) $a^m$ (B) $a^{-m}$ (C) $a^n$ (D) $a^{-n}$

20. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = k$ எனில், $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ என்பது

(A) $k^2$ (B) $k^3$ (C) $\frac{k(k+1)}{2}$ (D) $(k+1)^3$

**நினைவில் கொள்க**

- மெய்யெண்களின் ஒரு தொடர்வரிசை என்பது ஒரு ஒழுங்கான அமைப்பு அல்லது குறிப்பிட்ட வரிசையில் பட்டியலிடப்பட்ட மெய்யெண்களின் அமைப்பு ஆகும்.
- $F_1 = F_2 = 1$ மற்றும் $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n = 3, 4, \cdots$ என்ற தொடர்பிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும் தொடர்வரிசை பிபோனாகி தொடர்வரிசை எனப்படும். இதனை $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$ என எழுதலாம்
- $n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $d$ ஒரு மாறிலி எனக்கொண்டு $a_{n+1} = a_n + d$ எனுமாறு அமைந்த தொடர்வரிசை $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையாகும். இங்கு $a_1$ என்பது முதல் உறுப்பு மற்றும் $d$ என்பது பொது வித்தியாசம். $t_n = a + (n-1)d \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பாகும் ($n$ ஆவது உறுப்பு).

- $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ எனும் தொடர்வரிசையில் $a_{n+1} = a_n r$, இங்கு $r \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, என இருப்பின் அது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை எனப்படும். இங்கு $a_1$ என்பது முதலுறுப்பு மற்றும் மாறிலி $r$ என்பது பொது விகிதம் ஆகும். மேலும், $t_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொதுவான உறுப்பாகும் ($n$ ஆவது உறுப்பு).
- ஒரு தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளை + எனும் கூட்டல் குறியால் இணைத்து கூடுதல்களாக அமைப்பதே தொடர் எனப்படும். அக்கூடுதல் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளின் கூடுதல் எனில், அது முடிவுறு தொடர் எனப்படும். தொடரில் முடிவிலி எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருந்தால், அது ஒரு முடிவுறாத் தொடர் ஆகும்.
- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் $a$-யினை முதலுறுப்பாகவும், $d$ என்பதை பொது வித்தியாசமாகவும் கொண்ட முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல்

  $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a + l)$, இங்கு $l$ என்பது கடைசி உறுப்பாகும்.
- ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, & r \neq 1 \text{ எனும்போது} \\ na, & r = 1 \text{ எனும்போது} \end{cases}$$

- முதல் $n$ இயல் எண்களின் கூடுதல் $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- முதல் $n$ ஒற்றைப்படை இயல் எண்களின் கூடுதல், $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$
- முதல் $n$ ஒற்றைப்படை இயல் எண்களின் கூடுதல் (கடைசி உறுப்பு $l$ கொடுக்கப்பட்டால்)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$

- முதல் $n$ இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல், $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- முதல் $n$ இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல், $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

### உங்களுக்குத் தெரியுமா?

மெரின் மெர்சின் (Marin Mersenne) என்பவரின் பெயரால் அழைக்கப்படும் எண்ணான மெர்சின் எண் (Mersenne number) என்பது $M = 2^p - 1$ என்ற வடிவத்தில் அமைந்த ஒரு மிகை முழு எண் ஆகும். இங்கு $p$ ஆனது ஒரு மிகை முழு எண். $M$ ஒரு பகா எண் எனில், அது மெர்சின் பகா எண் என அழைக்கப்படும். மேலும், $2^p - 1$ ஆனது ஒரு பகா எண்ணாக இருந்தால், $p$-யும் ஒரு பகா எண்ணாக இருக்கும். இது வரையில் தெரிந்த மிகப்பெரிய பகா எண் $2^{43,112,609} - 1$ என்பதும் ஒரு மெர்சின் பகா எண் ஆகும்.

# 3

# இயற்கணிதம்

*The human mind has never invented a labour-saving machine equal to algebra - Author unknown*

- அறிமுகம்
- பல்லுறுப்புக்கோவைகள்
- தொகுமுறை வகுத்தல்
- மீ. பொ. வ. மற்றும் மீ. பொ. ம
- விகிதமுறு கோவைகள்
- வர்க்க மூலம்
- இருபடிச் சமன்பாடுகள்

**அல்க்வாரிஸ்மி**
(Al-Khwarizmi)
(780-850)
அரபுநாடு

கணிதத்திற்கும், புவியியலுக்கும் அல்க்வாரிஸ்மி அவர்களின் சீரிய பங்களிப்பானது, இயற்கணிதம் மற்றும் முக்கோணவியல் ஆகியவைவற்றின் வளர்ச்சிக்கு அடிப்படையாக அமைந்தது. ஒருபடி மற்றும் இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு முதன் முதலில் இவர் முறையானத் தீர்வுகளை அளித்தார்.

அல்க்வாரிஸ்மி இயற்கணிதத்தினை உருவாக்கியவர் எனக் கருதப்படுகின்றார். கணிதத்தின் அடிப்படைச் செயல்களில் இவர் ஆற்றிய அரிய பணியானது, இந்திய–அரேபிய எண்ணுருக்களை அடிப்படையாகக் கொண்ட அரேபிய எண்ணுருக்களை மேற்கத்திய நாடுகளுக்கு அறிமுகப்படுத்தியமைக்கு ஏதுவாய் அமைந்தது.

## 3.1 அறிமுகம்

இயற்கணிதமானது கணிதத்தின் மிகத்தொன்மையானதும் முக்கியமானதுமான ஒரு பிரிவாகும். இது இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காணுதலை உள்ளடக்கியது. மூன்றாம் நூற்றாண்டில் கிரேக்க கணிதவல்லுநர் டயோபாண்டஸ் (Diophantus) என்பவர் தன்னுடைய “அரித்மெடிக்” (Arithmetic) என்ற புத்தகத்தில் பல நடைமுறைக் கணக்குகளை குறிப்பிட்டுள்ளார். ஆறாம் மற்றும் ஏழாம் நூற்றாண்டுகளில் இந்திய கணிதவல்லுநர்களான ஆர்யபட்டா (Aryabhatta) மற்றும் பிரம்மகுப்தா (Brahmagupta) ஆகியோர் ஒருபடி மற்றும் இருபடிச் சமன்பாடுகளைக் கையாண்டு, அவற்றிற்குத் தீர்வு காணும் பொது முறைகளை உருவாக்கினார்கள்.

இயற்கணிதத்தில் அடுத்த பெரும் வளர்ச்சி ஒன்பதாம் நூற்றாண்டில் அரேபிய கணித வல்லுநர்களால் ஏற்பட்டது. குறிப்பாக “Compendium on Calculation by Completion and Balancing” என்ற தலைப்புடைய அல்க்வாரிஸ்மி (Al-Khwarizmi) யின் புத்தகம் இயற்கணித வரலாற்றில் ஒரு முக்கியமான மைல்கல் ஆகும். அவர் பயன்படுத்திய “அல்ஜாப்ரா” என்ற வார்த்தை அல்ஜிப்ரா என்று இலத்தீன் மொழியில் மாற்றப்பட்டு, போட்டி அல்லது புணரமைப்பு என மொழி பெயர்க்கப்பட்டது. 13 ஆம் நூற்றாண்டில் லியோனார்டோ பிபோனாகியால் (Leonardo Fibonacci) எழுதப்பட்ட இயற்கணிதப் புத்தகங்கள் முக்கியமானவை. மேலும், அப்புத்தகங்கள் அனைவர் மீதும் தாக்கம் ஏற்படுத்தின.

மிகவும் ஈர்க்கப்பட்ட பிற இயற்கணித படைப்புகள் இத்தாலியரான லுகா பாசியோலி (Luca Pacioli) (1445 - 1517) மற்றும் ஆங்கில கணிதவியல் அறிஞர் இராபர்ட் ரெகார்ட் (Robert Recorde) (1510 - 1558) ஆகியோரால் படைக்கப்பட்டன. அடுத்த நூற்றாண்டுகளில் இயற்கணிதம் நுண்கணிதமாக மலர்ந்தது. 19ஆம் நூற்றாண்டில் ஆங்கில கணித வல்லுநர்களில்

முன்னோடியான பீகாக் (Peacock) (1791 - 1858) என்பவர் கணிதத்தின் அடிப்படைச் செயல்கள் மற்றும் இயற்கணிதத்தில் அடிகோள்களுக்கான சிந்தனையை உருவாக்கியவர். இதற்காகவே அவர் "இயற்கணிதத்தின் யூக்ளிட்" என அழைக்கப்பட்டார். மற்றொரு ஆங்கில கணித அறிஞர் டி மார்கன் (De Morgan) (1806 - 1871) என்பவர் பீகாக்கின் பணியை விரிவாக்கி வரையறுக்கப்பட்ட நுண் குறியீடுகளைக் கொண்டு கணிதத்திற்கு தன் பங்களிப்பைச் செய்தார்.

இப்பாடப்பகுதியில் நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுதி மற்றும் இருபடிச் சமன்பாடுகள் ஆகியவற்றிற்கு தீர்வுகளைக் காணும் முறைகளில் கவனம் செலுத்துவோம்.

## 3.2 இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒருங்கமை நேரியல் சமன்பாடுகள் (System of linear equations in two unknowns)

$ax + b = 0,\ a \neq 0$, என்ற $x$-ல் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாட்டை 9ஆம் வகுப்பில் கற்றோம்.

$a, b$ ஆகியவற்றில் குறைந்தபட்சம் ஒன்றாவது பூச்சியம் இல்லையெனில், $ax + by = c$ என்ற $x,\ y$ ஆகியவற்றில் அமைந்த நேரியல் சமன்பாட்டைக் கருதுவோம். $x = x_0,\ y = y_0$ ஆகிய மதிப்புகள் நேரியல் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யுமானல், வரிசைச் சோடி $(x_0, y_0)$ என்பது அச்சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு எனப்படும். வடிவியலில் $ax + by = c$ என்பது ஒரு தளத்தில் அமைந்த ஒரு நேர்க்கோடாகும். இந்நேர்க்கோட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி $(x, y)$-ம் $ax + by = c$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாக அமையும். மறுதலையாக, சமன்பாட்டின் எந்த ஒரு தீர்வு $(x, y)$-ம் நேர்க்கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். ஆதலால், $ax + by = c$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு முடிவிலி எண்ணிக்கையில் தீர்வுகள் உண்டு.

$x, y$-ல் அமைந்த முடிவுறு எண்ணிக்கையிலான நேரியல் சமன்பாடுகளை ஒருங்கே கருத்தில் கொண்டால், அவை $x, y$-ல் அமைந்த நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு (system of linear equations) அல்லது ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் (simultaneous equations) எனப்படும்.

**வரையறை**

$x = x_0$ மற்றும் $y = y_0$ என்பன தொகுப்பின் அனைத்து நேரியல் சமன்பாடுகளையும் நிறைவு செய்கிறது எனில், வரிசைச் சோடி $(x_0, y_0)$ ஆனது இரு மாறிலிகளில் அமைந்த நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் தீர்வு எனப்படும்.

பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் ஒரு தொகுப்பினைக் கருதுவோம்.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

(i) இதிலுள்ள இரு சமன்பாடுகளையும் நிறைவு செய்யுமாறு குறைந்தபட்சம் ஒரு தீர்வாவது இருப்பின், இத்தொகுப்பு ஒவ்வுமை (consistent) தொகுப்பு எனப்படும்.

(ii) மேலேயுள்ள இரு சமன்பாடுகளையும் ஒருங்கே நிறைவு செய்யுமாறு எந்த ஒரு தீர்வும் இல்லையெனில், இத்தொகுப்பினை ஒவ்வாத (inconsistent) தொகுப்பு எனப்படும்.

குறிப்புரை

(i) சமன்பாடு $ax + by = c$ என்பது ஒரு நேரியல் சமன்பாடு எனப்படுகிறது. ஏனெனில் மாறிகள் ஒரு படியை மட்டுமே கொண்டுள்ளன மற்றும் சமன்பாட்டில் மாறிகளின் பெருக்கற்பலன்கள் இல்லை.

(ii) இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளில் அமைந்த ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளையும் எடுத்துக் கொண்டு தீர்வுகளைப் பற்றி ஆராயலாம். இத்தகைய சமன்பாடுகளைப் பற்றி மேல் வகுப்புகளில் கற்க இருக்கிறோம்.

இரு மாறிகள் $x$ மற்றும் $y$-களில் அமைந்த பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பினைக் கருதுவோம்.

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad (2)$$

இங்கு கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிலும் குறைந்த பட்சம் ஒரு மாறியாவது இருக்கும்படியாக, கெழுக்கள் $a_1, b_1, a_2, b_2$ ஆகியனவற்றில் சில கெழுக்கள் பூச்சியமாக இருக்கலாம், அல்லது சுருக்கமாக $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ , $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ என இருக்க வேண்டும்.

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றால் குறிக்கப்படும் நேர்க்கோடுகள், வடிவியல் முறையில் கீழ்க்கண்ட வகைகளில் அமையலாம்.

(i) இரண்டு நேர்க்கோடுகளும் ஒன்றையொன்று ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளலாம்.

(ii) இரண்டு நேர்க்கோடுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளாமலிருக்கலாம்.

(iii) இரண்டு நேர்க்கோடுகளும் ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்தி ஒரே நேர்க்கோடாகலாம்.

வகை (i)-ல் உள்ளவாறு வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியானது ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தனித்த தீர்வு அல்லது ஒரே ஒரு தீர்வு (unique solution) ஆகும்.

வகை (ii)-ல் கூறியவாறு வெட்டிக்கொள்ளாவிட்டால் தொகுப்பிற்கு தீர்வு இல்லை (No solution). வகை (iii)-ன் படி பொருந்தும் நேர்க்கோடுகள் எனில், நேர்க்கோட்டின் மீது இருக்கும் ஒவ்வொரு புள்ளியும் தொகுப்பின் ஒரு தீர்வுக்கு இயைந்ததாக அமையும். எனவே, சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு முடிவிலி எண்ணிக்கையில் (infinitely many solutions) தீர்வுகள் இருக்கும்.

இப்போது இயற்கணித முறைகளைப் பயன்படுத்தி இரண்டு மாறிலிகளைக் கொண்ட நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு பின்வரும் முறைகளில் தீர்வு காண்போம்.

(i) நீக்கல் முறை (ii) குறுக்குப் பெருக்கல் முறை.

### 3.2.1 நீக்கல் முறை (Elimination method)

இம்முறையில் தொகுப்பிலுள்ள சமன்பாடுகளை பொருத்தமான வகையில் ஒன்று சேர்த்து இரண்டு மாறிகளில் ஒன்றினை நீக்குவோம். ஏதேனும் ஒரு மாறியை நீக்க பின்வரும் வழிகளில் நாம் முயற்சி செய்வோம்.

(i) நீக்கவிருக்கும் மாறியின் கெழுக்களை எண்ணளவில் சமப்படுத்தும் பொருட்டு சமன்பாடுகளின் உறுப்புகளை உரிய எண்களால் பெருக்க அல்லது வகுக்க வேண்டும்.

(ii) பெறப்பட்ட கெழுக்கள் மாறிய குறிகளைக் கொண்டிருப்பின், இரு சமன்பாடுகளையும் கூட்டி அம்மாறியை நீக்குக. ஒரே குறிகளைக் கொண்டிருப்பின் ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றை கழித்து அந்த மாறியை நீக்கலாம்.

## எடுத்துக்காட்டு 3.1

தீர்: $3x - 5y = -16$ , $2x + 5y = 31$

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள்

$$3x - 5y = -16 \quad (1)$$
$$2x + 5y = 31 \quad (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலும் $y$-ன் கெழுக்கள் எண் மதிப்பில் சமமாகவும், எதிர்க்குறியுடனும் இருப்பதால், நாம் $y$-ஐ எளிதாக நீக்கலாம்.

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றைக் கூட்ட,

$$5x = 15 \implies x = 3. \quad (3)$$

$x = 3$ என்பதை (1) அல்லது (2)-ல் பிரதியிட $y$-க்குத் தீர்வு காண முடியும்.

$x = 3$ என்பதை (1)-ல் பிரதியிட, $3(3) - 5y = -16 \implies y = 5$.

$x = 3$ மற்றும் $y = 5$ என இரு சமன்பாடுகளிலும் பிரதியிட,

$3(3) - 5(5) = -16$ மற்றும் $2(3) + 5(5) = 31$ எனக் கிடைப்பதால்,

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் தீர்வு $(3, 5)$ ஆகும்.

> **குறிப்பு**
> மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டில், தீர்வு காண்பதில் ஒரு மாறியில் அமைந்த சமன்பாடு (3)-ஐப் பெறுவதே முக்கியமான படியாகும். இங்கு மாறி $y$-ஐ நீக்கிவிட்டு $x$-ல் அமைந்த சமன்பாடு (3)-ஐப் பெற்றுள்ளோம். ஆகவே, மாறிகளில் ஒன்றை நீக்கி விட்டுப் பின்பு தொகுப்பிற்கு தீர்வு காணும் இம்முறை நீக்கல் முறை (Elimination method) எனப்படும்.

## எடுத்துக்காட்டு 3.2

11 பென்சில்கள் மற்றும் 3 அழிப்பான்களின் மொத்த விலை ₹ 50. மேலும், 8 பென்சில்கள் மற்றும் 3 அழிப்பான்களின் மொத்த விலை ₹ 38 எனில், ஒரு பென்சில் மற்றும் ஒரு அழிப்பான் விலையைக் காண்க.

**தீர்வு** ஒரு பென்சிலின் விலை ₹$x$ என்க. ஒரு அழிப்பானின் விலை ₹$y$ என்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் படி, பின்வரும் சமன்பாடுகளைக் காணலாம்.

$$11x + 3y = 50 \quad (1)$$
$$8x + 3y = 38 \quad (2)$$

(1)-ல் இருந்து (2)-ஐக் கழிக்க $3x = 12$, $x = 4$.

$x = 4$-ஐ (1)-ல் பிரதியிட, $11(4) + 3y = 50$ அதாவது, $y = 2$.

எனவே, $x = 4$, $y = 2$.

ஆகவே, ஒரு பென்சிலின் விலை ₹ 4 மற்றும் ஒரு அழிப்பானின் விலை ₹ 2 ஆகும்.

> **குறிப்பு**
> தீர்வாகப் பெறப்பட்ட $x$ மற்றும் $y$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு சமன்பாடுகளிலும் பிரதியிட்டு, அவற்றை நிறைவு செய்கிறதா எனச் சரிபார்க்கவும்.

## எடுத்துக்காட்டு 3.3

நீக்கல் முறையில் தீர் : $3x + 4y = -25$, $2x - 3y = 6$

**தீர்வு**

$$3x + 4y = -25 \qquad (1)$$
$$2x - 3y = 6 \qquad (2)$$

மாறி $x$-ஐ நீக்க, சமன்பாடு (1)-ஐ 2 ஆலும், சமன்பாடு (2)-ஐ $-3$ ஆலும் பெருக்குக.

$$(1) \times 2 \implies 6x + 8y = -50 \qquad (3)$$
$$(2) \times -3 \implies -6x + 9y = -18 \qquad (4)$$

சமன்பாடுகள் (3) மற்றும் (4)- ஆகியவற்றைக் கூட்ட, $17y = -68 \implies y = -4$

$y = -4$ என சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிட, $3x + 4(-4) = -25 \implies x = -3$

எனவே, தீர்வு $(-3, -4)$ ஆகும்.

**குறிப்புரை**

எடுத்துக்காட்டு 3.1-ல் செய்தபடி, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளைக் கூட்டவோ அல்லது கழிக்கவோ செய்து, மாறிகளில் ஒன்றை நீக்குவது மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டு 3.3-ல் இயலாது. ஆகவே, குறியீடுகளை தவிர்த்து $x$ அல்லது $y$-ன் கெழுக்களை எண்ணளவில் சமப்படுத்த நாம் சில உரிய மாற்றங்களைச் சமன்பாடுகளில் செய்யவேண்டும். பிறகு அச்சமன்பாடுகளுக்கு நீக்கல் முறையில் தீர்வு காணலாம்.

## எடுத்துக்காட்டு 3.4

நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க: $101x + 99y = 499, \quad 99x + 101y = 501$

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு

$$101x + 99y = 499 \qquad (1)$$
$$99x + 101y = 501 \qquad (2)$$

இங்கு சமன்பாடுகளை உரிய எண்களால் பெருக்கி, மாறிகளில் ஒன்றை நீக்க முடியும்.

இருப்பினும், ஒரு சமன்பாட்டிலுள்ள $x$-ன் கெழு, அடுத்த சமன்பாட்டின் $y$-ன் கெழுவிற்குச் சமமாக உள்ளது. இவ்வாறிருக்கும் போது இரு சமன்பாடுகளைக் கூட்டியும் கழித்தும் அதே தீர்வு கொண்ட புதிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

(1)-உடன் (2)-ஐக் கூட்ட $\quad 200x + 200y = 1000.$

இதை 200 ஆல் வகுக்க, $\quad x + y = 5 \qquad (3)$

(1)-லிருந்து (2)-ஐக் கழிக்க, $\quad 2x - 2y = -2$

இதை 2 ஆல் வகுக்க, $\quad x - y = -1 \qquad (4)$

சமன்பாடுகள் (3) மற்றும் (4) ஆகியனவற்றைத் தீர்க்க, $x = 2, \; y = 3$ எனப் பெறலாம்.

தேவையான தீர்வு $(2, 3)$ ஆகும்.

## எடுத்துக்காட்டு 3.5

நீக்கல் முறையில் தீர்: $\quad 3(2x + y) = 7xy; \quad 3(x + 3y) = 11xy$

**தீர்வு** தொகுப்பில் $xy$ உறுப்புகள் உள்ளதால் இத்தொகுப்பானது இரு நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பல்ல.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள்

$$3(2x + y) = 7xy \qquad (1)$$
$$3(x + 3y) = 11xy \qquad (2)$$

$x = 0$ எனில், $y = 0$ மற்றும் $y = 0$ எனில், $x = 0$ ஆகும்.

எனவே, $(0, 0)$ என்பது தொகுப்பின் ஒரு தீர்வு.

ஆகவே, மற்றொரு தீர்வு இருப்பின் அது $x \neq 0,\ y \neq 0$ என இருக்க வேண்டும்.

நாம் $x \neq 0,\ y \neq 0$ எனக் கொள்வோம்.

ஒவ்வொரு சமன்பாட்டின் இருபுறங்களையும் $xy$-ஆல் வகுக்க,

$$\frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 7 \quad \text{அதாவது,} \quad \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 7 \qquad (3)$$

$$\text{மற்றும்} \quad \frac{9}{x} + \frac{3}{y} = 11 \qquad (4)$$

இங்கு, $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$ என்க.

தற்போது, (3) மற்றும் (4) ஆகியன பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகளாக அமையும்.

$$3a + 6b = 7 \qquad (5)$$

$$9a + 3b = 11 \qquad (6)$$

$b$-ஐ நீக்குவதற்கு ஏற்ப, (6) $\times 2 \implies 18a + 6b = 22$ (7)

(5) -லிருந்து (7) ஐக் கழிக்க, $-15a = -15$. அதாவது, $a = 1$.

$a = 1$ என்பதை (5)-ல் பிரதியிட $b = \frac{2}{3}$. ஆகவே, $a = 1$ மற்றும் $b = \frac{2}{3}$

$a = 1$ எனில், $\frac{1}{x} = 1$. ஆகவே, $x = 1$

$b = \frac{2}{3}$ எனில், $\frac{1}{y} = \frac{2}{3}$. ஆகவே, $y = \frac{3}{2}$.

ஆகவே, தொகுப்பின் இரண்டு தீர்வுகள் $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ மற்றும் $(0, 0)$.

**மாற்றுமுறை**

$$3(2x + y) = 7xy \qquad (1)$$

$$3(x + 3y) = 11xy \qquad (2)$$

இப்பொழுது, (2) $\times 2 -$ (1) $\implies 15y = 15xy \implies 15y(1-x) = 0$. எனவே, $x = 1, y = 0$

$x = 1$ எனில், $y = \frac{3}{2}$ மேலும் $y = 0$ எனில், $x = 0$

ஆகவே, இரண்டு தீர்வுகள் $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ மற்றும் $(0, 0)$ ஆகும்.

குறிப்பு : $15y = 15xy$ என்பதை $15x = 15$ என எழுதினால், $y = 0$ என்பதை இழக்க நேரிடும்.

## பயிற்சி 3.1

நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளைத் தீர்.

1. $x + 2y = 7,\ x - 2y = 1$
2. $3x + y = 8,\ 5x + y = 10$
3. $x + \frac{y}{2} = 4,\ \frac{x}{3} + 2y = 5$
4. $11x - 7y = xy,\ 9x - 4y = 6xy$
5. $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{20}{xy},\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{15}{xy},\ x \neq 0, y \neq 0$
6. $8x - 3y = 5xy,\ 6x - 5y = -2xy$
7. $13x + 11y = 70,\ 11x + 13y = 74$
8. $65x - 33y = 97,\ 33x - 65y = 1$
9. $\frac{15}{x} + \frac{2}{y} = 17,\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{36}{5},\ x \neq 0, y \neq 0$
10. $\frac{2}{x} + \frac{2}{3y} = \frac{1}{6},\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 0,\ x \neq 0, y \neq 0$

## நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் தீர்வுகளின் கணத்தின் எண் அளவை
**(Cardinality of the set of solutions of the system of linear equations)**

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad (2)$$

ஆகிய இரு சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு கெழுக்கள் அனைத்தும் மெய்யெண்கள் மற்றும் $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ , $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

$y$-ன் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த, நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்துவோம்.

$b_2$ ஆல் சமன்பாடு (1)-ஐ மற்றும் $b_1$ ஆல் சமன்பாடு (2)-ஐ பெருக்க நாம் பெறுவது,

$$b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \qquad (3)$$
$$b_1a_2x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \qquad (4)$$

சமன்பாடு (3)-லிருந்து சமன்பாடு (4) ஐக் கழிக்க,

$$(b_2a_1 - b_1a_2)x = b_1c_2 - b_2c_1 \implies x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (\text{இங்கு } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0)$$

$x$-ன் மதிப்பை (1) அல்லது (2)-ல் பிரதியிட,

$y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ எனக் கிடைக்கும். (இங்கு $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$)

ஆகவே, $x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ மற்றும் $y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. (5)

இங்கு இரு நிலைகளை நாம் கருத்தில் கொள்ளுதல் வேண்டும்.

நிலை (i) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ அதாவது $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ என இருப்பின்,

நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு ஒரேயொரு தீர்வு இருக்கும்.

நிலை (ii) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ அதாவது $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ , $a_2 \neq 0$ மற்றும் $b_2 \neq 0$ என்க.

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \lambda$ என்க. ஆகவே $a_1 = \lambda a_2$ மற்றும் $b_1 = \lambda b_2$

$a_1$ மற்றும் $b_1$ ஆகியனவற்றின் மதிப்புகளை சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிட,

$$\lambda(a_2x + b_2y) + c_1 = 0 \qquad (6)$$

$c_1 = \lambda c_2$ அதாவது, $\dfrac{c_1}{c_2} = \lambda$ என இருந்தால் மட்டுமே (6) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிற்குத் தீர்வு உண்டு. ஆகவே, $c_1 = \lambda c_2$ எனில், (1)-ன் எந்தவொரு தீர்வும் (2)-ன் தீர்வாக இருக்கும் மற்றும் (2)-ன் எந்தவொரு தீர்வும் (1)-ன் தீர்வாக இருக்கும்.

ஆகவே, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \lambda$ எனில், (1) மற்றும் (2) ஆகிய நேரியல் சமன்பாடுகளுக்கு முடிவிலி எண்ணிக்கையிலான தீர்வுகள் (infinitely many solutions) உண்டு.

மாறாக, $c_1 \neq \lambda c_2$ எனில், சமன்பாடு (1)-ன் எந்த ஒரு தீர்வும் சமன்பாடு (2)-ஐ நிறைவு செய்யாது. இதே போல சமன்பாடு (2)-ன் எந்த ஒரு தீர்வும் சமன்பாடு (1)-ஐ நிறைவு செய்யாது.

ஆகவே, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ எனில், சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குத் தீர்வு ஏதுமில்லை.

குறிப்பு

மேலே விவரித்தவற்றை சுருக்கமாக பின்வருமாறு குறிப்பிடுவோம்.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0, \text{இங்கு } a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \;,\; a_2^2 + b_2^2 \neq 0,$$

ஆகிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு

(i) $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ அதாவது $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ எனில், ஒரேயொரு தீர்வு (unique solution) உண்டு.

(ii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ எனில், முடிவிலி எண்ணிக்கையில் தீர்வுகள் (infinitely many solutions) உண்டு.

(iii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ எனில், தீர்வு ஏதுமில்லை (no solution).

### 3.2.2 குறுக்குப் பெருக்கல் முறை (Method of cross multiplication)

$x$ மற்றும் $y$ ஆகிய இரு மாறிகளில் உள்ள ஒரு நேரியல் சமன்பாடுகளின் சோடிக்கு நீக்கல் முறையில் தீர்வு காணும்போது, கெழுக்கள் முறையாகப் பயன்படுத்தப்பட்டு தீர்வுகள் பெறப்பட்டன. தீர்வு காணும் இம்முறையை மேலும் எளிமையாக்க குறுக்கு பெருக்கல் முறை என்ற மற்றொரு முறை உள்ளது. இம்முறையில் சமன்பாடுகளுக்கு எவ்வாறு தீர்வு காண்பது என்பதை இனி விவரிப்போம்.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad \text{இங்கு } a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0 \qquad (2)$$

என்ற தொகுப்பை எடுத்துக் கொள்வோம். இச்சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு

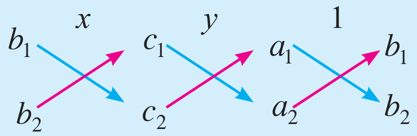
$x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ஆகியன தீர்வு என நிறுவியுள்ளோம்.

அதாவது, $\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $\dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

மேலேயுள்ளவற்றை பின்வரும் அமைப்பில் எழுதலாம்.

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

மேலேயுள்ள தொடர்பை எளிதில் நினைவில் கொள்ள, பின்வரும் அம்புக்குறிப் படம் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும்.




இரண்டு எண்களுக்கிடையேயுள்ள அம்புக்குறி, அவை பெருக்கப்படுகின்றன என்பதைக் காட்டுகிறது. கீழ்நோக்கிய அம்புகுறி காட்டும் எண்களின் பெருக்கல் பலனிலிருந்து மேல் நோக்கிய அம்புக்குறி காட்டும் எண்களின் பெருக்கல் பலனைக் கழிக்க வேண்டும்.

மேலேயுள்ளவாறு சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு தீர்வு காணும் முறையினை குறுக்குப் பெருக்கல் முறை (cross multiplication method) என்போம்.

மேலும், $\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ என எழுதும் போது

$b_1c_2 - b_2c_1$ அல்லது $c_1a_2 - c_2a_1$ ஆனது பூச்சியத்திற்குச் சமமாக இருக்கலாம். ஆனால் $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ என இருக்க வேண்டும்.

> $a_1x + b_1y + c_1 = 0$
> $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு
>
> (i) $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$ மற்றும் $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ எனில், $x = 0$ ஆகும்.
>
> (ii) $c_1a_2 - c_2a_1 = 0$ மற்றும் $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ எனில், $y = 0$ ஆகும்.

இனி, ஒரேயொரு (unique solution) தீர்வைக் கொண்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை எடுத்துக் கொண்டு, அவற்றின் தீர்வினை குறுக்குப் பெருக்கல் முறையில் காண்போம்.

### எடுத்துக்காட்டு 3.6

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க.

$$2x + 7y - 5 = 0$$
$$-3x + 8y = -11$$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு

$$2x + 7y - 5 = 0$$
$$-3x + 8y + 11 = 0$$

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்த, கெழுக்களை அம்புக்குறிப் படத்தில் காட்டியவாறு அமைக்கிறோம்.

$$\begin{array}{cccccccc} & & x & & y & & 1 & \\ 7 & & -5 & & 2 & & 7 \\ 8 & & 11 & & -3 & & 8 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{(7)(11) - (8)(-5)} = \frac{y}{(-5)(-3) - (2)(11)} = \frac{1}{(2)(8) - (-3)(7)}.$$

$\Longrightarrow \dfrac{x}{117} = \dfrac{y}{-7} = \dfrac{1}{37}$. எனவே, $x = \dfrac{117}{37}$, $y = -\dfrac{7}{37}$.

ஆகவே, தீர்வு $\left(\dfrac{117}{37}, -\dfrac{7}{37}\right)$ ஆகும்.

### எடுத்துக்காட்டு 3.7

குறுக்கு பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் தொகுப்பினை தீர்க்க:

$$3x + 5y = 25, \qquad 7x + 6y = 30$$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் தொகுப்பு $3x + 5y - 25 = 0$, $7x + 6y - 30 = 0$

இங்கு, குறுக்குப் பெருக்கலுக்குக் கெழுக்களை பின் வருமாறு எழுத,

$$\begin{array}{cccccccc} & & x & & y & & 1 & \\ 5 & & -25 & & 3 & & 5 \\ 6 & & -30 & & 7 & & 6 \end{array}$$

எனவே, $\dfrac{x}{-150+150} = \dfrac{y}{-175+90} = \dfrac{1}{18-35} \implies \dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{-85} = \dfrac{1}{-17}$.

ஆகவே, தீர்வு $(0, 5)$ ஆகும்.

**குறிப்பு**

இங்கு $\dfrac{x}{0} = -\dfrac{1}{17}$ இன் பொருள் $x = \dfrac{0}{-17} = 0$. எனவே, $\dfrac{x}{0}$ என்பது ஒரு குறியீடு மட்டுமே பூச்சியத்தால் வகுப்பதாக கருதக்கூடாது. ஓர் எண்ணை பூச்சியத்தால் வகுப்பது என்பது கணிதவியலில் வரையறுக்கப்படுவதில்லை.

### எடுத்துக்காட்டு 3.8

ஓர் ஈரிலக்க எண்ணில், ஒன்றாம் இட இலக்க எண், பத்தாம் இட இலக்க எண்ணைப் போல் இரு மடங்காக உள்ளது. இலக்கங்கள் இடம் மாறினால் கிடைக்கும் புதிய எண், கொடுக்கப்பட்ட எண்ணைவிட 27 அதிகம் எனில், கொடுக்கப்பட்ட ஈரிலக்க எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க.

**தீர்வு** எண்ணின் பத்தாம் இட இலக்கம் மற்றும் ஒன்றாம் இட இலக்கங்கள் முறையே $x$ மற்றும் $y$ என்க. ஆகவே, எண்ணை விரிவாக்க முறையில் $10x + y$ என எழுதலாம் (எடுத்துக்காட்டாக, $35 = 10(3)+5$ என எழுதலாம்). இலக்கங்கள் இடம் மாறும் போது $x$-ஆனது ஒன்றாம் இட இலக்கமாகவும், $y$-ஆனது பத்தாம் இட இலக்கமாகவும் மாறுகின்றன. விரிவாக்க முறையில் புதிய எண் $10y + x$ என எழுதலாம். கொடுக்கப்பட்ட முதல் நிபந்தனையின்படி,

$$y = 2x \implies 2x - y = 0 \qquad (1)$$

மேலும், கொடுக்கப்பட்ட இரண்டாவது நிபந்தனையின் படி,

$$(10y + x) - (10x + y) = 27$$

$$\implies \quad -9x + 9y = 27 \implies -x + y = 3 \qquad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஆகியனவற்றைக் கூட்ட, $x = 3$.

சமன்பாடு (2)-ல் $x = 3$ எனப் பிரதியிட, $y = 6$.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட எண் $= (10\times3) + 6 = 36$.

### எடுத்துக்காட்டு 3.9

ஒரு பின்னத்தின் தொகுதியை 3 ஆல் பெருக்கியும் பகுதியிலிருந்து 3 ஐக் குறைத்தால் கிடைக்கப்பெறும் பின்னம் $\dfrac{18}{11}$. ஆனால், அதே பின்னத்தின் தொகுதியுடன் 8 ஐக் கூட்டி, பகுதியை இருமடங்காக்கினால் கிடைக்கப் பெறும் பின்னம் $\dfrac{2}{5}$ எனில், அப்பின்னத்தைக் கண்டுபிடி.

**தீர்வு** பின்னத்தை $\dfrac{x}{y}$ எனக்கொள்க. கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளின் படி, நாம் பெறும் சமன்பாடுகள் முறையே

$$\frac{3x}{y-3} = \frac{18}{11} \text{ மற்றும் } \frac{x+8}{2y} = \frac{2}{5} \implies 11x = 6y - 18 \text{ மற்றும் } 5x + 40 = 4y$$

எனவே,
$$11x - 6y + 18 = 0 \qquad (1)$$
$$5x - 4y + 40 = 0 \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2)-களின் கெழுக்களை $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் கெழுக்களுடன் ஒப்பிட

$$a_1 = 11,\ b_1 = -6,\ c_1 = 18\ ; \quad a_2 = 5,\ \ b_2 = -4,\ \ c_2 = 40.$$

எனவே, $\quad a_1b_2 - a_2b_1 = (11)(-4) - (5)(-6) = -14 \neq 0.$

ஆகவே, இத்தொகுப்பிற்கு ஒரேயொரு தீர்வு உள்ளது.

கெழுக்களை குறுக்குப் பெருக்கல் முறையில் எழுதும் போது,

$$\begin{array}{cccccc} & x & & y & & 1 \\ -6 & & 18 & & 11 & & -6 \\ -4 & & 40 & & 5 & & -4 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{-240+72} = \frac{y}{90-440} = \frac{1}{-44+30} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{-168} = \frac{y}{-350} = \frac{1}{-14}$$

$\Longrightarrow \quad x = \dfrac{168}{14} = 12\ ; \quad y = \dfrac{350}{14} = 25.$ ஆகவே, தேவையான பின்னம் $= \dfrac{12}{25}$.

### எடுத்துக்காட்டு 3.10

8 ஆண்கள் மற்றும் 12 சிறுவர்கள் சேர்ந்து ஒரு வேலையை 10 நாட்களில் செய்து முடிப்பர். அதே வேலையை 6 ஆண்கள் மற்றும் 8 சிறுவர்கள் சேர்ந்து 14 நாட்களில் செய்து முடிப்பர். ஒரு ஆண் தனியாக அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பார்? ஒரு சிறுவன் தனியாக அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பான்?

**தீர்வு** ஒரு ஆண் ஒரு வேலையை தனியாக செய்து முடிக்க ஆகும் நாட்கள் $x$ என்க.

எனவே, ஒரு ஆண் ஒரு நாளில் செய்யும் வேலையின் அளவு $\dfrac{1}{x}$ பங்கு.

ஒரு சிறுவன் அவ்வேலையை தனியாக செய்து முடிக்க ஆகும் நாட்கள் $y$ என்க.

எனவே, ஒரு சிறுவன் ஒரு நாளில் செய்யும் வேலையின் அளவு $\dfrac{1}{y}$ பங்கு. இங்கு, $x \neq 0$ மற்றும் $y \neq 0$ என்பது தெளிவு.

8 ஆண்கள் மற்றும் 12 சிறுவர்கள் சேர்ந்து ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை = $\dfrac{1}{10}$

ஆகவே, $\quad \dfrac{8}{x} + \dfrac{12}{y} = \dfrac{1}{10} \qquad (1)$

6 ஆண்கள், 8 சிறுவர்கள் சேர்ந்து ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை = $\dfrac{1}{14}$ ஆகும்.

ஆகவே, $\quad \dfrac{6}{x} + \dfrac{8}{y} = \dfrac{1}{14} \qquad (2)$

$a = \dfrac{1}{x}$ எனவும் $b = \dfrac{1}{y}$ எனவும் கொள்க.

$$(1) \Longrightarrow \quad 8a + 12b = \frac{1}{10} \quad \Longrightarrow \quad 4a + 6b - \frac{1}{20} = 0. \qquad (3)$$

$$(2) \Longrightarrow \quad 6a + 8b = \frac{1}{14} \quad \Longrightarrow \quad 3a + 4b - \frac{1}{28} = 0. \qquad (4)$$

சமன்பாடுகள் (3) மற்றும் (4) ஆகியவற்றின் கெழுக்களை குறுக்குப் பெருக்கல் முறையில் எழுத,

$$\begin{array}{cccc} & a & b & 1 \\ 6 & -\frac{1}{20} & 4 & 6 \\ 4 & -\frac{1}{28} & 3 & 4 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{-\frac{3}{14}+\frac{1}{5}} = \frac{b}{-\frac{3}{20}+\frac{1}{7}} = \frac{1}{16-18}. \Longrightarrow \frac{a}{-\frac{1}{70}} = \frac{b}{-\frac{1}{140}} = \frac{1}{-2}.$$

எனவே, $a = \frac{1}{140}$, $b = \frac{1}{280}$. ஆகவே, $x = \frac{1}{a} = 140$ , $y = \frac{1}{b} = 280$.

ஆகவே, ஒரு ஆண் தனியாக அவ்வேலையை முடிக்க 140 நாட்களும், ஒரு சிறுவன் தனியாக அதே வேலையை முடிக்க 280 நாட்களும் ஆகும்.

## பயிற்சி 3.2

1. குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தொகுப்புகளைத் தீர்க்க.

   (i) $3x + 4y = 24,\ 20x - 11y = 47$ (ii) $0.5x + 0.8y = 0.44,\ 0.8x + 0.6y = 0.5$

   (iii) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2,\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$ (iv) $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2,\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$

2. பின்வரும் கணக்குகளுக்கானச் சமன்பாடுகளை அமைத்து, அவற்றின் தீர்வுகளைக் காண்க.

   (i) ஒரு எண் மற்றொரு எண்ணின் மூன்று மடங்கைவிட 2 அதிகம். சிறிய எண்ணின் 4 மடங்கானது பெரிய எண்ணைவிட 5 அதிகம் எனில், அவ்வெண்களைக் காண்க.

   (ii) இரு நபர்களின் வருமானங்களின் விகிதம் 9 : 7. அவர்களின் செலவுகளின் விகிதம் 4 : 3. ஒவ்வொருவரும் மாதமொன்றுக்கு ₹ 2000 சேமிக்க முடிந்தால், அவர்களுடைய மாதாந்திர வருமானத்தைக் காண்க.

   (iii) ஒரு ஈரிலக்க எண்ணின் மதிப்பு அதன் இலக்கங்களின் கூடுதல் போல் 7 மடங்கு உள்ளது. இலக்கங்களை இடமாறுதல் செய்ய கிடைக்கும் எண் கொடுக்கப்பட்ட எண்ணைவிட 18 குறைவு எனில், அவ்வெண்ணைக் காண்க.

   (iv) 3 நாற்காலிகள் மற்றும் 2 மேசைகளின் மொத்த விலை ₹ 700. மேலும் 5 நாற்காலிகள் மற்றும் 3 மேசைகளின் மொத்தவிலை ₹ 1100 எனில், 2 நாற்காலிகள் மற்றும் 3 மேசைகளின் மொத்தவிலையைக் காண்க.

   (v) ஒரு செவ்வகத்தின் நீளத்தை 2 செ. மீ அதிகரித்து அகலத்தை 2 செ.மீ குறைத்தால், அதன் பரப்பு 28 ச. செ.மீ குறைகிறது. நீளத்தை 1 செ.மீ குறைத்து அகலத்தை 2 செ.மீ அதிகரித்தால், செவ்வகத்தின் பரப்பு 33 ச. செ. மீ அதிகரிக்கும் எனில், செவ்வகத்தின் பரப்பைக் காண்க.

   (vi) சீரான வேகத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட தூரத்தை ஒரு தொடர் வண்டி குறிப்பிட்ட நேரத்தில் கடந்தது. தொடர் வண்டியின் வேகம் மணிக்கு 6 கி.மீ என அதிகரிக்கப்பட்டிருந்தால் அத்தூரத்தைக் கடக்க, குறிப்பிடப்பட்டிருந்த நேரத்தை விட 4 மணி நேரம் குறைவாக அத்தொடர் வண்டி எடுத்துக் கொண்டிருக்கும். தொடர் வண்டியின் வேகம் மணிக்கு 6 கி.மீ என குறைக்கப்பட்டிருந்தால், அதே தூரத்தைக் கடக்க குறிப்பிடப்பட்டிருந்த நேரத்தைவிட 6 மணிநேரம் அதிகரித்திருக்கும் எனில், பயண தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

## 3.3 இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகள் (Quadratic Polynomials)

$a_0 \neq 0$ மற்றும் $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ என்பன மெய்யெண்கள் எனில்,
$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ என்பது $x$-ல் அமைந்த படி $n$ ஐக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையாகும்.

மாறி $x$-ல் படி 2 உள்ள பல்லுறுப்புக்கோவை, இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை (Quadratic Polynomial) எனப்படும். மேலும், மெய் மாறிலிகளை பூச்சியத்தைப் படியாகக் கொண்ட கோவைகளாகக் கருதலாம். பொதுவாக இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையை $p(x) = ax^2 + bx + c$ என எழுதுவோம். இங்கு $a \neq 0$, $b$ மற்றும் $c$ என்பன மெய்யெண் மாறிலிகள்.

எடுத்துக்காட்டாக, $x^2 + x + 1$, $3x^2 - 1$, $-\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{7}{3}$ ஆகியன இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளாகும்.

$x = k$-ல், $p(x) = ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் மதிப்பினை $x$-க்குப் பதிலாக $k$ ஐப் பிரதியிட்டுப் பெறலாம். ஆகவே, $x = k$-ல் $p(x)$-ன் மதிப்பு $p(k) = ak^2 + bk + c$ ஆகும்.

### 3.3.1 பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்கள் (Zeros of Polynomials)

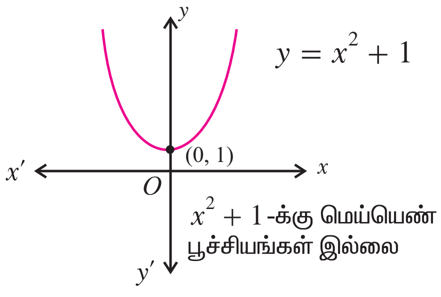
$p(x)$ என்ற ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையை எடுத்துக்கொள்க. $p(k) = 0$ எனுமாறு அமையும் மெய்யெண் $k$-ஐ பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$-ன் பூச்சியம் (zero) என்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

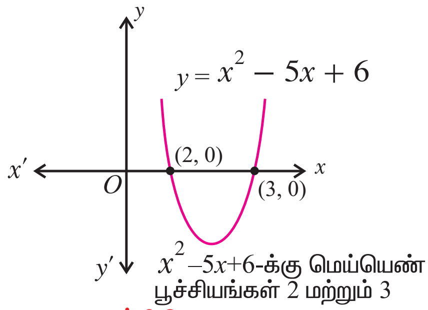
$q(x) = x^2 - 5x + 6$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்கள் 2 மற்றும் 3 ஆகும். ஏனெனில் $q(2) = 0$ மற்றும் $q(3) = 0$.

**குறிப்புரை**

சில பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கு மெய்யெண்களாலான பூச்சியங்கள் இல்லாமல் இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக $p(x) = x^2 + 1$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு மெய்யெண்களில் பூச்சியங்கள் இல்லை. அதாவது $p(k) = 0$ என்றவாறு $k$ என்ற எந்தவொரு மெய்யெண்ணும் இல்லை. வடிவியலின்படி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியம் என்பது பல்லுறுப்புக்கோவையின் வரைபடமும் $x$-அச்சும் வெட்டிக் கொண்டால், வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியின் $x$ ஆயத்தொலைவு ஆகும். படங்கள் 3.1 மற்றும் 3.2 ஆகியவற்றைப் பார்க்கவும்



படம் 3.1



படம் 3.2

## 3.3.2 இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் உள்ள தொடர்பு (Relationship between zeros and Coefficients of a Quadratic Polynomial)

பொதுவாக, $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ எனில், காரணித் தேற்றத்தின்படி $x - \alpha$ மற்றும் $x - \beta$ என்பன $p(x)$-ன் காரணிகளாகும்.

எனவே, $ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta)$ இங்கு $k$ ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலி ஆகும்.

$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$

இருபுறமும் $x^2$, $x$-ன் கெழுக்களையும் மற்றும் மாறிலிகளையும் ஒப்பிடும் போது,

$a = k$, $b = -k(\alpha + \beta)$ மற்றும் $c = k\alpha\beta$ என கிடைக்கிறது.

$p(x) = ax^2 + bx + c$-ன் கெழுக்களுக்கும், பூச்சியங்களுக்கும் இடையேயான அடிப்படைத் தொடர்பு

பூச்சியங்களின் கூடுதல், $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{x^2\text{-ன் கெழு}}$

பூச்சியங்களின் பெருக்கற்பலன் $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{-ன் கெழு}}$

### எடுத்துக்காட்டு 3.11

$x^2 + 9x + 20$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களைக் காண்க. பூச்சியங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் இடையேயுள்ள அடிப்படைத் தொடர்புகளைச் சரிபார்க்க.

**தீர்வு** $p(x) = x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$ என்க.

$p(x) = 0 \implies (x + 4)(x + 5) = 0$

$\therefore$ $x = -4$ அல்லது $x = -5$

தற்போது, $p(-4) = (-4+4)(-4+5) = 0$ மற்றும்

$p(-5) = (-5+4)(-5+5) = 0$

ஆகவே $p(x) = x^2 + 9x + 20$ -ன் பூச்சியங்கள் –4 மற்றும் –5.

பூச்சியங்களின் கூடுதல் $= -9$, பெருக்கற்பலன் $= 20$ (1)

அடிப்படைத் தொடர்புகளிலிருந்து,

பூச்சியங்களின் கூடுதல் $= -\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{x^2\text{-ன் கெழு}} = -\dfrac{9}{1} = -9$ (2)

பூச்சியங்களின் பெருக்கற்பலன் $= \dfrac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{-ன் கெழு}} = \dfrac{20}{1} = 20$ (3)

இவ்வாறு, அடிப்படைத் தொடர்புகள் சரிபார்க்கப்பட்டன.

**குறிப்புரை**

$x^2 + 9x + 20$-ன் காரணிகளைப் பின்வரும் முறையிலும் காணலாம்.

20

4 5 $\because$ 4+5=9, 4×5=20

$\frac{4}{1}$ $\frac{5}{1}$ மாறிலி உறுப்பு

$x^2$-ன் கெழு

$(x + 4)(x + 5)$.

**குறிப்பு**

இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)=ax^2+bx+c$-க்கு அதிகபட்சமாக இரு பூச்சியங்கள் இருக்கலாம். ஏதேனும் $a\neq 0$ என்பதற்கு $a(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு $\alpha$ மற்றும் $\beta$ என்ற பூச்சியங்கள் உள்ளன. $a$ ஆனது பூச்சியமற்ற எந்த ஒரு மெய்யெண்ணாகவும் இருக்கலாம் என்பதால் $\alpha$ மற்றும் $\beta$-களை பூச்சியங்களாகக் கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகள் முடிவிலி எண்ணிக்கையில் உள்ளன.

### எடுத்துக்காட்டு 3.12

ஒரு இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களின் கூடுதல் $-4$ மற்றும் அதன் பெருக்கற்பலன் 3 எனில், அக்கோவையைக் காண்க.

**தீர்வு** இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ என்க

$\alpha+\beta=-4$ மற்றும் $\alpha\beta=3$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தேவையான பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் ஒன்று,

$$p(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$
$$=x^2-(-4)x+3=x^2+4x+3 \text{ ஆகும்.}$$

### எடுத்துக்காட்டு 3.13

$x=\frac{1}{4}$ மற்றும் $x=-1$ என்ற பூச்சியங்களைக் கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையைக் காண்க.

**தீர்வு**

இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$-ன் பூச்சியங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ என்க. பூச்சியங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பின் வாயிலாக,

$$p(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$
$$=x^2-\left(\frac{1}{4}-1\right)x+\left(\frac{1}{4}\right)(-1)$$
$$=x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$$

**மாற்று முறை**

தேவையான பல்லுறுப்புக்கோவையினை நேரடியாக பின்வருமாறு காணலாம் :

$$p(x)=\left(x-\frac{1}{4}\right)(x+1)$$
$$=x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}.$$

பூச்சியமற்ற மெய்யெண்ணால் $p(x)$-ஐப் பெருக்கி $\frac{1}{4}$ மற்றும் $-1$-களை பூச்சியமாகக் கொண்ட பல பல்லுறுப்புக்கோவைகளைப் பெறலாம்.

**குறிப்பு**

$4x^2+3x-1$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களும் $\frac{1}{4}$ மற்றும் $-1$ ஆகும்.

$20x^2+15x-5$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களும் $\frac{1}{4}$ மற்றும் $-1$ ஆகும்.

$4kx^2+3kx-k$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களும் $\frac{1}{4}$ மற்றும் $-1$ ஆகும், $k\in\mathbb{R}$.

## பயிற்சி 3.3

1. பின்வரும் இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் பூச்சியங்களைக் காண்க. பூச்சியங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்புகளைச் சரிபார்க்க.

(i) $x^2-2x-8$ (ii) $4x^2-4x+1$ (iii) $6x^2-3-7x$ (iv) $4x^2+8x$

(v) $x^2-15$ (vi) $3x^2-5x+2$ (vii) $2x^2-2\sqrt{2}x+1$ (viii) $x^2+2x-143$

2. பின்வரும் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சோடி எண்களை முறையே பூச்சியங்களின் கூடுதலாகவும் மற்றும் அவைகளின் பெருக்கற்பலனாகவும் கொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவையைக் காண்க.

(i) 3, 1 (ii) 2, 4 (iii) 0, 4 (iv) $\sqrt{2}, \frac{1}{5}$

(v) $\frac{1}{3}, 1$ (vi) $\frac{1}{2}, -4$ (vii) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ (viii) $\sqrt{3}, 2$

## 3.4 தொகுமுறை வகுத்தல் (Synthetic Division)

29 ஐ 7ஆல் வகுக்கும் போது ஈவு 4 மற்றும் மீதி 1 என நமக்குத் தெரியும். ஆகவே $29 = 4(7)+1$. இதைப்போலவே பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$-ஐ மற்றொரு பல்லுறுப்புக்கோவை $q(x)$ ஆல் வகுத்தால் நமக்கு ஈவும், மீதியும் கிடைக்கும். இவ்வாறு $p(x) =$ (ஈவு) $q(x)+$ மீதி

அதாவது $p(x)=s(x)q(x)+r(x)$. இங்கு $s(x)$ ஆனது மீதி மற்றும் $r(x)$-ன் படி $<$ $q(x)$-ன் படி, இது வகுத்தல் படிமுறை (Division Algorithm) எனப்படும்.

$q(x)= x+a$ எனில், $r(x)$-ன் படி $= 0$ ஆகும். அதாவது, $r(x)$ ஒரு மாறிலியாக இருக்கும்.

ஆகவே, $p(x)= s(x)(x+a)+r$ இங்கு $r$ ஒரு மாறிலியாகும்.

இப்பல்லுறுப்புக்கோவையில் $x=-a$ எனப்பிரதியிட,

$p(-a) = s(-a)(-a+a)+r \implies r = p(-a)$.

ஆகவே, $p(x)$-ஐ $x+a$ ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதியை, $x=-a$ என $p(x)$-ல் பிரதியிட்டுக் காணலாம். அதாவது, மீதி $p(-a)$ ஆகும்.

**வகுத்தல் படிமுறை :**

$p(x)$ என்பது வகுபடும் கோவையாகவும், $q(x)$ என்பது வகுத்தியாகவும் இருந்தால், வகுத்தல் படிமுறையின்படி,

$p(x) = s(x)q(x)+r(x)$ என எழுதலாம்.

இதிலிருந்து பின்வரும் முடிவுகளைப் பெறுகிறோம்.

(i) $q(x)$ என்பது ஒருபடிக் கோவை எனில், மீதி $r(x)= r$ ஒரு மாறிலியாகும்.

(ii) $q(x)$-ன் படி 1 எனில், $p(x)$-ன் படி = ($s(x)$-ன் படி) + 1

(iii) $p(x)$-ஐ $x+a$ ஆல் வகுக்கும் போது, மீதியானது $p(-a)$ ஆகும்.

(iv) $r=0$ எனில், $p(x)$-ஐ $q(x)$ வகுக்கிறது அல்லது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி $q(x)$ ஆகும்.

**குறிப்புரை**

பல்லுறுப்புக்கோவையை நேரியல் பல்லுறுப்புக்கோவையால் வகுக்கும் சிறப்பான ஒரு முறையினை பாலோ ரஃபின் (Paolo Ruffin) என்பவர் 1809 ஆம் ஆண்டில் அறிமுகப்படுத்தினார். அம்முறை தொகுமுறை வகுத்தல் **(synthetic division)** எனப்படும். ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையை ஒருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையினால் வகுக்க, அப்பல்லுறுப்புக்கோவையில் உள்ள கெழுக்களை மட்டுமே பயன்படுத்துவது, தொகு முறை வகுத்தலின் சிறப்பாகும்.

**Paolo Ruffin**

*(1765-1822, Italy)*

தொகுமுறை வகுத்தலை ஒரு எடுத்துக்காட்டுடன் விளக்குவோம்.

வகுக்கப்படும் பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$ மற்றும் வகுத்தி $q(x) = x + 2$ என்க. ஈவு $s(x)$ மற்றும் மீதி $r$ ஆகியவற்றை பின்வருமாறு கண்டுபிடிக்கலாம்.

**படி 1** கொடுக்கப்பட்ட வகுக்கப்படும் மற்றும் வகுக்கும் பல்லுறுப்புக்கோவைகளை $x$-ன் அடுக்குகளைப் பொறுத்து இறங்கு வரிசையில் எழுதுக. படத்தில் காட்டியவாறு வகுக்கப்படும் கோவையின் கெழுக்களை முதலில் வரிசையில் எழுதுக. விடுபட்ட உறுப்புகளுக்கு 0 என எழுதுக.

$$x^3 + 2x^2 - x - 4$$

$$1 \quad 2 \quad -1 \quad -4$$

**படி 2** வகுக்கும் கோவையின் வகுத்தியின் பூச்சியத்தைக் காண்க.

**படி 3** இரண்டாவது வரிசையில் முதலில் 0 எழுதுக. படத்தில் காட்டியவாறு 2-ஆம் மற்றும் 3-ஆம் வரிசைகளை தக்க எண்களால் நிரப்புக.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-2$ | 1 | 2 | $-1$ | $-4$ |
| | 0 | $\xrightarrow{1\times(-2)} -2$ | $\xrightarrow{0\times(-2)} 0$ | $\xrightarrow{-1\times(-2)} 2$ |
| | $1+0$ | $2+(-2)$ | $-1+0$ | $-4+2$ |
| | $= 1$ | $= 0$ | $= -1$ | $= -2 \longrightarrow$ மீதி |

**படி 4** மூன்றாவது வரிசையில் கடைசி எண் மீதியாகவும் மற்றவை ஈவின் கெழுக்களாகவும் அமையும். ஆகவே ஈவு $x^2 - 1$ மற்றும் மீதி $-2$.

## எடுத்துக்காட்டு 3.14

$x^3 + x^2 - 7x - 3$ என்பதை $x - 3$ ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் ஈவு மற்றும் மீதி காண்க.

**தீர்வு** $p(x) = x^3 + x^2 - 7x - 3$ என்க. வகுக்கும் கோவையின் பூச்சியம் $+3$ ஆகும்.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1 | $-7$ | $-3$ |
| | 0 | 3 | 12 | 15 |
| | 1 | 4 | 5 | 12 $\longrightarrow$ மீதி |

$\therefore$ $p(x)$ ஐ $x - 3$ ஆல் வகுக்கப்படும் போது ஈவு $x^2 + 4x + 5$ மற்றும் மீதி 12.

## எடுத்துக்காட்டு 3.15

$2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ -ஐ $2x + 1$ ஆல் வகுக்கும் போது, $x^3 + ax^2 - bx - 6$ என்பது ஈவானால், $a$ மற்றும் $b$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளையும் மற்றும் மீதியையும் காண்க.

**தீர்வு** $p(x) = 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ என்க.

வகுக்கும் கோவை $2x + 1$. எனவே, வகுக்கும் கோவையின் பூச்சியம் $x = -\frac{1}{2}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{2}$ | 2 | 1 | $-14$ | $-19$ | 6 |
| | 0 | $-1$ | 0 | 7 | 6 |
| | 2 | 0 | $-14$ | $-12$ | 12 $\longrightarrow$ மீதி |

ஆகவே, $2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^3 - 14x - 12) + 12$

$$= (2x + 1)\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12) + 12$$

எனவே, ஈவு = $\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12)$ மற்றும் மீதி = 12

அதாவது, ஈவு $= x^3 - 7x - 6$ மற்றும் மீதி = 12

இப்போது, கொடுக்கப்பட்ட ஈவு $x^3 + ax^2 - bx - 6$ உடன் $x^3 - 7x - 6$-ஐ ஒப்பிடுகையில் $a = 0, b = 7$ ஆகவே, $a = 0, b = 7$ மற்றும் மீதி = 12 ஆகும்.

## பயிற்சி 3.4

1. தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றிற்கு ஈவு மற்றும் மீதி காண்க.
   (i) $(x^3 + x^2 - 3x + 5) \div (x - 1)$ (ii) $(3x^3 - 2x^2 + 7x - 5) \div (x + 3)$
   (iii) $(3x^3 + 4x^2 - 10x + 6) \div (3x - 2)$ (iv) $(3x^3 - 4x^2 - 5) \div (3x + 1)$
   (v) $(8x^4 - 2x^2 + 6x - 5) \div (4x + 1)$ (vi) $(2x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 63x - 48) \div (2x - 1)$
2. $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவையை $x + 4$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு $x^3 - ax^2 + bx + 6$ எனில் $a$, $b$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளையும் மற்றும் மீதியையும் காண்க
3. $8x^4 - 2x^2 + 6x - 7$ என்பதை $2x + 1$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு $4x^3 + px^2 - qx + 3$ எனில், $p$, $q$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளையும், மீதியையும் காண்க.

### 3.4.1 தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி காரணிப்படுத்தல் (Factorization using synthetic division)

இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளை எவ்வாறு காரணிப்படுத்துவதென ஒன்பதாம் வகுப்பில் கற்றோம். இப்பாடப்பகுதியில் தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி மூன்றாம்படி பல்லுறுப்புக்கோவையை எவ்வாறு காரணிப்படுத்துவது எனக் கற்போம்.

படி 3-ல் அமைந்த பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$-க்கு ஒருபடிக் காரணி ஒன்றை தெரிந்துக் கொண்ட பிறகு தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி $p(x)$-ன் இருபடிக் காரணியைக் காணலாம். மேலும், அந்த இருபடிக் காரணியை பிரிக்க இயலுமெனில், அதனை ஒருபடிக் காரணிகளின் பெருக்கல் பலனாக எழுதலாம். ஆகவே, படி 3-ல் அமைந்த பல்லுறுப்புக்கோவையை காரணிப்படுத்த முடியும் எனில், தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி அக்கோவையைக் காரணிப்படுத்தலாம்.

**குறிப்பு**

(i) ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$-க்கு $p(a) = 0$ எனில், எனில் மட்டுமே $x = a$ என்பது அதன் பூச்சியமாகும்.

(ii) $x - a$ ஆனது $p(x)$-க்கு ஒரு காரணி எனில், எனில் மட்டுமே $p(a) = 0$ ஆகும். (காரணித் தேற்றம்)

(iii) $p(x)$-ன் மாறிலியையும் சேர்த்து எல்லா உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் பூச்சியம் எனில், எனில் மட்டுமே $p(x)$-க்கு $x-1$ ஒரு காரணி ஆகும்.

(iv) $p(x)$-ன் மாறிலியையும் சேர்த்து இரட்டைப்படை அடுக்குகளில் உள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலானது ஒற்றைப்படை அடுக்குகளில் உள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனில், எனில் மட்டுமே $x+1$ ஆனது $p(x)$-க்கு ஒரு காரணி ஆகும்.

### எடுத்துக்காட்டு 3.16

(i) $x^3-6x^2+11x-6$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு $x-1$ ஒரு காரணி என நிறுவுக.

(ii) $x^3+6x^2+11x+6$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு $x+1$ ஒரு காரணி என நிறுவுக.

**தீர்வு**

(i) $p(x)=x^3-6x^2+11x-6$ என்க.

$p(1)=1-6+11-6 \quad =0$ (இங்கு கெழுக்களின் கூடுதலும் 0 என்பதை அறிக)

ஆகவே, $p(x)$-க்கு $(x-1)$ ஒரு காரணி ஆகும்.

(ii) $q(x)=x^3+6x^2+11x+6$ என்க.

$q(-1)=-1+6-11+6=0$. ஆகவே $x+1$ ஒரு காரணி ஆகும்.

### எடுத்துக்காட்டு 3.17

$2x^3-3x^2-3x+2$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவையை ஒருபடிக் காரணிகளாக காரணிப்படுத்துக.

**தீர்வு** $p(x)=2x^3-3x^2-3x+2$ என்க.

$p(1)=-2\neq 0$ (கெழுக்களின் கூடுதல் பூச்சியமல்ல)

ஆகவே, $p(x)$-க்கு $(x-1)$ ஒரு காரணி அல்ல. இருப்பினும்,

$p(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2-3(-1)+2=0$.

எனவே, $p(x)$-க்கு $x+1$ ஒரு காரணி ஆகும்.

தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி மற்ற காரணிகளைக் காணலாம்.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 2 | $-3$ | $-3$ | 2 |
| | 0 | $-2$ | 5 | $-2$ |
| | 2 | $-5$ | 2 | 0 $\longrightarrow$ மீதி |

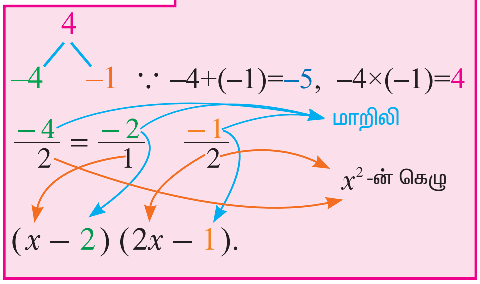
இவ்வாறு, $p(x)=(x+1)(2x^2-5x+2)$

மேலும், $2x^2-5x+2=2x^2-4x-x+2=(x-2)(2x-1)$.

ஆகவே, $2x^3-3x^2-3x+2 \;=(x+1)(x-2)(2x-1)$.

**குறிப்புரை**

$2x^2-5x+2$-ஐ பின்வரும் முறையிலும் காரணிப்படுத்தலாம்.



**எடுத்துக்காட்டு 3.18**

காரணிப்படுத்துக: $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

**தீர்வு** $p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ என்க.

$p(1) \neq 0$ மற்றும் $p(-1) \neq 0$. ஆகவே, $x+1$ மற்றும் $x-1$ ஆகியன $p(x)$-க்கு காரணிகளல்ல. ஆகவே, $x$-க்கு வேறு மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டு $p(x)$-ன் பூச்சியங்களைக் காணலாம்.

$x = 2$ ஆக இருக்கும்பொழுது $p(2) = 0$. ஆகவே, $p(x)$-க்கு $x-2$ ஒரு காரணி ஆகும். தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | –3 | –10 | 24 | |
| | 0 | 2 | –2 | –24 | |
| | 1 | –1 | –12 | 0 | ⟶ மீதி. |

$\therefore$ மற்றொரு காரணி $x^2 - x - 12$.

மேலும், $x^2 - x - 12 = x^2 - 4x + 3x - 12 = (x-4)(x+3)$

ஆகவே, $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x-2)(x+3)(x-4)$

**பயிற்சி 3.5**

1. பின்வரும் பல்லுறுப்புக்கோவைகளை காரணிப்படுத்துக.

(i) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (ii) $4x^3 - 7x + 3$ (iii) $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

(iv) $4x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ (v) $x^3 - 7x + 6$ (vi) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(vii) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ (viii) $x^3 - 5x + 4$ (ix) $x^3 - 10x^2 - x + 10$

(x) $2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$ (xi) $x^3 + x^2 + x - 14$ (xii) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

## 3.5 மீப்பெரு பொது வகுத்தி (மீ.பொ.வ) மற்றும் மீச்சிறு பொது மடங்கு (மீ.பொ.ம)

### 3.5.1 மீப்பெரு பொது வகுத்தி (மீ. பொ. வ) (Greatest Common Divisor - GCD)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் மீதியின்றி வகுக்கும் மிகப்பெரிய படியைக் (Degree) கொண்ட கோவையினை, அப்பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் உயர் பொதுக் காரணி (Highest Common Factor) அல்லது மீப்பெரு பொது வகுத்தி (மீ.பொ.வ) என்போம்.

பின்வரும் எளிய கோவைகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

(i) $a^4, a^3, a^5, a^6$ (ii) $a^3b^4, ab^5c^2, a^2b^7c$

(i)-ல் $a, a^2, a^3$ ஆகியன கொடுக்கப்பட்ட கோவைகளின் வகுத்திகளாகும். அவற்றில் $a^3$ என்பது உயர்ந்த படியைக் கொண்ட வகுத்தியாகும். ஆகவே கோவைகள் $a^4, a^3, a^5, a^6$ ஆகியனவற்றின் மீ. பொ.வ $a^3$ ஆகும்.

(ii) இதேபோல $ab^4$ ஆனது $a^3b^4, ab^5c^2, a^2b^7c$ என்பனவற்றுக்கு மீ.பொ.வ ஆகும்.

கோவைகளில் எண் கெழுக்கள் இருப்பின், அவற்றின் மீ.பொ.வ கண்டுபிடித்து அதைக் கொண்டு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ.பொ.வ-வைப் பெருக்க வேண்டும்.

இன்னும் சில எடுத்துக்காட்டுகளின் வாயிலாக மீ. பொ.வ- வை நன்கு அறிந்து கொள்வோம்.

## எடுத்துக்காட்டு 3.19

பின்வருவனவற்றின் மீ.பொ.வ காண்க:

(i) 90, 150, 225  (ii) $15x^4y^3z^5, 12x^2y^7z^2$

(iii) $6(2x^2 - 3x - 2), 8(4x^2 + 4x + 1), 12(2x^2 + 7x + 3)$

**தீர்வு**

(i) 90, 150, 225 ஆகிய எண்களை அவற்றின் பகாக்காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதுவோம். எனவே $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$ , $150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$ மற்றும் $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களுக்கு 3 மற்றும் 5 ஆகியன பொதுப் பகாக் காரணிகள் ஆகும். ஆகவே, மீ.பொ.வ $= 3 \times 5 = 15$ ஆகும்.

(ii) இதே முறையைப் பயன்படுத்தி இயற்கணிதக் கோவைகள் $15x^4y^3z^5$ மற்றும் $12x^2y^7z^2$ ஆகியவற்றிற்கு மீ.பொ.வ காண்போம்.

பொதுக்காரணிகள் $3, x^2, y^3\ z^2$. ஆகவே, மீ.பொ.வ $= 3 \times x^2 \times y^3 \times z^2 = 3x^2y^3z^2$.

(iii) $6(2x^2 - 3x - 2), 8(4x^2 + 4x + 1), 12(2x^2 + 7x + 3)$ ஆகியவற்றின் எண் கெழுக்களான 6, 8, 12 ஆகியனவற்றின் மீ.பொ.வ 2 ஆகும்.

தற்போது, இருபடிக் கோவைகளுக்கு காரணிகள் காண்போம்.

$$2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$$

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)(2x + 1)$$

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3).$$

மேலேயுள்ள இருபடிக் கோவைகளின் பொதுக்காரணி $(2x + 1)$.

ஆகவே, தேவையான மீ.பொ.வ $= 2(2x + 1)$.

### 3.5.2 வகுத்தல் படிமுறையில் பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி காணுதல் (Greatest Common Divisor of polynomials using division algorithm)

முதலில் 924, 105 ஆகிய எண்களுக்கு மீ.பொ.வ காணும் எளிய கணக்கிற்குத் தீர்வுக் காணலாம்.

$924 = 8 \times 105 + 84$

$105 = 1 \times 84 + 21,$  (அல்லது)

$84 = 4 \times 21 + 0,$

| | 8 | | 1 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 105 | 924 | 84 | 105 | 21 | 84 |
| | 840 | | 84 | | 84 |
| | 84 | | 21 | | 0 |

எனவே, 924, 105-களின் மீ.பொ.வ 21 ஆகும்.

மேலே குறிப்பிட்ட முறையினை பயன்படுத்தி பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கும் மீ.பொ.வ காணலாம்.

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன, $f(x)$-ன் படி $\geq$ $g(x)$-ன் படி என்றமைந்த இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகள் என்க. நாம் $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவற்றிற்கு மீ.பொ.வ காண்போம்.

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியனவற்றை ஒருபடி மற்றும் இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளாகக் காரணிப்படுத்தினால், முன்பு கற்ற முறையினைப் பயன்படுத்தி எளிதில் மீ.பொ.வ காண முடியும். $f(x)$ மற்றும் $g(x)$-ஐ எளிதில் காரணிப்படுத்த இயலாவிடில், பின்வரும் முறையில் மீ.பொ.வ காணலாம்.

படி 1 முதலில் $f(x)$-ஐ $g(x)$ ஆல் வகுத்து, $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ எனப் பெறுக.

இங்கு $q(x)$ என்பது ஈவு மற்றும் $r(x)$ என்பது மீதி.

ஆகவே, $g(x)$-ன் படி $>$ $r(x)$-ன் படி.

மீதி $r(x) = 0$ எனில் $f(x)$, $g(x)$ ஆகியனவற்றின் மீ.பொ.வ $g(x)$ ஆகும்.

படி 2 மீதி $r(x)$ ஆனது பூச்சியம் இல்லை எனில், $g(x)$-ஐ $r(x)$ ஆல் வகுக்க,

$g(x) = r(x)q(x) + r_1(x)$. இங்கு $r(x)$-ன் படி $> r_1(x)$-ன் படி.

இங்கு மீதி $r_1(x) = 0$ எனில், தேவையான மீ. பொ. வ $r(x)$ ஆகும்.

படி 3 மீதி $r_1(x)$ பூச்சியமல்ல எனில், மீதி பூச்சியமாக கிடைக்கும் வரை மேற்கண்ட படிகளை தொடர்ந்து செய்க. இறுதிப்படிக்கு முந்தைய படியில் கிடைக்கும் மீதி தான் $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவற்றின் மீ. பொ. வ ஆகும்.

மேலும், $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ-வை, மீ.பொ.வ $(f(x), g(x))$ எனக் குறிக்கிறோம்.

**குறிப்புரை**

பெரிய எண்ணிலிருந்து சிறிய எண்ணைக் கழித்தால் இரு எண்களின் மீ.பொ.வ ஆனது மாறாது என்ற அடிப்படையில் தான் யூக்ளிடின் வகுத்தல் முறையில் மீ.பொ.வ. காண்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, மீ.பொ.வ (252, 105) = மீ.பொ.வ. (147, 105) = மீ.பொ.வ. (42, 105) = மீ. பொ.வ. (63, 42) = மீ.பொ.வ. (21, 42) = 21 என அறியலாம்.

## எடுத்துக்காட்டு 3.20

$x^4 + 3x^3 - x - 3$ மற்றும் $x^3 + x^2 - 5x + 3$ ஆகிய பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ.பொ.வ காண்க.

**தீர்வு** $f(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$, $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ என்க.

இங்கு $f(x)$-ன் படி $>$ $g(x)$-ன் படி.

$\therefore$ வகுத்தி $x^3 + x^2 - 5x + 3$ ஆகும்.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x + 2 \\
\hline
x^3 + x^2 - 5x + 3 & x^4 + 3x^3 + 0x^2 - x - 3 \\
 & x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x \\
\hline
 & \quad 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 \\
 & \quad 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6 \\
\hline
 & \qquad 3x^2 + 6x - 9 \\
 & \Longrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 \longrightarrow \text{மீதி} \ (\neq 0)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & \quad x - 1 \\
\hline
x^2 + 2x - 3 & x^3 + x^2 - 5x + 3 \\
 & x^3 + 2x^2 - 3x \\
\hline
 & \quad -x^2 - 2x + 3 \\
 & \quad -x^2 - 2x + 3 \\
\hline
 & \qquad 0 \longrightarrow \text{மீதி}
\end{array}
$$

ஆகவே, மீ.பொ.வ $(f(x), g(x)) = x^2 + 2x - 3$.

**குறிப்புரை**

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டில் கொடுக்கப்பட்ட கோவைகளுக்கு எண் காரணிகள் (மாறிலிகள்) இல்லை. ஆகவே அவைகளின் மீ. பொ. வ. விலும் எண் காரணிகள் இருக்காது. எனவே $3x^2+6x-9$-லிருந்து காரணி 3-ஐ நீக்கி, $x^2+2x-3$-ஐ புதிய வகுத்தியாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

### எடுத்துக்காட்டு 3.21

$3x^4+6x^3-12x^2-24x$ மற்றும் $4x^4+14x^3+8x^2-8x$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ. பொ. வ காண்க.

**தீர்வு** $f(x)=3x^4+6x^3-12x^2-24x=3x(x^3+2x^2-4x-8)$ என்க.

$g(x)=4x^4+14x^3+8x^2-8x=2x(2x^3+7x^2+4x-4)$ என்க.

தற்பொழுது $x^3+2x^2-4x-8$ மற்றும் $2x^3+7x^2+4x-4$ ஆகிய பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ.பொ.வ காண்போம்.

$x^3+2x^2-4x-8$-ஐ வகுத்தியாகக் கொள்வோம்.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2 \\
x^3+2x^2-4x-8 & 2x^3+7x^2+4x-4 \\
 & 2x^3+4x^2-8x-16 \\ \hline
 & \quad 3x^2+12x+12 \\
 & \Longrightarrow \; x^2+4x+4 \\
 & \quad \text{மீதி} (\neq 0)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & \quad x-2 \\
x^2+4x+4 & x^3+2x^2-4x-8 \\
 & x^3+4x^2+4x \\ \hline
 & -2x^2-8x-8 \\
 & -2x^2-8x-8 \\ \hline
 & \quad 0 \longrightarrow \text{மீதி}
\end{array}
$$

$x^3+2x^2-4x-8$ மற்றும் $2x^3+7x^2+4x-4$ இன் பொது வகுத்தி $x^2+4x+4$ ஆகும்.

மேலும், $3x$ மற்றும் $2x$ ஆகியனவற்றின் பொது வகுத்தி $= x$.

ஆகவே, மீ.பொ.வ $(f(x), g(x)) = x(x^2+4x+4)$.

### பயிற்சி 3.6

1. பின்வருவனவற்றின் மீ. பொ. வ காண்க.

(i) $7x^2yz^4,\ 21x^2y^5z^3$ (ii) $x^2y,\ x^3y,\ x^2y^2$

(iii) $25bc^4d^3,\ 35b^2c^5,\ 45c^3d$ (iv) $35x^5y^3z^4,\ 49x^2yz^3,\ 14xy^2z^2$

2. பின்வருவனவற்றின் மீ. பொ. வ காண்க.

(i) $c^2-d^2,\ c(c-d)$ (ii) $x^4-27a^3x,\ (x-3a)^2$

(iii) $m^2-3m-18,\ m^2+5m+6$ (iv) $x^2+14x+33,\ x^3+10x^2-11x$

(v) $x^2+3xy+2y^2,\ x^2+5xy+6y^2$ (vi) $2x^2-x-1,\ 4x^2+8x+3$

(vii) $x^2-x-2,\ x^2+x-6,\ 3x^2-13x+14$ (viii) $x^3-x^2+x-1,\ x^4-1$

(ix) $24(6x^4-x^3-2x^2),\ 20(2x^6+3x^5+x^4)$

(x) $(a-1)^5(a+3)^2,\ (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் சோடிகளுக்கு வகுத்தல் படி முறையில் மீ. பொ. வ காண்க.

(i) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15,\ 4x^2 - 16x + 12$

(ii) $3x^3 + 18x^2 + 33x + 18,\ 3x^2 + 13x + 10$

(iii) $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2,\ 6x^3 + 12x^2 + 6x + 12$

(iv) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12,\ x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x$

### 3.5.3 மீச்சிறு பொது மடங்கு (மீ. பொ. ம) (Least Common Multiple)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீச்சிறு பொது மடங்கு என்பது அந்த பல்லுறுப்புக்கோவைகள் ஒவ்வொன்றாலும் மீதியில்லாமல் வகுபடக் கூடிய மிகக் குறைந்த படியைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $a^4, a^3, a^6$ ஆகிய எளிய கோவைகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$a^4, a^3, a^6$ ஆகியவற்றின் பொது மடங்குகள் $a^6, a^7, a^8, \cdots$.

அனைத்துப் பொது மடங்குகளிலும் $a^6$ என்பது மிகச்சிறிய பொது மடங்கு ஆகும்.

ஆகவே, $a^4, a^3, a^6$ ஆகியவற்றின் மீ. பொ. ம $a^6$ ஆகும்.

இவ்வாறே $a^3b^4, ab^5, a^2b^7$ ஆகியவற்றின் மீ. பொ. ம $a^3b^7$ ஆகும்.

மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் மீ. பொ. ம காண்போம்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.22**

பின்வருவனவற்றின் மீ. பொ. ம காண்க

(i) 90, 150, 225 (ii) $35a^2c^3b,\ 42a^3cb^2,\ 30ac^2b^3$

(iii) $(a-1)^5(a+3)^2,\ (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$

(iv) $x^3 + y^3,\ x^3 - y^3,\ x^4 + x^2y^2 + y^4$

**தீர்வு**

(i)
$$\begin{aligned} 90 &= 2\times3\times3\times5 = 2^1\times3^2\times5^1 \\ 150 &= 2\times3\times5\times5 = 2^1\times3^1\times5^2 \\ 225 &= 3\times3\times5\times5 = 3^2\times5^2 \end{aligned}$$

90, 150, 225 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.ம $= 2^1\times3^2\times5^2 = 450$

(ii) 35, 42, 30 -ன் மீ. பொ. ம $5\times7\times6 = 210$

எனவே, $35a^2c^3b,\ 42a^3cb^2,\ 30ac^2b^3$ -ன் மீ. பொ. ம $= 210a^3c^3b^3$.

(iii) $(a-1)^5(a+3)^2,\ (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$-ன் மீ. பொ. ம $= (a-1)^5(a+3)^4(a-2)^2$.

(iv) முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோவைகளின் காரணிகளைக் காணலாம்.

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) \\ x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 &= (x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

எனவே, மீ.பொ.ம $= (x+y)(x^2 - xy + y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) = x^6 - y^6$.

## பயிற்சி 3.7

பின்வருவனவற்றிற்கு மீ.பொ.ம காண்க.

1. $x^3y^2,\ xyz$
2. $3x^2yz,\ 4x^3y^3$
3. $a^2bc,\ b^2ca,\ c^2ab$
4. $66a^4b^2c^3,\ 44a^3b^4c^2,\ 24a^2b^3c^4$
5. $a^{m+1},\ a^{m+2},\ a^{m+3}$
6. $x^2y+xy^2,\ x^2+xy$
7. $3(a-1),\ 2(a-1)^2,\ (a^2-1)$
8. $2x^2-18y^2,\ 5x^2y+15xy^2,\ x^3+27y^3$
9. $(x+4)^2(x-3)^3,\ (x-1)(x+4)(x-3)^2$
10. $10(9x^2+6xy+y^2),\ 12(3x^2-5xy-2y^2),\ 14(6x^4+2x^3).$

### 3.5.4 மீ. பொ. வ. மற்றும் மீ. பொ. ம. ஆகியவற்றுக்கு இடையேயுள்ளத் தொடர்பு (Relation between LCM and GCD)

இரு மிகை முழுக்களின் பெருக்கற்பலன் அவற்றின் மீ. பொ. வ மற்றும் மீ. பொ. ம-வின் பெருக்கற் பலனுக்கு சமம் என அறிந்துள்ளோம். எடுத்துக்காட்டாக, $21\times35=105\times7$.

இங்கு 21 மற்றும் 35-ன் மீ. பொ. ம $=105$ மற்றும் அவற்றின் மீ. பொ. வ $=7$.

இதேபோல், ஏதேனும் இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் பெருக்கற்பலன் அவற்றின் மீ. பொ. ம மற்றும் மீ.பொ.வ ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமமாகும்.

அதாவது, $f(x)\times g(x)=$ {மீ. பொ. ம $(f(x), g(x))$} $\times$ {மீ. பொ. வ $(f(x), g(x))$}.

இந்த முடிவை ஓர் எடுத்துக்காட்டுடன் சரிபார்க்கலாம்.

$f(x)=12(x^4-x^3),\ g(x)=8(x^4-3x^3+2x^2)$ ஆகிய இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளைக் கருதுக.

$$f(x)=12(x^4-x^3)=2^2\times3\times x^3\times(x-1) \quad (1)$$
$$g(x)=8(x^4-3x^3+2x^2)=2^3\times x^2\times(x-1)\times(x-2) \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிலிருந்து,

மீ. பொ. ம $(f(x), g(x)) = 2^3\times3^1\times x^3\times(x-1)\times(x-2)=24x^3(x-1)(x-2)$

மீ. பொ. வ $(f(x), g(x)) = 4x^2(x-1)$

$\therefore$ மீ. பொ. வ $\times$ மீ. பொ. ம $= 24x^3(x-1)(x-2)\times4x^2(x-1)$

$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \quad (3)$$

மேலும், $f(x)\times g(x) = 12x^3(x-1)\times8x^2(x-1)(x-2)$

$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \quad (4)$$

(3) மற்றும் (4) ஆகியவற்றிலிருந்து,

மீ. பொ. ம $\times$ மீ. பொ. வ $= f(x)\times g(x)$

ஆகவே, இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ. பொ. ம மற்றும் மீ. பொ. வ ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆனது அவ்விரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமம். எனவே, $f(x)$, $g(x)$ மற்றும் மீ. பொ. ம அல்லது மீ. பொ. வ ஆகியவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று கொடுக்கப்பட்டால், மற்றொன்றை எளிதாகக் காணமுடியும். ஏனெனில், மீ. பொ. ம மற்றும் மீ. பொ. வ. ஆகியன $-1$ என்ற காரணியைத் தவிர்த்து தனித்துவமுள்ளவை.

## எடுத்துக்காட்டு 3.23

$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$ மற்றும் $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ $x^2 + 5x + 7$ எனில், அவற்றின் மீ. பொ.ம-வைக் காண்க.

**தீர்வு** $f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$; $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$ என்க.

மீ. பொ. வ $= x^2 + 5x + 7$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

மீ. பொ. வ $\times$ மீ. பொ. ம $= f(x) \times g(x)$ என அறிவோம்.

எனவே, $$\text{மீ. பொ. ம} = \frac{f(x)\times g(x)}{\text{மீ.பொ.வ}} \quad (1)$$

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகிய இரண்டையும் மீ.பொ.வ -ஆல் வகுக்க இயலும்.

எனவே $f(x)$-ஐ மீ. பொ. வ-ஆல் வகுக்க,

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2 & 8 & & \\
\hline
1\ 5\ 7 & 1 & 3 & 5 & 26 & 56 \\
 & 1 & 5 & 7 & & \\
\hline
 & & -2 & -2 & 26 & \\
 & & -2 & -10 & -14 & \\
\hline
 & & & 8 & 40 & 56 \\
 & & & 8 & 40 & 56 \\
\hline
 & & & 0 & & 
\end{array}$$

$f(x)$-ஐ மீ. பொ. வ ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் ஈவு $x^2 - 2x + 8$.

$\therefore$ (1) $\Longrightarrow$ மீ.பொ.ம $= (x^2 - 2x + 8)\times g(x)$

எனவே, மீ.பொ.ம $= (x^2 - 2x + 8)(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28)$.

**குறிப்பு**

மேற்கண்ட கணக்கில், $g(x)$-யையும் மீ. பொ. வ ஆல் வகுக்கலாம். கிடைக்கும் ஈவினை $f(x)$ ஆல் பெருக்கப்படும்போது தேவையான மீ. பொ. ம கிடைக்கும்.

## எடுத்துக்காட்டு 3.24

இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ. பொ. வ மற்றும் மீ. பொ. ம முறையே $x + 1$ மற்றும் $x^6 - 1$. மேலும், ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை $x^3 + 1$ எனில், மற்றொன்றைக் காண்க.

**தீர்வு** மீ. பொ. வ $= x + 1$, மீ. பொ. ம $= x^6 - 1$

$f(x) = x^3 + 1$ என்க. தேவையான மற்றொரு பல்லுறுப்புக்கோவை $g(x)$ என்க.

மீ. பொ. ம $\times$ மீ. பொ. வ $= f(x)\times g(x)$

$$\Longrightarrow \quad g(x) = \frac{\text{மீ.பொ.ம} \times \text{மீ.பொ.வ}}{f(x)} = \frac{(x^6 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1}$$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{(x^3 + 1)(x^3 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1} = (x^3 - 1)(x + 1)$$

ஆகவே, $g(x) = (x^3 - 1)(x + 1)$.

## பயிற்சி 3.8

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு சோடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ. பொ. ம காண்க.
   (i) $x^2 - 5x + 6,\ x^2 + 4x - 12$, இவற்றின் மீ. பொ. வ $x - 2$.
   (ii) $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3,\ x^4 + 2x^2 + x + 2$, இவற்றின் மீ. பொ. வ $x^2 + x + 1$.
   (iii) $2x^3 + 15x^2 + 2x - 35,\ x^3 + 8x^2 + 4x - 21$, இவற்றின் மீ. பொ. வ $x + 7$.
   (iv) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 5,\ 2x^4 - x^3 - 10x^2 - 11x + 8$, இவற்றின் மீ. பொ. வ $2x - 1$.

2. பின்வருவனவற்றில் முறையே $p(x)$ மற்றும் $q(x)$ ஆகியவற்றின் மீ. பொ. ம, மற்றும் மீ. பொ. வ மேலும் $p(x)$ ஆகியன கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $q(x)$ என்ற மற்றொரு பல்லுறுப்புக்கோவையைக் காண்க.
   (i) $(x+1)^2(x+2)^2,\ (x+1)(x+2),\ (x+1)^2(x+2)$.
   (ii) $(4x+5)^3(3x-7)^3,\ (4x+5)(3x-7)^2,\ (4x+5)^3(3x-7)^2$.
   (iii) $(x^4 - y^4)(x^4 + x^2y^2 + y^4),\ x^2 - y^2,\ x^4 - y^4$.
   (iv) $(x^3 - 4x)(5x+1),\ (5x^2 + x),\ (5x^3 - 9x^2 - 2x)$.
   (v) $(x-1)(x-2)(x^2 - 3x + 3),\ (x-1),\ (x^3 - 4x^2 + 6x - 3)$.
   (vi) $2(x+1)(x^2 - 4),\ (x+1),\ (x+1)(x-2)$.

## 3.6 விகிதமுறு கோவைகள் (Rational expressions)

$m$ மற்றும் $n \neq 0$ என்பன இரு முழுக்கள் எனில் $\frac{m}{n}$ என்ற விகிதம் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக வரையறுக்கப்படுகிறது. இதேபோல் $p(x),\ q(x)$ ஆகிய இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளில் $q(x) \neq 0$ எனில், விகிதம் $\frac{p(x)}{q(x)}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு கோவை ஆகும்.

$p(x)$ ஐ $\frac{p(x)}{1}$ என எழுத இயலும் என்பதால் எந்த ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$-ம் ஒரு விகிதமுறு பல்லுறுப்புக்கோவையாகும்.

இருப்பினும், ஒரு விகிதமுறு கோவையானது ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. எடுத்துக்காட்டாக $\frac{x}{x^2+1}$ ஒரு விகிதமுறு கோவை. ஆனால், அது ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையல்ல.

விகிதமுறு பல்லுறுப்புக்கோவைகளை பின்வரும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் அறியலாம்.

$$2x + 7,\ \frac{3x+2}{x^2+x+1},\ \frac{x^3 + \sqrt{2}\,x + 5}{x^2 + x - \sqrt{3}}$$

### 3.6.1 விகிதமுறுக் கோவையின் சுருங்கிய (அ) எளிய வடிவம் (Rational expressions in lowest form)

$p(x)$ மற்றும் $q(x)$ ஆகிய பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் கெழுக்கள் முழு எண்கள் ஆகவும், அவற்றின் மீ.பொ.வ 1 என்றவாறும் இருந்தால், $\frac{p(x)}{q(x)}$ என்பது சுருக்கிய அல்லது எளிய வடிவிலுள்ள ஒரு விகிதமுறு கோவையாகும். ஒரு விகிதமுறுகோவை சுருங்கிய வடிவில் இல்லாமலிருப்பின் அதன் தொகுதி $p(x)$ மற்றும் பகுதி $q(x)$ ஆகிய இரண்டையும் $p(x),\ q(x)$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ-ஆல் வகுத்து எளிய வடிவில் சுருக்கலாம்.

சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் கருத்தில் கொள்வோம்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.25**

பின்வரும் விகிதமுறு கோவைகளை எளிய வடிவிற்குச் சுருக்குக.

(i) $\frac{5x+20}{7x+28}$ (ii) $\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4}$ (iii) $\frac{6x^2-5x+1}{9x^2+12x-5}$ (iv) $\frac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-1)(x^2-2x-3)}$

**தீர்வு**

(i) $\frac{5x+20}{7x+28}=\frac{5(x+4)}{7(x+4)}=\frac{5}{7}$

(ii) $\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4}=\frac{x^2(x-5)}{x^3(2x+3)}=\frac{x-5}{x(2x+3)}$

(iii) $p(x)=6x^2-5x+1=(2x-1)(3x-1)$ என்க.

$q(x)=9x^2+12x-5=(3x+5)(3x-1)$ என்க.

எனவே, $\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{(2x-1)(3x-1)}{(3x+5)(3x-1)}=\frac{2x-1}{3x+5}$

(iv) $f(x)=(x-3)(x^2-5x+4)=(x-3)(x-1)(x-4)$ என்க.

$g(x)=(x-1)(x^2-2x-3)=(x-1)(x-3)(x+1)$ என்க.

எனவே, $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x-3)(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x+1)}=\frac{x-4}{x+1}$

**பயிற்சி 3.9**

பின்வருவனவற்றை எளிய வடிவிற்குச் சுருக்குக.

(i) $\frac{6x^2+9x}{3x^2-12x}$ (ii) $\frac{x^2+1}{x^4-1}$ (iii) $\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$

(iv) $\frac{x^3-27}{x^2-9}$ (v) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$ (குறிப்பு: $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$ எனக்கொள்க)

(vi) $\frac{x^3+8}{x^4+4x^2+16}$ (vii) $\frac{2x^2+x-3}{2x^2+5x+3}$ (viii) $\frac{2x^4-162}{(x^2+9)(2x-6)}$

(ix) $\frac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-4)(x^2-2x-3)}$ (x) $\frac{(x-8)(x^2+5x-50)}{(x+10)(x^2-13x+40)}$ (xi) $\frac{4x^2+9x+5}{8x^2+6x-5}$

(xii) $\frac{(x-1)(x-2)(x^2-9x+14)}{(x-7)(x^2-3x+2)}$

### 3.6.2 விகிதமுறு கோவைகளின் பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் (Multiplication and division of rational expressions)

$q(x)\neq 0$, $h(x)\neq 0$ என்றவாறு $\frac{p(x)}{q(x)}$ மற்றும் $\frac{g(x)}{h(x)}$ ஆகியன இரு விகிதமுறு கோவைகள் எனில்,

(i) அவைகளின் பெருக்கற்பலன் $\frac{p(x)}{q(x)}\times\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{p(x)\times g(x)}{q(x)\times h(x)}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(ii) அவைகளின் வகுத்தல் $\frac{p(x)}{q(x)}\div\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{p(x)}{q(x)}\times\frac{h(x)}{g(x)}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது, $\frac{p(x)}{q(x)}\div\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{p(x)\times h(x)}{q(x)\times g(x)}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

## எடுத்துக்காட்டு 3.26

(i) $\dfrac{x^3y^2}{9z^4}$ என்பதை $\dfrac{27z^5}{x^4y^2}$ ஆல் பெருக்குக.

(ii) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}$ என்பதை $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$ ஆல் பெருக்குக.

(iii) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ என்பதை $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4}$ ஆல் பெருக்குக.

தீர்வு

(i) $\dfrac{x^3y^2}{9z^4}\times\dfrac{27z^5}{x^4y^2}=\dfrac{(x^3y^2)(27z^5)}{(9z^4)(x^4y^2)}=\dfrac{3z}{x}.$

(ii) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}\times\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a+b)}\times\dfrac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}=a^2-ab+b^2.$

(iii) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}\times\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4}=\dfrac{x^3-2^3}{x^2-2^2}\times\dfrac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4}$

$$=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}\times\frac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4}=x+4.$$

## எடுத்துக்காட்டு 3.27

(i) $\dfrac{4x-4}{x^2-1}$ என்பதை $\dfrac{x-1}{x+1}$ ஆல் வகுக்க. (ii) $\dfrac{x^3-1}{x+3}$ என்பதை $\dfrac{x^2+x+1}{3x+9}$ ஆல் வகுக்க.

(iii) $\dfrac{x^2-1}{x^2-25}$ என்பதை $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$ ஆல் வகுக்க.

தீர்வு:

(i) $\dfrac{4x-4}{x^2-1}\div\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)}\times\dfrac{(x+1)}{(x-1)}=\dfrac{4}{x-1}.$

(ii) $\dfrac{x^3-1}{x+3}\div\dfrac{x^2+x+1}{3x+9}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+3}\times\dfrac{3(x+3)}{x^2+x+1}=3(x-1).$

(iii) $\dfrac{x^2-1}{x^2-25}\div\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+5)(x-5)}\times\dfrac{(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+1)}$

$$=\frac{(x-1)(x-1)}{(x-5)(x-5)}=\frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}.$$

### பயிற்சி 3.10

1. பின்வரும் விகிதமுறு கோவைகளைப் பெருக்கி, விடையைச் சுருக்கிய வடிவில் எழுதுக.

(i) $\dfrac{x^2-2x}{x+2}\times\dfrac{3x+6}{x-2}$ (ii) $\dfrac{x^2-81}{x^2-4}\times\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-5x-36}$

(iii) $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-x-20}\times\dfrac{x^2-2x+4}{x^3+8}$ (iv) $\dfrac{x^2-16}{x^2-3x+2}\times\dfrac{x^2-4}{x^3+64}\times\dfrac{x^2-4x+16}{x^2-2x-8}$

(v) $\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-x-2}\times\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2+5x-2}$ (vi) $\dfrac{2x-1}{x^2+2x+4}\times\dfrac{x^4-8x}{2x^2+5x-3}\times\dfrac{x+3}{x^2-2x}$

2. பின்வருவனற்றை எளிய வடிவில் சுருக்குக:

(i) $\frac{x}{x+1} \div \frac{x^2}{x^2-1}$ (ii) $\frac{x^2-36}{x^2-49} \div \frac{x+6}{x+7}$

(iii) $\frac{x^2-4x-5}{x^2-25} \div \frac{x^2-3x-10}{x^2+7x+10}$ (iv) $\frac{x^2+11x+28}{x^2-4x-77} \div \frac{x^2+7x+12}{x^2-2x-15}$

(v) $\frac{2x^2+13x+15}{x^2+3x-10} \div \frac{2x^2-x-6}{x^2-4x+4}$ (vi) $\frac{3x^2-x-4}{9x^2-16} \div \frac{4x^2-4}{3x^2-2x-1}$

(vii) $\frac{2x^2+5x-3}{2x^2+9x+9} \div \frac{2x^2+x-1}{2x^2+x-3}$

### 3.6.3 விகிதமுறு கோவைகளின் கூட்டலும் கழித்தலும் (Addition and subtraction of rational expressions)

$q(x) \neq 0$ மற்றும் $s(x) \neq 0$ என்றவாறு $\frac{p(x)}{q(x)}$ மற்றும் $\frac{r(x)}{s(x)}$ ஆகியன இரண்டு விகிதமுறு கோவைகள் எனில், அவற்றின் கூடுதல் மற்றும் கழித்தலை

$\frac{p(x)}{q(x)} \pm \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x).s(x) \pm q(x)r(x)}{q(x).s(x)}$ என வரையறுக்கலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.28**

சுருக்குக: (i) $\frac{x+2}{x+3} + \frac{x-1}{x-2}$ (ii) $\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$ (iii) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9} + \frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

**தீர்வு**

(i) $$\frac{x+2}{x+3} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)+(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$$

(ii) $$\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{2x^2+2}{(x-1)^2(x+1)}$$
$$= \frac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$$

(iii) $$\frac{x^2-x-6}{x^2-9} + \frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)} + \frac{(x+6)(x-4)}{(x+3)(x-4)}$$
$$= \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+6}{x+3} = \frac{x+2+x+6}{x+3} = \frac{2x+8}{x+3}$$

**எடுத்துக்காட்டு 3.29**

$\frac{x^3-1}{x^2+2}$ உடன் எந்த விகிதமுறு கோவையைக் கூட்டினால் $\frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$ கிடைக்கும் ?

**தீர்வு** $p(x)$ என்பது தேவையான விகிதமுறு கோவை என்க.

$\frac{x^3-1}{x^2+2} + p(x) = \frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore p(x) = \frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2} - \frac{x^3-1}{x^2+2} = \frac{2x^3-x^2+3-x^3+1}{x^2+2} = \frac{x^3-x^2+4}{x^2+2}$$

**எடுத்துக்காட்டு 3.30**

$\left(\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x+1}{2x+1}\right)+\frac{x+2}{x+1}$ என்பதை இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் ஒரு பின்னமாக (விகிதமுறு கோவையாக) எளிய வடிவில் சுருக்குக.

**தீர்வு** $\left(\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x+1}{2x+1}\right)+\frac{x+2}{x+1}$

$$=\left[\frac{(2x-1)(2x+1)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}\right]+\frac{x+2}{x+1}$$

$$=\frac{(4x^2-1)-(x^2-1)}{(x-1)(2x+1)}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{3x^2}{(x-1)(2x+1)}+\frac{x+2}{x+1}$$

$$=\frac{3x^2(x+1)+(x+2)(x-1)(2x+1)}{(x^2-1)(2x+1)}=\frac{5x^3+6x^2-3x-2}{2x^3+x^2-2x-1}$$

**பயிற்சி 3.11**

1. பின்வருவனவற்றை இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் ஒரு பின்னமாக (விகிதமுறு கோவையாக) எளிய வடிவில் சுருக்குக.

(i) $\frac{x^3}{x-2}+\frac{8}{2-x}$ (ii) $\frac{x+2}{x^2+3x+2}+\frac{x-3}{x^2-2x-3}$

(iii) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9}+\frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$ (iv) $\frac{x-2}{x^2-7x+10}+\frac{x+3}{x^2-2x-15}$

(v) $\frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}-\frac{2x^2-7x-4}{2x^2-3x-2}$ (vi) $\frac{x^2-4}{x^2+6x+8}-\frac{x^2-11x+30}{x^2-x-20}$

(vii) $\left[\frac{2x+5}{x+1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]-\left(\frac{3x-2}{x-1}\right)$

(viii) $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}-\frac{2}{x^2+4x+3}$.

2. $\frac{x^3-1}{x^2+2}$ உடன் எந்த விகிதமுறுக் கோவையைக் கூட்ட $\frac{3x^3+2x^2+4}{x^2+2}$ கிடைக்கும்?

3. எந்த விகிதமுறு கோவையை $\frac{4x^3-7x^2+5}{2x-1}$ -லிருந்து கழிக்க $2x^2-5x+1$ கிடைக்கும்?

4. $P=\frac{x}{x+y}$, $Q=\frac{y}{x+y}$ எனில், $\frac{1}{P-Q}-\frac{2Q}{P^2-Q^2}$ ஐக் காண்க.

## 3.7 வர்க்கமூலம் (Square root)

$a\in\mathbb{R}$ என்பது ஒரு குறையற்ற மெய்யெண் (Non negative real number) என்க. $a$-ன் வர்க்கமூலமானது $b^2=a$ என்றவாறு அமையும் ஒரு மெய்யெண் $b$ ஆகும். $a$-ன் மிகை வர்க்கமூலத்தினை $\sqrt[2]{a}$ அல்லது $\sqrt{a}$ எனக் குறிப்போம். $(-3)^2=9$ மற்றும் $(+3)^2=9$ ஆகியன மெய்யாக இருப்பினும் $\sqrt{\ }$ என்பது மிகை வர்க்கமூலத்தைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஆகவே $\sqrt{9}=3$. இதேபோல் $\sqrt{121}=11$, $\sqrt{10000}=100$.

எந்த ஒரு கோவையின் வர்க்கம் கொடுக்கப்பட்ட கோவைக்கு சமமாக உள்ளதோ, அக்கோவை கொடுக்கப்பட்ட கோவையின் வர்க்கமூலம் (square root) எனப்படும். பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கு வர்க்கமூலம் காண பின்வருமாறு எழுதுவோம்.

$$\sqrt{(p(x))^2} = |p(x)|, \text{ இங்கு } |p(x)| = \begin{cases} p(x) \quad , \ p(x) \geq 0 \text{ எனும்போது} \\ -p(x) \ , \ p(x) < 0 \text{ எனும்போது} \end{cases}$$

எனவே, $\sqrt{(x-a)^2} = |(x-a)|$ , $\sqrt{(a-b)^2} = |(a-b)|$.

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கு பின்வரும் நன்கு அறிமுகமான இரு முறைகளில் வர்க்கமூலம் காண்போம்.

(i) காரணிப்படுத்தல் முறை (Factorization method)

(ii) வகுத்தல் முறை (Division method)

இப்பகுதியில், காரணிப்படுத்த இயலக் கூடிய பல்லுறுப்புக்கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தி வர்க்கமூலம் காணும் முறையை சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் கற்போம்.

### 3.7.1 காரணிப்படுத்துதல் முறையில் வர்க்கமூலம் காணல் (Square root by factorization method)

**எடுத்துக்காட்டு 3.31**

வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}$

(ii) $\dfrac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}$ (iii) $(2x+3y)^2 - 24xy$

**தீர்வு**

(i) $\sqrt{121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}} = 11|(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^6|$

(ii) $\sqrt{\dfrac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}} = \dfrac{9}{8}\left|\dfrac{x^2y^3z^4}{w^6s^7}\right|$

(iii) $\sqrt{(2x+3y)^2 - 24xy} = \sqrt{4x^2 + 12xy + 9y^2 - 24xy} = \sqrt{(2x-3y)^2}$
$= |(2x-3y)|$

**எடுத்துக்காட்டு 3.32**

வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $4x^2 + 20xy + 25y^2$ (ii) $x^6 + \dfrac{1}{x^6} - 2$

(iii) $(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)$

**தீர்வு**

(i) $\sqrt{4x^2 + 20xy + 25y^2} = \sqrt{(2x+5y)^2} = |(2x+5y)|$

(ii) $\sqrt{x^6 + \dfrac{1}{x^6} - 2} = \sqrt{\left(x^3 - \dfrac{1}{x^3}\right)^2} = \left|\left(x^3 - \dfrac{1}{x^3}\right)\right|$

(iii) வர்க்கமூலம் காணும் முன்பு, பல்லுறுப்புக்கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துவோம்.

$$6x^2 - x - 2 = (2x+1)(3x-2)$$

$$3x^2 - 5x + 2 = (3x-2)(x-1) \text{ மற்றும்}$$

$$2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$$

எனவே, $\sqrt{(6x^2-x-2)(3x^2-5x+2)(2x^2-x-1)}$

$$= \sqrt{(2x+1)(3x-2)\times(3x-2)(x-1)\times(x-1)(2x+1)}$$

$$= \sqrt{(2x+1)^2(3x-2)^2(x-1)^2}$$

$$= |(2x+1)(3x-2)(x-1)|$$

**பயிற்சி 3.12**

1. பின்வருவனவற்றிற்கு வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $196a^6b^8c^{10}$ (ii) $289(a-b)^4(b-c)^6$ (iii) $(x+11)^2 - 44x$

(iv) $(x-y)^2 + 4xy$ (v) $121x^8y^6 \div 81x^4y^8$ (vi) $\dfrac{64(a+b)^4(x-y)^8(b-c)^6}{25(x+y)^4(a-b)^6(b+c)^{10}}$

2. பின்வருவனவற்றிற்கு வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $16x^2 - 24x + 9$

(ii) $(x^2-25)(x^2+8x+15)(x^2-2x-15)$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 30yz - 20zx$

(iv) $x^4 + \dfrac{1}{x^4} + 2$

(v) $(6x^2+5x-6)(6x^2-x-2)(4x^2+8x+3)$

(vi) $(2x^2-5x+2)(3x^2-5x-2)(6x^2-x-1)$

### 3.7.2 வகுத்தல் முறையில் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையின் வர்க்கமூலம் காணல் (Finding the square root of a polynomial by division method)

ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையினை, காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எளிதில் மாற்ற முடியாத போது அதன் வர்க்கமூலத்தை வகுத்தல் முறை மூலம் காணலாம். பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் படி அதிகமாக இருந்தாலும் வர்க்கமூலங்களை வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி எளிதில் காணலாம்.

மிகை முழுக்களின் வர்க்கமூலத்தைக் காணும் வகுத்தல் முறையைப் போலவே, ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையின் வர்க்கமூலத்தையும் காணலாம். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளைக் கொண்டு இம்முறையை விளக்குவோம்.

(i) $\sqrt{66564}$ ஐக் காண்க.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2\quad 5\quad 8 \\
\hline
2 & 6\ 65\ 64 \\
 & 4 \\
\hline
45 & 2\ 65 \\
 & 2\ 25 \\
\hline
508 & 40\ 64 \\
 & 40\ 64 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

ஆகவே , $\sqrt{66564} = 258$

(ii) $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1}$ ஐக் காண்க.

$p(x) = 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$ என்க.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 \ +\ 2x \ +\ 1 \\
\hline
3x^2 & 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1 \\
 & 9x^4 \\
\hline
6x^2 + 2x & 12x^3 + 10x^2 \\
 & 12x^3 + 4x^2 \\
\hline
6x^2 + 4x + 1 & 6x^2 + 4x + 1 \\
 & 6x^2 + 4x + 1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$

**குறிப்புரை**

(i) பல்லுறுப்புக்கோவையை $x$-ன் அடுக்குகளைப் பொருத்து ஏறுவரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதும்போது, விடுப்பட்ட உறுப்புகளுக்குப் பதிலாக பூச்சியத்தை எழுதவும்.

(ii) மேலே உள்ள வர்க்கமூலம் காணும் முறையை பின்வரும் வழிமுறையுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்து, அதற்குரிய காரணங்களைப் புரிந்துக் கொள்ளலாம்.

$$\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(a+b+c)^2}$$

ஆகவே, வர்க்கமூலம் காண்பது என்பது பொருத்தமான $a, b$ மற்றும் $c$-களைக் காண்பதாகும்.

எனவே, 
$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\
&= a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 \\
&= a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c \\
&= (3x^2)^2 + (6x^2+2x)(2x) + (6x^2+4x+1)(1)
\end{aligned}
$$

$\therefore \sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$, ஆகவே, $a = 3x^2$, $b = 2x$ மற்றும் $c = 1$

மாற்றுமுறை : வர்க்கமூலம் காண, முதலில் பின்வருமாறு எழுதுக.

$$9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1 = (mx^2 + nx + l)^2 = m^2x^4 + 2mnx^3 + (n^2 + 2lm)x^2 + 2nlx + l^2$$

இரு புறமும் கெழுக்களை ஒப்பிட்டு, $m, n, l$ ஆகியவற்றுக்கு மதிப்புக்களைக் காண்க.

(iii) பின்வருவம் எடுத்துக்காட்டையும் புரிந்துகொண்டு, வர்க்கமூலத்தை நன்கு அறிந்து கொள்ளலாம்.

$$
\begin{aligned}
&25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4 = 25x^4 - 30x^3 + 9x^2 + 20x^2 - 12x + 4 \\
&= (5x^2)^2 + [10x^2 + (-3x)](-3x) + (10x^2 - 6x + 2)2 \\
&= (5x^2)^2 + [2(5x^2) + (-3x)](-3x) + [2(5x^2) + 2(-3x) + 2]2 \\
&= a^2 + [2a + (-b)](-b) + [2a + 2(-b) + c]c \\
&= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ac \\
&= (a - b + c)^2, \quad \text{இங்கு} \ a = 5x^2,\ b = 3x,\ c = 2
\end{aligned}
$$

$\therefore \ \sqrt{25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4} = |5x^2 - 3x + 2|.$

### எடுத்துக்காட்டு 3.33

$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$-ன் வர்க்கமூலத்தைக் காண்க

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவை $x$-ன் அடுக்குகளில் இறங்கு வரிசையில் உள்ளது.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 5x + 6 \\
\hline
x^2 & x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36 \\
 & x^4 \\
\hline
2x^2 - 5x & \quad -10x^3 + 37x^2 \\
 & \quad -10x^3 + 25x^2 \\
\hline
2x^2 - 10x + 6 & \qquad\qquad 12x^2 - 60x + 36 \\
 & \qquad\qquad 12x^2 - 60x + 36 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

எனவே,கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவையின் வர்க்கமூலம்,

$\sqrt{x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36} = |(x^2 - 5x + 6)|$ ஆகும்.

### எடுத்துக்காட்டு 3.34

$x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 25$-ன் வர்க்கமூலத்தைக் காண்க.

**தீர்வு** வர்க்கமூலம் காண பல்லுறுப்புக்கோவையை $x$-ன் அடுக்குகளில் ஏறு வரிசையில் கருதுக.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5 - 3x + x^2 \\
\hline
5 & 25 - 30x + 19x^2 - 6x^3 + x^4 \\
 & 25 \\
\hline
10 - 3x & \quad -30x + 19x^2 \\
 & \quad -30x + 9x^2 \\
\hline
10 - 6x + x^2 & \qquad\quad 10x^2 - 6x^3 + x^4 \\
 & \qquad\quad 10x^2 - 6x^3 + x^4 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவையின் வர்க்கமூலம் $|x^2 - 3x + 5|$ ஆகும்.

### எடுத்துக்காட்டு 3.35

$m - nx + 28x^2 + 12x^3 + 9x^4$ ஆனது ஒரு முழு வர்க்கம் எனில், $m, n$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

**தீர்வு** பல்லுறுப்புக்கோவையை $x$-ன் அடுக்குகளில் இறங்கு வரிசையில் கருதுக.

$$9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m.$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + 2x + 4 \\
\hline
3x^2 & 9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m \\
 & 9x^4 \\
\hline
6x^2 + 2x & \quad 12x^3 + 28x^2 \\
 & \quad 12x^3 + 4x^2 \\
\hline
6x^2 + 4x + 4 & \qquad 24x^2 - nx + m \\
 & \qquad 24x^2 + 16x + 16 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவை ஒரு முழு வர்க்கமாதலால், $n = -16$ மற்றும் $m = 16$.

**பயிற்சி 3.13**

1. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்கமூலத்தை வகுத்தல் முறைமூலம் காண்க.
   (i) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$ (ii) $4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$
   (iii) $9x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x + 1$ (iv) $4 + 25x^2 - 12x - 24x^3 + 16x^4$

2. பின்வரும் பல்லுறுப்புக்கோவைகள் முழுவர்க்கங்கள் எனில், $a, b$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.
   (i) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 + ax + b$ (ii) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - ax + b$
   (iii) $ax^4 + bx^3 + 109x^2 - 60x + 36$ (iv) $ax^4 - bx^3 + 40x^2 + 24x + 36$

## 3.8 இருபடிச் சமன்பாடுகள் (Quadratic equations)

கிரேக்க கணித மேதை யூக்ளிட் (Euclid) வடிவியல் முறையில் கண்டறிந்த நீளங்களே, தற்போது பயன்படுத்தப்படும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களாகும். இருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை பொதுவான வடிவில் அளித்த பெருமை இந்திய கணிதவியல் அறிஞர்களைச் சேரும். குறிப்பாக, $ax^2 + bx = c$ என அமைந்த இருபடிச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணத் தெளிவான சூத்திரமொன்றை பிரம்மகுப்தா (Brahma Gupta) (கி.பி. 598 - 665) கண்டுபிடித்தார். பிற்காலத்தில் இந்தியக் கணிதமேதை ஸ்ரீதர் ஆச்சார்யா (Sridhar Acharya) (கி.பி 1025) வர்க்கப்படுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி இருபடிச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் முறையைக் கண்டறிந்தார். கணித அறிஞர் பாஸ்கரா II (Bhaskara II) இச்சூத்திரத்தை இருபடிச் சூத்திரம் (quadratic formula) எனக் குறிப்பிட்டார்.

இப்பகுதியில் பல்வேறு முறைகளைப் பயன்படுத்தி இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காணுதலைக் கற்போம். இருபடிச் சமன்பாடுகளின் பயன்பாடுகளையும் காண்போம்.

**வரையறை**

$a, b, c$ ஆகியன மெய்யெண்கள் மற்றும் $a \neq 0$ எனில், $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற வடிவில் அமைந்த சமன்பாட்டினை மாறி $x$-ல் அமைந்த இருபடிச் சமன்பாடு (quadratic equation) என்போம்.

குறிப்பாக $p(x)$ என்பது படி 2-ல் அமைந்த பல்லுறுப்புக்கோவை எனில், $p(x) = 0$ என்பது இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும். அதன் பொது வடிவம் $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, $2x^2 - 3x + 4 = 0$, $1 - x + x^2 = 0$ ஆகியவை இருபடிச் சமன்பாடுகளாகும்.

### 3.8.1 காரணிப்படுத்தல் மூலம் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணுதல் (Solution of a quadratic equation by factorization method)

இருபடிச் சமன்பாட்டினை நேரியல் காரணிகளாகக் காரணிப்படுத்த முடியுமெனில் இம்முறையைப் பயன்படுத்த இயலும். எந்தப் பெருக்கற்பலனிலும் ஒரு காரணி பூச்சியம் எனில், முழு பெருக்கற்பலனும் பூச்சியம் ஆகும். மாறாக, பெருக்கற்பலன் பூச்சியத்திற்குச் சமம் எனில், அந்தப் பெருக்கற்பலனில் உள்ள சில காரணிகள் பூச்சியம் ஆகும். மேலும், தெரியாத மாறியைக் கொண்டுள்ள காரணி பூச்சியமாக இருக்கலாம். எனவே ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க ஒவ்வொரு காரணியையும் பூச்சியமாக்கும் வகையில் $x$-ன் மதிப்புகளைக் காண வேண்டும். அதாவது, பெருக்கலிலுள்ள ஒவ்வொரு காரணியையும் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்தி, மாறிக்குத் தீர்வு காணலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.36**

தீர்க்க : $6x^2 - 5x - 25 = 0$

**தீர்வு** $6x^2 - 5x - 25 = 0$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$x$-ன் கெழு –5. ஆகவே, $\alpha + \beta = -5$ மற்றும் $\alpha\beta = 6 \times (-25) = -150$ என அமையும் $\alpha, \beta$ ஆகியவற்றைக் காணலாம்.

எனவே, $\alpha = -15$ மற்றும் $\beta = 10$ எனக் கிடைக்கும்.

ஆகவே, $6x^2 - 5x - 25 = 6x^2 - 15x + 10x - 25 = 3x(2x-5) + 5(2x-5)$
$$= (2x-5)(3x+5).$$

இப்போது, $2x - 5 = 0$ மற்றும் $3x + 5 = 0$-லிருந்து தீர்வுக் கணம் பெறலாம்.

எனவே, $x = \frac{5}{2}$, $x = -\frac{5}{3}$.

ஆகவே, தீர்வுக் கணம் $= \left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right\}$.

**எடுத்துக்காட்டு 3.37**

தீர்க்க : $\dfrac{6}{7x-21} - \dfrac{1}{x^2-6x+9} + \dfrac{1}{x^2-9} = 0$

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடல்ல எனத் தோன்றுகிறது. ஆனால், சமன்பாட்டைச் சுருக்கும்போது, அது இருபடிச் சமன்பாடாக மாறும்.

$$\frac{6}{7(x-3)} - \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x+3)(x-3)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{6(x^2-9) - 7(x+3) + 7(x-3)}{7(x-3)^2(x+3)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 6x^2 - 54 - 42 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 16 = 0$$

$x^2 = 16$ என்பது இருபடிச் சமன்பாடு என்பதால், $x = 4$ மற்றும் $x = -4$ ஆகும்.

ஆகவே, தீர்வுக் கணம் $= \{-4, 4\}$

**எடுத்துக்காட்டு 3.38**

தீர்க்க : $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x,\ 3 - 4x > 0$

**தீர்வு** $\sqrt{24-10x} = 3-4x$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த, $24-10x = (3-4x)^2$

$\Longrightarrow \quad 16x^2 - 14x - 15 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 16x^2 - 24x + 10x - 15 = 0$

$\Longrightarrow \quad (8x+5)(2x-3) = 0$-லிருந்து $x = \frac{3}{2}$ அல்லது $-\frac{5}{8}$ எனக் கிடைக்கிறது.

$x = \frac{3}{2}$ எனில், $3-4x = 3-4\left(\frac{3}{2}\right) < 0$. எனவே, $x = \frac{3}{2}$ என்பது சமன்பாட்டின் தீர்வல்ல.

$x = -\frac{5}{8}$ எனில், $3-4x > 0$

ஆகவே, தீர்வுக் கணம் $= \left\{-\frac{5}{8}\right\}$.

**குறிப்புரை**

மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டில் இருப்பதைப் போன்ற சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வுக் காண பின்வரும் வர்க்கப்படுத்துதல் பண்பினை பயன்படுத்த வேண்டும். $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$. ஆனால், வர்க்கப்படுத்துவதால் பெறப்படும் புதிய சமன்பாட்டின் அனைத்து தீர்வுகளும், அசல் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாக இருக்கும் என வர்க்கப்படுத்தும் பண்பிலிருந்து பெற இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக, $x = 5$ என்ற சமன்பாட்டை வர்க்கப்படுத்தினால், $x^2 = 25$ ஆகும். இங்கு $x = -5$ மற்றும் $x = 5$ ஆகியன தீர்வாக அமைகின்றன. ஆனால் $x = -5$ என்பது அசல் சமன்பாட்டின் தீர்வல்ல. இவ்வாறான தீர்வு மிகைப்படுத்தப்பட்ட தீர்வு (extraneous solution) எனப்படும்.

ஆகவே, ஒரு சமன்பாட்டின் இரு புறங்களையும் வர்க்கப்டுத்தும்போது, பெறும் இறுதிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் அசல் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகுமா என சரிப்பார்க்க வேண்டும். இதனையே மேலே கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டு விளக்குகிறது. அதே நேரத்தில், வர்க்கப்படுத்துவதால் அசல் சமன்பாட்டின் எந்தத் தீர்வும் விடுபடாது. மாறாக, சில கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இல்லாமல் வேறு மதிப்புகள் புதியச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாக பெறப்படுகின்றன.

### பயிற்சி 3.14

காரணிப்படுத்தும் முறையில் கீழே கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $(2x+3)^2 - 81 = 0$ (ii) $3x^2 - 5x - 12 = 0$ (iii) $\sqrt{5}\,x^2 + 2x - 3\sqrt{5} = 0$

(iv) $3(x^2-6) = x(x+7) - 3$ (v) $3x - \frac{8}{x} = 2$ (vi) $x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$

(vii) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{34}{15}$ (viii) $a^2b^2x^2 - (a^2+b^2)x + 1 = 0$

(ix) $2(x+1)^2 - 5(x+1) = 12$ (x) $3(x-4)^2 - 5(x-4) = 12$

## 3.8.2 வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணுதல் (Solution of a quadratic equation by completing square)

$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$-ல் உள்ள கடைசி உறுப்பு $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ என்பது $x$-ன் கெழுவின் பாதியின் வர்க்கம் ஆகும். ஆகவே, $x^2 + bx$ ஆனது $x + \frac{b}{2}$-ன் வர்க்கமாக இருப்பதற்கு $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ என்ற உறுப்பு மட்டுமே தேவைப்படுகிறது. ஆகையால், $x^2 + bx$ என்ற கோவையுடன் $x$-ன் கெழுவின்

பாதியின் வர்க்கத்தைச் சேர்த்தால் கிடைப்பது ஓர் இருபடிக் கோவையின் (binomial) வர்க்கமாக அமைகிறது. இவ்வாறு, இரு படிக் கோவையில் ஒரு உறுப்பினைச் சேர்த்து அதனை முழு வர்க்கமாக மாற்றுவதையே வர்க்கப் பூர்த்தி (completing square) முறை என்கிறோம். இப்பகுதியில் ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வை வர்க்கப்பூர்த்தி முறையில் காணுதலை பின்வரும் நிலைகளில் அடையலாம்.

**படி 1** $x^2$-ன் கெழு 1 எனில், படி 2-க்குச் செல்லவும். இல்லையெனில் சமன்பாட்டின் இரு புறங்களையும் $x^2$-ன் கெழுவால் வகுக்கவும். மாறிகள் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் சமன்பாட்டின் ஒரே புறத்தில் வைத்துக்கொள்க.

**படி 2** $x$-ன் கெழுவின் பாதியை வர்க்கப்படுத்தி, இதை சமன்பாட்டின் இருபுறங்களிலும் கூட்டுக. $x^2 = t \Longrightarrow x = \sqrt{t}$ அல்லது $x = -\sqrt{t}$, $t \geq 0$, எனும் வர்க்கமூலம் பண்பினைப் பயன்படுத்தி, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு காணலாம்.

### எடுத்துக்காட்டு 3.39

வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் $5x^2 - 6x - 2 = 0$-ஐத் தீர்க்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடு $5x^2 - 6x - 2 = 0$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0 \qquad \text{(இருபுறமும் 5 ஆல் வகுக்க)}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x = \frac{2}{5} \qquad \text{($x$-ன் கெழுவின் பாதி $\frac{3}{5}$)}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x + \frac{9}{25} = \frac{9}{25} + \frac{2}{5} \qquad \text{(இருபுறமும் $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ -ஐக் கூட்ட )}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$$

$$\Longrightarrow \quad x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}} \qquad \text{(இரு புறமும் வர்க்கமூலம் எடுக்க)}$$

$$x = \frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{19}}{5} = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}.$$

ஆகவே, தீர்வு கணம் $= \left\{\frac{3+\sqrt{19}}{5}, \frac{3-\sqrt{19}}{5}\right\}$.

### எடுத்துக்காட்டு 3.40

வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க: $a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$

**தீர்வு** $a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{3b}{a}x + \frac{2b^2}{a^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x = \frac{-2b^2}{a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x + \frac{9b^2}{4a^2} = \frac{9b^2}{4a^2} - \frac{2b^2}{a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{9b^2 - 8b^2}{4a^2} \qquad \Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x - \frac{3b}{2a} = \pm\frac{b}{2a} \qquad \Longrightarrow \quad x = \frac{3b \pm b}{2a}$$

ஆகவே, தீர்வு கணம் $= \left\{\frac{b}{a}, \frac{2b}{a}\right\}$.

### 3.8.3 சூத்திர முறை மூலம் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணுதல் (Solution of quadratic equation by formula method)

இப்பகுதியில் ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காணப் பயனுள்ள இருபடிச் சூத்திரத்தை வருவிப்போம்.

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$, என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டினை எடுத்துக் கொள்வோம். சமன்பாட்டினை பின்வருமாறு எழுத,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a}$$

இருபுறமும் $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ ஐக் கூட்ட, $x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ எனப் பெறலாம்.

அதாவது, $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Longrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

எனவே, $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

தீர்வுக் கணம் = $\left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$.

சமன்பாடு (1)-ல் கொடுக்கப்பட்ட சூத்திரம் இருபடிச் சூத்திரம் (quadratic formula) எனப்படும். இப்போது இருபடிச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி சில இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்போம்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.41**

இருபடிச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் சமன்பாட்டைத் தீர்.

$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+4}$ இங்கு $x + 1 \neq 0,\ x + 2 \neq 0$ மற்றும் $x + 4 \neq 0$.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு வடிவமைப்பில் இல்லை என்பதை அறிக.

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+4}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{2}{x+4} - \frac{1}{x+2}\right] = 2\left[\frac{2x + 4 - x - 4}{(x+4)(x+2)}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{x}{(x+2)(x+4)}\right]$$

$\Longrightarrow \quad x^2 + 6x + 8 = 2x^2 + 2x \Longrightarrow x^2 - 4x - 8 = 0$ என்ற ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டினைப் பெறுகிறோம். (மீ.பொ.ம-வைப் பயன்படுத்தியும் மேலேயுள்ள சமன்பாட்டைப் பெறலாம்)

இருபடிச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

ஆகவே, $x = 2 + 2\sqrt{3}$ மற்றும் $2 - 2\sqrt{3}$

எனவே, தீர்வுக் கணம் $= \{2 + 2\sqrt{3},\ \ 2 - 2\sqrt{3}\}$.

## பயிற்சி 3.15

1 வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க .

(i) $x^2 + 6x - 7 = 0$ (ii) $x^2 + 3x + 1 = 0$

(iii) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ (iv) $4x^2 + 4bx - (a^2 - b^2) = 0$

(v) $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$ (vi) $\frac{5x + 7}{x - 1} = 3x + 2$

2. இருபடிச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $15x^2 - 11x + 2 = 0$

(iii) $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$ (iv) $3a^2x^2 - abx - 2b^2 = 0$

(v) $a(x^2 + 1) = x(a^2 + 1)$ (vi) $36x^2 - 12ax + (a^2 - b^2) = 0$

(vii) $\frac{x - 1}{x + 1} + \frac{x - 3}{x - 4} = \frac{10}{3}$ (viii) $a^2x^2 + (a^2 - b^2)x - b^2 = 0$

### 3.8.4 இருபடிச் சமன்பாடுகளை உள்ளடக்கிய கணக்குகளின் தீர்வு காணுதல் (Solution of problems involving quadratic equations)

இப்பகுதியில், சொற்றொடர்களால் அமைந்த இருபடிச் சமன்பாடுகளை உள்ளடக்கிய சில எளிய கணக்குகளுக்கும் மற்றும் நம் அன்றாட வாழ்நிலைகளை விவரிக்கும் சில கணக்குகளுக்கும் தீர்வுகள் காண்போம். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களில் இருந்து சமன்பாட்டை அமைத்து, பின்னர் அதன் தீர்வுகளைக் காண்போம். இறுதியில் கொடுக்கப்பட்ட கணக்கிற்குப் பொருத்தமான தீர்வைத் தேர்வு செய்வோம்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.42**

ஒரு எண் மற்றும் அதன் தலைகீழி ஆகியவற்றின் கூடுதல் $5\frac{1}{5}$ எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.

**தீர்வு** தேவையான எண் $x$ எனக் கொள்க. இங்கு $x \neq 0$. $x$-ன் தலைகீழி $\frac{1}{x}$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனையின்படி,

$$x + \frac{1}{x} = 5\frac{1}{5} \implies \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{26}{5}$$

$$5x^2 - 26x + 5 = 0$$

$$\implies 5x^2 - 25x - x + 5 = 0$$

அதாவது, $(5x - 1)(x - 5) = 0 \implies x = 5$ அல்லது $\frac{1}{5}$.

எனவே, தேவையான எண் $5$ அல்லது $\frac{1}{5}$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.43**

ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் அதன் குத்துயரத்தைவிட 4 செ.மீ அதிகம். முக்கோணத்தின் பரப்பு 48 ச.செ.மீ எனில், அம்முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தையும் உயரத்தையும் காண்க.

**தீர்வு** முக்கோணத்தின் குத்துயரம் $x$ செ. மீ என்க.

ஆகவே, முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் $(x+4)$ செ.மீ.

$$\text{முக்கோணத்தின் பரப்பு} = \frac{1}{2} \times \text{அடிப்பக்கம்} \times \text{உயரம்}$$

நிபந்தனையின்படி, $\frac{1}{2}(x+4)(x) = 48$

$\Longrightarrow \quad x^2 + 4x - 96 = 0 \quad \Longrightarrow (x+12)(x-8) = 0$

$\Longrightarrow x = -12$ அல்லது $8$

ஆனால், $x = -12$ என இருக்க முடியாது.

(ஏனெனில், முக்கோணத்தின் பக்க நீளம் மிகை எண்ணாக இருக்கவேண்டும்)

எனவே, $x = 8$, $x + 4 = 12$

ஆகவே, முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் = 12 செ.மீ மற்றும் உயரம் = 8 செ. மீ ஆகும்.

## எடுத்துக்காட்டு 3.44

ஒரு மகிழுந்து புறப்பட வேண்டிய நேரத்திலிருந்து 30 நிமிடம் தாமதமாகப் புறப்பட்டது. 150 கி.மீ தூரத்தில் உள்ள சேருமிடத்தை சரியான நேரத்தில் சென்றடைய அதனுடைய வழக்கமான வேகத்தை மணிக்கு 25 கி.மீ அதிகப்படுத்த வேண்டியிருந்தது எனில், மகிழுந்தின் வழக்கமான வேகத்தைக் காண்க.

**தீர்வு** மகிழுந்தின் வழக்கமான வேகம் $= x$ கி.மீ/மணி.

அதிகரிக்கப்பட்ட பின் வேகம் $= (x + 25)$ கி.மீ/மணி.

மொத்த தூரம் = 150 கி.மீ. ; எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் $= \frac{\text{தூரம்}}{\text{வேகம்}}$

கொடுக்கப்பட்ட தூரத்தை மகிழுந்து கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் வழக்கமான நேரம் $T_1$ எனவும், வேகத்தை அதிகப்படுத்தியதால் எடுத்துக்கொண்ட நேரம் $T_2$ எனவும் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து, $T_1 - T_2 = \frac{1}{2}$ மணி (30 நிமிடங்கள் $= \frac{1}{2}$ மணி)

$$\Longrightarrow \quad \frac{150}{x} - \frac{150}{x+25} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow 150\left[\frac{x+25-x}{x(x+25)}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 25x - 7500 = 0 \quad \Longrightarrow (x+100)(x-75) = 0$$

இவ்வாறு $x = 75$ அல்லது $-100$. ஆனால் $x = -100$ ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கதல்ல.

ஆகவே மகிழுந்தின் வழக்கமான வேகம் = 75கி.மீ / மணி.

## பயிற்சி 3.16

1. ஒரு எண் மற்றும் அதன் தலைகீழி ஆகியவற்றின் கூடுதல் $\frac{65}{8}$ எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.
2. இரண்டு மிகை எண்களின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் 45. சிறிய எண்ணின் வர்க்கம் ஆனது, பெரிய எண்ணின் நான்கு மடங்கிற்குச் சமம் எனில், அந்த எண்களைக் காண்க.

3. ஒரு விவசாயி 100ச.மீ பரப்பளவில் ஒரு செவ்வக வடிவக் காய்கறித் தோட்டத்தை அமைக்க விரும்பினார். அவரிடம் 30 மீ நீளமேயுள்ள முள்கம்பி இருந்ததால் வீட்டின் மதில்சுவரைத் தோட்டத்தின் நான்காவது பக்க வேலியாக வைத்துக் கொண்டு அக்கம்பியால் மூன்று பக்கமும் வேலியை அமைத்தார். தோட்டத்தின் பக்க அளவுகளைக் காண்க.

4. ஒரு செவ்வக வடிவ நிலம் 20 மீ நீளம் மற்றும் 14 மீ அகலம் கொண்டது. அதைச் சுற்றி வெளிப்புறத்தில் அமைந்துள்ள சீரான அகலமுள்ள பாதையின் பரப்பு 111 ச.மீ எனில், பாதையின் அகலம் என்ன?

5. சீரான வேகத்தில் ஒரு தொடர் வண்டியானது (train) 90 கி.மீ தூரத்தைக் கடந்தது. அதனுடைய வேகம் மணிக்கு 15 கி.மீ அதிகரிக்கப்பட்டிருந்தால், பயணம் செய்யும் நேரம் 30 நிமிடங்கள் குறைந்திருக்கும் எனில், தொடர் வண்டியின் சீரான வேகம் காண்க.

6. அசைவற்ற நீரில் ஒரு இயந்திரப்படகின் வேகம் மணிக்கு 15 கி.மீ. என்க. அப்படகு நீரோட்டத்தின் திசையில் 30 கி.மீ தூரம் சென்று, பிறகு எதிர்த் திசையில் திரும்பி 4 மணி 30 நிமிடங்களில் மீண்டும் புறப்பட்ட இடத்திற்கு திரும்பி வந்தால் நீரின் வேகத்தைக் காண்க.

7. ஒரு வருடத்திற்கு முன்பு, ஒருவரின் வயது அவருடைய மகனின் வயதைப்போல் 8 மடங்கு. தற்போது அவருடைய வயது, மகனின் வயதின் வர்க்கத்திற்குச் சமம் எனில், அவர்களுடைய தற்போதைய வயதைக் காண்க.

8. ஒரு சதுரங்கப் பலகையில் 64 சம சதுரங்கள் உள்ளன. ஒவ்வொரு சதுரத்தின் பரப்பு 6.25 ச.செமீ. என்க. சதுரங்கப் பலகையில் நான்குப் பக்கங்களிலும் வெளிப்புற சதுரங்களை ஒட்டி 2 செ.மீ அகலத்தில் பட்டையான ஓரம் உள்ளது எனில், சதுரங்கப் பலகையின் பக்கத்தின் நீளத்தினைக் காண்க.

9. ஒரு வேலையைச் செய்ய $A$-க்கு $B$-யை விட 6 நாட்கள் குறைவாகத் தேவைப்படுகிறது. இருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையைச் செய்தால் அதை 4 நாட்களில் முடிக்க இயலும் எனில், $B$ தனியே அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் முடிக்க இயலும்?

10. ஒரு இரயில் நிலையத்திலிருந்து இரண்டு தொடர் வண்டிகள் ஒரே நேரத்தில் புறப்படுகின்றன. முதல் வண்டி மேற்கு திசையை நோக்கியும், இரண்டாம் வண்டி வடக்கு திசையை நோக்கியும் பயணம் செய்கின்றன. முதல் வண்டியானது இரண்டாவது வண்டியை விட மணிக்கு 5 கி. மீ அதிக வேகத்தில் செல்கிறது. இரண்டு மணி நேரத்திற்குப் பிறகு அவற்றிற்கு இடையேயுள்ளள தொலைவு 50 கி.மீ. எனில், ஒவ்வொரு வண்டியின் சராசரி வேகத்தினைக் காண்க.

### 3.8.5 இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மை (Nature of roots of a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c = 0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ என அறிவோம்.

(i) $b^2 - 4ac > 0$ எனில், இரு வெவ்வேறான மெய்யெண் மூலங்கள் உள்ளன.

அவைகள், $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ மற்றும் $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

(ii) $b^2 - 4ac = 0$ எனில், சமன்பாட்டிற்கு இரு சமமான மெய்யெண் மூலங்கள் உள்ளன. சம மூலம் $x = \dfrac{-b}{2a}$ ஆகும்.

(iii) $b^2 - 4ac < 0$ எனில், $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ஒரு மெய்யெண் அல்ல. ஆகையால், இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் மூலங்கள் இல்லை.

மூலங்களின் தன்மை $b^2 - 4ac$-ன் மதிப்புகளைச் சார்ந்துள்ளது. மேலும் $b^2 - 4ac$-ன் மதிப்பு $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மையைக் காட்டுகிறது. ஆகவே, $b^2 - 4ac$ ஆனது இருபடிச் சமன்பாட்டின் தன்மைக்காட்டி (discriminant) என அழைக்கப்படுகிறது. இது $\triangle$ என்ற குறியால் குறிக்கப்படுகிறது.

| தன்மைக்காட்டி $\triangle = b^2 - 4ac$ | மூலங்களின் தன்மை |
|---|---|
| $\triangle > 0$ | மெய்யெண்கள், சமமில்லை |
| $\triangle = 0$ | மெய்யெண்கள், சமம் |
| $\triangle < 0$ | மூலங்கள் மெய்யெண்கள் அல்ல, அதாவது மூலங்கள் கற்பனையானவை |

### எடுத்துக்காட்டு 3.45

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மையை ஆராய்க.

(i) $x^2 - 11x - 10 = 0$  (ii) $4x^2 - 28x + 49 = 0$  (iii) $2x^2 + 5x + 5 = 0$

**தீர்வு** $ax^2 + bx + c = 0$-ன் தன்மைக்காட்டி $\triangle = b^2 - 4ac$.

(i) இங்கு $a = 1$; $b = -11$ மற்றும் $c = -10$.

எனவே, தன்மைக்காட்டி $\triangle = b^2 - 4ac$

$$= (-11)^2 - 4(1)(-10) = 121 + 40 = 161$$

இங்கு, $\triangle > 0$. ஆகவே மூலங்கள் மெய்யெண்கள் மற்றும் சமமற்றவை.

(ii) இங்கு, $a = 4$, $b = -28$ மற்றும் $c = 49$.

எனவே, தன்மைக்காட்டி $\triangle = b^2 - 4ac$

$$= (-28)^2 - 4(4)(49) = 0$$

$\triangle = 0$ என்பதால் மூலங்கள் மெய்யெண்களாகவும் சமமாகவும் இருக்கும்.

(iii) இங்கு, $a = 2$, $b = 5$ மற்றும் $c = 5$.

எனவே, தன்மைக்காட்டி $\triangle = b^2 - 4ac$

$$= (5)^2 - 4(2)(5)$$

$$= 25 - 40 = -15$$

இங்கு $\triangle < 0$ என்பதால், சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண்களாலான மூலங்கள் கிடையாது.

### எடுத்துக்காட்டு 3.46

$a$ மற்றும் $b$ ஆகியன மெய்யெண்கள். மேலும் $c$ ஒரு விகிதமுறு எண் என அமைந்த சமன்பாடு $(a - b + c)x^2 + 2(a - b)x + (a - b - c) = 0$ ன் மூலங்கள் ஆனது விகிதமுறு எண்கள் என நிறுவுக.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $Ax^2 + Bx + C = 0$ என்ற வடிவில் எழுதுக.

இங்கு $A = a - b + c,\ B = 2(a - b)$ மற்றும் $C = a - b - c$

$Ax^2 + Bx + C = 0$-ன் தன்மைக்காட்டி $\triangle = B^2 - 4AC$

அதாவது, 
$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= [2(a-b)]^2 - 4(a-b+c)(a-b-c) \\ &= 4(a-b)^2 - 4[(a-b)+c][(a-b)-c] \\ &= 4(a-b)^2 - 4[(a-b)^2 - c^2] \end{aligned}$$

ஆகவே, $\triangle = 4(a-b)^2 - 4(a-b)^2 + 4c^2 = 4c^2$, ஒரு முழுவர்க்கம்.

எனவே, $\triangle > 0$ மற்றும் ஒரு முழு வர்க்கமாதலால், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் விகிதமுறு எண்கள் ஆகும்.

## எடுத்துக்காட்டு 3.47

$x^2 - 2x(1 + 3k) + 7(3 + 2k) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் மற்றும் சமம் எனில் $k$-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^2 - 2x(1 + 3k) + 7(3 + 2k) = 0$. (1)

சமன்பாடு (1)-ஐ $ax^2 + bx + c = 0$ என்பதுடன் ஒப்பிட,

$$a = 1,\ b = -2(3k+1),\ c = 7(3+2k).$$

ஆகவே, தன்மைக்காட்டி 
$$\begin{aligned} \triangle = b^2 - 4ac &= b^2 - 4ac \\ &= (-2(3k+1))^2 - 4(1)(7)(3+2k) \\ &= 4(9k^2 + 6k + 1) - 28(3+2k) = 4(9k^2 - 8k - 20) \end{aligned}$$

சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமம் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால்,

$$\triangle = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 9k^2 - 8k - 20 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (k-2)(9k+10) = 0$$

ஆகவே, $k = 2,\ -\frac{10}{9}$.

## பயிற்சி 3.17

1. சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மையை ஆராய்க.

   (i) $x^2 - 8x + 12 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

   (iii) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ (iv) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$

   (v) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$ (vi) $(x - 2a)(x - 2b) = 4ab$

2. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் மற்றும் சமமானவை எனில், $k$ இன் மதிப்புகளைக்கண்டுபிடி.

   (i) $2x^2 - 10x + k = 0$ (ii) $12x^2 + 4kx + 3 = 0$

   (iii) $x^2 + 2k(x - 2) + 5 = 0$ (iv) $(k + 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$

3. $x^2 + 2(a+b)x + 2(a^2+b^2) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் அல்ல எனக் காட்டுக.

4. $3p^2x^2 - 2pqx + q^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் அல்ல எனக் காட்டுக.

5. $a$ , $b$ , $c$ மற்றும் $d \neq 0$ என அமைந்த $(a^2+b^2)x^2 - 2(ac+bd)x + c^2 + d^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமெனில், $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ என நிறுவுக.

6. $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$-ன் மூலங்கள் எப்பொழுதும் மெய்யெண்கள் என்றும், $a = b = c$ என இல்லாவிடில் மட்டுமே அம்மூலங்கள் சமமற்றவை என்றும் நிறுவுக.

7. சமன்பாடு $(1+m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$-ன் மூலங்கள் சமம் எனில், $c^2 = a^2(1+m^2)$ என நிறுவுக.

## 3.8.6 இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்புகள் (Relations between roots and coefficients of a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c = 0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டில் $a$ , $b$ , $c$ ஆகியன மெய்யெண்கள் மற்றும் $a \neq 0$ என்க. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ என்க.

ஆகவே, $\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ மற்றும் $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

எனவே, மூலங்களின் கூடுதல் $\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\Longrightarrow \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{x\text{-ன் கெழு}}{x^2\text{-ன் கெழு}}$$

மூலங்களின் பெருக்கற்பலன், $\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{-ன் கெழு}}$$

> $ax^2 + bx + c = 0$-ன் மூலங்கள் $\alpha, \beta$ எனில்,
>
> (i) மூலங்களின் கூடுதல், $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
>
> (ii) மூலங்களின் பெருக்கற்பலன், $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

### மூலங்கள் கொடுக்கப்படும்போது இருபடிச் சமன்பாட்டை அமைத்தல்
### (Formation of quadratic equation when roots are given)

$\alpha$ மற்றும் $\beta$ என்பன ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனக் கொள்க.

ஆகவே, $(x-\alpha)$ மற்றும் $(x-\beta)$ என்பன அதன் காரணிகள் ஆகும்.

$$\therefore \quad (x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = 0$$

அதாவது, $x^2$ – (மூலங்களின் கூடுதல்) $x$ + மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் = 0

**குறிப்பு**

கொடுக்கப்பட்ட இரு மூலங்களைக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடுகள் முடிவிலி எண்ணிக்கையில் உள்ளன.

**எடுத்துக்காட்டு 3.48**

$3x^2-10x+k=0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $\frac{1}{3}$ எனில், மற்றொரு மூலத்தைக் காண்க. மேலும் $k$-ன் மதிப்பையும் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $3x^2-10x+k=0$.

இரு மூலங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ என்க.

$$\therefore \quad \alpha+\beta = \frac{-(-10)}{3} = \frac{10}{3} \qquad (1)$$

$\alpha = \frac{1}{3}$ என்பதை (1)-ல் பிரதியிட, $\beta = 3$ எனக் கிடைக்கிறது.

மேலும், $\alpha\beta = \frac{k}{3}, \quad \Longrightarrow \quad k = 3$

ஆகவே, மற்றொரு மூலம் $\beta = 3$ மற்றும் $k$-ன் மதிப்பு = 3.

**எடுத்துக்காட்டு 3.49**

$ax^2-5x+c=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூடுதல் 10 மற்றும் பெருக்கற்பலன் 10 எனில், $a$ மற்றும் $c$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $ax^2-5x+c=0$.

மூலங்களின் கூடுதல், $\frac{5}{a} = 10, \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$

மூலங்களின் பெருக்குத் தொகை, $\frac{c}{a} = 10$

$$\Longrightarrow \quad c = 10a = 10\times\frac{1}{2} = 5$$

எனவே, $a = \frac{1}{2}$ மற்றும் $c = 5$

**குறிப்பு**

$ax^2+bx+c=0$-ன் மூலங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ எனில், $\alpha$ மற்றும் $\beta$-க்களைக் கொண்ட $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^2\beta^2$, $\alpha^2-\beta^2$ போன்ற கோவைகளை $\alpha+\beta$ மற்றும் $\alpha\beta$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கொண்டு மதிப்பீடு செய்ய முடியும்.

முடிவுகள்

$\alpha$ மற்றும் $\beta$ ஆகியவற்றைக் கொண்ட சில முடிவுகள் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளன.

(i) $|\alpha-\beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$

(ii) $\alpha^2+\beta^2 = [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]$

(iii) $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = (\alpha+\beta)[\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\,]$. இங்கு $\alpha \ge \beta$

(iv) $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

(v) $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

(vi) $\alpha^4+\beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = [(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]^2 - 2(\alpha\beta)^2$

(vii) $\alpha^4-\beta^4 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)$

**எடுத்துக்காட்டு 3.50**

$2x^2-3x-1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\alpha^2+\beta^2$ (ii) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$

(iii) $\alpha-\beta$, இங்கு $\alpha>\beta$ (iv) $\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)$

(v) $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\beta\right)$ (vi) $\alpha^4+\beta^4$ (vii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta}+\dfrac{\beta^3}{\alpha}$

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $2x^2-3x-1=0$. (1)

$\alpha$ மற்றும் $\beta$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்க.

சமன்பாடு (1) ஐ $ax^2+bx+c=0$ என்பதுடன் ஒப்பிட, $a=2,\ b=-3,\ c=-1$.

$\therefore\ \alpha+\beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-3)}{2} = \dfrac{3}{2}$ மற்றும் $\alpha\beta = -\dfrac{1}{2}$

(i) $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{4}+1 = \dfrac{13}{4}$

(ii) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{13}{4}\times(-2) = -\dfrac{13}{2}$

(iii) $\alpha-\beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$, இங்கு $\alpha>\beta$

$= \left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{9}{4}+2\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

(iv) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha} = \dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} = \dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \dfrac{\frac{27}{8}+\frac{9}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{45}{4}$

(v) $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\beta\right) = \dfrac{(\alpha\beta+1)(1+\alpha\beta)}{\alpha\beta}$

$= \dfrac{(1+\alpha\beta)^2}{\alpha\beta} = \dfrac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2}$

(vi) $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$

$$= \left(\frac{13}{4}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{169}{16} - \frac{1}{2}\right) = \frac{161}{16}.$$

(vii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta} + \dfrac{\beta^3}{\alpha} = \dfrac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} = \left(\dfrac{161}{16}\right)\left(-\dfrac{2}{1}\right) = -\dfrac{161}{8}.$

**எடுத்துக்காட்டு 3.51**

$7 + \sqrt{3}$ மற்றும் $7 - \sqrt{3}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றினை அமைக்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட மூலங்கள் $7 + \sqrt{3}$ மற்றும் $7 - \sqrt{3}$.

மூலங்களின் கூடுதல் $= 7 + \sqrt{3} + 7 - \sqrt{3} = 14$.

மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $= (7 + \sqrt{3})(7 - \sqrt{3}) = (7)^2 - (\sqrt{3})^2 = 49 - 3 = 46$.

தேவையான சமன்பாடு, $x^2 -$ (மூலங்களின் கூடுதல்) $x +$ (மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்) $= 0$

ஆகவே, தேவையான சமன்பாடு $x^2 - 14x + 46 = 0$ ஆகும்.

**எடுத்தக்காட்டு 3.52**

$\alpha$ மற்றும் $\beta$ என்பன $3x^2 - 4x + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ மற்றும் $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டினை அமைக்க.

**தீர்வு** $3x^2 - 4x + 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha, \beta$ எனில், $\alpha + \beta = \dfrac{4}{3}$, $\alpha\beta = \dfrac{1}{3}$.

தேவையான சமன்பாட்டிற்கான மூலங்களின் கூடுதல்

$$= \left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right) = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{28}{9}$$

மேலும், மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $= \left(\dfrac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right) = \alpha\beta = \dfrac{1}{3}$

ஆகவே, தேவையான சமன்பாடு $x^2 - \dfrac{28}{9}x + \dfrac{1}{3} = 0$ (அல்லது) $9x^2 - 28x + 3 = 0$ ஆகும்.

**பயிற்சி 3.18**

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் ஆகியவற்றைக் காண்க.

   (i) $x^2 - 6x + 5 = 0$ (ii) $kx^2 + rx + pk = 0$

   (iii) $3x^2 - 5x = 0$ (iv) $8x^2 - 25 = 0$

2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூலங்களைக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளை அமைக்கவும்.

   (i) 3 , 4 (ii) $3 + \sqrt{7}, 3 - \sqrt{7}$ (iii) $\dfrac{4 + \sqrt{7}}{2}, \dfrac{4 - \sqrt{7}}{2}$

3. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha, \beta$ எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha - \beta$ (iii) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$

4. $\alpha, \beta$ என்பன $3x^2 - 6x + 4 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $\alpha^2 + \beta^2$ -ன் மதிப்புக் காண்க.

5. $\alpha, \beta$ என்பன $2x^2 - 3x - 5 = 0$-ன் மூலங்கள் எனில், $\alpha^2$ மற்றும் $\beta^2$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றினை அமைக்க.

6. $x^2 - 3x + 2 = 0$-ன் மூலங்கள் $\alpha, \beta$ எனில், $-\alpha$ மற்றும் $-\beta$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றினை அமைக்க.

7. $\alpha, \beta$ என்பன $x^2 - 3x - 1 = 0$-ன் மூலங்கள் எனில், $\frac{1}{\alpha^2}$ மற்றும் $\frac{1}{\beta^2}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றினை அமைக்க.

8. $3x^2 - 6x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha, \beta$ எனில், கீழ்க்காணும் மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாடுகளைஅமைக்க

(i) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta,\ \beta^2\alpha$ (iii) $2\alpha + \beta,\ 2\beta + \alpha$

9. $4x^2 - 3x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தலைகீழிகளை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு ஒன்றினை அமைக்க.

10. $3x^2 + kx - 81 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றொரு மூலத்தின் வர்க்கமெனில், $k$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

11. $2x^2 - ax + 64 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றொரு மூலத்தின் இருமடங்கு எனில், $a$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

12. $5x^2 - px + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின மூலங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ என்க. மேலும் $\alpha - \beta = 1$ எனில், $p$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

## பயிற்சி 3.19

**சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.**

1. $6x - 2y = 3, kx - y = 2$ என்ற தொகுப்பிற்கு ஒரேயொரு தீர்வு உண்டெனில்,

(A) $k = 3$ (B) $k \neq 3$ (C) $k = 4$ (D) $k \neq 4$

2. இரு மாறிகளில் உள்ள நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஒருங்கமையாதது எனில், அவற்றின் வரைபடங்கள்

(A) ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்தும் (B) ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும்
(C) எந்தப் புள்ளியிலும் வெட்டிக் கொள்ளாது (D) $x$-அச்சை வெட்டும்

3. $x - 4y = 8$ , $3x - 12y = 24$ என்னும் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு
(A) முடிவிலி எண்ணிக்கையில் தீர்வுகள் உள்ளன
(B) தீர்வு இல்லை
(C) ஒரேயொரு தீர்வு மட்டும் உண்டு
(D) ஒரு தீர்வு இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

4. $p(x) = (k+4)x^2+13x+3k$ என்னும் பல்லுறுப்புக்கோவையின் ஒரு பூச்சியம் மற்றொன்றின் தலைகீழியானால், $k$-ன் மதிப்பு
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

5. $f(x) = 2x^2 + (p+3)x + 5$ என்னும் பல்லுறுப்புக்கோவையின் இரு பூச்சியங்களின் கூடுதல் பூச்சியமெனில் $p$-ன் மதிப்பு.
(A) 3 (B) 4 (C) $-3$ (D) $-4$

6. $x^2 - 2x + 7$ என்பதை $x+4$ ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதி
(A) 28 (B) 29 (C) 30 (D) 31

7. $x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ என்பதை $x-1$ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் ஈவு
(A) $x^2 + 4x + 3$ (B) $x^2 - 4x + 3$ (C) $x^2 - 4x - 3$ (D) $x^2 + 4x - 3$

8. $(x^3 + 1)$ மற்றும் $x^4 - 1$ ஆகியனவற்றின் மீ. பொ.வ
(A) $x^3 - 1$ (B) $x^3 + 1$ (C) $x+1$ (D) $x - 1$

9. $x^2 - 2xy + y^2$ மற்றும் $x^4 - y^4$ ஆகியனவற்றின் மீ. பொ.வ
(A) 1 (B) $x+y$ (C) $x-y$ (D) $x^2 - y^2$

10. $x^3 - a^3$ மற்றும் $(x - a)^2$ ஆகியனவற்றின் மீ. பொ.ம
(A) $(x^3 - a^3)(x + a)$ (B) $(x^3 - a^3)(x - a)^2$
(C) $(x - a)^2(x^2 + ax + a^2)$ (D) $(x + a)^2(x^2 + ax + a^2)$

11. $k \in \mathbb{N}$ எனும்போது $a^k, a^{k+3}, a^{k+5}$ ஆகியவற்றின் மீ. பொ.ம
(A) $a^{k+9}$ (B) $a^k$ (C) $a^{k+6}$ (D) $a^{k+5}$

12. $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 6}$ என்னும் விகிதமுறு கோவையின் மிகச் சுருக்கிய வடிவம்
(A) $\dfrac{x-3}{x+3}$ (B) $\dfrac{x+3}{x-3}$ (C) $\dfrac{x+2}{x-3}$ (D) $\dfrac{x-3}{x+2}$

13. $\dfrac{a+b}{a-b}$ மற்றும் $\dfrac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$ ஆகியன இரு விகிதமுறு கோவைகள் எனில், அவற்றின் பெருக்கற்பலன்
(A) $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$ (B) $\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$ (C) $\dfrac{a^2 - ab - b^2}{a^2 + ab + b^2}$ (D) $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab - b^2}$

14. $\dfrac{x^2 - 25}{x+3}$ என்பதை $\dfrac{x+5}{x^2 - 9}$ ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் ஈவு
(A) $(x-5)(x-3)$ (B) $(x-5)(x+3)$ (C) $(x+5)(x-3)$ (D) $(x+5)(x+3)$

15. $\dfrac{a^3}{a-b}$ உடன் $\dfrac{b^3}{b-a}$ ஐக் கூட்ட, கிடைக்கும் புதிய கோவை

(A) $a^2+ab+b^2$ (B) $a^2-ab+b^2$ (C) $a^3+b^3$ (D) $a^3-b^3$

16. $49\,(x^2-2xy+y^2)^2$-ன் வர்க்கமூலம்

(A) $7|x-y|$ (B) $7(x+y)(x-y)$ (C) $7(x+y)^2$ (D) $7(x-y)^2$

17. $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$ -ன் வர்க்கமூலம்

(A) $|x+y-z|$ (B) $|x-y+z|$ (C) $|x+y+z|$ (D) $|x-y-z|$

18. $121x^4y^8z^6(l-m)^2$-ன் வர்க்கமூலம்

(A) $11x^2y^4z^4|l-m|$ (B) $11x^4y^4|z^3(l-m)|$

(C) $11x^2y^4z^6|l-m|$ (D) $11x^2y^4|z^3(l-m)|$

19. $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள்சமம் எனில், $c$-ன் மதிப்பு

(A) $\dfrac{b^2}{2a}$ (B) $\dfrac{b^2}{4a}$ (C) $-\dfrac{b^2}{2a}$ (D) $-\dfrac{b^2}{4a}$

20. $x^2+5kx+16=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் மூலங்கள் இல்லையெனில்,

(A) $k>\dfrac{8}{5}$ (B) $k>-\dfrac{8}{5}$ (C) $-\dfrac{8}{5}<k<\dfrac{8}{5}$ (D) $0<k<\dfrac{8}{5}$

21. 3 -ஐ ஒரு மூலமாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

(A) $x^2-6x-5=0$ (B) $x^2+6x-5=0$

(C) $x^2-5x-6=0$ (D) $x^2-5x+6=0$

22. $x^2-bx+c=0$ மற்றும் $x^2+bx-a=0$ ஆகிய சமன்பாடுகளின் பொதுவான மூலம்

(A) $\dfrac{c+a}{2b}$ (B) $\dfrac{c-a}{2b}$ (C) $\dfrac{c+b}{2a}$ (D) $\dfrac{a+b}{2c}$

23. $a\neq 0$, என அமைந்த சமன்பாடு $ax^2+bx+c=0$-ன் மூலங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது மெய்யல்ல?

(A) $\alpha^2+\beta^2=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$ (B) $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

(C) $\alpha+\beta=\dfrac{b}{a}$ (D) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=-\dfrac{b}{c}$

24. $ax^2+bx+c=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ எனில், $\dfrac{1}{\alpha}$ மற்றும் $\dfrac{1}{\beta}$ ஆகியனவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச்சமன்பாடு

(A) $ax^2+bx+c=0$ (B) $bx^2+ax+c=0$

(C) $cx^2+bx+a=0$ (D) $cx^2+ax+b=0$

25. $b=a+c$ என்க. $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமம் எனில்,

(A) $a=c$ (B) $a=-c$

(C) $a=2c$ (D) $a=-2c$

## நினைவில் கொள்க

- $x$ மற்றும் $y$ ஆகிய மாறிகளில் உள்ள நேரியல் சமன்பாடுகளைக் கொண்ட முடிவுறு கணம் என்பது அந்த மாறிகளில் உள்ள நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு எனப்படும். இத்தொகுப்பையே ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் என்போம்.
- இரு மாறிகளில் ஒன்றை முதலில் நீக்கியபின் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கு தீர்வு காண்பது நீக்கல் முறை எனப்படும்.
- $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ , $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்க்க, குறுக்குப் பெருக்கு முறையை பயன்படுத்த மிக உதவியாகவுள்ள அம்புக்குறிப் படம்

$$\begin{array}{ccccccc} & x & & y & & 1 & \\ b_1 & & c_1 & & a_1 & & b_1 \\ b_2 & & c_2 & & a_2 & & b_2 \end{array}$$

- $p(k) = 0$ எனில், $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு மெய்யெண் $k$ ஆனது ஒரு பூச்சியம் ஆகும்.
- $p(x) = ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் கெழுக்கள் மற்றும் பூச்சியங்களுக்கு இடையேயான அடிப்படைத் தொடர்புகள்,

  பூச்சியங்களின் கூடுதல் $= -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{x^2\text{-ன் கெழு}}$

  பூச்சியங்களின் பெருக்கற்பலன் $= \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{-ன் கெழு}}$

- (i) பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$-க்கு, $x = a$ ஆனது ஒரு பூச்சியம் எனில், எனில் மட்டுமே $p(a) = 0$ ஆகும்.

  (ii) $x - a$ ஆனது $p(x)$-க்கு ஒரு காரணி எனில், எனில் மட்டுமே $p(a) = 0$ ஆகும்.
- இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இயற்கணிதக் கோவைகளின் மீ. பொ. வ. என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொருக் கோவையையும் மீதியில்லாமல் வகுக்கக் கூடிய மிகப்பெரிய படியைக் கொண்டக் கோவை ஆகும்.
- இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இயற்கணிதக் கோவைகளின் மீ. பொ. ம. என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு கோவையினாலும் மீதியின்றி வகுபடக் கூடிய மிகக் குறைந்த படியைக் கொண்ட கோவை ஆகும்.
- ஏதேனும் இரண்டு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம. ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன், அவ்விரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமம்.
- $a \in \mathbb{R}$ என்பது ஒரு மிகை மெய்யெண் என்க. $a$-ன் வர்க்கமூலமானது $b^2 = a$ எனுமாறு அமையும் மெய்யெண் $b$ ஆகும். $a$-ன் வர்க்கமூலத்தினை $\sqrt[2]{a}$ அல்லது $\sqrt{a}$ எனக் குறிக்கலாம்.

- $ax^2 + bx + c = 0$ என்பது மாறி $x$-ல் உள்ள ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் ஆகும். இங்கு $a$, $b$ மற்றும் $c$ என்பன மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.
- ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டை (i) காரணிப்படுத்தல் முறை (ii) வர்க்கப் பூர்த்தி முறை (iii) சூத்திரத்தை பயன்படுத்தும் முறை ஆகிய முறைகளில் தீர்க்க முடியும்.
- $b^2 - 4ac \geq 0$ எனில், $ax^2 + bx + c = 0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ஆகும்.
- $ax^2 + bx + c = 0$ எனும் இருபடிச்சமன்பாட்டிற்கு

  (i) $b^2 - 4ac > 0$ எனில், இரு வெவ்வேறான மெய்யெண் மூலங்கள் உள்ளன

  (ii) $b^2 - 4ac = 0$ எனில், இரு சமமான மெய்யெண்மூலங்கள் உள்ளன

  (iii) $b^2 - 4ac < 0$ எனில், மெய்யான மூலங்கள் இல்லை.

**உங்களுக்குத் தெரியுமா ?**

பெர்மாட்டின் இறுதித் தேற்றம் (Fermat's last theorem) :

$x^n + y^n = z^n$ என்னும் கோவைக்கு $n > 2$ எனும் போது முழுக்களில் தீர்வு இல்லை.

"உண்மையிலேயே மிகச் சிறந்த நிருபணத்தை நான் கண்டு பிடித்து விட்டேன். ஆனால், நிருபணத்தை முழுமையாக எழுதிவிடும் அளவிற்கு இந்தத் தாளில் இடம் இல்லாமல், மிகக் குறைவான பகுதியே உள்ளது" என பெர்மாட் எழுதினார். 1994-ல் ஆங்கிலேய கணிதவியல் அறிஞர் ஆன்ட்ரு வைல்ஸ் (Andrew Wiles) என்பவர் இதற்குத் தீர்வு காணும் வரை 300 ஆண்டுகளாக இத்தேற்றத்திற்கு தீர்வு காணமுடியவில்லை. உயர்நிலைப்பள்ளி மாணவனாக இருக்கும் போது, நகர நூல்நிலையத்தில் (City Library) இந்தக் கணக்கினை ஆண்ட்ரு வைல்ஸ் தெரிந்து கொண்டார் என்பது ஒரு சிறப்பான செய்தியாகும்.

# 4

# அணிகள்

*Number, place, and combination - the three intersecting but distinct spheres of thought to which all mathematical ideas admit of being referred .- Sylvester*

- அறிமுகம்
- அணிகளின் அமைப்பு
- அணிகளின் வகைகள்
- அணிகளின் கூட்டல், கழித்தல் மற்றும் பெருக்கல்
- அணிச் சமன்பாடுகள்

**ஜேம்ஸ் ஜோசப் சில்வெஸ்டர்**
(James Joseph Sylvester)
(1814-1897)
இங்கிலாந்து

அணிக் கோட்பாடு, மாறாக் கோட்பாடு, எண்ணியல் கோட்பாடு மற்றும் சேர்ப்புக் கணிதவியல் ஆகிய வற்றிற்கு சில்வெஸ்டர் அடிப்படை கொள்கைகளை அளித்தார். கொடுக் கப்பட்ட ஒரு அணியுடன் பரிமாற்றம் செய்யக்கூடிய அனைத்து அணி களையும் கண்டறிந்தார். மேலும், *"discriminant"* அதாவது தன்மைக் காட்டி முதலான பல கணிதவியல் கலைச் சொற்களை அறிமுகப் படுத்தினார்.

1880-ம் ஆண்டில் இலண்டன் இராயல் சொசைட்டி, அறிவியல் சாதனைக்கான மிக உயரிய விருதான காப்ளி பதக்கத்தை (*Copley Medal*) இவருக்கு வழங்கியது. இவ்வமைப்பு 1901-ம் ஆண்டில் கணித ஆய்வுகளை ஊக்குவிக்கும் பொருட்டு இவரின் நினைவாக "சில்வெஸ்டர் பதக்கம்" எனும் விருதை நிறுவியது.

## 4.1 அறிமுகம்

இந்த அத்தியாயத்தில் அணி (Matrix) என்ற முக்கியமான கணிதக் கருத்து பற்றி கற்றறிவோம். இங்கு அணிகளை அறிமுகப்படுத்தி, அதன் இயற்கணித அடிப்படைகளைக் கற்போம்.

18 மற்றும் 19 ஆம் நூற்றாண்டுகளில் அணிகள் கண்டறியப்பட்டு ஒரு கணிதக் கருத்தாக வளர்ச்சியடைந்தது. முதலில், வடிவியல் உருவங்களின் உருமாற்றம் மற்றும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் ஆகியனவற்றின் காரணமாகவே, அணிகள் பற்றியக் கருத்து வளர்ச்சியடைந்தது. தற்போது கணிதவியலில் உள்ள முக்கியமான கருவிகளில் ஒன்றாக அணிகள் விளங்குகின்றன. பல எண்களைக் கொண்ட வரிசையை ஒரே பொருளாகக் கருதி, அதற்கு ஒரு குறியிட்டு, அத்தகைய குறியீடுகளைக் கொண்டு கணக்குகளை மிகவும் சுருங்கிய வடிவில் செய்திட வழிவகைச் செய்வதால், அணிகள் பயனுள்ளவையாக இருக்கின்றன. இவ்வாறு பெறப்படும் கணிதவியலின் சுருக்கெழுத்தான அணிகள் ஒரு சீரிய மற்றும் வலிமையானது ஆகும். அணி பல நடைமுறை கணக்குகளைத் தீர்க்க உதவுகிறது.

1850-ல் ஜேம்ஸ் ஜோசப் சில்வெஸ்டர் என்பவர், எண்களின் வரிசை அமைப்பிற்கு Matrix (அணி) என்ற சொல்லை அறிமுகப் படுத்தினார். Matrix என்பது கருவறையைக் குறிக்கும் இலத்தின் மொழிச் சொல்லாகும். ஆங்கிலத்திலும் இதே பொருள் தான். ஏதாவது ஒன்றை ஏற்படுத்தும் அல்லது உருவாக்கும் இடம் என்ற பொருளில் கூட Matrix எனும் சொல் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

$x$ மற்றும் $y$-களில் அமைந்த கீழ்க்காணும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பினைக் கருதுவோம்.

$$3x - 2y = 4 \qquad (1)$$

$$2x + 5y = 9 \qquad (2)$$

நீக்கல் முறையைப் (இதனை காசியன் நீக்கல் முறை எனவும் குறிப்பிடலாம்) பயன்படுத்தி, இதன் தீர்வு (2, 1) என்பதை நம்மால் எளிதில் பெறமுடியும். இந்த நீக்கல் முறையில், மாறிகளை பயன்படுத்தாமல் நாம் கெழுக்களை மட்டும் பயன்படுத்துகின்றோம். மேற்கண்ட நேரியல் சமன்பாடுகளுக்கு அணி இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி, அதே நீக்கல் முறையில் தீர்வை எளிதில் காணலாம்.

## 4.2 அணிகளை அமைத்தல் (Formation of matrices)

அணிகள் எவ்வாறு அமைகின்றன என்பதை அறிந்து கொள்ள கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளைக் கருதுவோம்.

குமாரிடம் 10 பேனாக்கள் உள்ளன. இந்த விவரத்தை (10) என எழுதலாம். அடைப்புக்குறி ( )-க்குள் உள்ள எண் குமாரிடம் உள்ள பேனாக்களின் எண்ணிக்கையை குறிக்கும்.

குமாரிடம் 10 பேனாக்கள் மற்றும் 7 பென்சில்கள் உள்ளன என்க. இந்த விவரத்தை (10 7) என எழுதலாம். அடைப்புக்குறி ( )-க்குள் உள்ள முதல் எண் குமாரிடம் உள்ள பேனாக்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும். அடுத்த எண், பென்சில்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும்.

பின்வரும் விவரங்களைக் கருதுவோம். குமார் மற்றும் அவருடைய நண்பர்கள் இராசு மற்றும் கோபு ஆகியோரிடமுள்ள பேனா மற்றும் பென்சில்கள் விவரம் :

குமாரிடம் 10 பேனாக்களும் 7 பென்சில்களும்
இராசுவிடம் 8 பேனாக்களும் 4 பென்சில்களும்
கோபுவிடம் 6 பேனாக்களும் 5 பென்சில்களும் உள்ளன.

பின்வருமாறு இவற்றை வரிசைப்படுத்தி அட்டவணை வடிவில் எழுதலாம்.

| | பேனாக்கள் | பென்சில்கள் |
|---|---|---|
| குமார் | 10 | 7 |
| இராசு | 8 | 4 |
| கோபு | 6 | 5 |

மேலேயுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையினை செவ்வக வரிசையில் பின்வருமாறு எழுதலாம். இதிலுள்ள எண்கள் முறையே அம்மூவரின் பேனா மற்றும் பென்சில்களின் எண்ணிக்கையை குறிப்பிடுகின்றன.

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{முதல் நிரை} \\ \leftarrow \text{இரண்டாம் நிரை} \\ \leftarrow \text{மூன்றாம் நிரை} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{முதல் நிரல்} & \text{இரண்டாம் நிரல்} \end{array} & \end{array}$$

இதே விவரத்தை மற்றொரு முறையிலும் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

| | குமார் | இராசு | கோபு |
|---|---|---|---|
| பேனாக்கள் | 10 | 8 | 6 |
| பென்சில்கள் | 7 | 4 | 5 |

இவற்றை செவ்வக வடிவில் வரிசையாக பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

$$\text{(ii)} \quad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{முதல் நிரை} \\ \leftarrow \text{இரண்டாம் நிரை} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{முதல் நிரல்} & \text{2-ம் நிரல்} & \text{3-ம் நிரல்} \end{array} & \end{array}$$

மேலேயுள்ள (i)-ல் முதல் குத்து வரிசையிலுள்ள எண்கள் முறையே குமார், இராசு, கோபுவிடமுள்ள பேனாக்களின் எண்ணிக்கையும், இரண்டாம் குத்து வரிசையிலுள்ள எண்கள் முறையே அவர்களிடமுள்ள பென்சில்களின் எண்ணிக்கையும் குறிக்கின்றன.

அதேபோல், (ii)-ல் முதல் கிடைநிலை வரிசையிலுள்ள எண்கள் முறையே குமார், இராசு, கோபு ஆகியோரிடமுள்ள பேனாக்களின் எண்ணிக்கையும், இரண்டாம் கிடைநிலை வரிசை எண்கள் அவர்களிடமுள்ள பென்சில்களின் எண்ணிக்கையும் குறிக்கின்றன.

மேலே விவரித்தவாறு, எண்களை செவ்வக வடிவில் வரிசைப்படுத்திக் காட்டுதலை அணி (MATRIX) என்கிறோம்,

**வரையறை**

ஒரு அடைப்புக்குறிக்குள் செவ்வக அமைப்பில் நிரைகளிலும், நிரல்களிலும் வரிசையாக எண்களைக் கொண்ட அமைப்பு, அணி (MATRIX) எனப்படும்.

அணிகளை $A, B, X, Y, \cdots$ போன்ற ஆங்கில பெரிய எழுத்துகளைக் கொண்டு குறிப்போம். ஒவ்வொரு அணியிலும் உள்ள எண்கள் அதன் உறுப்புகள் (entries அல்லது elements) எனப்படும். ஒவ்வொரு கிடைநிலை வரிசையும் அணியின் ஒரு நிரை (row) எனப்படும். ஒவ்வொரு குத்து வரிசையும் அவ்வணியின் ஒரு நிரல் (column) எனப்படும்.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & 9 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ என்பன}$$

அணிகளுக்கான சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

### 4.2.1 அணியின் பொது வடிவம் (General form of a matrix)

$m$ நிரைகளையும், $n$ நிரல்களையும் கொண்ட அணி $A$-யின் பொதுவடிவம்

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

இங்கு $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{mn}$ என்பன அணியின் உறுப்புகளாகும்.

இந்த அணியை $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ அல்லது $A = (a_{ij})_{m\times n}$ என்றும் எழுதலாம்.

இங்கு $i = 1, 2, 3, \dots, m$ மற்றும் $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

மேலும், அணி $A = (a_{ij})_{m\times n}$-ல் $a_{ij}$ என்பது $i$ஆவது நிரை மற்றும் $j$ஆவது நிரல் சந்திக்கும் இடத்திலுள்ள உறுப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ எனில், $a_{23} = 1$. அதாவது, உறுப்பு 1-ஆனது இரண்டாவது நிரையில் மற்றும் மூன்றாவது நிரலில் இருக்கும்.

இதேபோல், $a_{11} = 4$, $a_{12} = 5$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 6$, $a_{22} = 2$, $a_{31} = 7$, $a_{32} = 8$ மற்றும் $a_{33} = 9$.

### 4.2.2 அணியின் வரிசை (அ) பரிமாணம் (Order or Dimension of a matrix)

$A$ என்ற ஒரு அணியில் $m$ நிரைகளும் $n$ நிரல்களும் இருப்பின், அணி $A$-ன் வரிசை $m\times n$ ஆகும். (இதை $m$ by $n$ எனப் படிக்கவும்)

உதாரணமாக,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ என்ற அணியில் 2 நிரைகளும் 3 நிரல்களும் உள்ளன.

எனவே, அணி $A$-ன் வரிசை $2 \times 3$ ஆகும்.

குறிப்பு

$m \times n$ வரிசை கொண்ட அணியில், முதல் எழுத்து $m$ என்பது நிரைகளின் எண்ணிக்கையையும் மற்றும் இரண்டாவது எழுத்து $n$ என்பது நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் குறிக்கும்.

## 4.3 அணிகளின் வகைகள் (Types of matrices)

இப்போது அணிகளின் சில வகைகளைக் கற்போம்.

### (i) நிரை அணி (Row matrix)

ஒரு அணியில் ஒரேயொரு நிரை இருந்தால், அவ்வணி நிரை அணி எனப்படும். நிரை அணியை நிரை வெக்டர் (row vector) எனவும் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = (5 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 1)$ மற்றும் $B = (\,-3 \quad 0 \quad 5\,)$ என்பன நிரை அணிகள். இவற்றின் வரிசைகள் முறையே $1 \times 4$ மற்றும் $1 \times 3$ ஆகும்.

பொதுவாக, $A = (a_{ij})_{1 \times n}$ என்பது $1 \times n$ வரிசையுள்ள நிரை அணி ஆகும்.

### (ii) நிரல் அணி (Column matrix)

ஒரு அணியில் ஒரேயொரு நிரல் இருந்தால், அவ்வணி நிரல் அணி எனப்படும். நிரல் அணியை நிரல் வெக்டர் (column vector) எனவும் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ என்பன நிரல் அணிகள். இவற்றின் வரிசைகள் முறையே $2 \times 1$ மற்றும் $3 \times 1$ ஆகும்.

பொதுவாக, $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$ என்பது வரிசை $m \times 1$ கொண்ட நிரல் அணி ஆகும்

### (iii) சதுர அணி (Square matrix)

ஓர் அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கையானது நிரல்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருப்பின் அவ்வணி சதுர அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -7 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ என்பன சதுர அணிகள். இவற்றின் வரிசைகள் முறையே 2 மற்றும் 3 ஆகும்.

பொதுவாக, $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ என்பது $m$ வரிசையுள்ள ஒரு சதுர அணியாகும். இங்கு $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{mm}$ என்பன சதுர அணி $A$-ன் முதன்மை மூலை விட்ட உறுப்புகள் (principal or leading diagonal elements) எனப்படும்.

### (iv) மூலை விட்ட அணி (Diagonal matrix)

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்கு மேலேயும் கீழேயும் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியங்கள் எனில், அவ்வணி மூலை விட்ட அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ என்பன முறையே 2 மற்றும் 3 வரிசையுடைய மூலை விட்ட அணிகளாகும். பொதுவாக, $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ என்பது மூலைவிட்ட அணி எனில், $i \neq j$ என்றவாறு உள்ள அனைத்து $i,j$-களுக்கும் $a_{ij} = 0$ ஆகும்.

> **குறிப்பு**
> மூலைவிட்ட அணிகளில் முதன்மை மூலை விட்ட உறுப்புகளில் சில உறுப்புகள் பூச்சியங்களாகவும் இருக்கலாம்.

### (v) திசையிலி அணி (Scalar matrix)

ஒரு மூலைவிட்ட அணியில், முதன்மை மூலை விட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் சமமாகவும் பூச்சியமில்லாத மாறிலியாகவும் இருப்பின் அந்த அணி, திசையிலி அணி எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ என்பன முறையே 2 மற்றும் 3 வரிசைகளைக் கொண்ட திசையிலி அணிகளாகும்.

பொதுவாக, $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ ஒரு திசையிலி அணி எனில், $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ எனும்போது} \\ k, & i = j \text{ எனும்போது} \end{cases}$

இங்கு $k$ என்பது ஒரு திசையிலி. அதாவது, $k$ ஒரு மாறிலி.

### (vi) அலகு அணி (Unit matrix)

ஒரு திசையிலி அணியில் முதன்மை மூலை விட்ட உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றும் 1 எனில், அந்த அணி அலகு அணி எனப்படும். $n$ வரிசையுடைய அலகு அணியை $I_n$ எனக் குறிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ மற்றும் } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ என்பன முறையே 2 மற்றும் 3 வரிசையுடைய அலகு அணிகள்.

பொதுவாக, சதுர அணி $A = (a_{ij})_{n\times n}$ என்பது அலகு அணி எனில் $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ எனும்போது} \\ 0, & i \neq j \text{ எனும்போது} \end{cases}$

> **குறிப்பு**
> அணிகளில் பெருக்கலைப் பொருத்து அலகு அணியைச் சமனி அணி (identity matrix) எனவும் குறிப்பிடலாம். எல்லா அலகு அணிகளும் திசையிலி அணிகளாகும். ஆனால், ஒரு திசையிலி அணி அலகு அணியாக இருக்க வேண்டியது இல்லை. எண்களில் 1 எவ்வாறு செயல்படுகிறதோ அதேபோல் அணிகளில் அலகு அணி செயல்படுகிறது.

### (vii) பூச்சிய அணி (Null matrix or Zero-matrix)

ஒரு அணியிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் பூச்சியம் எனில், அந்த அணி பூச்சிய அணி எனப்படும். இந்த அணியை $O$ எனக்குறிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ மற்றும் } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ என்பன முறையே $2 \times 3$ மற்றும் $2 \times 2$ வரிசை கொண்ட பூச்சிய அணிகள் ஆகும்.

> **குறிப்பு**
> (i) பூச்சிய அணி ஒரு சதுர அணியாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. (ii) எண்களில் பூச்சியம் எவ்வாறு செயல்படுகிறதோ, அதேபோல் அணிகளில் பூச்சிய அணி செயல்படுகிறது. (iii) ஒரு அணியுடன் அதே வரிசையுள்ள பூச்சிய அணியை கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ அந்த அணி மாறாது.

### (viii) நிரை நிரல் மாற்று அணி (Transpose of a matrix)

**வரையறை :** $A$ என்ற அணியின் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளகாவும் மாற்றக் கிடைக்கும் அணி $A$-ன் நிரை நிரல் மாற்று அணி எனப்படும். $A$-ன் நிரை நிரல் மாற்று அணியை $A^T$ ($A$ transpose எனப்படிக்கவும்) எனக் குறிப்போம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ எனில், } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

பொதுவாக, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. இங்கு $i = 1, 2, 3, \cdots, m$ மற்றும் $j = 1, 2, 3, \cdots, n$ எனில்,

$$A^T = [b_{ij}]_{n\times m}. \text{ இங்கு } b_{ij} = a_{ji},\ i = 1, 2, \cdots, n \text{ மற்றும் } j = 1, 2, \cdots, m.$$

**எடுத்துக்காட்டு 4.1**

| திங்கள் | செவ்வாய் | புதன் | வியாழன் | வெள்ளி |
|---|---|---|---|---|
| H 88 | H 90 | H 86 | H 84 | H 85 |
| L 54 | L 56 | L 53 | L 52 | L 52 |

அட்டவணையில் 5 நாட்களின் உயர்ந்த (H) வெப்பநிலை மற்றும் குறைந்த (L) வெப்பநிலை (பாரன்ஹீட்டில்) தரப்பட்டுள்ளன.

5 நாட்களின் உயர்ந்த மற்றும் குறைந்த வெப்பநிலைகளை அணி வடிவத்தில் முறையே முதல் நிரை உயர்ந்த வெப்பநிலையையும், 2-ஆம் நிரை குறைந்த வெப்பநிலையையும் குறிப்பதாக அமைக்கவும். அதிக வெப்பநிலை உடைய நாளைக் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு அணி வடிவில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$A = \begin{array}{c} \\ H \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{தி} & \text{செ} & \text{பு} & \text{வி} & \text{வெ} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{pmatrix} \end{array}. \text{ அதாவது, } A = \begin{pmatrix} 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{pmatrix}$$

அணியின் முதல் நிரையில் உள்ள விவரங்களின்படி அதிக வெப்பநிலை (H) உள்ள நாள் செவ்வாய்க்கிழமை ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 4.2**

நான்கு உணவுப் பொருட்களில் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள கொழுப்புச் சத்து, கார்போஹைடிரேட் மற்றும் புரதச் சத்து ஆகிவற்றின் அளவுகள் (கிராமில்) கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

| | பொருள் 1 | பொருள் 2 | பொருள் 3 | பொருள் 4 |
|---|---|---|---|---|
| கொழுப்புச் சத்து | 5 | 0 | 1 | 10 |
| கார்போஹைடிரேட் | 0 | 15 | 6 | 9 |
| புரதச் சத்து | 7 | 1 | 2 | 8 |

மேற்கண்ட விவரங்களை $3\times 4$ மற்றும் $4\times 3$ அணிகளாக எழுதுக.

**தீர்வு** தேவையான $3\times 4$ வரிசை கொண்ட அணியை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 15 & 6 & 9 \\ 7 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}. \text{ இங்கு நிரல்கள் உணவுப் பொருட்களைக் குறிக்கின்றன.}$$

எனவே, ஒவ்வொரு நிரலும் ஒவ்வொரு உணவுப் பொருளில் உள்ள மூன்று உணவுச் சத்துக்களின் அளவுகளைக் குறிக்கிறது.

மேலும், தேவையான $4 \times 3$ வரிசை அணி $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 15 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ ஆகும்.

இதிலுள்ள ஒவ்வொரு நிரையும் ஒவ்வொரு உணவுப் பொருளிலுள்ள மூன்று உணவுச் சத்துக்களின் அளவுகளை குறிக்கிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 4.3**

$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \\ 9 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ எனில், (i) அணியின் வரிசை (ii) $a_{13}$ மற்றும் $a_{42}$ உறுப்புகள் (iii) 2 என்ற உறுப்பு அமைந்துள்ள நிலை ஆகியனவற்றைக் காண்க.

**தீர்வு** (i) அணி A-ல் 4 நிரைகளும் 3 நிரல்களும் உள்ளன. எனவே A-ன் வரிசை $4 \times 3$.

(ii) $a_{13}$ என்ற உறுப்பு முதல் நிரையில் 3-ஆவது நிரலில் உள்ளது. எனவே $a_{13} = 8$.

$a_{42}$ என்ற உறுப்பு 4-ஆவது நிரையில் 2-ஆவது நிரலில் உள்ளது. எனவே $a_{42} = -2$

(iii) உறுப்பு 2 என்பது 2-ஆவது நிரை மற்றும் 2-ஆவது நிரலில் உள்ளது. அதாவது $a_{22} = 2$.

**எடுத்துக்காட்டு 4.4**

$a_{ij} = |2i - 3j|$ என்ற உறுப்புகளைக் கொண்ட, வரிசை $2 \times 3$ உள்ள அணி $A = [a_{ij}]$-யினை அமைக்கவும்.

**தீர்வு** பொதுவாக $2 \times 3$ வரிசையுள்ள அணி $a_{12} = |2(1) - 3(2)| = 4$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.

$a_{ij} = |2i - 3j|$, $i = 1, 2$ மற்றும் $j = 1, 2, 3$ எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால்

$a_{11} = |2(1) - 3(1)| = |-1| = 1$, $a_{12} = |2(1) - 3(2)| = 4$, $a_{13} = |2(1) - 3(3)| = 7$

$a_{21} = |2(2) - 3| = 1$, $a_{22} = |2(2) - 3(2)| = 2$, $a_{23} = |2(2) - 9| = 5$

ஆகவே, தேவையான அணி $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 4.5**

$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ எனில், $A^T$ மற்றும் $(A^T)^T$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

**தீர்வு** $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. $A$-யின் நிரை நிரல் மாற்று அணி (transpose) $A^T$ என்பது $A$-யின் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றி எழுதக் கிடைக்கும்.

எனவே, $A^T = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. இதேபோல் $(A^T)^T$ அணியானது,

அணி $A^T$-ன் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றக் கிடைக்கும்.

ஆகவே, $(A^T)^T = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

குறிப்பு

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, $(A^T)^T = A$ என அறிய முடிகிறது. எந்த ஒரு அணி $B$-க்கும் $(B^T)^T = B$ என்பது உண்மை. மேலும் எந்த ஒரு மாறிலி $k$-க்கும் $(kA)^T = kA^T$ ஆகும்.

## பயிற்சி 4.1

1. ஒரு பொழுது போக்கு நீர் விளையாட்டுப் பூங்காவின் கட்டண விகிதம் பின்வருமாறு.

| | வார நாட்களில் கட்டணம் (₹) | விடுமுறை நாட்களில் கட்டணம் (₹) |
|---|---|---|
| வயது வந்தோர் | 400 | 500 |
| சிறுவர் | 200 | 250 |
| மூத்தக் குடிமகன் | 300 | 400 |

வயது வந்தோர், சிறுவர் மற்றும் மூத்தக்குடிமகனுக்கான கட்டண விகிதங்களுக்கான அணிகளை எழுதுக. மேலும் அவற்றின் வரிசைகளை எழுதுக.

2. ஒரு நகரத்தில் 6 மேல்நிலைப் பள்ளிகள், 8 உயர்நிலைப் பள்ளிகள் மற்றும் 13 தொடக்கப் பள்ளிகள் உள்ளன. இந்த விவரங்களை $3\times1$ மற்றும் $1\times3$ வரிசைகளைக் கொண்ட அணிகளாக குறிக்கவும்.

3. பின்வரும் அணிகளின் வரிசைகளைக் காண்க.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (iv) $(3 \ \ 4 \ \ 5)$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 9 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

4. 8 உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு அணிக்கு எவ்வகை வரிசைகள் இருக்க இயலும்?

5. 30 உறுப்புகள் கொண்ட அணிக்கு எவ்வகை வரிசைகள் இருக்க இயலும்?

6. பின்வருவனவற்றைக் கொண்டு $2\times2$ வரிசையுடைய அணி $A = [a_{ij}]$-யைக் காண்க

(i) $a_{ij} = ij$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$ (iii) $a_{ij} = \dfrac{i-j}{i+j}$

7. பின்வருவனவற்றைக் கொண்டு $3\times2$ வரிசையைக் கொண்ட அணி $A = [a_{ij}]$-யினைக் காண்க.

(i) $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$ (ii) $a_{ij} = \dfrac{(i-2j)^2}{2}$ (iii) $a_{ij} = \dfrac{|2i-3j|}{2}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 7 & 4 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ எனில், (i) அணியின் வரிசையைக் காண்க. (ii) $a_{24}$ மற்றும் $a_{32}$ ஆகிய உறுப்புகளை எழுதுக (iii) உறுப்பு 7 அமைந்துள்ள நிரை மற்றும் நிரலைக் காண்க.

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ எனில், $A$-யின் நிரை நிரல் மாற்று அணியைக் காண்க.

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ எனில், $(A^T)^T = A$ என்பதனைச் சரிபார்க்க.

## 4.4 அணிகளின் மீதான செயல்கள் (Operation on matrices)

இப்பகுதியில் அணிகளின் சமத்தன்மை, ஒரு அணியை ஒரு திசையிலியால் பெருக்கல், அணிகளின் கூட்டல், அணிகளின் கழித்தல் மற்றும் அணிகளின் பெருக்கல் ஆகியவற்றைக் காண்போம்.

### (i) அணிகளின் சமத்தன்மை (Equality of matrices)

இரு அணிகள் $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ என்பன சமமெனில்,

(i) அவை சமவரிசை உள்ளனவாகவும்,

(ii) $A$ மற்றும் $B$ அணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் அனைத்தும் சமமாக இருக்கும். அதாவது, அனைத்து $i, j$-களுக்கு $a_{ij} = b_{ij}$ என இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, அணிகள் $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ மற்றும் $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ சமமில்லை. ஏனெனில், அவ்வணிகளின் வரிசைகள் சமமில்லை.

மேலும், $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. ஏனெனில், சில ஒத்த உறுப்புகள் சமமாக இல்லை.

**எடுத்துக்காட்டு 4.6**

$\begin{pmatrix} x & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & z \\ 5 & y & 1 \end{pmatrix}$ எனில், $x$, $y$ மற்றும் $z$ ஆகியனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிகள் சமம். ஆகவே, ஒத்த உறுப்புக்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும். ஒத்த உறுப்புகளை ஒப்பிடும்போது, நமக்கு $x = 3$, $y = 9$ மற்றும் $z = 4$ எனக் கிடைக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு 4.7**

தீர்வு காண் : $\begin{pmatrix} y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2x \\ 31+4y \end{pmatrix}$

**தீர்வு** அணிகள் சமமாக இருப்பதால், ஒத்த உறுப்புகள் சமமாக இருக்கும். ஒத்த உறுப்புகளை ஒப்பிடும் போது,

$y = 6 - 2x$ ; $3x = 31 + 4y$ எனக் கிடைக்கும்.

$y = 6 - 2x$ என்பதை $3x = 31 + 4y$ இல் பிரதியிட, $3x = 31 + 4(6 - 2x)$

$3x = 31 + 24 - 8x$ எனக் கிடைக்கும். இதிலிருந்து $x = 5$ ஆகும்.

$x = 5$ எனில், $y = 6 - 2(5) = -4$.

ஆகவே, $x = 5$ மற்றும் $y = -4$.

### (ii) ஒரு அணியை திசையிலியால் பெருக்குதல் (Multiplication of a matrix by a scalar)

**வரையறை**

அணி $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $k$ என்பது ஒரு திசையிலி (மெய்யெண்) ஆகியன தரப்பட்டுள்ளன. புதிய அணி $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ஐ எல்லா $i, j$-களுக்கும் $b_{ij} = ka_{ij}$ என வரையறுத்தால், அணி $B$-யை அணி $A$-ன் திசையிலிப் பெருக்கல் என்போம்.

ஆகவே, அணி $A$-யிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் திசையிலி $k$ ஆல் பெருக்கக்கிடைப்பது அணி $B$ ஆகும். மேலும், $B = kA$ என எழுதலாம். இத்தகைய பெருக்கலையே நாம் திசையிலிப் பெருக்கல் என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ மற்றும் $k$ ஒரு மெய்யெண் எனில்,

$$kA = k\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{pmatrix}.$$

**எடுத்துக்காட்டு 4.8**

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ எனில், $3A$-ஐக் காண்க

**தீர்வு** அணி $A$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் 3 ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் அணி $3A$ ஆகும்.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-1) & 3(2) & 3(4) \\ 3(3) & 3(6) & 3(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & -15 \end{pmatrix}$$

### (iii) அணிகளின் கூட்டல் (Addition of matrices)

கணிதம் மற்றும் அறிவியல் பாடங்களில் 3 மாணவர்களும், 3 மாணவிகளும் பெற்ற மதிப்பெண்களை முறையே பின்வரும் அணிகள் $A$ மற்றும் $B$ ஆகியன காட்டுகின்றன.

$$A = \begin{array}{c} \text{கணிதம்} \\ \begin{pmatrix} 45 & 72 & 81 \\ 30 & 90 & 65 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{மாணவர்கள்} \\ \text{மாணவிகள்} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \text{அறிவியல்} \\ \begin{pmatrix} 51 & 80 & 90 \\ 42 & 85 & 70 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{மாணவர்கள்} \\ \text{மாணவிகள்} \end{array}$$

ஒவ்வொரு மாணவனும் இரு பாடங்களிலும் பெற்ற மொத்த மதிப்பெண்களைக் காண ஒத்த உறுப்புகளைக் கூட்ட வேண்டும்.

$$A + B = \begin{pmatrix} 45 & 72 & 81 \\ 30 & 90 & 65 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 51 & 80 & 90 \\ 42 & 85 & 70 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 45+51 & 72+80 & 81+90 \\ 30+42 & 90+85 & 65+70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 & 152 & 171 \\ 72 & 175 & 135 \end{pmatrix}$$

முதல் மாணவன் கணிதத்திலும் அறிவியலிலும் சேர்த்து மொத்தம் 96 மதிப்பெண்கள் பெறுகிறார். அதேபோல் மூன்றாவது மாணவி கணிதத்திலும் அறிவியலிலும் சேர்த்து மொத்தம் 135 மதிப்பெண்கள் பெறுகிறார் என்பதை இறுதியாகப் பெறப்பட்ட அணி காட்டுகிறது.

ஆகவே, ஒரே வரிசையுள்ள இரு அணிகளின் கூடுதல், கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு அணிகளின் ஒத்த உறுப்புகளின் கூடுதல்கள் கொண்ட ஒரு அணியாகும்.

**வரையறை**

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ஆகியன சம வரிசை கொண்ட இரு அணிகளானால், $A$ மற்றும் $B$ ஆகியனவற்றின் கூடுதல் அணி $C = [c_{ij}]_{mxn}$ எனில், அனைத்து $i$ மற்றும் $j$-க்களுக்கு $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ஆகும்.

அணிகளின் கூட்டல் செயல், எண்களின் கூட்டலைப் போலவே அமைந்துள்ளது என அறியலாம். $A$ மற்றும் $B$ அணிகளின் கூடுதல் $A+B$ என குறிக்கப்படும். வெவ்வேறு வரிசை கொண்ட அணிகளின் கூடுதலை வரையறுக்க இயலாது.

### எடுத்துக்காட்டு 4.9

$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ எனில், $A+B$ இருக்குமானால், அதனைக் காண்க.

**தீர்வு** அணி $A$-ன் வரிசை $2 \times 3$ மற்றும் B-ன் வரிசை $2 \times 2$. அணிகளின் வரிசை வெவ்வேறாக இருப்பதால், $A$ மற்றும் $B$ ஆகியனவற்றைக் கூட்ட இயலாது.

### எடுத்துக்காட்டு 4.10

$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ எனில், $A + B$ ஐக் காண்க.

**தீர்வு** அணிகள் $A$ மற்றும் $B$-ன் வரிசைகள் சமமாக $2 \times 4$ என இருப்பதால், $A + B$-ஐக் காண இயலும்.

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5+3 & 6-1 & -2+4 & 3+7 \\ 1+2 & 0+8 & 4+2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 10 \\ 3 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

எனவே, $A + B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 10 \\ 3 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

### (iv) எதிர் அணி (Negative of a matrix)

அணி $A = [a_{ij}]_{mxn}$-ன் எதிர் அணி $-A$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. மேலும், $-A = (-1)A$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது, அனைத்து $i$ மற்றும் $j$-க்களுக்கும் $b_{ij} = -a_{ij}$ என்றவாறு $-A = [b_{ij}]_{mxn}$ அமையும்.

### (v) அணிகளின் கழித்தல் (Subtraction of matrices)

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ என்பன ஒரே வரிசையுள்ள இரு அணிகள் எனில், அவைகளின் கழித்தல் $A - B = A + (-1)B$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது, $A - B = [c_{ij}]$ எனில், அனைத்து $i$ மற்றும் $j$-களுக்கும் $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ ஆகும்.

### எடுத்துக்காட்டு 4.11

எடைக் குறைப்புக்கான உணவுக் கட்டுப்பாடுத் திட்டத்தின் தொடக்கத்தில் 4 மாணவர்கள் மற்றும் 4 மாணவிகளின் எடை (கி.கி. இல்) முறையே அணி $A$-ன் முதல் நிரை மற்றும் இரண்டாம் நிரையாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த உணவுக் கட்டுப்பாடு திட்டத்திற்குப் பின்பு அவர்களுடைய எடை அணி $B$-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{மாணவர்கள்} \\ \text{மாணவிகள்} \end{array} \quad \text{மற்றும்} \quad B = \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{மாணவர்கள்} \\ \text{மாணவிகள்} \end{array}$$

மாணவர்கள் மற்றும் மாணவிகளுடைய குறைக்கப்பட்ட எடை அளவினை அணியில் காண்க.

**தீர்வு** எடை குறைப்பு அணி $A - B = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

## 4.5 அணிகளின் கூட்டல் பண்புகள் (Properties of matrix addition)

(i) **அணிகளின் கூட்டல் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது (Matrix addition is commutative)**

$A$ மற்றும் $B$ ஆகியன ஒரே வரிசையுடைய இரு அணிகள் எனில், $A+B = B+A$ ஆகும்.

(ii) **அணிகளின் கூட்டல் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது (Matrix addition is associative)**

$A, B$ மற்றும் $C$ ஆகியன ஒரே வரிசையுடைய மூன்று அணிகள் எனில்,
$A + (B + C) = (A + B) + C$

(iii) **கூட்டல் சமனி (Additive identity)**

அணிகளின் கூட்டலில் பூச்சிய அணியானது கூட்டல் சமனியாகும். அதாவது, $m \times n$ என்ற வரிசையுடைய அணி $A$ எனில், $A + O = O + A = A$ ஆகும். இங்கு $O$ என்பது $m\times n$ என்ற வரிசையுடைய பூச்சிய அணியாகும்.

(iv) **அணியின் கூட்டலுக்கான நேர்மாறு (Additive inverse)**

அணி $B$ ஆனது $A$ என்ற அணிக்கு கூட்டலுக்கான நேர்மாறு அணி எனில், $A+B=B+A= O$. மேலும், $A+(-A)=(-A)+A=O$ என்பதால் $-A$ என்பது $A$-ன் கூட்டலுக்கான நேர்மாறு எனப்படும்.

**குறிப்பு**

ஒரு அணியின் கூட்டலுக்கான நேர்மாறு அணி அதன் எதிர் அணி ஆகும். மேலும், ஒரு அணிக்கு கூட்டலுக்கான நேர்மாறு அணி ஒன்றே ஒன்று தான் (unique) இருக்கும்.

### பயிற்சி 4.2

1. பின்வரும் அணிச்சமன்பாட்டிலிருந்து $x$, $y$ மற்றும் $z$-களின் மதிப்புகளைக் காண்க.
$\begin{pmatrix} 5x+2 & y-4 \\ 0 & 4z+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}$ எனில், $x$ மற்றும் $y$-களின் தீர்வுகளைக் காண்க.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ எனில், $A$-ன் கூட்டல் நேர்மாறு அணியைக் காண்க.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ எனில், $C = 2A + B$ என்ற அணியைக் காண்க.

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ எனில், $6A - 3B$ என்ற அணியைக் காண்க.

6. $a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ எனில், $a$ மற்றும் $b$ ஆகியனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

7. $2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ மற்றும் $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ எனில், $X$ மற்றும் $Y$ ஆகிய அணிகளைக் காண்க.

8. தீர்க்க : $\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ எனில், பின்வருவனவற்றை சரிபார்க்க : (i) $A + B = B + A$ (ii) $A + (-A) = O = (-A) + A$.

10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ எனில், $A + (B + C) = (A + B) + C$ என்பதனைச் சரிபார்க்க.

11. ஒரு மின்னணு குழுமம் தனது விற்பனைக்காக வாங்கும் மின்னணுப் பொருட்களை கண்காணிக்கும் பொருட்டு தனது மூன்று விற்பனைக் கூடங்களில் விற்பனை செய்யப்படும் பொழுதுபோக்குச் சாதனங்கள் பற்றிய விவரங்களைப் பதிவு செய்தது. இரண்டு வாரங்களில் நடைபெற்ற விற்பனை விவரங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன.

| | | T.V. | DVD | Videogames | CD Players |
|---|---|---|---|---|---|
| வாரம் I | கடை I | 30 | 15 | 12 | 10 |
| | கடை II | 40 | 20 | 15 | 15 |
| | கடை III | 25 | 18 | 10 | 12 |
| வாரம் II | கடை I | 25 | 12 | 8 | 6 |
| | கடை II | 32 | 10 | 10 | 12 |
| | கடை III | 22 | 15 | 8 | 10 |

அணிகளின் கூட்டலைப் பயன்படுத்தி இரண்டு வாரங்களில் விற்பனை செய்யப்பட்ட சாதனங்களின் கூடுதலைக் காண்க.

12. ஒரு நீச்சல் குளத்திற்கு ஒரு நாளுக்கான நுழைவுக் கட்டணம் பின்வருமாறு

| ஒரு நாளுக்கான நுழைவுக் கட்டணம் ( ₹ ) | | |
|---|---|---|
| உறுப்பினர் | சிறுவர் | பெரியவர் |
| பிற்பகல் 2 மணிக்கு முன்பு | 20 | 30 |
| பிற்பகல் 2 மணிக்கு பின்பு | 30 | 40 |
| உறுப்பினர் அல்லாதவர் | | |
| பிற்பகல் 2 மணிக்கு முன்பு | 25 | 35 |
| பிற்பகல் 2 மணிக்கு பின்பு | 40 | 50 |

உறுப்பினர் அல்லாதவர்களுக்கு ஏற்படும் கூடுதல் கட்டணத்தைக் குறிக்கும் அணியைக் காண்க.

## 4.6 அணிகளின் பெருக்கல் (Multiplication of matrices)

செல்வி என்பவர் 3 பேனாக்களையும் 2 பென்சில்களையும் வாங்க விரும்புகிறார் என்க. மீனா என்பவருக்கு 4 பேனாக்களும், 5 பென்சில்களும் தேவைப்படுகிறது. ஒரு பேனா மற்றும் ஒரு பென்சில் ஆகியவற்றின் விலை முறையே ₹ 10 மற்றும் ₹ 5 எனில், ஒவ்வொருவருக்கும் பொருட்களை வாங்கத் தேவைப்படும் தொகை எவ்வளவு?

$3 \times 10 + 2 \times 5 = 40$. எனவே, செல்விக்கு ₹ 40 தேவை.

$4 \times 10 + 5 \times 5 = 65$. எனவே, மீனாவிற்கு ₹ 65 தேவை.

அணிகளின் பெருக்கலைப் பயன்படுத்தி மேற்கண்ட தேவைப்படும் தொகைகளைக் காணலாம். மேற்கண்ட தகவல்களை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{array}{ccc} \text{தேவையானவை} & \text{விலை (₹)} & \text{தேவைப்படும் தொகை (₹)} \\ \begin{array}{c}\text{செல்வி}\\ \text{மீனா}\end{array}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3\times 10+2\times 5 \\ 4\times 10+5\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 65 \end{pmatrix} \end{array}$$

மற்றொரு கடையில் ஒரு பேனா மற்றும் ஒரு பென்சிலின் விலைகள் முறையே ₹8 மற்றும் ₹4 எனக்கொள்வோம். இப்போது செல்விக்கும் மீனாவிற்கும் தேவைப்படும் தொகைகள் (₹-ல்) முறையே $3\times 8+2\times 4=32$ மற்றும் $4\times 8+5\times 4=52$ ஆகும்.

மேற்கண்ட தகவல்களை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{array}{ccc} \text{தேவையானவை} & \text{விலை (₹)} & \text{தேவைப்படும் தொகை (₹)} \\ \begin{array}{c}\text{செல்வி}\\ \text{மீனா}\end{array}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3\times 8+2\times 4 \\ 4\times 8+5\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 52 \end{pmatrix} \end{array}$$

இருவரும் இரண்டு கடைகளிலும் தங்களுக்குத் தேவைப்படும் பேனாக்கள் மற்றும் பென்சில்களை வாங்கும் தகவல்களை பின்வருமாறு காணலாம்.

$$\begin{array}{ccc} \text{தேவையானவை} & \text{விலை (₹)} & \text{தேவைப்படும் தொகை (₹)} \\ \begin{array}{c}\text{செல்வி}\\ \text{மீனா}\end{array}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3\times 10+2\times 5 & 3\times 8+2\times 4 \\ 4\times 10+5\times 5 & 4\times 8+5\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 32 \\ 65 & 52 \end{pmatrix} \end{array}$$

மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, முதல் அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை இரண்டாவது அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருப்பின், இரண்டு அணிகளின் பெருக்கலைக் காண இயலும். மேலும், இரு அணிகளின் பெருக்கற்பலனில் உள்ள உறுப்புகள் கிடைக்க, முதல் அணியின் நிரையில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் முறையே இரண்டாவது அணியின் நிரலில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புடன் பெருக்கிக் கூட்ட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B=\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ எனில், பெருக்கற்பலன் அணி $AB$-யைக் காண இயலும். பெருக்கற்பலன் அணி

$AB=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$-ஐக் காண பின்வரும் படிகளில் விளக்குவோம்.

படி 1 : $A$ அணியின் முதல் நிரை உறுப்புகளை முறையே $B$ அணியின் முதல் நிரல் உறுப்புகளால் பெருக்கி, பெருக்கற்பலன்களைக் கூட்டுக. கூட்டி வரும் மதிப்பினை $AB$-ன் முதல் நிரை மற்றும் முதல் நிரலில் எழுதுக.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & \\ & \end{pmatrix}$$

படி 2: படி 1-ல் உள்ள பெருக்கல் முறையைப் பின்பற்றி $A$-ன் முதல் நிரையிலிலுள்ள உறுப்புகளை முறையே $B$-ன் இரண்டாம் நிரலிலுள்ள உறுப்புகளால் பெருக்குக. பெருக்கற்பலன்களின் கூடுதலை, $AB$-யில் முதல் நிரையிலுள்ள இரண்டாம் நிரலில் எழுதுக.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ & \end{pmatrix}$$

படி 3: அதே முறையைப் பின்பற்றி $A$-ன் இரண்டாவது நிரையிலுள்ள உறுப்புகளை $B$-ன் முதல் நிரலிலுள்ள உறுப்புகளால் பெருக்குக. பெருக்கற்பலன்களின் கூட்டுத் தொகையை $AB$-ன் இரண்டாவது நிரையில் முதல் நிரலில் எழுதுக.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & \end{pmatrix}$$

படி 4: $AB$-ன் இரண்டாம் நிரைக்கும், இரண்டாம் நிரலுக்கும் இதே முறையைப் பயன்படுத்துக.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix}$$

படி 5: பெறப்பட்ட எண் மதிப்புகளைச் சுருக்கி அணி $AB$-யினைக் காண்க.

$$\begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -25 \\ 29 & 1 \end{pmatrix}$$

**வரையறை**

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ எனில், இவ்விரு அணிகளின் பெருக்கற்பலன் அணி $AB$ வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும் $AB$-ன் வரிசை $m\times p$ ஆகும். இவ்வுண்மை பின்வரும் படத்தில் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

$A_{m\times n}$ ஒரே எண் $B_{n\times p}$

பெருக்கற்பலன் அணி $AB$-ன் வரிசை $m\times p$

## எடுத்துக்காட்டு 4.12

பின்வருவனவற்றிற்கு அணிகளின் பெருக்கற்பலன் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதா எனத் தீர்மானிக்கவும். அவ்வாறு வரையறுக்கப்படின், பெருக்கி வரும் அணியின் வரிசையைக் காண்க.

(i) $A_{2\times 5}$ மற்றும் $B_{5\times 4}$ (ii) $A_{1\times 3}$ மற்றும் $B_{4\times 3}$

**தீர்வு**

(i) $A$-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், $B$-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருப்பதால் பெருக்கற்பலன் அணி $AB$ வரையறுக்கப்படுகிறது.

மேலும், $AB$-யின் வரிசை $2\times 4$ ஆகும்.

(ii) இங்கு $A$-ன் வரிசை $1\times 3$ மற்றும் $B$-ன் வரிசை $4\times 3$

அணி $A$-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் $B$-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இல்லை என்பதால், இவ்விரு அணிகளின் பெருக்கலை வரையறுக்க இயலாது.

## எடுத்துக்காட்டு 4.13

தீர்வு காண்க : $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$

**தீர்வு** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 4x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$

இருபுறமும் ஒத்த உறுப்புகளை ஒப்பிடும் போது,

$$3x + 2y = 8 \quad \text{மற்றும்} \quad 4x + 5y = 13$$

$$\Longrightarrow 3x + 2y - 8 = 0 \quad \text{மற்றும்} \quad 4x + 5y - 13 = 0.$$

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையில் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்போம்.

$$\begin{array}{cccc} & x & y & 1 \\ 2 & -8 & 3 & 2 \\ 5 & -13 & 4 & 5 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{-26+40} = \frac{y}{-32+39} = \frac{1}{15-8} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{14} = \frac{y}{7} = \frac{1}{7}$$

ஆகவே, $x = 2$ மற்றும் $y = 1$

**எடுத்துக்காட்டு 4.14**

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ மற்றும் $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ எனில், $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2$ என நிறுவுக.

**தீர்வு** அணி $A$ ஆனது ஒரு சதுர அணி என்பதால் $A^2$ வரையறுக்கப்படுகிறது.

எனவே, $A^2 = A \times A$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

தற்போது, $(a+d)A = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) ஆகியவைகளிலிருந்து,

$$A^2 - (a+d)A = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = (bc - ad)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

எனவே, $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2$

## 4.7 அணிகளின் பெருக்கல் பண்புகள் (Properties of matrix multiplication)

மெய்யெண்களுக்கான பெருக்கல் பண்புகளில் சில முக்கியமான பண்புகள், அணிகளின் பெருக்கற்பலனில் மெய்யாக இருக்காது. அத்தகைய சில பண்புகளாவன :

(i) பொதுவாக $AB \neq BA$.மேலும், AB காண முடிந்தால் BA காண முடியும் என்று கூற இயலாது.

(ii) A அல்லது B பூச்சிய அணியாக இல்லாமலிருந்தாலும் AB = 0 ஆக இருக்கலாம்.
அதாவது, AB = 0 எனில், A = 0 அல்லது B = 0 எனக் கருத இயலாது.

(iii) A ஒரு பூச்சிய மற்ற அணி மற்றும் $AB = AC$ என்பதில் B = C எப்போதும் கருத இயலாது.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ மற்றும் $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ஆகிய அணிகளிலிருந்து பின்வருவனவற்றை அறியலாம்.

(i) $AB \neq BA$ (ii) A மற்றும் D பூச்சிய அணிகள் அல்ல. ஆனால், AD = 0

(iii) $AB = AC$, ஆனால் $B \neq C$.

அணிப் பெருக்கலின் சில பண்புகளை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் காண்போம்.

(i) **பொதுவாக அணிகளின் பெருக்கல் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையதல்ல (Matrix multiplication is not commutative in general)**

$A$ மற்றும் $B$ என்பன இரு அணிகள். $AB$ மற்றும் $BA$ ஆகியன வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன எனில் $AB = BA$-வாக இருக்க வேண்டியஅவசியமில்லை.

**எடுத்துக்காட்டு 4.15**

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$ எனில், $AB$ மற்றும் $BA$ ஆகிய அணிகளைக் காண்க. (அவைகள் இருப்பின்)

**தீர்வு** அணி $A$-யின் வரிசை $3 \times 2$ மற்றும் B-யின் வரிசை $2 \times 3$. எனவே $AB$ மற்றும் $BA$-ன் பெருக்கற்பலன்கள் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

தற்போது, $$AB = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 72-42 & -24+7 & 16+35 \\ -18+24 & 6-4 & -4-20 \\ 0+18 & 0-3 & 0-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -17 & 51 \\ 6 & 2 & -24 \\ 18 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

இவ்வாறே, $$BA = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & -69 \\ 50 & -61 \end{pmatrix}.$$ (இங்கு $AB \neq BA$ என்பதைக் கவனிக்கவும்)

*குறிப்பு*

ஒரே வரிசைக் கொண்ட மூலை விட்ட அணிகளின் பெருக்கலில் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு. மேலும் அலகு அணி, அதே வரிசையுள்ள எந்தவொரு சதுர அணியுடனும் பெருக்கலைப் பொருத்து பரிமாற்றுப் பண்பு கொண்டிருக்கும்.

(ii) **எப்போதும் அணியின் பெருக்கல் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது (Matrix multiplication is always associative)**

$A, B$ மற்றும் $C$ என்பன ஏதேனும் மூன்று அணிகளில், இருபுறங்களிலுள்ள பெருக்கற்பலன்கள் வரையறுக்கப்படின், $(AB)C = A(BC)$ என்பது மெய்யாகும்.

(iii) **அணிகளின் பெருக்கலானது, கூட்டலின் கீழ் பங்கீட்டுப் பண்பு உடையது** (Matrix multiplication is distributive over addition)

$A$, $B$ மற்றும் $C$ என்பன ஏதேனும் மூன்று அணிகள் எனில், பின்வருவனவற்றின் இருபுறங்களிலுள்ள பெருக்கற்பலன்கள் வரையறுக்கப்படும்போது,

(i) $A(B+C) = AB + AC$

(ii) $(A+B)C = AC + BC$.

**எடுத்துக்காட்டு 4.16**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \text{ மற்றும் } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$ எனில், $A(B+C) = AB + AC$ என்பதை சரிப்பார்க்கவும்.

தீர்வு $$B+C=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 1 & 10\end{pmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 1 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 38\\ 5 & 34\end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$AB+AC=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+12 & 15+14\\ 2+24 & -5+28\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3-10 & 3+6\\ -1-20 & -1+12\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 29\\ 26 & 23\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & 9\\ -21 & 11\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 38\\ 5 & 34\end{pmatrix} \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிலிருந்து, $A(B+C)=AB+AC$

### (iv) அணிகளின் பெருக்கலுக்கான சமனி அணி (Multiplicative identity)

எந்த ஒரு எண்ணையும் 1 ஆல் பெருக்கும்போது, அதே எண் கிடைக்கும். இப்பண்பு கொண்ட எண் 1-ஐப் போல அணிகளின் இயற்கணிதத்திலும் இத்தகைய பண்பினை கொண்ட அணியினை அறிமுகப்படுத்துவோம்.

$n$ வரிசை கொண்ட சதுர அணி $A$-க்கு $AI=IA=A$ என்பது மெய்யாகும். இங்கு $I$ என்பது $n$ வரிசை கொண்ட அலகு அணியாகும். எனவே, $I$ என்பது பெருக்கல் சமனி (identity matrix under multiplication) எனப்படும்.

**எடுத்துக்காட்டு 4.17**

$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 9 & -6\end{pmatrix}$ எனில், $AI=IA=A$ என்பதைச் சரிபார்க்க. இங்கு I என்பது வரிசை 2 கொண்ட அலகு அணி.

தீர்வு $$AI=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 9 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 0+3\\ 9+0 & 0-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 9 & -6\end{pmatrix}=A$$

$$IA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 9 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 3+0\\ 0+9 & 0-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 9 & -6\end{pmatrix}=A$$

எனவே, $AI=IA=A$.

### (v) அணியின் பெருக்கல் நேர்மாறு (Multiplicative inverse of a Matrix)

$n$ வரிசை கொண்ட சதுர அணி $A$ மற்றும் அதே $n$ வரிசை கொண்ட மற்றொரு சதுர அணி $B$ ஆகிய இரு அணிகள் $AB=BA=I$, $I$ என்பது $n$ வரிசை கொண்ட அலகு அணி, என்றவாறு இருப்பின், $B$ என்பது $A$-ன் பெருக்கல் நேர்மாறு அணி எனப்படும். $A$-ன் நேர்மாறு அணியை $A^{-1}$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

**குறிப்பு**

(i) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ போன்ற ஒரு சில சதுர அணிகளுக்கு பெருக்கல் நேர்மாறு இல்லை.

(ii) $B$ என்பது $A$-ன் பெருக்கல் நேர்மாறு அணியானால், $A$ என்பது $B$-ன் பெருக்கல் நேர்மாறு ஆகும்.

(iii) அணிகளின் பெருக்கல் நேர்மாறு ஒருமைத் தன்மை (uniqueness) உடையது.

**எடுத்துக்காட்டு 4.18**

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ஆகியன அணிப் பெருக்கலைப் பொருத்து ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு அணி என நிறுவுக.

**தீர்வு** தற்போது, $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -15+15 \\ 2-2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

மேலும், $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 10-10 \\ -3+3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட அணிகள் அணிப்பெருக்கலின் கீழ் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு அணிகளாக அமைகின்றன.

(vi) **நிரை நிரல் மாற்று அணியின் பின்-திருப்புகை விதி (Reversal law for transpose of matrices)**

$A$ மற்றும் $B$ என்பன இரு அணிகள் மற்றும் $AB$ வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், $(AB)^T = B^T A^T$.

**எடுத்துக்காட்டு 4.19**

$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ என்ற அணிகளுக்கு $(AB)^T = B^T A^T$ என்பதை சரிப்பார்க்க.

**தீர்வு** தற்போது, $AB = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{pmatrix}$

ஆகவே, $(AB)^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix}$ (1)

இவ்வாறே, $B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix}$ (2)

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $(AB)^T = B^T A^T$ என்பது சரிப்பார்க்கப்பட்டது.

## பயிற்சி 4.3

1. பின்வருவனவற்றுள் ஒவ்வொன்றிலும் அணிகளின் பெருக்கற் பலன் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதா எனத் தீர்மானிக்க. அவ்வாறிருப்பின், பெருக்கற்பலனின் வரிசையை எழுதுக.

(i) $AB$, இங்கு $A = [a_{ij}]_{4\text{x}3}$, $B = [b_{ij}]_{3\text{x}2}$ (ii) $PQ$, இங்கு $P = [p_{ij}]_{4\text{x}3}$, $Q = [q_{ij}]_{4\text{x}3}$

(iii) $MN$, இங்கு $M = [m_{ij}]_{3\text{x}1}$, $N = [n_{ij}]_{1\text{x}5}$ (iv) $RS$, இங்கு $R = [r_{ij}]_{2\text{x}2}$, $S = [s_{ij}]_{2\text{x}2}$

2. பின்வருவனவற்றிற்கு அணிகளின் பெருக்கல் வரையறுக்கப்படுமானால், அவற்றைக் காண்க.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix}$

3. ஒரு பழ வியாபாரி தன்னுடைய கடையில் பழங்களை விற்பனை செய்கிறார். ஆப்பிள், மாம்பழம் மற்றும் ஆரஞ்சு ஆகியவற்றின் ஒவ்வொன்றின் விற்பனை விலை முறையே ₹ 20, ₹ 10 மற்றும் ₹ 5 ஆகும். 3 நாட்களில் விற்பனையாகும் பழங்களின் எண்ணிக்கைகளின் விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

| நாள் | ஆப்பிள் | மாம்பழம் | ஆரஞ்சு |
|---|---|---|---|
| 1 | 50 | 60 | 30 |
| 2 | 40 | 70 | 20 |
| 3 | 60 | 40 | 10 |

ஒவ்வொரு நாளிலும் கிடைத்த மொத்த விற்பனைத் தொகையைக் குறிப்பிடும் ஒரு அணியை எழுதுக. இதிலிருந்து பழங்களின் விற்பனையில் கிடைத்த மொத்தத் தொகையைக் கணக்கிடுக.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ எனில், $x$ மற்றும் $y$-களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

5. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \end{pmatrix}$ மற்றும் $AX = C$ எனில், $x$ மற்றும் $y$-களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ எனில், $A^2 - 4A + 5I_2 = O$ என நிறுவுக.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், $AB$ மற்றும் $BA$ ஆகியவற்றைக் காண்க. அவை சமமாக இருக்குமா ?

8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ எனில், $(AB)C = A(BC)$ என்பதை சரிப்பார்க்கவும்.

9. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ எனில், $(AB)^T = B^T A^T$ என்பதை சரிப்பார்க்கவும்.

10. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ என்ற அணிகள் ஒன்றுக்கொன்று பெருக்கல் நேர்மாறு அணி என நிறுவுக.

11. தீர்க்க : $\begin{pmatrix} x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ எனில், $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ என நிறுவுக.

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ எனில், $(A+B)C$ மற்றும் $AC + BC$ என்ற அணிகளைக் காண்க. மேலும், $(A+B)C = AC + BC$ என்பது மெய்யாகுமா ?

## பயிற்சி 4.4

**சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.**

1. பின்வருவனவற்றுள் எந்தக்கூற்று மெய்யானதல்ல?

   (A) திசையிலி அணியானது ஒரு சதுர அணியாகும்.

   (B) மூலை விட்ட அணியானது ஒரு சதுர அணியாகும்.

   (C) திசையிலி அணியானது ஒரு மூலை விட்ட அணியாகும்.

   (D) மூலை விட்ட அணியானது ஒரு திசையிலி அணியாகும்.

2. $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ என்பது ஒரு சதுர அணி எனில்,

   (A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = 1$ (D) $m = n$

3. $\begin{pmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ எனில், $x$ மற்றும் $y$-களின் மதிப்புகள் முறையே

   (A) $-2 , 7$ (B) $-\frac{1}{3}, 7$ (C) $-\frac{1}{3} , -\frac{2}{3}$ (D) $2 , -7$

4. $A = (1 \ \ -2 \ \ 3)$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ எனில், $A + B =$

   (A) $(0 \ \ 0 \ \ 0)$ (B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (C) $(-14)$ (D) வரையறுக்கப்படவில்லை

5. ஒரு அணியின் வரிசை $2 \times 3$ எனில், அவ்வணியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

   (A) 5 (B) 6 (C) 2 (D) 3

6. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ x & 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், $x$-ன் மதிப்பு

   (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{4}$ (D) 4

7. $A$-ன் வரிசை $3 \times 4$ மற்றும் $B$-ன் வரிசை $4 \times 3$ எனில், $BA$-ன் வரிசை

   (A) $3 \times 3$ (B) $4 \times 4$ (C) $4 \times 3$ (D) வரையறுக்கப்படவில்லை

8. $A \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ \ 2)$ எனில், A-ன் வரிசை

   (A) $2 \times 1$ (B) $2 \times 2$ (C) $1 \times 2$ (D) $3 \times 2$

9. $A$ மற்றும் $B$ என்பன சதுர அணிகள். மேலும் $AB = I$ மற்றும் $BA = I$ எனில், $B$ என்பது

   (A) அலகு அணி (B) பூச்சிய அணி

   (C) $A$-ன் பெருக்கல் நேர்மாறு அணி (D) $-A$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ எனில், $x$ மற்றும் $y$-களின் மதிப்புகள் முறையே

    (A) $2 , 0$ (B) $0 , 2$ (C) $0 , -2$ (D) $1 , 1$

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ மற்றும் $A + B = O$ எனில், $B =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ எனில், $A^2 =$

(A) $\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 36 & 9 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

13. $A$-ன் வரிசை $m \times n$ மற்றும் $B$-ன் வரிசை $p \times q$ என்க. மேலும், $A$ மற்றும் $B$ ஆகியனவற்றின் கூடுதல் காண இயலுமெனில்,

(A) $m = p$ (B) $n = q$ (C) $n = p$ (D) $m = p, n = q$

14. $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ எனில், $a$-ன் மதிப்பு

(A) 8 (B) 4 (C) 2 (D) 11

15. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ மற்றும் $A^2 = I$ எனில்,

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

16. $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ மற்றும் $a_{ij} = i + j$ எனில், $A =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ எனில், $a, b, c$ மற்றும் $d$ ஆகியனவற்றின் மதிப்புகள் முறையே

(A) $-1, 0, 0, -1$ (B) $1, 0, 0, 1$ (C) $-1, 0, 1, 0$ (D) $1, 0, 0, 0$

18. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ எனில், அணி $B =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 5 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \end{pmatrix}$ எனில், $x$-ன் மதிப்பு

(A) 7 (B) $-7$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) 0

20. $A$ மற்றும் $B$ என்பன ஒரே வரிசையுடைய சதுர அணிகள் எனில், கீழ்க்கண்டவைகளில் எது மெய்யாகும்?

(A) $(AB)^T = A^T B^T$ (B) $(A^T B)^T = A^T B^T$ (C) $(AB)^T = BA$ (D) $(AB)^T = B^T A^T$

## நினைவில் கொள்க

- ஒரு அணி என்பது செவ்வக வடிவில் அமைக்கப்பட்ட எண்களின் அமைப்பாகும்.
- ஒரு அணியில் $m$ நிரைகளும் $n$ நிரல்களும் உள்ளது எனில், அதன் வரிசை $m \times n$ ஆகும்.
- $m = 1$ எனில், $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ என்பது ஒரு நிரை அணியாகும்.
- $n = 1$ எனில், $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ என்பது ஒரு நிரல் அணியாகும்.
- $m = n$ எனில், $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ என்பது ஒரு சதுர அணியாகும்.
- $i \neq j$ எனும்போது, $a_{ij} = 0$ எனில், $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ஒரு மூலை விட்ட அணியாகும்.
- $i = j$ எனும்போது $a_{ij} = k$ மற்றும் $i \neq j$ எனும்போது $a_{ij} = 0$ எனில், $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ஒரு திசையிலி அணியாகும். ($k$ என்பது பூச்சியமற்ற ஒரு மாறிலி).
- $i = j$ எனும்போது $a_{ij} = 1$ மற்றும் $i \neq j$ எனும்போது $a_{ij} = 0$ எனில், $A = [a_{ij}]$ என்பது ஒரு அலகு அணியாகும்.
- ஒரு அணியில் எல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியங்கள் எனில், அந்த அணி பூச்சிய அணி எனப்படும்.
- $A$ மற்றும் $B$ அணிகள் ஒரே வரிசை கொண்டதாகவும் அவற்றின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகவும் இருப்பின், அணிகள் $A$ மற்றும் $B$ சமமாகும்.
- இரண்டு அணிகளின் வரிசைகள் சமமாக இருப்பின் அந்த அணிகளை கூட்டவோ (அ) கழிக்கவோ இயலும்.
- அணிகளின் கூட்டல் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது. அதாவது $A$ மற்றும் $B$ அணிகள் ஒரே வரிசை கொண்டவையாக இருப்பின் $A + B = B + A$.
- அணிகளின் கூட்டல் சேர்ப்பு பண்பு உடையது. அதாவது, $A$, $B$ மற்றும் $C$ அணிகள் ஒரே வரிசை உள்ளவையாக இருப்பின் $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- அணி $A$-யின் வரிசை $m\times n$ மற்றும் $B$-ன் வரிசை $n\times p$ எனில், பெருக்கற்பலன் அணி $AB$ வரையறுக்கப்படும். மேலும் அதன் வரிசை $m\times p$ ஆகும்.
- பொதுவாக அணிகளின் பெருக்கல் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையதல்ல. அதாவது, $AB \neq BA$.
- அணிகளின் பெருக்கல் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது. அதாவது, $(AB)C = A(BC)$ ஆகும். (இருபுறமும் வரையறுக்கப்படின்)
- $(A^T)^T = A$, $(A + B)^T = A^T + B^T$ மற்றும் $(AB)^T = B^T A^T$.
- $AB = BA = I$ எனில், அணிகள் A மற்றும் B ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று பெருக்கலின் நேர்மாறு எனப்படும்.
- $AB = O$ எனில், $A = O$ ஆகவோ அல்லது $B = O$ ஆகவோ இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. எனவே, பூச்சியமல்லாத இரு அணிகளின் பெருக்கற்பலன், பூச்சிய அணியாக இருக்கலாம்.

### உங்களுக்குத் தெரியுமா ?

முதன்முதலில், 2003 ஆம் ஆண்டு வழங்கப்பட்ட பரிசான 'அபெல் பரிசு' (Abel Prize) 1 மில்லியன் அமெரிக்க டாலர்களைக் கொண்டது. இது ஒரு சர்வதேச விருதாகும். நார்வே அறிவியல் அகாடமியினால் ஒவ்வொரு ஆண்டும் நார்வே நாட்டின் அரசரால் ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட கணிதவியல் வல்லுநர்களுக்கு இப்பரிசு வழங்கப்படுகிறது.

சென்னையில் பிறந்து, அமெரிக்காவில் வாழும் S.R. சீனிவாச வரதன் அவர்களுக்கு 2007-ல் அபெல் பரிசு வழங்கப்பட்டது. நிகழ்தகவியலில் குறிப்பாக அதிக விலக்கங்கள் உள்ளவைகளை ஒன்றிணைத்து அவர் உருவாக்கிய கருத்தியலுக்காக அபெல் பரிசு வழங்கப்பட்டது.

5

# ஆயத்தொலை வடிவியல்

*No human investigation can be called real science if it cannot be demonstrated mathematically - Leonardo de Vinci*

- அறிமுகம்
- பிரிவுச் சூத்திரம்
- முக்கோணம் மற்றும் நாற்கரத்தின் பரப்பு
- நேர்க்கோடுகள்

**பியரி டி பெர்மாட்**
(Pierre De Fermat)
(1601-1665)
பிரான்ஸ்

17 ஆம் நூற்றாண்டின் முற்பகுதியில் வாழ்ந்த இரு முக்கிய கணிதவியல் அறிஞர்கள் ரெனி டெஸ்கார்டிஸ் மற்றும் பெர்மாட் ஆவர். பகுமுறை வடிவியலின் அடிப்படைக் கொள்கைகளையும், வளைவு கோடுகளின் மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச்சிறிய ஆயத்தொலைவு-களையும் பெர்மாட் கண்டறிந்தார்.

இவர் ஆயத்தொலை வடிவியலில் குறிப்பிடத்தக்கப் பங்காற்றினார். டெஸ்கார்டிஸின் புகழ் பெற்ற "லா ஜியோமிதி" எனும் நூல் வெளியிடுவதற்கு முன்பே, 1636-ல் கைப்பிரதி வடிவில் பகுமுறை வடிவியலில் பியரி டி பெர்மாட்டின் முக்கிய ஆய்வுகள் வெளியிடப்பட்டன.

## 5.1 அறிமுகம்

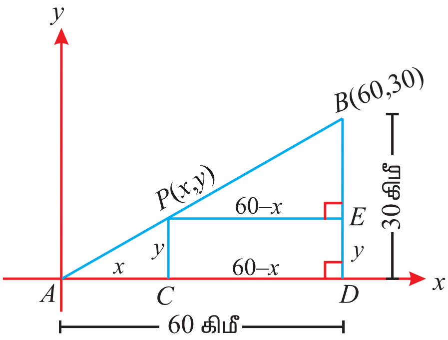
ஆயத்தொலை வடிவியல் (Coordinate Geometry) அல்லது பகுமுறை வடிவியல் (Analytical Geometry) என்பது அச்சுத் தொலை முறை, இயற்கணிதம் மற்றும் பகுவியல் ஆகியனவற்றைப் பயன்படுத்தி வடிவியலைக் கற்பதாகும். இது இயற்கணித முடிவுகளை வடிவியல் வாயிலாகக் கற்கத் துணைபுரிகிறது.

ஆயத்தொலை வடிவியலானது இயற்கணிதத்தையும் வடிவியலையும் இணைக்கும் பாலமாக அமைந்துள்ளது. இயற் கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி வடிவியலைக் கற்கும் முறையினை பிரஞ்சுதத்துவ மேதையும் கணிதவியல் அறிஞருமான ரெனி டெஸ்கார்டிஸ் (Rene Descartes) அறிமுகப்படுத்தினார். டெஸ்கார்டிஸ் ஆயத்தொலைகளை அறிமுகப்படுத்தியதின் மூலம் அவர் கணிதத்திற்கு அளப்பரிய பங்காற்றியுள்ளார். இது வடிவியலை கற்பதில் புரட்சியை ஏற்படுத்தியது. இவர் 1637 - இல் "லா ஜியோமிதி" (La Gemetry) என்ற நூலை வெளியிட்டார். இந்நூலில் வடிவியல் கணக்குகளை இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளாக மாற்றி, எளிதாக்கிய பின்னர் வடிவியல் முறையில் அவற்றின் தீர்வுகளைக் கண்டார். அதே காலக்கட்டத்தில் பிரஞ்சு கணித மேதை பியரி டி பெர்மாட் (Pierre De Fermat) என்பாரும் ஆயத்தொலை வடிவியலை உருவாக்கி அதை வெளியிட்டு கணிதத்திற்குப் பெரும் பங்காற்றினார். 1692 இல் லெபினிட்ஸ் (Gottfried Wilhelm Von Leibnitz) என்ற ஜெர்மானிய கணித மேதை, கிடையச்சுத் தூரம் (abscissa) மற்றும் குத்தச்சுத் தூரம் (ordinate) ஆகிய நவீனச் சொற்களை ஆயத்தொலை வடிவியலில் அறிமுகப்படுத்தினார். நிக்கோலஸ் முர்ரே பட்லரின் (Nicholas Murray Butler) கூற்றுப்படி, "டெஸ்கார்ட்டின் பகுமுறை வடிவகணிதம், நியூட்டன் மற்றும் லெபனிட்ஸ் ஆகியோரின் நுண்கணிதம் ஆகியன வியத்தகு கணித முறைகளாக விரிவடைந்தன".

ஒன்பதாம் வகுப்பில், ஆயத்தொலை வடிவியலின் அடிப்படைக் கருத்துகளான அச்சுகள், தளம், தளத்தில் புள்ளிகளைக் குறித்தல், இருபுள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவினைக் காணல் போன்றவற்றை நாம் கற்றுள்ளோம். இந்த அத்தியாயத்தில் பிரிவுச் சூத்திரம், முக்கோணம் மற்றும் நாற்கரத்தின் பரப்பு, நேர்க்கோட்டின் சாய்வு மற்றும் சமன்பாடு ஆகியவற்றைக் கற்போம்.

## 5.2 பிரிவுச் சூத்திரம் (Section Formula)

பின்வரும் கணக்கினை ஆராய்வோம். $A$ மற்றும் $B$ என்பன இரு நகரங்களைக் குறிக்கட்டும். $A$-யிலிருந்து 60 கி.மீ கிழக்கேயும் பின்னர் 30 கிமீ வடக்கேயும் சென்றால் $B$-ஐ அடையலாம். ஒரு தொலைபேசிக் குழுமம் $P$ என்ற இடத்தில் ஓர் அலைபரப்பு கோபுரத்தை நிறுவுவதாகக் கொள்வோம். $P$ என்ற இடம் $A$, $B$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டை $1:2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கின்றது என்க. அந்த அலைபரப்பு கோபுரம் அமைய உள்ள $P$ என்ற இடத்தை எவ்வாறு அறிவது என்பதைக் காண்போம்.




படம். 5.1

$A$-ஐ ஆதியாகக் கொள்வோம். $P(x,y)$ மற்றும் $B$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து $x$-அச்சுக்குச் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைக. அவை $x$-அச்சை சந்திக்கும் புள்ளிகள் முறையே $C$, $D$ என்க. மேலும் $P$-யிலிருந்து, $BD$ ஐ $E$-ல் வெட்டுமாறு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைக.

தற்போது $AP:PB = 1:2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $\Delta PAC$ மற்றும் $\Delta BPE$ என்பன வடிவொத்த முக்கோணங்கள். (அத்தியாயம் 6, பிரிவு 6.3ஐக் காண்க)

ஆதலால், $$\frac{AC}{PE} = \frac{PC}{BE} = \frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$$

அதாவது, $\dfrac{AC}{PE} = \dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{PC}{BE} = \dfrac{1}{2}$

$\Longrightarrow \dfrac{x}{60-x} = \dfrac{1}{2}$ | $\Longrightarrow \dfrac{y}{30-y} = \dfrac{1}{2}$

$2x = 60 - x$ | $2y = 30 - y$

$x = 20.$ | $y = 10.$

ஆகவே, அந்த அலைபரப்பு கோபுரம் $P(20,10)$ எனும் இடத்தில் அமைந்துள்ளது.

மேற்கண்ட கணக்கை மாதிரியாகக் கொண்டு பிரிவுச் சூத்திரத்தை வருவிப்போம்.

$A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ என்பன வெவ்வேறான இரு புள்ளிகள் என்க. புள்ளி $P(x, y)$ ஆனது, $AB$- ஐ உட்புறமாக $l:m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பதாகக் கொள்வோம். அதாவது, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{l}{m}$ என்க. படம் 5.2-லிருந்து, நாம் பின்வருவனவற்றைப் பெறலாம்.

$$AF = CD = OD - OC = x - x_1$$

$$PG = DE = OE - OD = x_2 - x$$

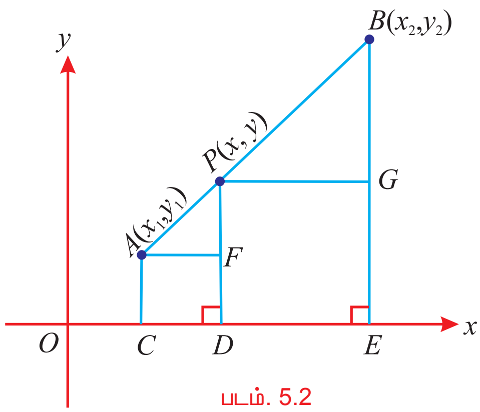
மேலும், $PF = PD - FD = y - y_1$

$$BG = BE - GE = y_2 - y$$

$\Delta AFP$ மற்றும் $\Delta PGB$ ஆகியன வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ஆகும்.

(அத்தியாயம் 6, பிரிவு 6.3ஐக் காண்க)

எனவே, $$\frac{AF}{PG} = \frac{PF}{BG} = \frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$$




படம். 5.2

ஆகவே, $\frac{AF}{PG} = \frac{l}{m}$ மற்றும்

$$\Longrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{l}{m}$$

$$\Longrightarrow mx - mx_1 = lx_2 - lx$$

$$lx + mx = lx_2 + mx_1$$

$$\Longrightarrow x = \frac{lx_2 + mx_1}{l + m}$$

$$\frac{PF}{BG} = \frac{l}{m}$$

$$\Longrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{l}{m}$$

$$\Longrightarrow my - my_1 = ly_2 - ly$$

$$ly + my = ly_2 + my_1$$

$$\Longrightarrow y = \frac{ly_2 + my_1}{l + m}$$

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்ற இருபுள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை உட்புறமாக $l:m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி

$$P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$$ ஆகும்.

இந்த சூத்திரத்தை பிரிவுச் சூத்திரம் (Section formula) என்பர்.

தரப்பட்ட மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்தால் மட்டுமே பிரிவுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும் என்பது தெளிவாகிறது.

## முடிவுகள்

(i) $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ ஆகிய இரு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $P$ என்ற புள்ளி வெளிப்புறமாக $l:m$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால், அப்புள்ளி $P\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}\right)$ ஆகும். இங்கு $\frac{l}{m}$ குறை எண்ணாக (negative sign) இருக்கும்.

(ii) $AB$-ன் நடுப்புள்ளி (Midpoint of $AB$)

$M$ என்பது $AB$-ன் நடுப்புள்ளி எனில், $M$ ஆனது $AB$-ஐ உட்புறமாக 1:1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

எனவே, $l = 1, m = 1$ என்பதை பிரிவுச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட, $AB$-ன் நடுப்புள்ளி

$$M\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$ எனக் கிடைக்கும்.

$A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ஆகும்.

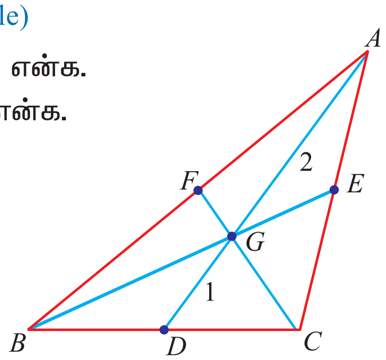
(iii) முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் (Centroid of a triangle)

$\Delta ABC$-ன் முனைப் புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ என்க.
$AD$, $BE$, $CF$ என்பன $\Delta ABC$-ன் நடுக்கோடுகள் (medians) என்க.

முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் என்பது நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியாகும்.

$G(x, y)$ என்பது $\Delta ABC$ இன் நடுக்கோட்டு மையம் என்க.

$BC$–ன் நடுப்புள்ளி $D\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$ ஆகும்.




படம். 5.3

முக்கோணத்தின் பண்புப்படி, நடுக்கோட்டு மையம் $G$ ஆனது நடுக்கோடு $AD$-ஐ உட்புறமாக 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

$\therefore$ பிரிவுச் சூத்திரப்படி, நடுக்கோட்டு மையம்

$$G(x\,,\,y) = G\left(\frac{2\frac{(x_2+x_3)}{2}+1(x_1)}{2+1},\ \frac{2\frac{(y_2+y_3)}{2}+1(y_1)}{2+1}\right)$$

$$= G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

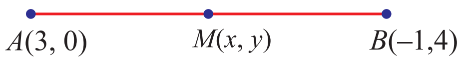
> ஆகவே, $(x_1\,,y_1)\,,(x_2\,,y_2)$ மற்றும் $(x_3\,,y_3)$ ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

## எடுத்துக்காட்டு 5.1

$(3,0),\,(-1\,,4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளியைக் காண்க.

**தீர்வு** $(x_1,y_1),\,(x_2,y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி

$$M(x\,,\,y) = M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



படம். 5.4

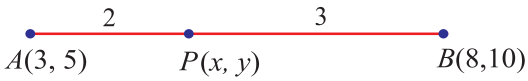
$\therefore$ $(3,0),\,(-1\,,4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி

$$M(x\,,\,y\,) = M\left(\frac{3-1}{2},\frac{0+4}{2}\right) = M(1,2).$$

## எடுத்துக்காட்டு 5.2

$(3\,,\,5),\,(8\,,\,10)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை உட்புறமாக 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

**தீர்வு** $A(3\,,5)$, $B(8\,,10)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை உட்புறமாக 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P(x,y)$ என்க.



படம். 5.5

பிரிவுச் சூத்திரப் படி, $P(x\,,\,y) = P\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m},\frac{ly_2+my_1}{l+m}\right)$

இங்கு, $x_1 = 3, y_1 = 5, x_2 = 8\,, y_2 = 10$ மற்றும் $l = 2, m = 3$

ஆகவே, $$P(x\,,\,y) = P\left(\frac{2(8)+3(3)}{2+3},\ \frac{2(10)+3(5)}{2+3}\right) = P(5,\,7)$$

## எடுத்துக்காட்டு 5.3

$A(-3,\,5)$ மற்றும் $B(4,\,-9)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை $P(-2\,,\,3)$ என்ற புள்ளி உட்புறமாக எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும்?

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் : $A(-3\,,5),\ B(4\,,-9)$.

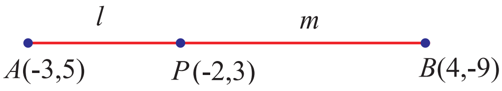
$P\,(-2\,,\,3)$ என்ற புள்ளி $AB$-ஐ $l : m$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கின்றது என்க.

பிரிவுச் சூத்திரப்படி, $P\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m},\ \frac{ly_2+my_1}{l+m}\right)=P(-2,3)$ (1)

இங்கு, $x_1=-3, y_1=5, x_2=4, y_2=-9$.

$$(1) \Longrightarrow \left(\frac{l(4)+m(-3)}{l+m}, \frac{l(-9)+m(5)}{l+m}\right)=(-2,3)$$

$x$-அச்சுத் தொலைவுகளை இருபுறமும் சமப்படுத்த



படம். 5.6

$$\frac{4l-3m}{l+m}=-2 \quad \Longrightarrow \quad 6l=m$$

$$\frac{l}{m}=\frac{1}{6}$$

அதாவது, $l:m=1:6$

எனவே, $P$ என்ற புள்ளி $AB$ -ஐ உட்புறமாக $1:6$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

**குறிப்பு**

(i) மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், $y$-அச்சுத் தொலைவுகளைச் சமப்படுத்தியும் விகிதத்தைக் காணலாம்.

(ii) தொடர்புடைய மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் இருந்தால் மட்டுமே, $x$-அச்சுத் தொலைவுகளைச் சமன் செய்து பெறும் விகிதமும், $y$-அச்சுத் தொலைவுகளைச் சமன் செய்து பெறும் விகிதமும் ஒரே விகிதமாக இருக்கும்.

(iii) கோட்டுத் துண்டை ஒரு புள்ளி உட்புறமாக $l:m$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால், $\frac{l}{m}$ என்பது மிகை எண்ணாக இருக்கும்.

(iv) கோட்டுத் துண்டை ஒரு புள்ளி வெளிப்புறமாக $l:m$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால், $\frac{l}{m}$ என்பது ஒரு குறை எண்ணாக இருக்கும்.

### எடுத்துக்காட்டு 5.4

$(4,-1)$, $(-2,-3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை மூன்று சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக் காண்க.

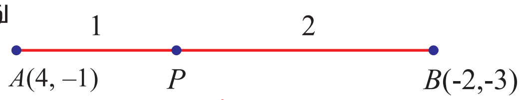
**தீர்வு** A(4,–1), B(–2,–3) என்பன கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் என்க.

$P(x,y)$, $Q(a,b)$ என்பன $AB$-ஐ முச்சமக் கூறிடும் புள்ளிகள் என்க. எனவே $AP=PQ=QB$

அதாவது, $P$ என்ற புள்ளி $AB$-ஐ $1:2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கின்றது.

படம். 5.7

Q என்ற புள்ளி $AB$-ஐ 2 : 1 விகிதத்தில் பிரிக்கிறது

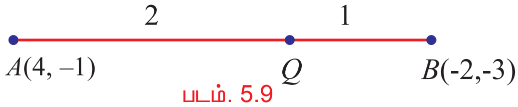


படம். 5.8

$\therefore$ பிரிவுச் சூத்திரத்தின்படி,

$P\left(\frac{1(-2)+2(4)}{1+2}, \frac{1(-3)+2(-1)}{1+2}\right)$ மற்றும்

$Q\left(\frac{2(-2)+1(4)}{2+1}, \frac{2(-3)+1(-1)}{2+1}\right)$



படம். 5.9

$\Longrightarrow$ $P(x,y)=P\left(\frac{-2+8}{3}, \frac{-3-2}{3}\right)$ மற்றும் $Q(a,b)=Q\left(\frac{-4+4}{3}, \frac{-6-1}{3}\right)$

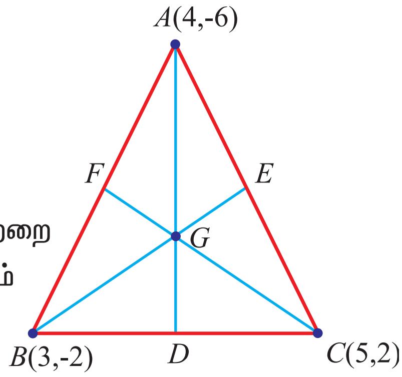
$=P\left(2,-\frac{5}{3}\right)$ மற்றும் $=Q\left(0,-\frac{7}{3}\right)$.

இங்கு, $Q$ என்பது $PB$-ன் மையப்புள்ளி மற்றும் $P$ என்பது $AQ$-ன் மையப்புள்ளி என அறியலாம்.

## எடுத்துக்காட்டு 5.5

$A(4, -6)$, $B(3,-2)$ மற்றும் $C(5, 2)$ ஆகியவற்றை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் காண்க.

**தீர்வு** $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$ மற்றும் $(x_3,y_3)$ ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $G(x, y)$ என்க.



படம். 5.10

எனவே, $G(x , y) = G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

இங்கு, $(x_1 , y_1) = (4, -6)$,

$(x_2, y_2) = (3, -2)$, $(x_3,y_3) = (5 , 2)$

எனவே, $(4, -6), (3 , -2)$ மற்றும் $(5, 2)$ ஆகியவற்றை உச்சிகளாக உடைய முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம்

$$\therefore \quad G(x , y) = G\left(\frac{4+3+5}{3}, \frac{-6-2+2}{3}\right)$$

$$= G(4, -2).$$

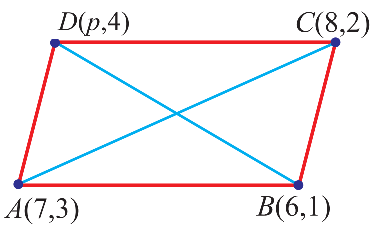
## எடுத்துக்காட்டு 5.6

$(7,3), (6,1), (8,2)$ மற்றும் $(p,4)$ என்பன ஓர் இணைகரத்தின் வரிசைப்படி அமைந்த உச்சிகள் எனில், $p$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** இணைகரத்தின் உச்சிகள் $A(7,3), B(6,1), C(8,2)$ மற்றும் $D(p,4)$ என்க.

ஓர் இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

எனவே, மூலை விட்டங்கள் $AC$ மற்றும் $BD$ ஆகியனவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்துகின்றன. அதாவது $AC$ மற்றும் $BD$-களின் நடுப்புள்ளிகள் சமமாக இருக்கும்.



படம். 5.11

எனவே, $\left(\frac{7+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{6+p}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$

$\Longrightarrow \quad \left(\frac{6+p}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$x$-அச்சு தொலைவுகளை இருபுறமும் சமப்படுத்த,

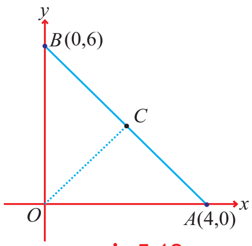
$$\frac{6+p}{2} = \frac{15}{2}$$

எனவே, $p = 9$

## எடுத்துக்காட்டு 5.7

$A(4 , 0)$, $B(0 , 6)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி $C$ மற்றும் $O$ என்பது ஆதி எனில், $C$ ஆனது $\triangle OAB$-ன் உச்சிகளிலிருந்து சம தொலைவில் அமையும் எனக் காட்டுக.

**தீர்வு** AB-ன் நடுப்புள்ளி $C\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = C(2,3)$



படம். 5.12

$P(x_1, y_1)$ மற்றும் $Q(x_2, y_2)$ ஆகிய இரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

எனவே, $O(0,0)$ மற்றும் $C(2,3)$ ஆகிய இரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு,

$$OC = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$

மேலும், $A(4,0)$, $C(2,3)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு

$$AC = \sqrt{(2-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$B\ (0,6)$, $C(2,3)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

எனவே, $OC = AC = BC$

ஆகவே, $C$ என்ற புள்ளி $\triangle OAB$ -ன் எல்லா உச்சிகளிலிருந்தும் சம தொலைவில் உள்ளது.

**குறிப்பு**

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் மையப்புள்ளி, அம்முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையமாக (circumcentre) அமையும்.

## பயிற்சி 5.1

1. பின்வரும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டுகளின் நடுப்புள்ளிகளைக் காண்க.
   (i) $(1, -1), (-5, 3)$ (ii) $(0,0), (0,4)$
2. பின்வரும் புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணங்களின் நடுக்கோட்டு மையங்களைக் காண்க.
   (i) $(1,3), (2,7)$ மற்றும் $(12, -16)$ (ii) $(3, -5), (-7, 4)$ மற்றும் $(10, -2)$
3. ஒரு வட்டத்தின் மையம் $(-6, 4)$. அவ்வட்டத்தின் ஒரு விட்டத்தின் ஒரு முனை, ஆதிப்புள்ளி எனில், மற்றொரு முனையைக் காண்க.
4. புள்ளி $(1, 3)$-ஐ நடுக்கோட்டு மையமாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் இரு முனைகள் $(-7, 6)$ மற்றும் $(8, 5)$ எனில், முக்கோணத்தின் மூன்றாவது முனையைக் காண்க.
5. பிரிவுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, $A(1,0)$, $B(5,3)$, $C(2,7)$ மற்றும் $D(-2,4)$ என்ற வரிசையில் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகளாகும் என நிறுவுக.
6. $(3, 4)$ மற்றும் $(-6, 2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டினை வெளிப்புறமாக $3 : 2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சுத் தொலைவுகளைக் காண்க.
7. $(-3, 5)$ மற்றும் $(4, -9)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டினை உட்புறமாக $1 : 6$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சுத் தொலைவுகளைக் காண்க.
8. $A\ (-6,-5)$, $B\ (-6, 4)$ என்பன இரு புள்ளிகள் என்க. கோட்டுத்துண்டு $AB$-யின் மேல் $AP = \frac{2}{9}AB$ என்றவாறு அமைந்துள்ள புள்ளி $P$-யைக் காண்க.

9. $A(2, -2)$ மற்றும் $B(-7, 4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை மூன்று சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக் காண்க.

10. $A(-4, 0)$ மற்றும் $B(0, 6)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை நான்கு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக் காண்க.

11. $(6, 4)$ மற்றும் $(1, -7)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டினை $x$-அச்சு பிரிக்கும் விகிதத்தைக் காண்க.

12. $(-5, 1)$ மற்றும் $(2, 3)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டினை $y$-அச்சு பிரிக்கும் விகிதத்தையும் மற்றும் பிரிக்கும் புள்ளியையும் காண்க.

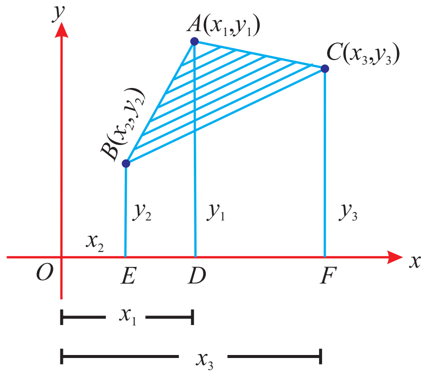
13. ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் $(1, -1)$, $(0, 4)$ மற்றும் $(-5, 3)$ எனில், அம்முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகளின் (medians) நீளங்களைக் கணக்கிடவும்.

## 5.3 முக்கோணத்தின் பரப்பு (Area of a Triangle)

ஒரு முக்கோணத்தின் சில அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டால் அதன் பரப்பைக் காணும் முறையை முன் வகுப்புகளில் கற்றுள்ளோம். இப்பொழுது ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகள் அதாவது உச்சிப் புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டால் அதன் பரப்பைக் காண்போம்.

$\Delta ABC$-ன் உச்சிப் புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$ என்க.

$AD$, $BE$ மற்றும் $CF$ ஆகியவற்றை $x$-அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரையவும்.



படம். 5.13

படம் 5.13-யிலிருந்து,

$ED = x_1 - x_2$, $DF = x_3 - x_1$, $EF = x_3 - x_2$.

முக்கோணம் $ABC$-ன் பரப்பளவு

= சரிவகம் $ABED$-ன் பரப்பு + சரிவகம் $ADFC$-ன் பரப்பு – சரிவகம் $BEFC$-ன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}(BE + AD)ED + \frac{1}{2}(AD + CF)DF - \frac{1}{2}(BE + CF)EF$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_2y_2 + x_1y_1 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_2y_3\}$$

எனவே, $\Delta ABC$-ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ ச.அலகுகள்

ஆகவே, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$ ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட $\Delta ABC$-ன் பரப்பு $\frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ ச.அலகுகள்.

**குறிப்பு**

முக்கோணத்தின் உச்சிகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதியும் பரப்பினைக் கணக்கிடலாம்.

$$\frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2\} \text{ ச.அலகுகள்.}$$

அல்லது $$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\ y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\} \text{ ச.அலகுகள்.}$$

பின்வரும் பட விளக்கத்தின் மூலம் மேற்கண்ட சூத்திரத்தை மிக எளிதில் பெறலாம்.

$\Delta ABC$-ன் முனைகள் $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ என்க. உச்சிப் புள்ளிகளை கடிகார முள்ளோட்ட எதிர்த் திசையின்படி வரிசைப்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும். அவைகளை பின்வருமாறு எழுதவும்.

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_1 \\ y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_1 \end{matrix}\right\}$$

மேலிருந்து கீழாக உள்ள மூலை விட்ட பெருக்கற் பலன்களைக் (dark arrows) கூட்டவும். கீழிருந்து மேலாக உள்ள மூலை விட்ட பெருக்கற் பலன்களைக் (dotted arrows) கூட்டவும். முதலில் பெறப்பட்ட கூட்டற் பலனிலிருந்து இரண்டாம் கூட்டற் பலனைக் கழிக்கவும்.

இவ்வாறு, $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\ y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ என்பதை பெறலாம்.

**குறிப்பு**

ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பினைக் காண பின்வரும் படிகளைப் பின்பற்றலாம்.

(i) ஒரு உதவிப் படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

(ii) கடிகார முள்ளோட்ட எதிர்த் திசையில் (counter clockwise) அமையும்படி முனைப் புள்ளிகளை வரிசைப் படுத்திக் கொள்க. இல்லையெனில், இச்சூத்திரம் குறை எண்ணை பரப்பாகத் தரும்.

(iii) $\Delta ABC$-ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\ y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காணவும்.

## 5.4 ஒரே நேர்க்கோட்டிலமையும் மூன்று புள்ளிகள் (Collinearity of three points)

ஒரு தளத்தில் மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்தால், அவை ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் (Collinear points) ஆகும். $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ ஆகிய புள்ளிகளில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி மற்ற இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின்மீது அமைந்தால், அவை ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளாகும் (Collinear points).

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ என்பன ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் என்க. இப்புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைவதால் ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்காது. எனவே, $\triangle ABC$-ன் பரப்பு பூச்சியமாகும்.

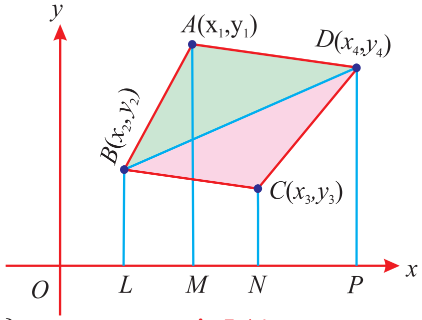
அதாவது, $$\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$$

இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். இதற்கான நிரூபணத்தை எளிதில் காணலாம்.

எனவே, $\triangle ABC$-ன் பரப்பு பூச்சியம் எனில், எனில் மட்டுமே $A$, $B$, $C$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவனவாகும்.

## 5.5 நாற்கரத்தின் பரப்பு (Area of a quadrilateral)



படம். 5.14

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ மற்றும் $D(x_4, y_4)$ என்பன நாற்கரம் $ABCD$-ன் முனைப் புள்ளிகள் என்க.

நாற்கரம் $ABCD$-ன் பரப்பு

$= \Delta ABD$-ன் பரப்பு $+ \Delta BCD$-ன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_4y_2 + x_1y_4)\}$$

$$+ \frac{1}{2}\{(x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_2) - (x_3y_2 + x_4y_3 + x_2y_4)\}$$

நாற்கரம் $ABCD$-ன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$$

(அல்லது) $\frac{1}{2}\{(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\}$ ச. அலகுகள்

மேற்கண்ட சூத்திரத்தைப் பின்வரும் படவிளக்கம் மூலம் எளிதில் நினைவிற் கொள்ளலாம்.

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ மற்றும் $D(x_4, y_4)$ என்ற புள்ளிகளை கடிகார முள்ளோட்ட எதிர்த் திசையில் அமையுமாறு எடுத்துக்கொண்டு அவற்றை பின்வருமாறு எழுதுக.

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{matrix}\right\}.$$

(முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண பயன்படுத்திய அதே முறையைப் பயன்படுத்தவும்)

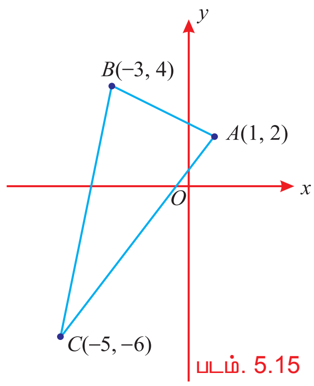
எனவே, நாற்கரத்தின் பரப்பு

$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$ ச. அலகுகள்.

### எடுத்துக்காட்டு 5.8

$(1, 2), (-3, 4)$ மற்றும் $(-5, -6)$ ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** உதவிப் படத்தில் இப்புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். இவற்றைக் கடிகார முள்ளோட்ட எதிர்த் திசையில் அமையும்படி வரிசையாக எடுத்துக் கொள்ளவும்.



படம். 5.15

முக்கோணத்தின் முனைகள் A(1 , 2), B(− 3 , 4), C (–5, –6) என்க.

$\triangle ABC$-ன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(4 + 18 - 10) - (-6 - 20 - 6)\}$$

இங்கு : $\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \end{matrix}\right\}$

$= \frac{1}{2}\{12 + 32\} = 22$ ச. அலகுகள்

## எடுத்துக்காட்டு 5.9

$A(6\ ,7)$, $B(-4\ ,\ 1)$ மற்றும் $C(a\ ,-9)$ ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட $\Delta ABC$-ன் பரப்பு 68 ச. அலகுகள் எனில், $a$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** $\triangle$ABC-ன் பரப்பு

$$\frac{1}{2}\{(6+36+7a)-(-28+a-54)\}=68 \qquad \text{இங்கு : } \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 6 & -4 & a & 6 \\ 7 & 1 & -9 & 7 \end{Bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad (42+7a)-(a-82)=136$$

$$\Longrightarrow \quad 6a=12 \qquad \therefore \quad a=2$$

## எடுத்துக்காட்டு 5.10

$A(2\ ,\ 3)$, $B(4\ ,\ 0)$ மற்றும் $C(6,\ -3)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ளன என நிரூபி.

**தீர்வு** $\Delta ABC$-ன் பரப்பு

$$=\frac{1}{2}\{(0-12+18)-(12+0-6)\} \qquad \text{இங்கு: } \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\{6-6\}=0.$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ளன.

## எடுத்துக்காட்டு 5.11

$(a\ ,0)$, $(0, b)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டின் மேல் அமைந்துள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x\ ,\ y)$ எனில், $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ என நிறுவுக. இங்கு $a$ மற்றும் $b\neq 0$.

**தீர்வு** $(x\ ,\ y)$, $(a\ ,0)$, $(0, b)$ என்பன ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகளாகும்.

ஆகவே, இப்புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு பூச்சியமாகும்.

$$\Longrightarrow \qquad ab-bx-ay=0 \qquad \text{இங்கு: } \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} a & 0 & x & a \\ 0 & b & y & 0 \end{Bmatrix}$$

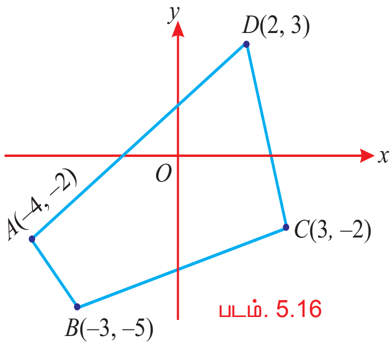
$$\Longrightarrow \qquad bx+ay=ab$$

இங்கு $a$ மற்றும் $b\neq 0$. எனவே, இருபுறமும் $ab$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

## எடுத்துக்காட்டு 5.12

$(-4,\ -2)$, $(-3,\ -5)$, $(3,\ -2)$ மற்றும் $(2,\ 3)$ ஆகிய புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்க.



படம். 5.16

**தீர்வு** உதவிப் படத்தில் இப்புள்ளிகளைக் குறிப்போம். பிறகு கடிகார முள்ளோட்ட எதிர்த் திசையில் அமையும் வகையில் A(–4, –2), B(–3, –5), C(3, –2) மற்றும் D(2, 3) ஆகியவற்றை முனைகளாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

நாற்கரம் $ABCD$-ன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(20 + 6 + 9 - 4) - (6 - 15 - 4 - 12)\}\,; \qquad \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -4 & -3 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & -2 & 3 & -2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\{31 + 25\} = 28 \text{ ச.அலகுகள்.}$$

## பயிற்சி 5.2

1. கீழ்க் கண்ட புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணங்களின் பரப்புகளைக் காண்க.

   (i) $(0, 0), (3, 0)$ மற்று ம் $(0, 2)$     (ii) $(5, 2), (3, -5)$ மற்றும் $(-5, -1)$

   (iii) $(-4, -5), (4, 5)$ மற்றும் $(-1, -6)$

2. வரிசையில் அமைந்த முக்கோணத்தின் முனைகளும் அவை அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவுகளும் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றிலும் $a$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

| | உச்சிகள் | பரப்பு (சதுர அலகுகள்) |
|---|---|---|
| (i) | $(0\,,0), (4, a)$ மற்றும் $(6, 4)$ | 17 |
| (ii) | $(a, a), (4, 5)$ மற்றும் $(6,-1)$ | 9 |
| (iii) | $(a, -3), (3, a)$ மற்றும் $(-1,5)$ | 12 |

3. பின்வரும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகளா என ஆராய்க.

   (i) $(4, 3), (1, 2)$ மற்றும் $(-2, 1)$     (ii) $(-2, -2), (-6, -2)$ மற்றும் $(-2, 2)$

   (iii) $\left(-\frac{3}{2}, 3\right), (6, -2)$ மற்றும் $(-3, 4)$

4. கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன எனில், ஒவ்வொன்றிலும் $k$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

   (i) $(k, -1), (2, 1)$ மற்றும் $(4, 5)$     (ii) $(2, -5), (3, -4)$ மற்றும் $(9, k)$

   (iii) $(k, k), (2, 3)$ மற்றும் $(4, -1)$

5. பின்வருவனவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரங்களின் பரப்பளவுகளைக் காண்க.

   (i) $(6, 9), (7, 4), (4, 2)$ மற்றும் $(3, 7)$

   (ii) $(-3, 4), (-5, -6), (4, -1)$ மற்றும் $(1, 2)$

   (iii) $(-4, 5), (0, 7), (5, -5)$ மற்றும் $(-4, -2)$

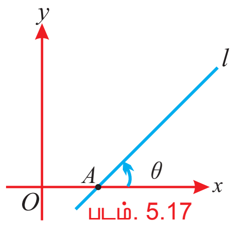
6. $(h, 0), (a, b)$ மற்றும் $(0, k)$ என்பன ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள் எனில், முக்கோணத்தின் பரப்பிற்கான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$ என நிறுவுக. இங்கு $h$ மற்றும் $k \neq 0$.

7. ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் $(0, -1), (2, 1)$ மற்றும் $(0, 3)$ எனில், இதன் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைத்து உருவாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க. மேலும், இச்சிறிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவிற்கும், கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவிற்கும் உள்ள விகிதத்தைக் காண்க.

## 5.6 நேர்க்கோடுகள் (Straight lines)

### 5.6.1 சாய்வுக் கோணம் (Angle of Inclination)

மிகை $x$-அச்சிற்கும் நேர்க்கோடு $l$-க்கும் இடையே அமைந்த கோணம் நேர்க்கோடு $l$-ன் சாய்வுக் கோணம் (Angle of Inclination) எனப்படும். (இக்கோணத்தினைக் கடிகார முள்ளோட்ட எதிர்த் திசையில் அளக்க வேண்டும்.)



படம். 5.17

**குறிப்புரை**

$l$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் $\theta$ எனில்,

(i) $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

(ii) கிடைநிலை நேர்க்கோடுகளுக்கு $\theta = 0^\circ$ அல்லது $\theta = 180^\circ$ ஆகும். மேலும் நேர்க்குத்துக் கோடுகளுக்கு $\theta = 90^\circ$ ஆகும்.

(iii) தொடக்கத்தில் $x$-அச்சின் மீது அமைந்துள்ள ஒரு கோடு, $x$-அச்சில் உள்ள புள்ளி $A$-யைப் பொருத்து கடிகார எதிர் திசையில் சுழன்று இறுதியில் $x$-அச்சுடன் பொருந்தினால், இக் கோட்டின் ஆரம்ப சாய்வுக் கோணம் $0^\circ$ மற்றும் இறுதி சாய்வுக் கோணம் $180^\circ$ ஆகும்.

(iv) $x$-அச்சிற்கு செங்குத்தான நேர்க்கோடுகளை நேர்க்குத்துக் கோடுகள் என்போம். அவ்வாறு செங்குத்தாக அமையாத நேர்க்கோடுகளை நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோடுகள் என்போம்.

### 5.6.2 நேர்க்கோட்டின் சாய்வு (Slope of a straight line)

**வரையறை**

நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோடு (Non-vertical line) $l$-ன் சாய்வுக் கோணம் $\theta$ எனில், $\tan\theta$ என்பது அக்கோட்டின் சாய்வு ஆகும். இதை $m$ எனக் குறிப்போம். எனவே, நேர்க்கோட்டின் சாய்வு (Slope of straight line), $m = \tan\theta$, $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$, $\theta \ne 90^\circ$, ஆகும்.

**குறிப்புரை**

(i) $x$-அச்சு அல்லது $x$-அச்சிற்கு இணையான நேர்க்கோடுகளின் சாய்வு பூச்சியமாகும்.

(ii) $\tan 90^0$ ஐ வரையறுக்க இயலாது என்பதால் $y$-அச்சு அல்லது $y$-அச்சிற்கு இணையான நேர்க்கோடுகளின் சாய்வை வரையறை செய்ய இயலாது. ஆகவே, ஒரு நேர்க்கோட்டின் சாய்வு எனக் கூறினால், அக்கோட்டினை ஒரு நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோடு எனக் கருத வேண்டும்.

(iii) $\theta$ ஒரு குறுங்கோணமெனில், சாய்வு மிகை எண்ணாக இருக்கும்.
$\theta$ ஒரு விரிகோணமெனில், சாய்வு குறை எண்ணாக இருக்கும்.

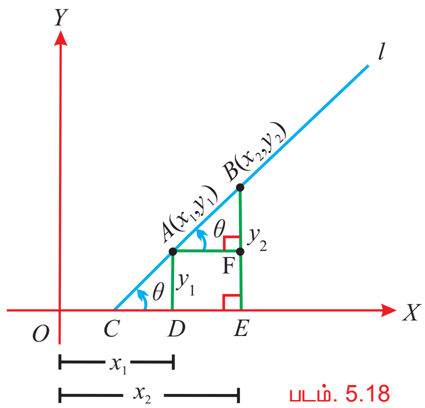
### 5.6.3 ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ள இரு புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டால் அக்கோட்டின் சாய்வு (Slope of a straight line when any two points on the line are given)

$A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ ஆகிய இரு புள்ளிகள் நேர்க்கோடு $l$-ன் மீது அமைந்துள்ளன என்க. இக்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் $\theta$ எனில், $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ மற்றும் $\theta \ne 90^\circ$ ஆகும்.

நேர்க்கோடு $AB$ ஆனது $x$-அச்சை $C$-ல் வெட்டட்டும்.

நேர்க்கோடு $l$-ன் சாய்வு $m = \tan\theta$ (1)

$x$-அச்சிற்குச் செங்குத்தாக $AD$ மற்றும் $BE$ வரைக. $A$-யிலிருந்து $BE$-க்கு $AF$ என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைக.



படம். 5.18

படத்திலிருந்து,

$$AF = DE = OE - OD = x_2 - x_1$$

$$BF = BE - EF = BE - AD = y_2 - y_1$$

மேலும் $\angle DCA = \angle FAB = \theta$

செங்கோண $\Delta ABF$-ல்

$x_1 \neq x_2$ எனில், $\tan\theta = \dfrac{BF}{AF} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து சாய்வு $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ எனக் கிடைக்கிறது.

> $(x_1, y_1)$ மற்றும் $(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. இங்கு $\theta \neq 90^\circ$ என்பதால் $x_1 \neq x_2$ ஆகும்.

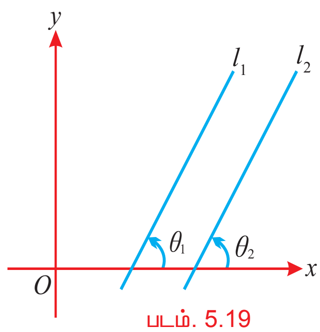
**குறிப்பு**

$(x_1, y_1)$ மற்றும் $(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வினை பின்வருமாறு கருதலாம்.

$$\text{சாய்வு } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y\text{-ஆயத்தொலைவுகளின் வித்தியாசம்}}{x\text{-ஆயத்தொலைவுகளின் வித்தியாசம்}}.$$

### 5.6.4 சாய்வுகளில் நேர்க்குத்தற்ற இணை கோடுகளுக்கான நிபந்தனை (Condition for parallel lines in terms of their slopes)

$l_1$ மற்றும் $l_2$ என்ற இணைகோடுகளின் சாய்வுக் கோணங்கள் $\theta_1$ மற்றும் $\theta_2$ என்க. இவற்றின் சாய்வுகள் $m_1$ மற்றும் $m_2$ என்க.



படம். 5.19

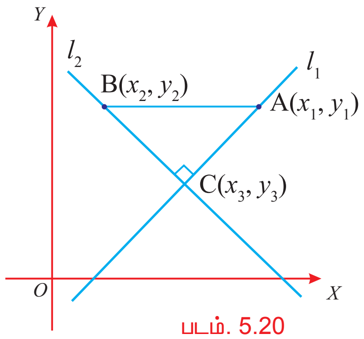
$l_1$ மற்றும் $l_2$ என்பன இணை கோடுகள் என்பதால், சாய்வுக் கோணங்கள் $\theta_1$ மற்றும் $\theta_2$ சமமாகின்றன.

எனவே, $\tan\theta_1 = \tan\theta_2 \implies m_1 = m_2$. ஆகவே,

> இரு நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோடுகள் இணை எனில், அவற்றின் சாய்வுகள் சமம்.
> இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். அதாவது, இரு நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் சமமெனில், அக்கோடுகள் இணையாகும் அல்லது அக்கோடுகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் பொருந்தும்.

### 5.6.5 சாய்வுகளில் நேர்க்குத்தற்ற செங்குத்துக் கோடுகளுக்குரிய நிபந்தனை (Condition for perpendicular lines in terms of their slopes )

$l_1$ மற்றும் $l_2$ ஆகிய நேர்க்குத்தற்ற செங்குத்துக் கோடுகள் முறையே $A(x_1,y_1)$ மற்றும் $B(x_2,y_2)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழியே செல்கின்றன என்போம். அவைகள் வெட்டும் புள்ளி $C(x_3,y_3)$ என்க.



படம். 5.20

மேலும், $m_1$ மற்றும் $m_2$ என்பன முறையே $l_1$, $l_2$ ஆகிய நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் என்க.

நேர்க்கோடு $l_1$-ன் சாய்வு $m_1 = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$

நேர்க்கோடு $l_2$-ன் சாய்வு $m_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

செங்கோண $\triangle ABC$-ல் $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$\Longrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow (x_2 - x_3 + x_3 - x_1)^2 + (y_2 - y_3 + y_3 - y_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow \left(x_2 - x_3\right)^2 + (x_3 - x_1)^2 + 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2 + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$$

$$= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = -(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\right)\left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right) = -1$$

$$\Longrightarrow \quad m_1 m_2 = -1 \text{ or } m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

ஆகவே, $m_1$ மற்றும் $m_2$ ஆகியவற்றைச் சாய்வுகளாகக் கொண்ட நேர்க்குத்தற்ற இரு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்து எனில், $m_1 m_2 = -1$ ஆகும்.

மறுதலையாக, $m_1 m_2 = -1$ எனில், அவ்விரண்டு நேர்க்கோடுகளும் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தானவை.

**குறிப்பு**

$x$-அச்சு மற்றும் $y$-அச்சு ஆகியன ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தான நேர்க்கோடுகள் ஆகும். $x$-அச்சின் சாய்வு பூச்சியம் மற்றும் $y$-அச்சின் சாய்வு வரையறை செய்யப்படவில்லை என்பதால், $m_1 m_2 = -1$ என்ற நிபந்தனை $x$, $y$-அச்சுகளுக்குப் பொருந்தாது.

**எடுத்துக்காட்டு 5.13**

நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $\frac{1}{\sqrt{3}}$ எனில், அக்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் காண்க.

**தீர்வு** $\theta$ என்பது நேர்க்கோட்டின் சாய்வுக் கோணமெனில், இதன் சாய்வு

$m = \tan\theta,\ 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ மற்றும் $\theta \neq 90^\circ$ ஆகும்.

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \theta = 30^\circ$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.14**

நேர்க்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் $45^\circ$ எனில், அக்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

**தீர்வு** சாய்வுக் கோணம் $\theta$ எனில், நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m = \tan\theta$

எனவே, $m = \tan 45^\circ \implies m = 1$.

**எடுத்துக்காட்டு 5.15**

$(3, -2)$ மற்றும் $(-1, 4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

**தீர்வு** $(x_1, y_1)$ மற்றும் $(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $(3, -2)$ மற்றும் $(-1, 4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{4+2}{-1-3} = -\frac{3}{2}.$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.16**

நேர்க்கோட்டின் சாய்வினைப் பயன்படுத்தி, $A(5, -2)$, $B(4, -1)$ மற்றும் $C(1, 2)$ ஆகியன ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்த புள்ளிகள் என நிறுவுக.

**தீர்வு** $(x_1, y_1)$ மற்றும் $(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $A(5, -2)$ மற்றும் $B(4, -1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

$$m_1 = \frac{-1+2}{4-5} = -1$$

மேலும், $B(4, -1)$ மற்றும் $C(1, 2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

$$m_2 = \frac{2+1}{1-4} = -1$$

எனவே, $AB$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $=$ $BC$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு.

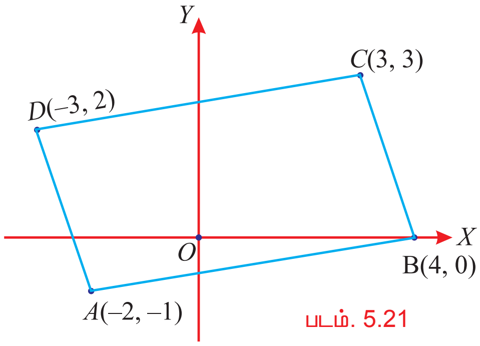
மேலும், $B$ என்பது பொதுப் புள்ளி.

ஆகவே, $A, B, C$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ளன.

## எடுத்துக்காட்டு 5.17

$(-2, -1)$, $(4, 0)$, $(3, 3)$ மற்றும் $(-3, 2)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரிசையாக எடுத்துக் கொண்டு சாய்வினைப் பயன்படுத்தி அவை ஓர் இணைகரத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

**தீர்வு** $A(-2, -1)$, $B(4, 0)$, $C(3, 3)$ மற்றும் $D(-3, 2)$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் என்க.



படம். 5.21

$$AB\text{-ன் சாய்வு} = \frac{0+1}{4+2} = \frac{1}{6}$$

$$CD\text{-ன் சாய்வு} = \frac{2-3}{-3-3} = \frac{1}{6}$$

எனவே, $AB$-ன் சாய்வு $=$ $CD$-ன் சாய்வு

எனவே, பக்கம் $AB$ ஆனது பக்கம் $CD$-க்கு இணையாகும். (1)

$$BC\text{-ன் சாய்வு} = \frac{3-0}{3-4} = -3$$

$$AD\text{-ன் சாய்வு} = \frac{2+1}{-3+2} = -3$$

எனவே, $BC$-ன் சாய்வு $=$ $AD$-ன் சாய்வு

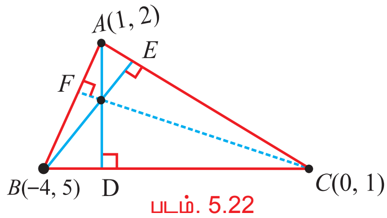
அதாவது, பக்கம் $BC$ ஆனது பக்கம் $AD$-க்கு இணையாகும். (2)

(1), (2)-களிலிருந்து நாற்கரம் $ABCD$-ன் எதிர்ப் பக்கங்கள் இணையாக உள்ளன.

ஆகவே, $ABCD$ என்பது இணைகரம் ஆகும்.

## எடுத்துக்காட்டு 5.18

$A(1, 2)$, $B(-4, 5)$ மற்றும் $C(0, 1)$ ஆகியன $\triangle ABC$-ன் முனைகள். இம்முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு முனையிலிருந்தும் அதன் எதிர்ப் பக்கத்திற்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகளின் (altitudes) சாய்வுகளைக் காண்க.



படம். 5.22

**தீர்வு** $AD$, $BE$, $CF$ என்பன $\triangle ABC$-ன் குத்துக்கோடுகள் என்க.

எனவே, $BC$-ன் சாய்வு $= \dfrac{1-5}{0+4} = -1$

குத்துக்கோடு $AD$ ஆனது பக்கம் $BC$ க்கு செங்குத்து ஆகும்.

எனவே, $AD$-ன் சாய்வு $= 1$ $\qquad (\because \; m_1 m_2 = -1)$

மேலும், $AC$-ன் சாய்வு $= \dfrac{1-2}{0-1} = 1$

ஆகவே, $BE$-ன் சாய்வு $= -1$ $\qquad (\because \; BE \perp AC)$

மேலும், $AB$-ன் சாய்வு $= \dfrac{5-2}{-4-1} = -\dfrac{3}{5}$

ஆகவே, $CF$-ன் சாய்வு $= \dfrac{5}{3}$ $\qquad (\because \; CF \perp AB)$

## பயிற்சி 5.3

1. பின்வரும் சாய்வுகளைக் கொண்ட நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுக் கோணங்களைக் காண்க.
   (i) 1 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) 0

2. பின்வரும் சாய்வுக் கோணங்களைக் கொண்ட நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க.
   (i) $30^\circ$ (ii) $60^\circ$ (iii) $90^\circ$

3. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் வழியே செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வுகளைக் காண்க.
   (i) $(3\,,-2)$, $(7\,,2)$ (ii) $(2\,,-4)$ மற்றும் ஆதிப்புள்ளி
   (iii) $(1+\sqrt{3}\,,2)$, $(3+\sqrt{3}\,,4)$

4. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுக் கோணங்களைக் காண்க.
   (i) $(1,2), (2,3)$ (ii) $(3,\sqrt{3}), (0,0)$ (iii) $(a\,,b), (-a\,,-b)$

5. ஆதிப் புள்ளி வழியாகவும், $(0,-4)$ மற்றும் $(8\,,\,0)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

6. சதுரம் $ABCD$-ன் பக்கம் $AB$ ஆனது $x$-அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.
   (i) $AB$-ன் சாய்வு (ii) $BC$-ன் சாய்வு (iii) மூலைவிட்டம் $AC$-ன் சாய்வு

7. சமபக்க முக்கோணம் $ABC$-ன் பக்கம் $BC$ ஆனது $x$-அச்சிற்கு இணை எனில், $AB$ மற்றும் $BC$ ஆகியவற்றின் சாய்வுகளைக் காண்க.

8. சாய்வினைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும் என நிறுவுக.
   (i) $(2\,,3), (3\,,-1)$ மற்றும் $(4\,,-5)$ (ii) $(4\,,1), (-2\,,-3)$ மற்றும் $(-5\,,-5)$
   (iii) $(4\,,4), (-2\,,6)$ மற்றும் $(1\,,5)$

9. $(a,\ 1)$, $(1,\ 2)$ மற்றும் $(0,\ b+1)$ என்பன ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள் எனில், $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ என நிறுவுக.

10. $A(-2,\ 3)$, $B(a,\ 5)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடு மற்றும் $C(0,\ 5)$, $D(-2,\ 1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடு ஆகியன இணை கோடுகள் எனில், $a$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

11. $A(0,5), B(4,2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடானது, $C(-1,-2), D(5,b)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்து எனில், $b$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

12. $\triangle ABC$-ன் முனைகள் $A(1,\ 8)$, $B(-2,\ 4)$, $C(8,\ -5)$. மேலும், $M, N$ என்பன முறையே $AB, AC$ இவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் எனில், $MN$-ன் சாய்வைக் காண்க. இதைக் கொண்டு $MN$ மற்றும் $BC$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் இணை எனக் காட்டுக.

13. $(6,\ 7)$, $(2,\ -9)$ மற்றும் $(-4,\ 1)$ ஆகியன ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் எனில், முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க.

14. $A(-5,\ 7)$, $B(-4,\ -5)$ மற்றும் $C(4,\ 5)$ ஆகியன $\triangle ABC$-ன் முனைகள் எனில், முக்கோணத்தின் குத்துயரங்களின் சாய்வுகளைக் காண்க.

15. சாய்வினைப் பயன்படுத்தி $(1, 2), (-2 , 2), (-4 , -3)$ மற்றும் $(-1, -3)$ என்பன அதே வரிசையில் ஓர் இணைகரத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

16. $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தின் முனைகள் முறையே $A(-2 ,-4)$, $B(5 , -1)$, $C(6 , 4)$ மற்றும் $D(-1, 1)$ எனில், இதன் எதிர்ப் பக்கங்கள் இணை எனக் காட்டுக.

### 5.6.6 நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a straight line)

$L$ என்பது தளத்தில் உள்ள ஒரு நேர்க்கோடு என்க. $x$, $y$ எனும் மாறிகளில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடு $px + qy + r = 0$-ஐக் கருதுக. $L$-ல் உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியின் $x$ ஆயத் தொலைவு மற்றும் $y$ ஆயத் தொலைவு ஆகியவற்றால் சமன்பாடு நிறைவு செய்யப்படும் என்க. இச்சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யும் $x$, $y$-ன் மதிப்புகள், $L$-ன் மேல் அமைந்த ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைவுகளாக அமையும். எனவே, $px + qy + r = 0$ ஆனது ஒரு நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாடு எனப்படுகிறது. இவ்வாறு நேர்க்கோடு $L$-ஐ இயற்கணித சமன்பாட்டின் வாயிலாக விவரிப்போம். தளத்தில் $L$ என்ற நேர்க்கோடு பின்வரும் வகைகளில் ஒன்றாக அமையும்.

**(i) கிடைநிலைக் கோடு (Horizontal line)** **(ii) நேர்க்குத்துக் கோடு (Vertical line)**

**(iii) கிடைநிலையாகவோ மற்றும் நேர்க்குத்தாகவோ அமையாத கோடு (Neither vertical nor Horizontal)**

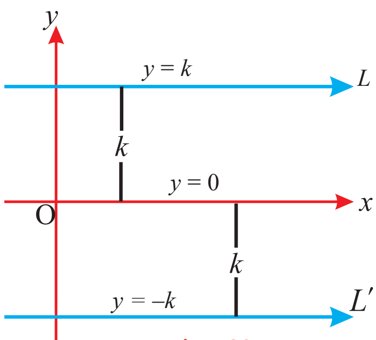
**(i) கிடைநிலைக் கோடு (Horizontal line)**

$L$ என்பது ஒரு கிடைநிலைக் கோடு என்க.

இப்பொழுது $L$ ஆனது $x$-அச்சாகவோ அல்லது $x$-அச்சு அல்லாத ஒரு கிடைநிலைக் கோடாகவோ அமையும்.

வகை (அ) $L$ என்பது $x$-அச்சைக் குறிக்கும் என்க. தளத்தில் உள்ள $(x, y)$ என்ற புள்ளி $L$-ன் மேல் இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $y = 0$ மற்றும் $x$ ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணாகும். எனவே, $y = 0$ என்ற சமன்பாடு $x$-அச்சைக் குறிக்கும். ஆகவே, $x$-அச்சு என்ற நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y = 0$ ஆகும்.

வகை (ஆ) $x$-அச்சு அல்லாத ஏதேனும் ஒரு கிடைநிலைக் கோடு $L$ என்க. எனவே, L ஆனது $x$-அச்சுக்கு இணையாகும். $(x, y)$ என்ற புள்ளியின் $y$-அச்சுத் தொலைவு ஒரு மாறிலியாகவும், $x$ என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணாகவும் அமைந்தால், அமைந்தால் மட்டுமே நேர்க்கோடு $L$-ன் மீது அப்புள்ளி அமையும். ஆகவே, $x$-அச்சுக்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y = k$ ($k$ ஒரு மாறிலி) ஆகும்.



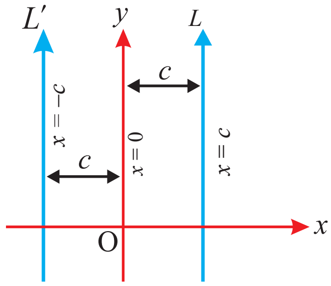
படம். 5.23

$k > 0$ எனில், $L$ ஆனது $x$-அச்சிற்கு மேற்புறமும், $k < 0$ எனில், $L$ ஆனது $x$-அச்சிற்குக் கீழ்புறமும் அமையும். மேலும், $k = 0$ எனில், $L$ என்பது $x$-அச்சாகும்.

**(ii) நேர்க்குத்துக் கோடு (Vertical Line)**

$L$ என்பது ஒரு நேர்க்குத்துக் கோடு என்க. ஆகவே, $L$ ஆனது $y$-அச்சு அல்லது $y$-அச்சு அல்லாத நேர்க்குத்துக் கோடாகும்.

வகை (அ) $L$ என்பது $y$-அச்சு எனில், தளத்தில் உள்ள $(x, y)$ என்ற புள்ளியானது $L$-ன் மீது அமைந்தால், அமைந்தால் மட்டுமே $x = 0$ மற்றும் $y$ ஆனது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணாகும். எனவே, சமன்பாடு $x = 0$ என்பது $y$-அச்சினைக் குறிக்கும். ஆதலால், $y$-அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.



படம். 5.24

வகை (ஆ) $L$ என்பது $y$-அச்சு அல்லாத நேர்க்குத்துக் கோடு எனில், $L$ ஆனது $y$-அச்சுக்கு இணையாக அமையும்.

$(x, y)$ என்ற புள்ளியின் $x$-அச்சுத் தொலைவு ஒரு மாறிலியாகவும், $y$-அச்சுத் தொலைவு ஒரு மெய்யெண்ணாகவும் அமைந்தால், அமைந்தால் மட்டுமே அப்புள்ளி $L$-ன் மீது அமையும். எனவே, $y$-அச்சுக்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x = c$ ஆகும். ($c$ ஒரு மாறிலியாகும் ). இங்கு,

$c > 0$ எனில், $L$ ஆனது $y$-அச்சின் வலப்பக்கம் அமையும்.

$c < 0$ எனில், இக்கோடு $L$ ஆனது, $y$-அச்சின் இடப்பக்கம் அமையும்.

$c = 0$ எனில், $L$ என்பது $y$-அச்சாகும்.

**(iii) கிடைநிலையாகவோ மற்றும் நேர்க்குத்தாகவோ அமையாத நேர்க்கோடு (Neither Horizontal nor Vertical)**

$L$ என்பது கிடைநிலையாகவோ மற்றும் நேர்க்குத்தாகவோ இல்லை என்க. இந்நிலையில் நேர்க்கோடு $L$-ஐ ஒரு சமன்பாட்டால் எவ்வாறு குறிப்பிடலாம்?

$\theta$ என்பது அக்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் என்க. கோணம் $\theta$-வும், $L$-ன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியும் தெரிந்தால் $L$-ன் சமன்பாட்டை காண இயலும்.

நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m$-ன் மதிப்பினை பின்வருமாறு காணலாம்.

(i) சாய்வுக் கோணம் $\theta$ கொடுக்கப்பட்டால், $m = \tan\theta$

(ii) $L$-ன் மீது அமைந்த இரு புள்ளிகள் $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ கொடுக்கப்பட்டால், $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(iii) $L$ என்பது கிடைநிலை நேர்க்கோடு எனில், எனில் மட்டுமே $m = 0$ ஆகும்.

$L$ என்பது நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோடு எனில், அதன் சமன்பாட்டை பின்வரும் அமைப்புகளில் காணலாம்:

(அ) சாய்வு–புள்ளி அமைப்பு (Slope-Point form)

(ஆ) இரண்டு புள்ளிகள் அமைப்பு (Two-Points form)

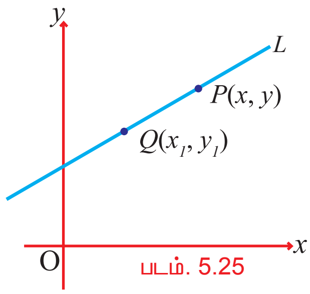
(இ) சாய்வு–வெட்டுத்துண்டு அமைப்பு (Slope-Intercept form)

(ஈ) வெட்டுத்துண்டு அமைப்பு (Intercept form)

## (அ) சாய்வு–புள்ளி அமைப்பு (Slope-Point form)

$L$-ன் சாய்வு $m$ என்க. மற்றும் $Q(x_1\,,y_1)$ என்பது $L$-ன் மீது அமைந்த ஒரு புள்ளி என்க.

$P(x\,,y)$ என்பது $L$-ன் மீது அமைந்த $Q$ வைத் தவிர ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.



படம். 5.25

இப்பொழுது $m = \dfrac{y-y_1}{x-x_1} \Leftrightarrow m(x-x_1) = y-y_1$

எனவே, சாய்வு $m$ உடைய மற்றும் $(x_1\,,y_1)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x-x_1), \qquad \forall \quad (x, y) \in L \qquad (1)$$

**குறிப்புரை**

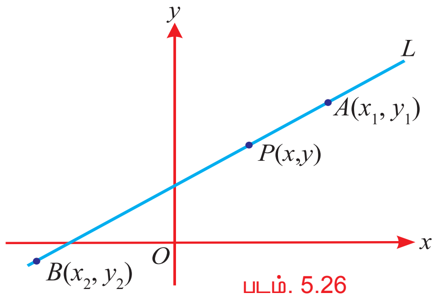
(i) $x, y$ ஆகிய மாறிகளில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடு (1)-ஐ $L$-ன் மீது அமைந்த ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் $x$-அச்சுத் தொலைவு மற்றும் $y$-அச்சுத் தொலைவு ஆகியன நிறைவு செய்கின்றன. மேலும், இச்சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் $x,\ y$-களின் மதிப்புகள் நேர்க்கோடு $L$-ன் மீது அமைந்த ஒரு புள்ளியின் அச்சுத்தொலைவுகளாகும். எனவே, சமன்பாடு (1) ஆனது நேர்க்கோடு $L$-ன் சமன்பாடு என்றழைக்கப்படுகிறது.

(ii) $L$-ன் புள்ளிகளின் $y$-அச்சுத்தொலைவில் ஏற்படும் மாறுதல், $x$-அச்சுத்தொலைவில் ஏற்படும் மாறுதலுக்கு நேர் விகிதத்தில் அமையும் என்பதை சமன்பாடு (1) காட்டுகிறது. இதன் விகிதசம மாறிலி $m$ என்பது நேர்க்கோட்டின் சாய்வாகும்.

## (ஆ) இரண்டு புள்ளிகள் அமைப்பு (Two-Points form)

$(x_1\,,y_1),\ (x_2\,,y_2)$ ஆகியன நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோடு $L$-ன் மீது அமைந்த இரு வெவ்வேறு புள்ளிகள் என்க. எனவே, $x_2 \neq x_1$ ஆகும்.

$L$-ன் சமன்பாட்டினை அமைக்க, முதலில் $L$-ன் சாய்வைக் காண்போம். அதன் பிறகு (1) ஐப் பயன்படுத்துவோம்.



படம். 5.26

$L$-ன் சாய்வு

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \text{ இங்கு } x_2 \neq x_1\,.$$

சமன்பாடு (1)-லிருந்து, $\quad y - y_1 = \left(\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$

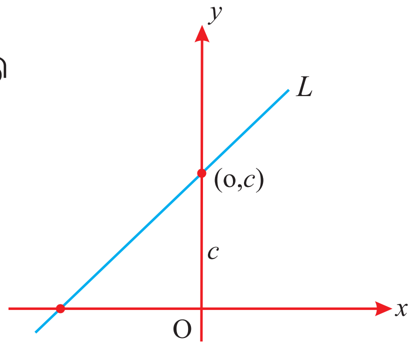
$$\Longrightarrow \qquad \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

ஆகவே, நேர்க்கோடு $L$-ன் சமன்பாடு $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\,, \quad \forall \quad (x, y) \in L \qquad (2)$

**குறிப்பு**

$L$-ன் சமன்பாட்டைப் பெற $(x_1\,,y_1)$ என்ற புள்ளிக்குப் பதிலாக $(x_2\,,y_2)$ என்ற புள்ளியையும் பயன்படுத்தலாம்.

(இ) **சாய்வு-வெட்டுத்துண்டு அமைப்பு (Slope-Intercept form)**



படம். 5.27

$L$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m$ மற்றும் $y$-வெட்டுத்துண்டு $c$ என்க.

$y$-வெட்டுத்துண்டு $c$ என்பதால், $(0\,,c)$ என்ற புள்ளி $L$-ன் மீது அமையும்.

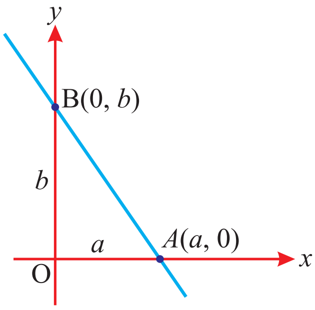
சமன்பாடு (1)-ல் $(x_1\,,\,y_1) = (0\,,c)$ என பிரதியிட,

$y - c = m(x - 0)$

$$\Longrightarrow \; y = mx + c, \quad \forall \quad (x, y) \in L \qquad (3)$$

ஆகவே, $y = mx + c$ என்பது சாய்வு-வெட்டுத்துண்டு அமைப்பில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

(ஈ) **வெட்டுத்துண்டு அமைப்பு (Intercept form)**



படம். 5.28

நேர்க்கோடு $L$ ஆனது $x, y$-அச்சுகளில் ஏற்படுத்தும் பூச்சியமல்லாத வெட்டுத்துண்டுகள் முறையே $a, b$ என்க.

எனவே, இக்கோடு $x$-அச்சை $A(a,\ 0)$ என்ற புள்ளியிலும், $y$-அச்சை $B(0,\,b)$ என்ற புள்ளியிலும் வெட்டுகிறது.

ஆகவே, $AB$-ன் சாய்வு $m = -\dfrac{b}{a}$.

(1)-ன் படி, $\quad y - 0 = -\dfrac{b}{a}(x - a)$

$$\Longrightarrow \quad ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab$$

இருபுறமும் $ab$ ஆல் வகுக்க $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \qquad (a \neq 0,\ b \neq 0)$

எனவே, $x$-வெட்டுத்துண்டு $a$ மற்றும் $y$-வெட்டுத்துண்டு $b$ கொண்ட நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad \forall \quad (x, y) \in L \qquad (4)$$

**குறிப்பு**

(i) நேர்க்கோடு $L$-ன் சாய்வு $m$ மற்றும் $x$-வெட்டுத்துண்டு $d$ எனில், இந்நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y = m(x - d)$.

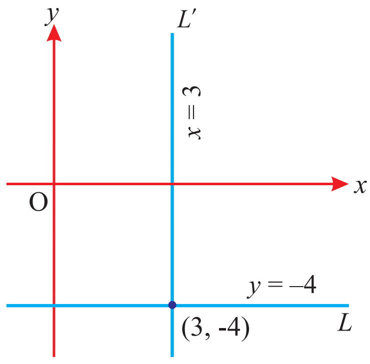
(ii) $y = mx,\ m \neq 0$ என்ற நேர்க்கோடு ஆதிப்புள்ளி வழிச் செல்லும். (இங்கு $x$ மற்றும் $y$-வெட்டுத்துண்டுகள் இரண்டும் பூச்சியங்களாகும்)

(iii) (1), (2), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளைச் சுருக்கி, சாய்வு-வெட்டுத்துண்டு அமைப்பான (3)-ல் உள்ளவாறு தருவிக்கலாம்.

(iv) (1), (2), (3), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளை $px + qy + r = 0$ என்ற வடிவில் எழுத இயலும். $L$-ன் மீதமைந்த $(x\,,y)$ என்ற அனைத்துப் புள்ளிகளுக்கும் இது பொருந்தும். இச்சமன்பாடு நேர்க்கோட்டின் பொது வடிவச் சமன்பாடாகும்.

## எடுத்துக்காட்டு 5.19

$(3,-4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் மற்றும் ஆய அச்சுகளுக்கு இணையாக அமைந்த நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.




படம். 5.29

**தீர்வு** $(3,-4)$ என்ற புள்ளி வழிச் சென்று $x$-அச்சுக்கு இணையாகவும் மற்றும் $y$-அச்சுக்கு இணையாகவும் உள்ள நேர்க்கோடுகள் முறையே $L$ மற்றும் $L'$ என்க.

$L$-ன் எல்லாப் புள்ளிகளின் $y$-அச்சுத்தொலைவும் $-4$ ஆகும்.

எனவே, நேர்க்கோடு $L$-ன் சமன்பாடு $y=-4$

இவ்வாறே, $L'$ மீதுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளின் $x$-அச்சுத் தொலைவும் 3 ஆகும்.

எனவே, $L'$-ன் சமன்பாடு $x = 3$

## எடுத்துக்காட்டு 5.20

சாய்வுக் கோணம் $45^\circ$ மற்றும் $y$-வெட்டுத்துண்டு $\frac{2}{5}$ ஆகியவற்றைக் கொண்ட நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

**தீர்வு** தேவையான நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m = \tan\theta$

$$= \tan 45^\circ = 1$$

$y$-வெட்டுத்துண்டு $c = \frac{2}{5}$

சாய்வு-வெட்டுத்துண்டு அமைப்பில் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = mx + c$$

$$\Longrightarrow \quad y = x + \frac{2}{5}$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{5x+2}{5}$$

எனவே, தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $5x - 5y + 2 = 0$ ஆகும்.

## எடுத்துக்காட்டு 5.21

$(-2,3)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், சாய்வு $\frac{1}{3}$ உடையதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : சாய்வு $m = \frac{1}{3}$, ஒரு புள்ளி $(x_1, y_1) = (-2,3)$

சாய்வு-புள்ளி அமைப்பில் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Longrightarrow \quad y - 3 = \frac{1}{3}(x+2)$$

தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x - 3y + 11 = 0$ ஆகும்.

## எடுத்துக்காட்டு 5.22

$(-1,1)$, $(2,-4)$ ஆகிய புள்ளிகளின் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

**தீர்வு** $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் என்க.

இங்கு $x_1 = -1$, $y_1 = 1$ மற்றும் $x_2 = 2$, $y_2 = -4$.

இரண்டு புள்ளிகள்-அமைப்பில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y-1}{-4-1} = \frac{x+1}{2+1}$$

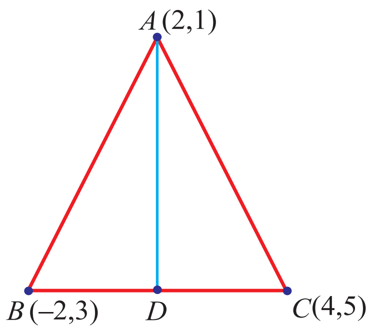
$$\Longrightarrow \quad 3y-3 = -5x-5$$

தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $5x+3y+2=0$ ஆகும்.

## எடுத்துக்காட்டு 5.23

$A(2, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(4, 5)$ என்பன $\triangle ABC$-ன் உச்சிகள். உச்சி $A$-யிலிருந்து வரையப்படும் நடுக்கோட்டின் (median) சமன்பாட்டைக் காண்க.

**தீர்வு** முக்கோணத்தின் ஓர் முனையையும், அதன் எதிர்ப் பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு நடுக்கோடாகும்.



படம். 5.30

$BC$-ன் நடுப்புள்ளி $D$ என்க.

ஆகவே, $BC$-ன் நடுப்புள்ளி $D\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = D(1, 4)$

நடுக்கோடு AD இன் சமன்பாடு

$$\frac{y-1}{4-1} = \frac{x-2}{1-2} \qquad (\because (x_1,y_1) = (2,1),\ (x_2,y_2) = (1,4))$$

$$\frac{y-1}{3} = \frac{x-2}{-1}$$

எனவே, தேவையான நடுக்கோட்டின் சமன்பாடு $3x + y - 7 = 0$.

## எடுத்துக்காட்டு 5.24

ஒரு நேர்க்கோட்டின் $x$-வெட்டுத்துண்டு $\frac{2}{3}$ மற்றும் $y$-வெட்டுத்துண்டு $\frac{3}{4}$ எனில், அக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : நேர்க்கோட்டின் $x$-வெட்டுத்துண்டு $a = \frac{2}{3}$

$y$-வெட்டுத்துண்டு $b = \frac{3}{4}$

வெட்டுத்துண்டு அமைப்பில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \Longrightarrow \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1 \quad \Longrightarrow \frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} = 1$$

எனவே, தேவையான சமன்பாடு $9x + 8y - 6 = 0$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 5.25**

$(6,\ -2)$ எனும் புள்ளி வழிச் செல்வதும் மற்றும் வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் 5 கொண்டதுமான நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

**தீர்வு** தேவையான நேர்க்கோடுகளின் $x$-வெட்டுத்துண்டு $a$ மற்றும் $y$-வெட்டுத்துண்டு $b$ என்க.

எனவே, $a + b = 5$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$\Longrightarrow \quad b = 5 - a$

வெட்டுத்துண்டு அமைப்பில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{5-a} = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{(5-a)x + ay}{a(5-a)} = 1$$

$$(5-a)x + ay = a(5-a) \qquad (1)$$

இக்கோடு $(6,-2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்,

$$(1) \Longrightarrow (5-a)6 + a(-2) = a(5-a)$$

$$\Longrightarrow a^2 - 13a + 30 = 0.$$

$$\Longrightarrow (a-3)(a-10) = 0$$

எனவே, $a = 3$ அல்லது $a = 10$

$a = 3$ எனில், $(1) \Longrightarrow (5-3)x + 3y = 3(5-3)$

$$\Longrightarrow 2x + 3y - 6 = 0 \qquad (2)$$

$a = 10$ எனில், $(1) \Longrightarrow (5-10)x + 10y = 10(5-10)$

$$\Longrightarrow -5x + 10y = -50$$

$$\Longrightarrow x - 2y - 10 = 0. \qquad (3)$$

தேவையான நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $2x + 3y = 6$ மற்றும் $x - 2y - 10 = 0$.

## பயிற்சி 5.4

1. $x$-அச்சிலிருந்து 5 அலகுகள் தொலைவில் உள்ளதும் $x$-அச்சுக்கு இணையானதுமான நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

2. $(-5,-2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் ஆயஅச்சுகளுக்கு இணையானதுமான நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

3. கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
   (i) சாய்வு $-3$; $y$-வெட்டுத்துண்டு 4.
   (ii) சாய்வுக்கோணம் $60^0$, $y$-வெட்டுத்துண்டு 3.

4. ஒரு நேர்க்கோடு $y$-அச்சை ஆதிப்புள்ளிக்கு மேலாக 3 அலகுகள் தூரத்தில் வெட்டுகிறது மற்றும் $\tan\theta = \frac{1}{2}$ ($\theta$ என்பது நேர்க்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம்) எனில், அந்த நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. பின்வரும் நேர்க்கோடுகளின் சாய்வு மற்றும் $y$ வெட்டுத்துண்டு ஆகியனவற்றைக் காண்க.

   (i) $y = x + 1$ (ii) $5x = 3y$ (iii) $4x - 2y + 1 = 0$ (iv) $10x + 15y + 6 = 0$

6. பின்வரும் விவரங்களுக்கு, நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

   (i) சாய்வு $-4$ ; $(1, 2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது.

   (ii) சாய்வு $\frac{2}{3}$ ; $(5, -4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது.

7. சாய்வுக் கோணம் $30^0$ கொண்ட மற்றும் $(4, 2)$, $(3, 1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8. பின்வரும் புள்ளிகளின் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

   (i) $(-2, 5), (3, 6)$ (ii) $(0, -6), (-8, 2)$

9. $P(1, -3), Q(-2, 5), R(-3, 4)$ ஆகிய முனைகளைக் கொண்ட $\triangle PQR$-ல் முனை $R$-இலிருந்து வரையப்படும் நடுக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு காணும் முறையைப் பயன்படுத்தி, பின்வரும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும் எனக் காட்டுக.

    (i) $(4, 2), (7, 5), (9, 7)$ (ii) $(1, 4), (3, -2), (-3, 16)$

11. கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள $x, y$-வெட்டுத்துண்டுகளைக் கொண்ட நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

    (i) $2, 3$ (ii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}$

12. கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளிலிருந்து $x, y$-வெட்டுத் துண்டுகளைக் காண்க.

    (i) $5x + 3y - 15 = 0$ (ii) $2x - y + 16 = 0$ (iii) $3x + 10y + 4 = 0$

13. $(3, 4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், வெட்டுத்துண்டுகளின் விகிதம் $3 : 2$ என உள்ளதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

14. $(2, 2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் 9 ஆகவும் கொண்ட நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

15. $(5, -3)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும், அளவில் சமமாகவும், ஆனால் குறி வெவ்வேறாகவும் உள்ள வெட்டுத் துண்டுகளைக் கொண்ட நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

16. $(9, -1)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $x$-வெட்டுத்துண்டானது, $y$-வெட்டுத்துண்டின் அளவைப் போல் மும்மடங்கு கொண்டதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

17. ஒரு நேர்க்கோடு ஆயஅச்சுகளை $A$ மற்றும் $B$ ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது. $AB$-ன் நடுப்புள்ளி $(3, 2)$ எனில், $AB$-ன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

18. $x$-வெட்டுத்துண்டானது $y$-வெட்டுத்துண்டின் அளவை விட 5 அலகுகள் அதிகமாகக் கொண்ட ஒரு நேர்க்கோடானது $(22, -6)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கின்றது எனில், அக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

19. $ABCD$ என்ற சாய்சதுரத்தின் இரு முனைகள் $A(3, 6)$ மற்றும் $C(-1, 2)$ எனில், அதன் மூலை விட்டம் $BD$ வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

20. $A(-2, 6)$, $B\,(3, -4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டை $P$ என்ற புள்ளி உட்புறமாக $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. புள்ளி $P$ வழியாகச் செல்லும் சாய்வு $\frac{3}{2}$ உடைய, நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

## 5.7 நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பு (General Form of Equation of a straight line)

பல்வேறு வடிவங்களில் அமைந்த நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளை $ax + by + c = 0$, ($a, b, c$ என்பன $a \neq 0$ அல்லது $b \neq 0$ எனக் கொண்ட மெய்யெண் மாறிலிகள்) என்ற பொது அமைப்பிற்கு மாற்றலாம் என ஏற்கனவே குறிப்பிட்டுள்ளோம். இப்போது பின்வருவனவற்றைக் காண்போம்.

(i) $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு மற்றும் $y$-வெட்டுத்துண்டு.

(ii) $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு.

(iii) $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு.

(iv) இரு வெட்டும் நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி.

### (i) $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு மற்றும் $y$-வெட்டுத்துண்டு (The slope and $y$-intercept of the straight line $ax + by + c = 0$)

$ax + by + c = 0$ என்பதை $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, $b \neq 0$ என மாற்றி அமைக்கலாம். (1)

(1) - ஐ சாய்வு-வெட்டுத்துண்டு அமைப்பில் உள்ள $y = mx + k$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட,

சாய்வு $m = -\frac{a}{b}$, $y$-வெட்டுத்துண்டு $= -\frac{c}{b}$ ஆகும்.

$\therefore$ $ax + by + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து,

சாய்வு $m = -\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}}$, $y$-வெட்டுத்துண்டு $= -\dfrac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{y\text{-ன் கெழு}}$ எனப் பெறுகிறோம்.

### (ii) $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a line parallel to the line $ax + by + c = 0$)

இரு நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் சமம் எனில், எனில் மட்டுமே அவை இணையாகும். எனவே, $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான கோடுகளின் சமன்பாடு $ax + by + k = 0$ என்ற வடிவில் அமையும். இது $k$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும்.

### (iii) $ax+by+c=0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a line perpendicular to the line $ax+by+c=0$)

ஆயஅச்சுக்களுக்கு இணையாக அமையாத இரு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், எனில் மட்டுமே அவற்றின் சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலன் $-1$ ஆகும். எனவே, $ax+by+c=0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக அமையும் எல்லா நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடு $bx-ay+k=0$, $k$ ஒரு மாறிலி ஆகும்.

**குறிப்பு**

$a_1x+b_1y+c_1=0$; $a_2x+b_2y+c_2=0$ என்ற இரு நேர்க்கோடுகள்

(i) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ எனில், எனில் மட்டுமே இணையாக அமையும்.

(ii) $a_1a_2+b_1b_2=0$ எனில், எனில் மட்டுமே செங்குத்தாக அமையும்.
இங்கு நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளின் கெழுக்கள் பூச்சியமற்றவை.

### (iv) இரு வெட்டும் கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளி (The point of intersection of two intersecting straight lines)

இரு நேர்க்கோடுகள் இணையாக இல்லையெனில், அவை ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும். அப்புள்ளி இவ்விரண்டு கோடுகளின் மீதும் அமையும். எனவே, அவைகளின் இரு சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதின் மூலம் வெட்டும் புள்ளியைக் காணலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு 5.26**

$3x+2y-12=0$, $6x+4y+8=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் இணை என நிறுவுக.

**தீர்வு** $3x+2y-12=0$-ன் சாய்வு $m_1=-\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}}=-\dfrac{3}{2}$

இவ்வாறே, $6x+4y+8=0$-ன் சாய்வு $m_2=-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore\quad m_1=m_2$. ஆகவே, இவ்விரு நேர்க்கோடுகளும் இணையாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 5.27**

$x+2y+1=0$, $2x-y+5=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தானவை என நிறுவுக.

**தீர்வு** $x+2y+1=0$-ன் சாய்வு $m_1=-\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}}=-\dfrac{1}{2}$

$2x-y+5=0$-ன் சாய்வு $m_2=-\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}}=\dfrac{-2}{-1}=2$

எனவே, சாய்வுகளின் பெருக்கற் பலன் $m_1m_2=-\dfrac{1}{2}\times 2=-1$

ஆகவே, இவ்விரு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை.

**எடுத்துக்காட்டு 5.28**

$x-8y+13=0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையானதும் $(2,5)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

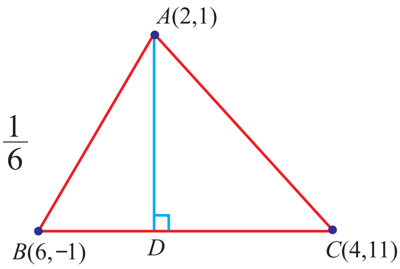
**தீர்வு** $x-8y+13=0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் வடிவம் $x-8y+k=0$. இது $(2, 5)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்,

$2-8(5)+k=0 \implies k=38.$

$\therefore$ தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x-8y+38=0$ ஆகும்.

### எடுத்துக்காட்டு 5.29

$\triangle ABC$-ன் முனைகள் $A(2, 1)$, $B(6, -1)$, $C(4, 11)$ என்க. $A$-யிலிருந்து வரையப்படும் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



படம். 5.31

**தீர்வு** $BC$-ன் சாய்வு $=\dfrac{11+1}{4-6}=-6$

$AD$ என்பது $BC$-க்குச் செங்குத்து. எனவே $AD$-ன் சாய்வு $=\dfrac{1}{6}$

$\therefore$ $AD$-ன் சமன்பாடு $y-y_1=m(x-x_1)$

$y-1=\dfrac{1}{6}(x-2) \implies 6y-6=x-2$

$\therefore$ தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x-6y+4=0$ ஆகும்.

## பயிற்சி 5.5

1. பின்வரும் நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க.
   (i) $3x+4y-6=0$ (ii) $y=7x+6$ (iii) $4x=5y+3$.
2. $x+2y+1=0$, $3x+6y+2=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் இணை என நிறுவுக.
3. $3x-5y+7=0$, $15x+9y+4=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்து என நிறுவுக.
4. $\dfrac{y}{2}=x-p$ மற்றும் $ax+5=3y$ என்பன இணை எனில், $a$-ன் மதிப்பைக் காண்க.
5. $5x-2y-9=0$, $ay+2x-11=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்து எனில், $a$-ன் மதிப்பைக் காண்க.
6. $8px+(2-3p)y+1=0$, $px+8y-7=0$ ஆகியன செங்குத்து நேர்க்கோடுகள் எனில், $p$-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.
7. $(h, 3)$, $(4, 1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடும், $7x-9y-19=0$ என்ற நேர்க்கோடும் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன எனில், $h$-ன் மதிப்பைக் காண்க.
8. $3x-y+7=0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையானதும் $(1, -2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
9. $x-2y+3=0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தானதும் $(1, -2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
10. $(3, 4)$, $(-1, 2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத்துண்டின் மையக் குத்துக்கோட்டின் (perpendicular bisector) சமன்பாட்டைக் காண்க.

11. $2x+y-3=0$, $5x+y-6=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

12. $5x-6y=1$, $3x+2y+5=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், $3x-5y+11=0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு செங்குத்தாகவும் அமையும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

13. $3x-y+9=0$, $x+2y=4$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியுடன், $2x+y-4=0$, $x-2y+3=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

14. $\triangle ABC$-ன் முனைகள் $A(2,\ -4)$, $B(3,\ 3)$, $C(-1,\ 5)$ எனில், $B$-லிருந்து வரையப்படும் குத்துக்கோட்டு வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

15. $\triangle ABC$-ன் முனைகள் $A(-4,4)$, $B(8,4)$, $C(8,10)$ எனில், $A$-லிருந்து வரையப்படும் நடுக்கோட்டு வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

16. ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து $3x+2y=13$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளியைக் (foot of the perpendicular) காண்க.

17. ஒரு வட்டத்தின் இரு விட்டங்களின் சமன்பாடுகள் $x+2y=7$, $2x+y=8$ மற்றும் வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளி $(0,\ -2)$ எனில், இவ்வட்டத்தின் ஆரத்தை காண்க.

18. $2x-3y+4=0$, $x-2y+3=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியையும், $(3,\ -2)$, $(-5,\ 8)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளியையும், இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

19. இருசமபக்க முக்கோணம் $\triangle PQR$-ல் $PQ=PR$ மற்றும் அடிப்பக்கம் $QR$ என்பது $x$-அச்சின் மீது அமைகிறது என்க. மேலும், முனை $P$ ஆனது $y$-அச்சின் மீது அமைகிறது. $PQ$-ன் சமன்பாடு $2x-3y+9=0$ எனில், $PR$ வழியாக செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

## பயிற்சி 5.6

**சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.**

1. $(a,-b)$, $(3a,5b)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி

   (A) $(-a,2b)$ (B) $(2a,4b)$ (C) $(2a,2b)$ (D) $(-a,-3b)$

2. $A(1,-3)$, $B(-3,9)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டை 1:3 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P$

   (A) $(2,1)$ (B) $(0,0)$ (C) $\left(\frac{5}{3},\ 2\right)$ (D) $(1,-2)$

3. $A(3,4)$, $B(14,-3)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத்துண்டு $x$-அச்சை $P$ இல் சந்திக்கின்றது எனில், அக்கோட்டுத்துண்டை $P$ பிரிக்கும் விகிதம்

   (A) 4 : 3 (B) 3 : 4 (C) 2 : 3 (D) 4 : 1

4. $(-2, -5), (-2, 12), (10, -1)$ ஆகிய புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் (centroid)

(A) $(6, 6)$ (B) $(4, 4)$ (C) $(3, 3)$ (D) $(2, 2)$

5. $(1, 2), (4, 6), (x, 6), (3, 2)$ என்பன இவ்வரிசையில் ஓர் இணைகரத்தின் முனைகள் எனில், $x$-ன் மதிப்பு

(A) 6 (B) 2 (C) 1 (D) 3

6. $(0,0), (2, 0), (0, 2)$ ஆகிய புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு

(A) 1 ச. அலகுகள் (B) 2 ச. அலகுகள் (C) 4 ச. அலகுகள் (D) 8 ச. அலகுகள்

7. $(1, 1), (0, 1), (0, 0), (1, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளால் அமையும் நாற்கரத்தின் பரப்பு

(A) 3 ச. அலகுகள் (B) 2 ச. அலகுகள் (C) 4 ச. அலகுகள் (D) 1 ச. அலகுகள்

8. $x$-அச்சுக்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம்

(A) $0^\circ$ (B) $60^\circ$ (C) $45^\circ$ (D) $90^\circ$

9. $(3, -2), (-1, a)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $-\frac{3}{2}$ எனில், $a$-ன் மதிப்பு

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

10. $(-2, 6), (4, 8)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) $-3$ (D) $-\frac{1}{3}$

11. $9x - y - 2 = 0$, $2x + y - 9 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி

(A) $(-1, 7)$ (B) $(7, 1)$ (C) $(1, 7)$ (D) $(-1, -7)$

12. $4x + 3y - 12 = 0$ என்ற நேர்க்கோடு $y$-அச்சை வெட்டும் புள்ளி

(A) $(3, 0)$ (B) $(0, 4)$ (C) $(3, 4)$ (D) $(0, -4)$

13. $7y - 2x = 11$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

(A) $-\frac{7}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $-\frac{2}{7}$

14. $(2, -7)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், $x$-அச்சிற்கு இணையானதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

(A) $x = 2$ (B) $x = -7$ (C) $y = -7$ (D) $y = 2$

15. $2x - 3y + 6 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் $x$, $y$-வெட்டுத்துண்டுகள் முறையே

(A) 2, 3 (B) 3, 2 (C) $-3$, 2 (D) 3, $-2$

16. ஒரு வட்டத்தின் மையம் $(-6, 4)$. ஒரு விட்டத்தின் ஒரு முனை $(-12, 8)$ எனில், அதன் மறு முனை

(A) $(-18, 12)$ (B) $(-9, 6)$ (C) $(-3, 2)$ (D) $(0, 0)$

17. ஆதிப்புள்ளி வழிச் செல்வதும் $2x+3y-7=0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்துமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

(A) $2x+3y=0$ (B) $3x-2y=0$ (C) $y+5=0$ (D) $y-5=0$

18. $y$-அச்சிற்கு இணையானதும் $(-2,5)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

(A) $x-2=0$ (B) $x+2=0$ (C) $y+5=0$ (D) $y-5=0$

19. $(2,5),(4,6),(a,a)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன எனில், $a$-ன் மதிப்பு

(A) $-8$ (B) $4$ (C) $-4$ (D) $8$

20. $y=2x+k$ என்ற நேர்க்கோடு $(1,2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கின்றது எனில், $k$-ன் மதிப்பு

(A) 0 (B) 4 (C) 5 (D) $-3$

21. சாய்வு 3 ஆகவும், $y$ வெட்டுத்துண்டு $-4$ ஆகவும் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

(A) $3x-y-4=0$ (B) $3x+y-4=0$

(C) $3x-y+4=0$ (D) $3x+y+4=0$

22. $y=0$ மற்றும் $x=-4$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

(A) $(0,-4)$ (B) $(-4,0)$ (C) $(0,4)$ (D) $(4,0)$

23. $3x+6y+7=0$ மற்றும் $2x+ky=5$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் செங்குத்தானவை எனில், $k$-ன் மதிப்பு

(A) 1 (B) $-1$ (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

**நினைவில் கொள்க**

- $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு
$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
- $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டினை உட்புறமாக $l:m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m},\frac{ly_2+my_1}{l+m}\right)$ ஆகும்.
- தளத்தில் $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டினை வெளிப்புறமாக $l:m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $Q\left(\frac{lx_2-mx_1}{l-m},\frac{ly_2-my_1}{l-m}\right)$ ஆகும்.
- $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி
$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right).$$
- $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$ $(x_3,y_3)$ ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு
$$=\frac{1}{2}\sum x_1(y_2-y_3)=\frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\}.$$

* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ஆகிய மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைய நிபந்தனை
  (i) $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$ (அல்லது)
  (ii) $AB$-ன் சாய்வு = $AC$-ன் சாய்வு (அ) $BC$-ன் சாய்வு.
* ஒரு நேர்க்கோடு மிகை $x$-அச்சுடன் $\theta$ அளவு கோணம் உண்டாக்கினால், அக்கோட்டின் சாய்வு $m = \tan\theta$ ஆகும்.
* $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு
  $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$
* $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m = -\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}} = -\dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$
* கிடைநிலைக் கோட்டின் சாய்வு பூச்சியமாகும். நேர்க்குத்துக் கோட்டின் சாய்வை வரையறுக்க இயலாது.
* இரு கோடுகளின் சாய்வுகள் சமமாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அவை இணையாகும்.
* நேர்க்குத்தற்ற இரு நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகளின் பெருக்கற் பலன் $-1$ (அதாவது, $m_1 m_2 = -1$) ஆக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அவை செங்குத்துக் கோடுகளாகும்.

## நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

| வ. எண் | நேர்க்கோடு | சமன்பாடு |
|---|---|---|
| 1. | $x$-அச்சு | $y = 0$ |
| 2. | $y$-அச்சு | $x = 0$ |
| 3. | $x$-அச்சிற்கு இணை | $y = k$ |
| 4. | $y$-அச்சிற்கு இணை | $x = k$ |
| 5. | $ax+by+c = 0$ க்கு இணை | $ax + by + k = 0$ |
| 6. | $ax+by+c = 0$ க்கு செங்குத்து | $bx - ay + k = 0$ |
| | **கொடுக்கப்பட்டவை** | **சமன்பாடு** |
| 1. | ஆதி வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு | $y = mx$ |
| 2. | சாய்வு $m$ மற்றும் $y$-வெட்டுத்துண்டு $c$ | $y = mx + c$ |
| 3. | சாய்வு $m$ மற்றும் ஒரு புள்ளி $(x_1, y_1)$ | $y - y_1 = m(x - x_1)$ |
| 4. | $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ ஆகிய இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு | $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ |
| 5. | $x$-வெட்டுத்துண்டு $a$ மற்றும் $y$-வெட்டுத்துண்டு $b$ | $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ |