தமிழ்நாடு அரசு

கணக்கு

ஒன்பதாம் வகுப்பு

தீண்டாமை
மனிதநேயமற்ற செயல் – பெருங்குற்றம்

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தமிழ்நாடு அரசு
இலவசப் பாடநூல் வழங்கும்
திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்டது
(விற்பனைக்கு அன்று)

முதல் பதிப்பு – 2011
மறுபதிப்பு – 2012
(பொதுப் பாடத்திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்ட நூல்)

குழுத்தலைவர்

முனைவர். ஏ. சந்திரசேகரன்
இணைப் பேராசிரியர்
கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி)
தமிழ்நாடு அரசு, சென்னை – 600005

மேலாய்வாளர்கள்

முனைவர். ச. ஆ. சேட்டு
இணைப் பேராசிரியர்
கணிதத்துறை
D.G. வைணவக் கல்லூரி
அரும்பாக்கம், சென்னை – 600106.

திரு. சீனி. செல்வரங்கம்
விரிவுரையாளர் (தேர்வுநிலை)
கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி)
தமிழ்நாடு அரசு, சென்னை – 600005.

முனைவர். இரா. சுவாமிநாதன்
முதல்வர்
ஸ்ரீ வித்யா கிரி மெட்ரிக். பள்ளி
புதுவயல்
சிவகங்கை மாவட்டம் – 630108.

நூலாசிரியர்கள்

திரு. மு. மதிவாணன்
தலைமை ஆசிரியர்
அரசு உயர்நிலைப் பள்ளி
பொம்மஅள்ளி, காரிமங்கலம்
தர்மபுரி மாவட்டம்– 635111.

திரு. இல. ஆசைத்தம்பி
முதுகலை பட்டதாரி ஆசிரியர்
அரசு மகளிர் மேல்நிலைப் பள்ளி
பாலக்கோடு
தர்மபுரி மாவட்டம் – 636808.

திரு. அ. செந்தில்குமார்
பட்டதாரி ஆசிரியர்
அரசு மகளிர் மேல்நிலைப் பள்ளி
விழுப்புரம் – 605602.

திரு. ம. குழந்தைவேலு
பட்டதாரி ஆசிரியர்
அரசு மகளிர் மேல்நிலைப் பள்ளி
விழுப்புரம் – 605602.

திரு. தா. ஸ்டீபன் குமார்
பட்டதாரி ஆசிரியர்,
டவுட்டன் ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி
சென்னை – 600007.

திருமதி அ. கிருஷ்ணவேணி
முதுகலை பட்டதாரி ஆசிரியர்
வனவாணி மெட்ரிக் மேல்நிலைப் பள்ளி
IIT வளாகம், சென்னை–600036.

கணினி தட்டச்சு, வரைகலை, அட்டைப்படம் : **வி. ஜேம்ஸ் ஆபிரகாம், ர. லஷ்மி**

பாடநூல் அச்சாக்கம்
தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் கழகம்
கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

விலை : ₹

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம். மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது

வெப் ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :

முன்னுரை

சீரிளமைத் திறம் வியந்து செயல் மறந்து வாழ்த்துதுமே!

–மனோன்மணீயம் பெ. சுந்தரனார்

சமூக நீதியை உறுதி செய்யவும் தமிழ்நாட்டில் உள்ள அனைத்து பள்ளிகளிலும் தரமான கல்வியைக் கொடுக்கவும் தமிழக அரசு பொதுப்பாடத் திட்டத்தைக் அறிமுகப்படுத்தியுள்ளது. இதனையே மிக முக்கிய கருத்தாக கொண்டும் கணிதவியலில் ஏற்படும் மாற்றங்களை மாணவர்கள் எவ்வாறு எதிர்கொள்ளச் செய்வது என்பதைக் கருத்தில் கொண்டும் இப்புத்தகம் தேசிய பாடத்திட்ட அமைப்பு (NCF) 2005 இன் கட்டமைப்பில் உள்ளவாறு கல்லூரி மற்றும் பள்ளிகளில் பணியாற்றும் ஆசிரியர்களை உள்ளடக்கிய வல்லுநர் குழுவால் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

கணிதம் என்பது மிகவும் சிக்கலான கருத்துக்களை மிக எளிய வார்த்தைகளால் புரியவைக்கும் ஒரு மொழியாகும். கணிதத்தின் துணையோடும் சிந்தனைத் திறன் மூலமும் 10^{-9} (Nano) போன்ற மிகச்சிறிய எண்களையும் 10^{100} (Googolplex) போன்ற மிகப்பெரிய எண்களையும் மனிதன் தன் கட்டுப்பாட்டுப் பகுதியில் கொணரமுடியும். மடிக்கணினி போன்ற இப்பாடநூல் பன்னிரெண்டு தலைப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முக்கியத் தொகுப்பாகும். ஒவ்வொரு பாடப்பகுதியும் மிகச் சுருக்கமான முகவுரைகளையும், எளிதில் புரிந்து கொள்ளும்படியான விளக்கங்களையும் கொண்டு ஆரம்பிக்கின்றன. மாணவர்களை ஊக்குவிக்கம் பொருட்டு ஒவ்வொரு அத்தியாயத்தின் தொடக்கத்திலும் சிறந்த கணித வல்லுநர்களின் முக்கிய பங்களிப்பு பற்றி விளக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் சுருக்கமான வரையறைகள், முக்கிய கருத்துக்கள், தேற்றங்கள் மற்றும் பயிற்சி கணக்குகள் ஆகியன இப்பாடநூலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு அத்தியாயத்தின் இறுதியிலும் அப்பாடத்தில் மாணவர்கள் என்னென்ன கற்றறிந்தனர் என்பதை சுருக்கமாக நினைவூட்டப்படுகிறது. வழக்கமான கணக்கீடுகளிலிருந்து மாணவர்கள் சற்று கடினமான கணக்கீடுகளை செய்வதற்கு இப்பாடநூல் உதவும் என நம்புகிறோம்.

கணிதவியலின் தேவையைப் பற்றி தெரிந்து கொள்ளவும், அதனை எளிதாக புரிந்து கொள்ளவும் வாழ்க்கையோடு தொடர்புடைய கணக்குகள் கையாளப்பட்டுள்ளன. இத்தகைய வாழ்க்கையோடு தொடர்புடைய கணக்குகள், முக்கிய கருத்துகள், வரையறைகள் மற்றும் தேற்றங்களை எளிதாகப் புரிந்து கொள்ள ஏதுவாக எடுத்துக்காட்டுகளுடன் மிக எளிய அமைப்பில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தகைய எடுத்துக்காட்டுகளை புரிந்து கொள்வதோடு மட்டுமல்லாமல், வரையறைகள் எக்காரணங்களுக்காக கொடுக்கப்பட்டுள்ளன என்பதை தெளிவாக அறிந்துகொள்ளுதல் வேண்டும். இதன் மூலம் சிக்கலான கணக்குகளை வெவ்வேறு வழிகளில் எளிதாக எவ்வாறு தீர்ப்பது என்பதை அறிய இது வழிவகுக்கும்.

இப்பாடநூல் கண்ணைக் கவரும் வண்ணங்களைக் கொண்டு அச்சிடப்பட்டுள்ளதால் மாணவர்கள் கணிதப் பாடத்தின் அழகை ரசிக்கவும், தங்களது கருத்துகளை மற்றவர்களுடன் பரிமாறிக்கொள்ளவும் மற்றும் புதிய கருத்துகளை உருவாக்கவும் வழிவகை செய்யும் என நம்புகிறோம். ஒரு மாணவன் தான் சந்திக்கும் ஒரு சராசரி மனிதனுக்கு, தான் கற்ற கணிதத்தை எளிதாக புரியவைக்காத வரையில் அம்மாணவன் கணிதக் கொள்கையை தெளிவாக அறிந்துவிட்டதாக நாம் கருத முடியாது. எனவே கணிதம் என்பது வெறும் கணக்கீடுகளை மட்டுமே செய்வது அல்ல அது அறிவு சார் பகுதியை முறையாக செயல்படுத்தவும் உதவுகிறது என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே கணிதத்தின் சிறப்பைப் பாராட்டவும் அதன் மதிப்பைத் தெரிந்து கொள்ளவும் இந்நூலில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள அடிப்படை கணிதவியலை கற்க வேண்டும். யார் கணிதத்தை மிக ஆழ்ந்து கற்கின்றாரோ அவர் கணிதத்தின் முக்கியத்துவத்தையும், பயன்பாட்டையும் அறிவர்.

கணிதத்தைப் படிப்பதும், படைப்பதும் ஒருவரின் வாழ்வின் சிறப்பம்சமாகும். விசித்திரமானதுமல்ல, விந்தையானதுமல்ல கணிதம். வாழ்க்கையை சிறக்கவைக்க உதவும் ஒரு இசைக்கருவி. அதனை மீட்டும் ஞானத்தைப் பெறுவோம், மகிழ்வோம்! மலர்வோம்! வளர்வோம்!! வாழ்வோம்!!!.

முனைவர் ஏ. சந்திரசேகரன்
மற்றும் ஆசிரியர் குழு

குறியீடுகள்

$=$	சமம் (equal to)
$\neq$	சமமில்லை (not equal to)
$<$	விடக்குறைவு (less than)
$\leq$	குறைவு அல்லது சமம் (less than or equal to)
$>$	விட அதிகம் (greater than)
$\geq$	அதிகம் அல்லது சமம் (greater than or equal to)
$\approx$	சமானமான (equivalent to)
$\cup$	சேர்ப்பு (union)
$\cap$	வெட்டு (intersection)
$\mathbb{U}$	அனைத்துக் கணம் (universal Set)
$\in$	உறுப்பு (belongs to)
$\notin$	உறுப்பல்ல(does not belong to)
$\subset$	தகு உட்கணம் (proper subset of)
$\subseteq$	உட்கணம் (subset of or is contained in)
$\not\subset$	தகு உட்கணமல்ல (not a proper subset of)
$\not\subseteq$	உட்கணமல்ல (not a subset of or is not contained in)
A' (or) A^c	A-ன் நிரப்புக்கணம் (complement of A)
$\varnothing$ (or) $\{\ \}$	வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மை கணம் (empty set or null set or void set)
$n(A)$	ஆதிஎண் அல்லது செவ்வெண் (number of elements in the set A)
$P(A)$	A-ன் அடுக்குக் கணம் (power set of A)
$\|\|^{ly}$	இதே போன்று (similarly)
$\mathrm{P}(A)$	A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு (probability of the event A)
Δ	சமச்சீர் வித்தியாசம் (symmetric difference)
$\mathbb{N}$	இயல் எண்கள் (natural numbers)
$\mathbb{W}$	முழுஎண்கள் (whole numbers)
$\mathbb{Z}$	முழுக்கள் (integers)
$\mathbb{R}$	மெய்யெண்கள் (real numbers)
$\triangle$	முக்கோணம் (triangle)
$\angle$	கோணம் (angle)
$\perp$	செங்குத்து (perpendicular to)
$\|\|$	இணை (parallel to)
$\Longrightarrow$	உணர்த்துகிறது (implies)
$\therefore$	எனவே (therefore)
$\because$	ஏனெனில் (since (or) because)
$\| \ \|$	தனிமதிப்பு (absolute value)
$\simeq$	தோராயமாக சமம் (approximately equal to)
$\|$ (or) :	அதன்படி அல்லது என்றவாறு (such that)
$\equiv$ (or) $\cong$	சர்வசமம் (congruent)
$\equiv$	முற்றொருமை (identically equal to)
π	பை (pi)
$\pm$	மிகை அல்லது குறை (plus or minus)
■	தேற்றம் முடிவு (end of the proof)

பொருளடக்கம்

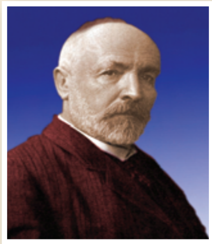
1 கணவியல்

No one shall expel us from the paradise that Cantor has created for us

- DAVID HILBERT

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- கணத்தை வரையறுத்தல்
- விவரித்தல் முறை, கணக்கட்டமைப்பு முறை மற்றும் பட்டியல் முறையில் கணங்களைக் குறிப்பிடுதல்
- பல்வேறு வகையான கணங்களை அடையாளம் காணல்
- கணச்செயல்களை புரிந்து கொள்ளுதல்
- கணங்கள் மற்றும் கணச்செயல்களை வென்படங்களில் குறிக்கக் கற்றுக்கொள்ளுதல்
- $n(A \cup B)$-க்கான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி எளிய கணக்குகளைச் செய்தல்



ஜார்ஜ் கேண்டர்
(1845-1918)

கணவியலின் அடிப்படைக்கருத்துக்கள் ஜார்ஜ் கேண்டர் *(Georg Cantor)* என்ற ஜெர்மன் நாட்டு கணிதவியல் அறிஞரால் உருவாக்கப்பட்டது. பூரியர் தொடர் எனப்படும் ஒரு வகை முடிவிலி தொடர் குறித்து அவர் ஆராய்ந்தார். அதனடிப்படையில் நவீன கணிதவியல் பகுப்பாய்வுகளின் அடிப்படையாக கணவியல் அமைந்துள்ளது என பெரும்பாலான கணிதவியல் அறிஞர்கள் ஏற்றுக் கொண்டனர். கேண்டரின் இப்பணியானது பிற்காலத்தில் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட கணிதவியல் தர்க்க முறைக்கு அடிப்படையாக அமைந்தது.

1.1 அறிமுகம்

கணிதவியலில் முக்கிய பங்காற்றுவதும் அனைத்து பிரிவுகளிலும் பயன்படுத்தப்படுவதும் கணம் என்ற கருத்தாகும்.

கணிதவியலின் அனைத்து வடிவங்களையும் கணங்களாக கருத முடியும் என்பதால், கணிதவியலில் கணக்குறியீடு முறை ஒரு வசதியான அமைப்பாக கருதப்படுகிறது. கணக்கொள்கைகளைப் புரிந்து கொள்வதன் மூலம் கணிதவியல் கருத்துக்களை ஓர் அமைப்பாகக் கருதி, அவற்றை ஒழுங்குபடுத்தி கணங்களாக எழுதவும், தர்க்க ரீதியாகப் புரிந்து கொள்ளவும் முடியும். பின்னர், இவ்வகுப்பில் இயல் எண்கள், விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் மெய்யெண்களை எவ்வாறு கணங்களாக எழுதலாம் என நாம் படிக்க உள்ளோம். இப்பாடப்பகுதியில், கணக்கொள்கைகள் பற்றியும், கணவியலின் சில அடிப்படைச்செயல்கள் பற்றியும் படிக்கலாம்.

1.2 கணங்களை விளக்குதல்

புத்தகங்களின் தொகுப்பு, மாணவர்களின் குழு, ஒரு நாட்டில் உள்ள மாநிலங்களின் பட்டியல், நாணயங்களின் தொகுப்பு போன்றவற்றில் தொகுப்பு அல்லது குழு என்ற சொற்களை நாம் அடிக்கடி பயன்படுத்துகிறோம். பொருட்களின் தொகுப்பு அல்லது குழு என்பவற்றை கணித முறையில் குறிப்பிடும் முறையே கணமாகும்.

முக்கிய கருத்து	கணம்
நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருட்களின் தொகுப்பு கணம் எனப்படும். கணத்தில் உள்ள பொருட்கள் அக்கணத்தின் உறுப்புகள் எனப்படும்.	

ஒரு கணம் ‘நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது’ என்பது கணிதவியலில் கணத்தின் ஒரு முக்கியமான பண்பாகும். அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட எந்தவொரு பொருளும் அக்கணத்தின் ஒரு உறுப்பாகும் அல்லது உறுப்பாகாது என தெளிவாக குறிப்பிடுவதாகும்.

மேலும், ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் வெவ்வேறானவை. அதாவது எந்த இரு உறுப்புகளும் சமமல்ல.

பின்வரும் தொகுப்புகளில் எவை நன்கு வரையறுக்கப்பட்டவை?

(1) உன் வகுப்பில் உள்ள ஆண் மாணவர்களின் தொகுப்பு.

(2) 2,4,6,10 மற்றும் 12 என்ற எண்களின் தொகுப்பு.

(3) தமிழ் நாட்டில் உள்ள அனைத்து மாவட்டங்களின் தொகுப்பு.

(4) நல்ல திரைப்படங்களின் தொகுப்பு.

(1), (2) மற்றும் (3) ஆகியவை நன்கு வரையறுக்கப்பட்டவை. ஆகவே அவை கணங்களாகும். (4) ஆனது நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது அல்ல. ஏனெனில், ‘நல்ல திரைப்படம்’ என்ற வார்த்தை நன்கு வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே, (4) கணமாகாது.

பொதுவாக, கணங்களை A, B, C போன்ற ஆங்கில பெரிய எழுத்துக்களால் குறிப்போம். கணத்தின் உறுப்புகளை a, b, c போன்ற ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களால் குறிப்போம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\in$	‘-ன் ஒரு உறுப்பு’ அல்லது ‘-ல் உள்ளது’

x என்பது கணம் A–ன் உறுப்பு என்பதை $x \in A$ என எழுதுவோம்.

$\notin$	‘-ன் ஒரு உறுப்பல்ல’ அல்லது ‘-ல் இல்லை’

x என்பது கணம் A-ன் உறுப்பல்ல என்பதை $x \notin A$ என எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{1, 3, 5, 9\}$ என்ற கணத்தைக் கருதுக.

1 என்பது கணம் A-ன் உறுப்பாகும். இதனை $1 \in A$ என எழுதலாம்.

3 என்பது கணம் A-ன் உறுப்பாகும். இதனை $3 \in A$ என எழுதலாம்.

8 என்பது கணம் A-ன் உறுப்பல்ல. இதனை $8 \notin A$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.1

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ என்க. காலியிடங்களை $\in$ அல்லது $\notin$ என்ற பொருத்தமான குறியிட்டு நிரப்புக.

(i) 3 .... A (ii) 7 .... A (iii) 0 ...... A (iv) 2 ...... A

தீர்வு (i) $3 \in A$ ($\because$ 3 **என்பது** A-**ன் உறுப்பாகும்**)

(ii) $7 \notin A$ ($\because$ 7 **என்பது** A-**ன் உறுப்பல்ல**)

(iii) $0 \notin A$ ($\because$ 0 **என்பது** A-**ன் உறுப்பல்ல**)

(iv) $2 \in A$ ($\because$ 2 **என்பது** A-**ன் உறுப்பாகும்**)

1.3 கணத்தைக் குறிப்பிடும் முறை (Representation of a Set)

ஒரு கணத்தினை பின்வரும் மூன்று வழிகளில் அல்லது முறைகளில் ஏதேனும் ஒன்றால் குறிப்பிடலாம்.

(i) விவரித்தல் முறை அல்லது வருணனைமுறை (Descriptive Form)
(ii) கணக்கட்டமைப்பு முறை அல்லது விதி முறை (Set-Builder Form or Rule Form)
(iii) பட்டியல் முறை அல்லது அட்டவணை முறை (Roster Form or Tabular Form)

1.3.1 விவரித்தல் முறை

முக்கிய கருத்து	விவரித்தல் முறை
கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளை வார்த்தைகளால் தெளிவாக விவரிக்கும் முறை 'விவரித்தல்' அல்லது 'வருணனை முறை' எனப்படும். எவை கணத்தின் உறுப்புகள் மற்றும் கணத்தின் உறுப்புகள் அல்ல என்பதைச் சுருக்கமாகவும், தெளிவாகவும் தெரிவிப்பதாக விவரித்தல் முறை அமைய வேண்டும்.	

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) அனைத்து இயல் எண்களின் கணம்.
(ii) 100 ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் கணம்.
(iii) அனைத்து ஆங்கில எழுத்துக்களின் கணம்.

1.3.2 கணக்கட்டமைப்பு முறை

முக்கிய கருத்து	கணக்கட்டமைப்பு முறை
ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் நிறைவு செய்யும் பண்புகளின் அடிப்படையில் கணத்தைக் குறிப்பிடும் முறை கணக்கட்டமைப்பு முறையாகும்.	
குறியீட்டைப் படித்தல்	
'|' அல்லது ':'	'அதன்படி' அல்லது 'என்றவாறு'
A = $\{x : x$ என்பது CHENNAI என்ற சொல்லில் உள்ள ஓர் எழுத்து$\}$ இக்கணத்தினை, "x என்பது CHENNAI என்ற சொல்லில் உள்ள ஓர் எழுத்து என்றவாறுள்ள எல்லா x-ன் கணம் A" எனப்படிக்கலாம்.	

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\mathbb{N} = \{x : x$ ஒரு இயல் எண்$\}$

(ii) $P = \{x : x$ என்பது 100ஐ விடக் குறைவான ஒரு பகா எண்$\}$

(iii) $A = \{x : x$ ஒரு ஆங்கில எழுத்து$\}$

1.3.3 பட்டியல் முறை

முக்கிய கருத்து	பட்டியல் முறை
ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளை { } என்ற ஒரு சோடி அடைப்பிற்குள் பட்டியலிடுவது பட்டியல் முறை அல்லது அட்டவணை முறை என்றழைக்கப்படுகிறது.	

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) A என்பது 11ஐ விடக் குறைவாக உள்ள இரட்டைப்படை இயல் எண்களின் கணம் என்க. இக்கணத்தினைப் பட்டியல் முறையில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

(ii) $A = \{x : x$ ஒரு முழு (Integer) மற்றும் $-1 \leq x < 5\}$

இக்கணத்தினைப் பட்டியல் முறையில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

குறிப்பு

(i) பட்டியல் முறையில் கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரேயொரு முறை மட்டுமே பட்டியலிடப்பட வேண்டும். வழக்கமாக ஒரு கணத்தில் ஏற்கனவே வந்த உறுப்புகள் மீண்டும் வராது.

(ii) "COFFEE" என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம் A என்க.
அதாவது, A={ C, O, F, E }. பட்டியல் முறையில் எழுதப்பட்டுள்ள A என்ற கணத்தின் பின்வரும் தொகுப்புகள் பொருத்தமற்றவை.

{C, O, E} (எல்லா உறுப்புகளும் பட்டியலிடப்படவில்லை)

{C, O, F, F, E} (F என்ற எழுத்து இருமுறை பட்டியலிடப்பட்டுள்ளது)

(iii) பட்டியல் முறையில் குறிப்பிடும்போது ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளை எந்த வரிசையிலும் எழுதலாம். எனவே 2, 3 மற்றும் 4 ஆகியவற்றை உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்தினை பின்வருமாறு பொருளுடைய (பொருத்தமான) பட்டியல் அமைப்புகளாக எழுதலாம்.

$\{2, 3, 4\}$ $\{2, 4, 3\}$ $\{4, 3, 2\}$

மேற்கண்ட கணங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரே கணத்தைக் குறிக்கின்றன.

(iv) ஒரு கணமானது முடிவிலா அல்லது முடிவுறு ஆனால் அதிக எண்ணிக்கையிலான உறுப்புகளைப் பெற்றிருந்தால், பட்டியலிடப் பட்ட உறுப்புகளின் அமைப்பு தொடர்ந்து செல்லும் என்பதை $\{5, 6, 7, \cdots\}$ அல்லது $\{3, 6, 9, 12, 15, \cdots, 60\}$ என்பவற்றில் உள்ளது போன்று '$\cdots$' என்ற மூன்று தொடர்புள்ளிகளால் (*ellipsis*) குறிப்பிடுவோம்.

(v) ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் முழு அமைப்பையும் புரிந்து கொள்ளும் வகையில் போதுமான விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் மட்டுமே ‘$\cdots$’ என்ற தொடர்ச்சியான மூன்று புள்ளிகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

கணங்களைக் குறிப்பிடும் பல்வேறு முறைகள்

விவரித்தல் முறை	கணக்கட்டமைப்பு முறை	பட்டியல் முறை
அனைத்து ஆங்கில உயிரெழுத்துகளின் கணம்	$\{x : x$ ஒரு ஆங்கில உயிரெழுத்து$\}$	$\{a, e, i, o, u\}$
15-க்கு குறைவாகவோ அல்லது சமமாகவோ உள்ள ஒற்றைப்படை மிகைமுழு எண்களின் கணம்	$\{x : x$ ஒரு ஒற்றைப்படை எண் மற்றும் $0 < x \leq 15\}$	$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
0-க்கும் 100-க்கும் இடையில் உள்ள முழு கன எண்களின் (Perfect Cube numbers) கணம்	$\{x : x$ ஒரு முழு கன எண் மற்றும் $0 < x < 100\}$	$\{1, 8, 27, 64\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.2

பின்வரும் கணங்களின் உறுப்புகளைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக

(i) 7-ன் மடங்குகளாக உள்ள மிகை முழுக்களின் கணம்.

(ii) 20 ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் கணம்.

தீர்வு (i) 7-ன் மடங்குகளாக உள்ள மிகை முழுக்களின் கணத்தைப் பட்டியல் முறையில் $\{7, 14, 21, 28, \cdots\}$ என எழுதலாம்.

(ii) 20 ஐ விடக் குறைவாக உள்ள பகா எண்களின் கணத்தைப் பட்டியல் முறையில் $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.3

$A = \{x : x$ ஒரு இயல் எண் $\leq 8\}$ என்ற கணத்தைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக.

தீர்வு $A = \{x : x$ ஒரு இயல் எண் $\leq 8\}$.

இக்கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

எனவே, பட்டியல் முறையில் இக்கணத்தினை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.4

பின்வரும் கணங்களை கணக்கட்டமைப்பு முறையில் குறிப்பிடுக.

(i) X = {ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி}

(ii) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$

தீர்வு (i) X = {ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி}

X என்ற கணம் வாரத்தின் எல்லா நாட்களையும் கொண்டுள்ளது.

எனவே, X என்ற கணத்தை கணக்கட்டமைப்பு முறையில் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

$X = \{x : x$ வாரத்தின் ஒருநாள்$\}$

(ii) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$. கணம் A-ல் உள்ள உறுப்புகளின் பகுதிகள் $1, 2, 3, 4, \cdots$ ஆகும்.

எனவே, A என்ற கணத்தை கணக்கட்டமைப்பு முறையில் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

$$A = \left\{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

1.3.4 ஆதி எண் அல்லது செவ்வெண் (Cardinal Number)

முக்கிய கருத்து	ஆதி எண்
ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அக்கணத்தின் ஆதி எண் அல்லது செவ்வெண் எனப்படும்.	
குறியீட்டைப் படித்தல்	
$n(A)$	A என்ற கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
A என்ற கணத்தின் ஆதி எண்ணை $n(A)$ எனக் குறிப்போம்.	

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொள்க.

கணம் A-ல் 7 உறுப்புகள் உள்ளன.

எனவே, A என்ற கணத்தின் ஆதி எண் 7 ஆகும்.

அதாவது, $n(A) = 7$

எடுத்துக்காட்டு 1.5

பின்வரும் கணங்களின் ஆதி எண்ணைக் காண்க

(i) $A = \{x : x$ என்பது 12-ன் ஒரு பகாகாரணி$\}$

(ii) $B = \{x : x \in \mathbb{W}, x \leq 5\}$

தீர்வு (i) 12-ன் காரணிகள் 1, 2, 3, 4, 6, 12. 12-ன் பகா காரணிகள் 2, 3.

பட்டியல் முறையில் கணம் Aஐ பின்வருமாறு எழுதலாம். $A = \{2, 3\}$ எனவே, $n(A) = 2$.

(ii) $B = \{x : x \in \mathbb{W}, x \leq 5\}$

பட்டியல் முறையில் கணம் Bஐ பின்வருமாறு எழுதலாம். $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

கணம் B-ல் ஆறு உறுப்புகள் உள்ளன. எனவே, $n(B) = 6$

1.4 கணங்களின் பல்வேறு வகைகள் (Different kinds of Sets)

1.4.1 வெற்றுக்கணம் (Empty Set)

முக்கிய கருத்து — **வெற்றுக்கணம்**

உறுப்புகள் இல்லாத கணம் வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மைகணம் அல்லது வெறுமைகணம் என்றழைக்கப்படும்

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\varnothing$ அல்லது $\{\ \}$	வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மைகணம் அல்லது வெறுமைகணம்

வெற்றுக்கணத்தை $\varnothing$ அல்லது $\{\ \}$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{x : x < 1, x \in \mathbb{N}\}$ என்ற கணத்தைக் கருதுக.

1ஐ விடக் குறைவான இயல் எண் எதுவும் இல்லை.

எனவே, A என்ற கணத்தில் உறுப்புகள் எதுவும் இல்லை.

$\therefore\ A = \{\ \}$

நினைவு கூர்ந்து விடையளி !
$n(\varnothing) = ?$

குறிப்பு எண்ணியலில் ‘பூச்சியம்’ என்ற மெய்யெண் முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது. அதைப் போலவே கணவியலில், வெற்றுக்கணம் $\varnothing$ ஆனது முக்கிய பங்காற்றுகிறது.

1.4.2 முடிவுறு கணம் (Finite set)

முக்கிய கருத்து — **முடிவுறு கணம்**

ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை பூச்சியம் அல்லது முடிவுறு (எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட) எண் எனில், அக்கணம் முடிவுறு கணம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) 8-க்கும் 9-க்கும் இடைப்பட்ட இயல் எண்களின் கணம் A என்க.
8-க்கும் 9-க்கும் இடையில் எந்த இயல் எண்ணும் இல்லை.

எனவே, $A = \{\ \}\ \therefore\ n(A) = 0$.

A என்பது முடிவுறு கணமாகும்.

(ii) $X = \{x : x$ ஒரு முழு மற்றும் $-1 \leq x \leq 2\}$ என்ற கணத்தை கருதுக

பட்டியல் முறையில் X என்ற கணத்தை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$X = \{-1, 0, 1, 2\}$. $\therefore n(X) = 4$

எனவே, X ஒரு முடிவுறு கணமாகும்.

குறிப்பு முடிவுறு கணத்தின் ஆதி எண் முடிவுறு எண்ணாகும்.

1.4.3 முடிவிலா கணம் (Infinite set)

முக்கிய கருத்து	முடிவிலா கணம்
ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுறு எண் அல்ல எனில், அக்கணம் முடிவிலா அல்லது முடிவுறாக் கணமாகும்	

எடுத்துக்காட்டாக,

பின்வரும் கணத்தைக் கருதுக.

முழு எண்களின் கணம் $\mathbb{W}$ ஐ பட்டியல் முறையில் $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ என எழுதலாம்.

முழு எண்களின் கணம் முடிவிலா எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டிருப்பதால், $\mathbb{W}$ முடிவிலா கணமாகும்.

குறிப்பு முடிவிலா கணத்தின் ஆதி எண் முடிவுறு எண் அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 1.6

பின்வரும் கணங்களில் முடிவுறு மற்றும் முடிவிலா கணங்கள் எவை எனக் கூறுக.

(i) $A = \{x : x$ என்பது 5-ன் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}\}$

(ii) $B = \{x : x$ ஒரு இரட்டைப் பகாஎண்$\}$

(iii) 50 ஐ விடப் பெரிய மிகை முழுக்களைக் கொண்ட கணம்.

தீர்வு (i) $A = \{x : x$ ஒரு 5-ன் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}\}$. பட்டியல் முறையில் இக்கணத்தை எழுத,

$A = \{5, 10, 15, 20, ...\}$

$\therefore A$ என்ற கணம் முடிவிலா கணமாகும்.

(ii) $B = \{x : x$ ஒரு இரட்டைப் பகாஎண்$\}$.

பகா எண்களில் 2 மட்டுமே இரட்டைப் பகாஎண் ஆகும்.

பட்டியல் முறையில் B என்ற கணத்தை பின்வருமாறு எழுதலாம்

$B = \{ 2 \}$. எனவே, B முடிவுறு கணமாகும்.

(iii) X என்பது 50 ஐ விடப்பெரிய மிகை முழுக்களின் கணம் என்க.

பட்டியல் முறையில் X என்ற கணத்தை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$X = \{51, 52, 53, \ldots\}$

கணம் X எண்ணற்ற உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளது. எனவே, X முடிவிலா கணமாகும்.

1.4.4 ஒருறுப்புக் கணம் (Singleton set)

முக்கிய கருத்து — **ஒருறுப்புக் கணம்**

ஒரேயொரு உறுப்பை மட்டும் கொண்டுள்ள கணம் ஒருறுப்புக் கணம் என்றழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{x : x$ ஒரு முழு மற்றும் $1 < x < 3\}$ கணத்தைப் பட்டியல் முறையில் எழுத, $A = \{\ 2\ \}$ எனக் கிடைக்கும்.

கணம் A ஒரேயொரு உறுப்பைக் கொண்டுள்ளது.

ஆகவே, A ஒருறுப்புக் கணமாகும்.

குறிப்புரை

பின்வருவன அனைத்தும் ஒரே கணமல்ல என்பதை புரிந்து கொள்வது இன்றியமையாததாகும்.

(i) வெற்றுக்கணம் $\varnothing$

(ii) வெற்றுக் கணத்தை மட்டும் ஒரு உறுப்பாகக் கொண்ட கணம் $\{\varnothing\}$

(iii) பூச்சியத்தை மட்டும் ஒரு உறுப்பாகக் கொண்ட கணம் $\{0\}$

1.4.5 சமான கணங்கள் (Equivalent sets)

முக்கிய கருத்து — **சமான கணம்**

A, B என்ற இரு கணங்களில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமம் எனில், அவை சமான கணங்கள் எனப்படும்.

A, B என்ற கணங்கள் சமான கணங்கள் எனில், $n(A) = n(B)$ ஆகும்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\approx$	சமானமான

A, B என்பன சமானமானவை எனில், $A \approx B$ என எழுதலாம்

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{\ 7, 8, 9, 10\ \}$ மற்றும் $B = \{\ 3, 5, 6, 11\ \}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

இங்கு $n(A) = 4$ மற்றும் $n(B) = 4$.

$\therefore\ A \approx B$

1.4.6 சம கணங்கள் (Equal sets)

முக்கிய கருத்து **சம கணம்**

A, B என்ற இரு கணங்களில் உள்ள உறுப்புகள் அவை எழுதப்பட்டுள்ள வரிசையைப் பொருட்படுத்தாமல் சரியாக அதே உறுப்புக்களைக் கொண்டிருந்தால், அவை சம கணங்கள் எனப்படும். அவ்வாறு இல்லையெனில், அவை சமமற்ற கணங்கள் எனப்படும்.

A, B என்ற கணங்கள் சமம் எனில்,

(i) கணம் A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் B-ன் உறுப்பாகவும் இருக்கும்.

(ii) கணம் B-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் A-ன் உறுப்பாகவும் இருக்கும்

குறியீட்டைப் படித்தல்

$=$	சமம்	A, B என்ற கணங்கள் சமம் எனில், $A = B$ என எழுதலாம்.
$\neq$	சமமல்ல	A, B என்ற கணங்கள் சமமற்றவை எனில், $A \neq B$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{ a, b, c, d \}$ மற்றும் $B = \{ d, b, a, c \}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

A, B என்ற கணங்கள் சரியாக அதே உறுப்புகளைப் பெற்றுள்ளன.

$\therefore A = B$

குறிப்பு A, B என்ற கணங்கள் சமம் எனில், $n(A) = n(B)$ ஆகும். ஆனால் $n(A) = n(B)$ எனில் A, B என்ற கணங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

எனவே, சம கணங்கள் அனைத்தும் சமான கணங்களாகும். ஆனால், சமான கணங்கள் அனைத்தும் சம கணங்களாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.7

கொடுக்கப்பட்ட $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ மற்றும்

$B = \{x : x$ என்பது இரண்டின் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}$ மற்றும் $x \leq 14\}$

ஆகியன சமகணங்களா எனக் கூறுக.

தீர்வு $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ மற்றும்

$B = \{x : x$ என்பது இரண்டின் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}$ மற்றும் $x \leq 14\}$

பட்டியல் முறையில் எழுத, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

A, B என்ற இரு கணங்களும் சரியாக அதே உறுப்புகளைப் பெற்றுள்ளதால், $A = B$ ஆகும்.

1.4.7 உட்கணம் (Subset)

முக்கிய கருத்து **உட்கணம்**

கணம் A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் B-ன் உறுப்பாகவும் இருக்குமானால், A ஆனது B-ன் ஓர் உட்கணமாகும். இதனைக் குறியீட்டில் $A \subseteq B$ என எழுதலாம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\subseteq$	உட்கணம் அல்லது உள்ளடங்கியது

$A \subseteq B$ என்பதை 'A என்பது B-ன் உட்கணம்' அல்லது 'A என்பது B-ல் உள்ளடங்கியது' எனப் படிப்போம்.

$\not\subseteq$	உட்கணமல்ல அல்லது உள்ளடங்காதது

$A \not\subseteq B$ என்பதை 'A என்பது B-ன் உட்கணமல்ல' அல்லது 'A என்பது B-ல் உள்ளடங்காதது' எனப் படிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{7, 8, 9\}$ மற்றும் $B = \{ 7, 8, 9, 10 \}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக. இங்கு கணம் A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் B-ன் உறுப்பாகவும் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

எனவே, A என்பது B-ன் உட்கணமாகும். அதாவது, $A \subseteq B$.

குறிப்பு

(i) ஒவ்வொரு கணமும் தனக்குத்தானே உட்கணமாகும். அதாவது, A என்ற எந்தவொரு கணத்திற்கும் $A \subseteq A$ ஆகும்.

(ii) வெற்றுக்கணம் எந்தவொரு கணத்துக்கும் உட்கணமாகும். அதாவது, A என்ற எந்தவொரு கணத்திற்கும் $\varnothing \subseteq A$.

(iii) $A \subseteq B$ மற்றும் $B \subseteq A$ எனில், $A = B$ ஆகும்.
இதன் மறுதலையும் உண்மை. அதாவது, $A = B$ எனில், $A \subseteq B$ மற்றும் $B \subseteq A$ ஆகும்.

(iv) ஒவ்வொரு கணமும் ($\varnothing$ ஐத்தவிர) குறைந்தபட்சம் அக்கணத்தையும், $\varnothing$ யையும் இரு உட்கணங்களாகக் கொண்டிருக்கும்.

1.4.8 தகு உட்கணம் (Proper subset)

முக்கிய கருத்து **தகு உட்கணம்**

$A \subseteq B$ மற்றும் $A \neq B$ என்றவாறு இருப்பின், கணம் A ஆனது கணம் B-ன் தகு உட்கணம் எனப்படும். இதனைக் குறியீட்டில் $A \subset B$ என எழுதலாம். B என்பது A-ன் மிகை கணம் (Super set) எனப்படும்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\subset$	தகு உட்கணம்

$A \subset B$ என்பதை 'A என்பது B-ன் தகு உட்கணம்' எனப் படிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{5, 7, 8\}$ மற்றும் $B = \{5, 6, 7, 8\}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

இங்கு, A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் B-ன் உறுப்பாகும். மேலும் $A \neq B$.

எனவே, A என்பது B-ன் தகு உட்கணமாகும்.

குறிப்பு

(i) தகு உட்கணம், மிகை கணத்தைவிட குறைந்தபட்சம் ஒரு உறுப்பையாவது குறைவாகப் பெற்றிருக்கும்.

(ii) எந்தவொரு கணமும் அக்கணத்திற்கே தகு உட்கணமாகாது.

(iii) வெற்றுக்கணம் $\varnothing$ ஆனது அக்கணத்தைத்தவிர மற்ற எல்லா கணங்களுக்கும் தகு உட்கணமாகும். [வெற்றுக்கணம் $\varnothing$-க்கு தகு உட்கணம் இல்லை] அதாவது, $\varnothing$ஐத் தவிர மற்ற எந்தவொரு கணம் A-வுக்கும் $\varnothing \subset A$ ஆகும்.

(iv) $\in$ மற்றும் $\subseteq$ என்ற குறியீடுகளுக்கான வேறுபாட்டை புரிந்து கொள்வது அவசியமாகும். $x \in A$ என்ற குறியீடு, x என்பது A-ன் உறுப்பு என்பதைக் குறிப்பிடுகிறது. $A \subseteq B$ என்ற குறியீடு, A என்பது B-ன் உட்கணம் என்பதைக் குறிப்பிடுகிறது.

எனவே, $\varnothing \subseteq \{a, b, c\}$ என்பது சரியானது. ஆனால், $\varnothing \in \{a, b, c\}$ என்பது சரியல்ல.

$x \in \{x\}$, என எழுதுவது சரியானது. ஆனால், $x = \{x\}$ அல்லது $x \subseteq \{x\}$ என எழுதுவது சரியல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 1.8

பின்வரும் கூற்றுகளை உண்மையாக்க, காலியிடங்களில் $\subseteq$ அல்லது $\nsubseteq$ என்ற குறிகளைக் கொண்டு நிரப்புக.

(a) $\{4, 5, 6, 7\}$ ----- $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ (b) $\{a, b, c\}$ ----- $\{b, e, f, g\}$

தீர்வு (a) $\{4, 5, 6, 7\}$ என்ற கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ என்ற கணத்தின் உறுப்பாகவும் உள்ளது.

எனவே, காலியிடத்தில் $\subseteq$ என்ற குறியை இடுக.

அதாவது, $\{4, 5, 6, 7\} \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\}$

(b) $a \in \{a, b, c\}$ ஆனால், $a \notin \{b, e, f, g\}$

எனவே, காலியிடத்தில் $\nsubseteq$ என்ற குறியை இடுக.

அதாவது, $\{a, b, c\} \nsubseteq \{b, e, f, g\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.9

பின்வரும் கூற்றுகளை உண்மையாக்க $\subset, \subseteq$ என்ற குறியீடுகளில் எதை காலியிடங்களில் இடவேண்டும் எனத் தீர்மானிக்க.

(i) {8, 11, 13} ----- {8, 11, 13, 14}

(ii) $\{a, b, c\}$ ------, $\{a, c, b\}$

தீர்வு (i) {8, 11, 13} என்ற கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் {8, 11, 13, 14} என்ற கணத்தின் உறுப்பாகவும் உள்ளதால், காலியிடத்தில் $\subseteq$ என்ற குறியை இடவேண்டும்.

$\therefore \{8,11,13\} \subseteq \{8,11,13,14\}$

மேலும் $14 \in \{8, 11, 13, 14\}$. ஆனால் $14 \notin \{8, 11, 13\}$

எனவே, $\{8,11,13\}$ என்ற கணம் $\{8,11,13,14\}$ என்ற கணத்தின் தகு உட்கணமாகும். ஆதலால், காலியிடத்தில் $\subset$ என்ற குறியையும் இடலாம்.

$\therefore \{8,11,13\} \subset \{8,11,13,14\}$

(ii) {a, b, c} என்ற கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும், {a, c, b} என்ற கணத்தின் உறுப்பாகவும் உள்ளது.

எனவே, இவ்விரு கணங்களும் சம கணங்களாகும். {a, b, c} என்பது {a, c, b} என்ற கணத்தின் தகு உட்கணமாகாது.

எனவே, காலியிடத்தை $\subseteq$ என்ற குறியைக் கொண்டு மட்டுமே நிரப்ப முடியும்.

1.4.9 அடுக்குக்கணம் (Power Set)

முக்கிய கருத்து — **அடுக்குக்கணம்**

A என்ற கணத்தின் அனைத்து உட்கணங்களையும் கொண்ட கணம், அக்கணத்தின் அடுக்குக்கணம் எனப்படும்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$P(A)$	A-ன் அடுக்குக்கணம்

A-ன் அடுக்குக்கணம் $P(A)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{-3, 4\}$ என்ற கணத்தைக் எடுத்துக்கொள்க.

கணம் A-ன் உட்கணங்கள்

$\varnothing, \{-3\}, \{4\}, \{-3, 4\}$ ஆகும்.

எனவே, A-ன் அடுக்குக் கணம்

$P(A) = \{\varnothing, \{-3\}, \{4\}, \{-3, 4\}\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.10

$A = \{3, \{4, 5\}\}$ என்ற கணத்தின் அடுக்குக்கணத்தை எழுதுக.

தீர்வு $A = \{3, \{4, 5\}\}$

A-ன் உட்கணங்கள், $\varnothing, \{3\}, \{\{4, 5\}\}, \{3, \{4, 5\}\}$

$\therefore P(A) = \{\varnothing, \{3\}, \{\{4, 5\}\}, \{3, \{4, 5\}\}\}$

ஒரு முடிவுறு கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை

மிக அதிக அளவில் உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ள கணங்களுக்கு உட்கணங்களை எழுதி அவற்றின் எண்ணிக்கையைக் காண்பது கடினமாகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முடிவுறு கணம் எத்தனை உட்கணங்களைக் கொண்டிருக்கும் என்பதைக் காண ஒரு விதியைக் காண்போம்.

(i) $A = \varnothing$ என்ற கணம் அக்கணத்தை மட்டுமே உட்கணமாகக் கொண்டிருக்கும்.

(ii) $A = \{5\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்கள் $\varnothing$ மற்றும் $\{5\}$ ஆகும்.

(iii) $A = \{5, 6\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்கள் $\varnothing, \{5\}, \{6\}$ மற்றும் $\{5, 6\}$ ஆகும்.

(iv) $A = \{5, 6, 7\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்கள் $\varnothing, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}$ மற்றும் $\{5, 6, 7\}$ ஆகும்.

இவ்விவரங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3
உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$

மேற்கண்ட அட்டவணை, ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையில் ஒன்றை அதிகரிக்க, உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை இரு மடங்காகிறது என்பதைக் காட்டுகிறது. அதாவது, ஒவ்வொரு நிலையிலும் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2-ன் அடுக்காக உள்ளது என்பதை தெரிவிக்கிறது. எனவே, கீழ்க்கண்ட பொதுவிதியை நாம் பெறுகிறோம்.

m **உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2^m ஆகும்.**

$$n(A) = m \Rightarrow n[P(A)] = 2^{n(A)} = 2^m$$

இந்த 2^m உட்கணங்களில் கொடுக்கப்பட்ட கணமும் உள்ளடங்கியுள்ளது.

எனவே, ***m*** **உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $2^m - 1$ ஆகும்.**

எடுத்துக்காட்டு 1.11

பின்வரும் கணங்கள் ஒவ்வொன்றின் உட்கணங்கள் மற்றும் தகுஉட்கணங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) $A = \{3,4,5,6,7\}$ (ii) $A = \{1,2,3,4,5,9,12,14\}$

தீர்வு (i) $A = \{3,4,5,6,7\}$. எனவே, $n(A) = 5$.

உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= n[P(A)] = 2^5 = 32$.

தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$

(ii) $A = \{1,2,3,4,5,9,12,14\}$. $n(A) = 8$.

உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= 2^8 = 2^5 \times 2^3 = 32 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

தகுஉட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$

பயிற்சி 1.1

1. பின்வருவனவற்றில் எவை கணங்களாகும்? உமது விடைக்கு காரணம் கூறுக.
   - (i) நல்ல புத்தகங்களின் தொகுப்பு
   - (ii) 30 ஐ விடக் குறைவாக உள்ள பகாஎண்களின் தொகுப்பு
   - (iii) மிகவும் திறமையான பத்து கணித ஆசிரியர்களின் தொகுப்பு
   - (iv) உன் பள்ளியிலுள்ள மாணவர்களின் தொகுப்பு
   - (v) அனைத்து இரட்டைப்படை எண்களின் தொகுப்பு

2. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ என்க. காலியிடங்களை $\in$ அல்லது $\notin$ என்ற குறியீடுகளில் சரியான குறியிட்டு நிரப்புக.
   - (i) 0 ----- A (ii) 6 ----- A (iii) 3 ----- A
   - (iv) 4 ----- A (v) 7 ----- A

3. பின்வரும் கணங்களை கணக்கட்டமைப்பு முறையில் எழுதுக.
   - (i) அனைத்து மிகை இரட்டைப்படை எண்களின் கணம்
   - (ii) 20ஐ விடக்குறைவாக உள்ள முழு எண்களின் கணம்
   - (iii) 3-ன் மடங்குகளாக உள்ள மிகை முழுக்களின் கணம்
   - (iv) 15ஐ விடக் குறைவாக உள்ள ஒற்றை இயல் எண்களின் கணம்
   - (v) ‘TAMILNADU’ என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களின் கணம்

4. பின்வரும் கணங்களைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக.
   - (i) $A = \{x : x \in \mathbb{N},\ 2 < x \leq 10\}$
   - (ii) $B = \left\{x : x \in \mathbb{Z},\ -\frac{1}{2} < x < \frac{11}{2}\right\}$

(iii) C = $\{x : x$ ஒரு பகா எண் மற்றும் 6-ன் ஒரு வகுஎண்$\}$

(iv) $X = \{x : x = 2^n,\ n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $n \le 5\}$

(v) $M = \{x : x = 2y - 1, y \le 5, y \in \mathbb{W}\}$

(vi) $P = \{x : x$ ஒரு முழு, $x^2 \le 16\}$

5. பின்வரும் கணங்களை விவரித்தல் முறையில் எழுதுக.

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$

(ii) $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

(iii) $C = \{1, 4, 9, 16, 25\}$

(iv) $P = \{x : x$ என்பது 'SET THEORY' என்ற சொல்லில் உள்ள ஒரு எழுத்து$\}$

(v) $Q = \{x : x$ என்பது 10-க்கும் 20-க்கும் இடைப்பட்ட ஒரு பகாஎண் $\}$

6. பின்வரும் கணங்களின் ஆதி எண்களைக் காண்க.

(i) $A = \{x : x = 5^n, n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $n < 5\}$

(ii) $B = \{x : x$ ஒரு ஆங்கில மெய்யெழுத்து$\}$

(iii) $X = \{x : x$ ஒரு இரட்டைப் பகாஎண்$\}$

(iv) $P = \{x : x < 0,\ x \in \mathbb{W}\}$

(v) $Q = \{x : -3 \le x \le 5, x \in \mathbb{Z}\}$

7. பின்வரும் கணங்களில் எவை முடிவுறு கணங்கள் மற்றும் எவை முடிவிலா கணங்கள் எனக் காண்க.

(i) $A = \{4, 5, 6, ...\}$

(ii) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, ... 75\}$

(iii) $X = \{x : x$ ஒரு இரட்டை இயல்எண்$\}$

(iv) $Y = \{x : x$ என்பது 6-ன் மடங்கு மற்றும் $x > 0\}$

(v) P = 'KARIMANGALAM' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களின் கணம்.

8. பின்வரும் கணங்களில் எவை சமான கணங்களாகும்?

(i) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(ii) $X = \{x : x \in \mathbb{N}, 1 < x < 6\}$, $Y = \{x : x$ ஒரு ஆங்கில உயிரெழுத்து$\}$

(iii) $P = \{x : x$ ஒரு பகாஎண் மற்றும் $5 < x < 23\}$

$Q = \{x : x \in \mathbb{W},\ 0 \le x < 5\}$

9. பின்வரும் கணங்களில் எவை சமகணங்களாகும்?

(i) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 3, 2, 1\}$

(ii) $A = \{4, 8, 12, 16\}$, $B = \{8, 4, 16, 18\}$

(iii) $X = \{2, 4, 6, 8\}$

$Y = \{x : x$ ஒரு இரட்டை முழு $0 < x < 10\}$

(iv) $P = \{x : x$ என்பது 10-ன் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}\}$

$Q = \{10, 15, 20, 25\ 30, ... \}$

10. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களிலிருந்து சமகணங்களைத் தேர்வு செய்க.

$A = \{12, 14, 18, 22\}$, $B = \{11, 12, 13, 14\}$, $C = \{14, 18, 22, 24\}$

$D = \{13, 11, 12, 14\}$, $E = \{-11, 11\}$, $F = \{10, 19\}$, $G = \{11, -11\}$, $H = \{10, 11\}$

11. $\varnothing = \{\varnothing\}$ ஆகுமா? காரணம் கூறுக.

12. பின்வரும் கணங்களில் எவை சமகணங்கள்? காரணம் கூறுக.

$0, \varnothing, \{0\}, \{\varnothing\}$

13. கோடிட்ட இடங்களை $\subseteq$ அல்லது $\nsubseteq$ என்ற குறியீடுகளைக் கொண்டு நிரப்புக.

(i) $\{3\}$ ----- $\{0, 2, 4, 6\}$ (ii) $\{a\}$ ----- $\{a, b, c\}$

(iii) $\{8, 18\}$ ----- $\{18, 8\}$ (iv) $\{d\}$ ----- $\{a, b, c\}$

14. $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ மற்றும் $Y = \{x : x$ ஒரு முழு மற்றும் $-3 \leq x < 2\}$ என்க.

(i) X என்பது Y-ன் உட்கணமாகுமா? (ii) Y என்பது X-ன் உட்கணமாகுமா?

15. $A = \{x : x$ என்பது 3 ஆல் வகுபடும் மிகை முழு$\}$ என்ற கணம்

$B = \{x : x$ என்பது 5-ன் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}\}$ என்ற கணத்திற்கு உட்கணமாகுமா எனசோதிக்க.

16. பின்வரும் கணங்களின் அடுக்குக்கணங்களை எழுதுக.

(i) $A = \{x, y\}$ (ii) $X = \{a, b, c\}$ (iii) $A = \{5, 6, 7, 8\}$ (iv) $A = \varnothing$

17. பின்வரும் கணங்களின் உட்கணங்கள் மற்றும் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) $A = \{13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

(ii) $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

(iii) $X = \{x : x \in \mathbb{W}, x \notin \mathbb{N}\}$

18. (i) $A = \varnothing$ எனில், $n[P(A)]$ காண்க (ii) $n(A) = 3$ எனில், $n[P(A)]$ காண்க

(iii) $n[P(A)] = 512$ எனில், $n(A)$ காண்க.

(iv) $n[P(A)] = 1024$ எனில், $n(A)$ காண்க.

19. $n[P(A)] = 1$ எனில், A என்ற கணத்தைப் பற்றி என்ன கூறமுடியும்?

20. $A = \{x : x$ என்பது 11ஐ விடக் குறைவாக உள்ள ஒரு இயல் எண்$\}$

$B = \{x : x$ ஒரு இரட்டைப்படை எண் மற்றும் $1 < x < 21\}$

$C = \{x : x$ ஒரு முழு மற்றும் $15 \leq x \leq 25\}$ எனில்

(i) A, B, C என்ற கணங்களின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக.

(ii) $n(A),\ n(B),\ n(C)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(iii) பின்வருனவற்றை சரி (T) அல்லது தவறு (F) எனக் கூறுக.

(a) $7 \in B$ ☐ (b) $16 \notin A$ ☐

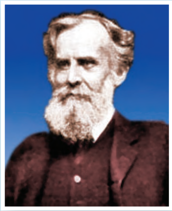
(c) $\{15, 20, 25\} \subset C$ ☐ (d) $\{10, 12\} \subset B$ ☐

1.5 கணச் செயல்கள் (Set Operations)

1.5.1 வென்படம் (Venn Diagram)

வடிவியலில் கருத்துக்கள் அல்லது நிகழ்வுகளை விளக்கவும், சில சமயங்களில் கணக்குகளின் **தீர்வு**கள் காணவும் படங்கள் அல்லது வரைபடங்களை நாம் பயன்படுத்துகிறோம்.

கணிதவியலில் கணங்களுக்கு இடையேயான தொடர்புகளைக் குறிக்கவும் மற்றும் கணச்செயல்களை பார்த்து புரிந்து கொள்ளவும் நாம் பயன்படுத்தும் படங்கள் வென்படங்கள் ஆகும்.



ஜான் வென்

(1834-1883)

ஜான் வென் என்ற பிரிட்டிஷ் நாட்டு கணித மேதை கணங்களுக்கும் கணச் செயல்களுக்கும் உள்ள தொடர்புகளை கண்ணால் காண்பதற்கு உதவும் வரைபடங்கள் வரையும் முறையைப் பயன்படுத்தினார்.

1.5.2 அனைத்துக்கணம் (Universal Set)

கொடுக்கப்பட்ட விவாதத்திற்கு பொருத்தமான அனைத்து உறுப்புகளையும் உள்ளடக்கிய ஒரு கணத்தினைக் கருதுவது சில நேரங்களில் பயனுள்ளதாகிறது.

முக்கிய கருத்து — **அனைத்துக்கணம்**

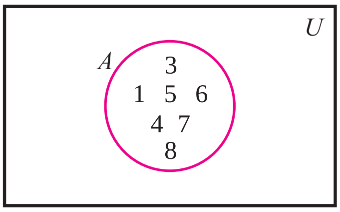
ஒரு குறிப்பிட்ட விவாதத்திற்கு எடுத்துக் கொண்ட அனைத்து உறுப்புகளையும் உள்ளடக்கிய கணம் அனைத்துக்கணம் எனப்படும். அனைத்துக்கணம் U என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

தற்சமயம் நாம் விவாதத்திற்கு எடுத்துக் கொண்ட உறுப்புகள் முழுக்கள் எனில், அனைத்துக் கணம் U என்பது அனைத்து முழுக்களின் கணமாகும். அதாவது, $U = \{n : n \in \mathbb{Z}\}$

குறிப்பு ஒவ்வொரு கணக்கிற்கும் அனைத்துக்கணம் மாறுபடலாம்.

வென்படங்கள் மூலம் குறிப்பிடும் போது பொதுவாக அனைத்துக்கணத்தை ஒரு செவ்வகமாகவும், அதன் தகு உட்கணங்களை வட்டங்கள் அல்லது நீள்வட்டங்களாகவும் குறிப்போம். அவற்றின் உறுப்புகளை படத்தின் உள்ளே எழுதுவோம்.



படம் 1.1

1.5.3 ஒரு கணத்தின் நிரப்புக்கணம் (Complement of a Set)

முக்கிய கருத்து **நிரப்புக்கணம்**

கணம் A-ல் இல்லாத ஆனால் அனைத்துக் கணம் U-ல் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம், A-ன் நிரப்புக்கணம் எனப்படும். A என்ற கணத்தின் நிரப்புக்கணத்தை A' அல்லது A^c எனக் குறிப்போம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

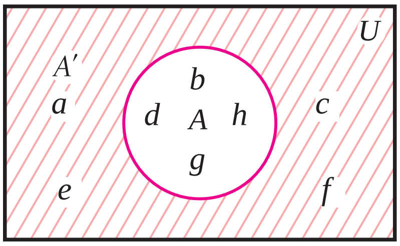
குறியீட்டில், $A' = \{x : x \in U$ மற்றும் $x \notin A\}$

எடுத்துக்காட்டாக,

U $= \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ மற்றும் $A = \{b,d,g,h\}$ எனில்.

$A' = \{a,c,e,f\}$

வென்படத்தில், கணம் A-ன் நிரப்புக்கணம் A'ஐ படம் 1.2- ல் உள்ளது போல் குறிப்பிடலாம்.



A' (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.2

குறிப்பு (i) $(A')' = A$ (ii) $\varnothing' = U$ (iii) $U' = \varnothing$

1.5.4 இரு கணங்களின் சேர்ப்பு (Union of Two Sets)

முக்கிய கருத்து **சேர்ப்புக்கணம்**

A, B என்ற இரு கணங்களின் சேர்ப்புக்கணம் என்பது A அல்லது B அல்லது இரண்டிலும் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். இதனை $A \cup B$ என எழுதலாம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\cup$	சேர்ப்பு

$A \cup B$ என்பதை ‘A சேர்ப்பு B’ எனப் படிப்போம்.
குறியீட்டில், $A \cup B = \{x : x \in A$ அல்லது $x \in B\}$

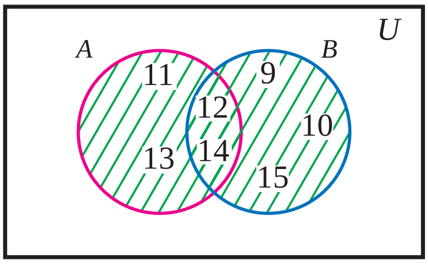
எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{11, 12, 13, 14\}$ மற்றும்

$B = \{9, 10, 12, 14, 15\}$ எனில்,

$A \cup B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

இரு கணங்களின் சேர்ப்பினை வென்படத்தில் படம் 1.3-ல் உள்ளவாறு குறிப்பிடலாம்.



$A \cup B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.3

குறிப்பு

(i) $A \cup A = A$ (ii) $A \cup \varnothing = A$ (iii) $A \cup A' = U$

(iv) A என்ற கணம் அனைத்துக்கணம் U-ன் உட்கணம் எனில், $A \cup U = U$

(v) $A \subseteq B$ எனில், எனில் மட்டுமே $A \cup B = B$ (vi) $A \cup B = B \cup A$

நினைவு கூர்ந்து விடையளி !

$A \subset (A \cup B)$ மற்றும் $B \subset (A \cup B)$ என கூறமுடியுமா?

எடுத்துக்காட்டு 1.12

பின்வரும் கணங்களின் சேர்ப்பினைக் காண்க.

(i) $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ மற்றும் $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

(ii) $X = \{3, 4, 5\}$ மற்றும் $Y = \varnothing$

தீர்வு (i) A = {1, 2, 3, 5, 6} மற்றும் B = {4, 5, 6, 7, 8}

1, 2, 3, 5, 6 ; 4, 5, 6, 7, 8 (5, 6 திரும்ப வந்துள்ளன)

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(ii) $X = \{3,4,5\}$, $Y = \varnothing$. Y-ல் உறுப்புகள் எதுவும் இல்லை.

$\therefore X \cup Y = \{3, 4, 5\}$

1.5.5 இரு கணங்களின் வெட்டு (Intersection of Two Sets)

முக்கிய கருத்து **வெட்டுக்கணம்**

A, B என்ற இரு கணங்களின் வெட்டுக்கணம் என்பது A மற்றும் B இரண்டிலும் பொதுவாக உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். இதனை $A \cap B$ என எழுதுவோம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\cap$	வெட்டு

$A \cap B$ என்பதை 'A வெட்டு B' எனப் படிக்கலாம்.

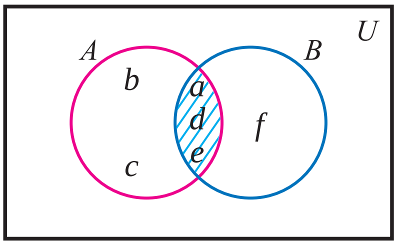
குறியீட்டில், $A \cap B = \{x : x \in A$ மற்றும் $x \in B\}$ என எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{a, b, c, d, e\}$ மற்றும் $B = \{a, d, e, f\}$ என்க.

$\therefore A \cap B = \{a, d, e\}$

இரு கணங்களின் வெட்டுக்கணத்தை படம் 1.4-ல் காட்டியுள்ளவாறு வென்படத்தின் மூலம் குறிப்பிடலாம்.



$A \cap B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.4

குறிப்பு
(i) $A \cap A = A$ (ii) $A \cap \varnothing = \varnothing$
(iii) $A \cap A' = \varnothing$ (iv) $A \cap B = B \cap A$
(v) A என்பது அனைத்துக்கணம் U-வின் உட்கணம் எனில் $A \cap U = A$
(vi) $A \subseteq B$ எனில், எனில் மட்டுமே $A \cap B = A$

எடுத்துக்காட்டு 1.13

(i) $A = \{10, 11, 12, 13\}$, $B = \{12, 13, 14, 15\}$

(ii) $A = \{5, 9, 11\}$, $B = \varnothing$ எனில், $A \cap B$ காண்க.

நினைவு கூர்ந்து விடையளி!
$(A \cap B) \subset A$ மற்றும்
$(A \cap B) \subset B$ எனக் கூறமுடியுமா?

தீர்வு (i) A = {10, 11, 12, 13} மற்றும் B = {12, 13, 14, 15}.

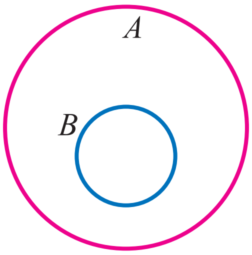
12, 13 என்பன A மற்றும் B இரண்டிற்கும் பொதுவானவை.

$\therefore \; A \cap B = \{12, 13\}$

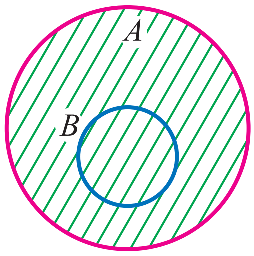
(ii) $A = \{5, 9, 11\}$ மற்றும் $B = \varnothing$.

A மற்றும் B-க்கு பொதுவான உறுப்பு எதுவும் இல்லை என்பதால், $A \cap B = \varnothing$

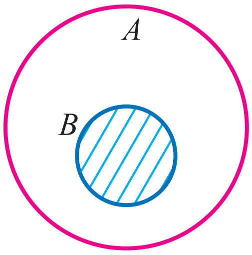
குறிப்புரை $B \subseteq A$ என்றவாறு உள்ள A, B என்ற கணங்களின் சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டு ஆகியவற்றை வென்படங்களின் மூலம் முறையே படம் 1.6 மற்றும் படம் 1.7-ல் காட்டியுள்ளவாறு குறிப்போம்.



$B \subseteq A$
படம்1.5



$A \cup B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம்1.6



$A \cap B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம்1.7

1.5.6 வெட்டாக்கணங்கள் அல்லது சேராக்கணங்கள் (Disjoint Sets)

முக்கிய கருத்து **வெட்டாக்கணம்**

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்பு இல்லையெனில், அவ்விரு கணங்களும் வெட்டாக்கணங்கள் அல்லது சேராக்கணங்கள் எனப்படும்.

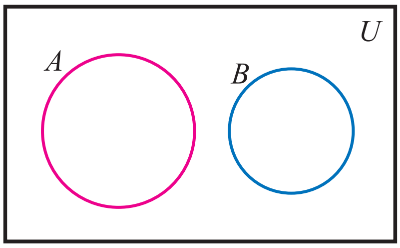
A மற்றும் B என்ற கணங்கள் வெட்டாக்கணங்கள் எனில், $A \cap B = \varnothing$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{5,6,7,8\}$ மற்றும் $B = \{11, 12, 13\}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

இப்போது $A \cap B = \varnothing$. எனவே, A மற்றும் B என்பன வெட்டாக்கணங்களாகும்.

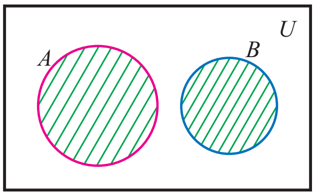
A, B என்ற இரு வெட்டாக்கணங்களை படம் 1.8-ல் காட்டியுள்ளவாறு வென்படம் மூலம் குறிப்பிடலாம்.



வெட்டாக்கணங்கள்
படம்1.8

குறிப்பு (i) A மற்றும் B என்ற இரு வெட்டாக்கணங்களின் சேர்ப்பை படம் 1.9-ல் காட்டியுள்ளவாறு வென்படம் மூலம் குறிக்கலாம்.

(ii) $A \cap B \neq \varnothing$ எனில், A மற்றும் B என்ற இருகணங்களும் வெட்டும் கணங்கள் (overlapping sets) எனப்படும்.



$A \cup B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம்1.9

எடுத்துக்காட்டு 1.14

கொடுக்கப்பட்ட $A = \{4, 5, 6, 7\}$ மற்றும் $B = \{1, 3, 8, 9\}$ என்ற இரு கணங்களுக்கு $A \cap B$ காண்க.

தீர்வு $A = \{4, 5, 6, 7\}$ மற்றும் $B = \{1, 3, 8, 9\}$. இங்கு $A \cap B = \varnothing$.
எனவே, A மற்றும் B என்பன வெட்டாக்கணங்களாகும்.

1.5.7 இரு கணங்களின் வித்தியாசம் (Difference of Two sets)

முக்கிய கருத்து **கணங்களின் வித்தியாசம்**

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் வித்தியாச கணமானது, A-ல் உள்ள ஆனால் B-ல் இல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். இரு கணங்களின் வித்தியாசமானது $A - B$ அல்லது $A \backslash B$ எனக் குறிக்கப்படும்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$A - B$ அல்லது $A \backslash B$	A வித்தியாசம் B

குறியீட்டில், $A - B = \{x : x \in A$ மற்றும் $x \notin B\}$

இதேபோல், $B - A = \{x : x \in B$ மற்றும் $x \notin A\}$.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ மற்றும் $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

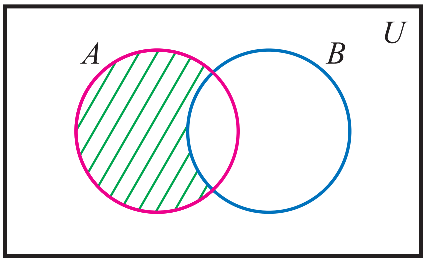
$A - B$ ஐக்காண A-யிலிருந்து B-ல் உள்ள உறுப்புகளை நாம் நீக்குகிறோம்.

$\therefore \quad A - B = \{2, 3\}$

குறிப்பு (i) பொதுவாக, $A - B \neq B - A$. (ii) $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$

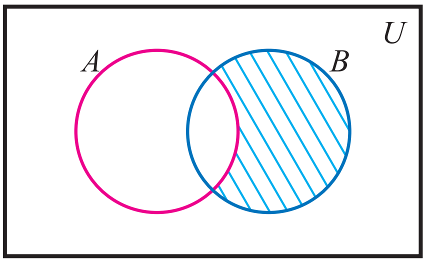
(iii) $U - A = A'$ (iv) $U - A' = A$

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் வித்தியாசமானது படம் 1.10 மற்றும் படம் 1.11 ஆகியவற்றில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு வென்படங்கள் மூலம் குறிக்கப்படும். நிழலிட்டப்பகுதி இரு கணங்களின் வித்தியாசத்தைக் குறிக்கிறது.



A – B

படம் 1.10



B – A

படம் 1.11

எடுத்துக்காட்டு 1.15

$A = \{-2, -1, 0, 3, 4\}$, $B = \{-1, 3, 5\}$ எனில் (i) $A - B$ (ii) $B - A$ காண்க.

தீர்வு A = $\{-2, -1, 0, 3, 4\}$ மற்றும் B = $\{-1, 3, 5\}$.

(i) $A - B = \{-2, 0, 4\}$ (ii) $B - A = \{5\}$

1.5.8 கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம் (Symmetric Difference of Sets)

முக்கிய கருத்து — **இரு கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம்**

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசமானது அவற்றின் வித்தியாசங்களின் சேர்ப்பாகும். இதனை $A \,\Delta\, B$ எனக்குறிப்பிடுவோம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$A \,\Delta\, B$	A சமச்சீர்வித்தியாசம் B

குறியீட்டில், $A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$

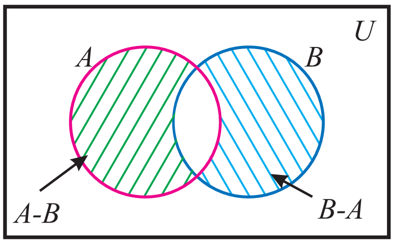
எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{a, b, c, d\}$ மற்றும் $B = \{b, d, e, f\}$ என்ற கணங்களை கருதுக.

$A - B = \{a, c\}$ மற்றும் $B - A = \{e, f\}$ என நாம் பெறுகிறோம்.

$\therefore\ A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, c, e, f\}$

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசமானது படம் 1.12-ல் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு வென்படம் மூலம் குறிக்கப்படும். நிழலிட்டப்பகுதி A மற்றும் B கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசத்தைக் குறிக்கிறது.



$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

படம்1.12

குறிப்பு

(i) $A \triangle A = \varnothing$ (ii) $A \triangle B = B \triangle A$

(iii) வென்படம் 1.12-ல் இருந்து $A \triangle B = \{x : x \notin A \cap B\}$ என எழுதலாம். எனவே A மற்றும் B இரண்டிற்கும் பொதுவாக இல்லாத உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுவதன் மூலம் நாம் $A \triangle B$-ன் உறுப்புகளை நேரடியாக காணமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.16

$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ மற்றும் $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$ எனில், $A \triangle B$ காண்க.

தீர்வு $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ மற்றும் $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$

$A - B = \{2, 3\}$ மற்றும் $B - A = \{9, 13\}$.

ஆதலால், $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 9, 13\}$

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் கணங்களுக்கு $A \cup B$ மற்றும் $A \cap B$ காண்க.
   (i) $A = \{0, 1, 2, 4, 6\}$ மற்றும் $B = \{-3, -1, 0, 2, 4, 5\}$
   (ii) $A = \{2, 4, 6, 8\}$ மற்றும் $B = \varnothing$
   (iii) $A = \{x : x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ மற்றும் $B = \{x : x$ என்பது 11ஐ விடக் குறைவான பகாஎண்$\}$
   (iv) $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 2 < x \leq 7\}$ மற்றும் $B = \{x : x \in \mathbb{W}, 0 \leq x \leq 6\}$

2. $A = \{x : x$ என்பது 5-ன் மடங்கு, $x \leq 30$ மற்றும் $x \in \mathbb{N}\}$,
   $B = \{1, 3, 7, 10, 12, 15, 18, 25\}$ எனில், (i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ காண்க.

3. $X = \{x : x = 2n, x \leq 20$ மற்றும் $n \in \mathbb{N}\}$ மற்றும்
   $Y = \{x : x = 4n, x \leq 20$ மற்றும் $n \in \mathbb{W}\}$ எனில், (i) $X \cup Y$ (ii) $X \cap Y$ காண்க.

4. $U = \{1, 2, 3, 6, 7, 12, 17, 21, 35, 52, 56\}$,
   $P = \{7$ ஆல் வகுபடும் எண்கள்$\}$, $Q = \{$பகாஎண்கள்$\}$ எனில்,
   $\{x : x \in P \cap Q\}$ என்ற கணத்தின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக.

5. பின்வரும் கணங்களில் எவையிரண்டு வெட்டாக்கணங்கள் எனக் கூறுக.
   (i) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x : x$ ஒரு இரட்டைப்படை எண் $< 10,\ x \in \mathbb{N}\}$
   (ii) $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $Y = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
   (iii) $P = \{x : x$ ஒரு பகாஎண் $< 15\}$; $Q = \{x : x$ என்பது 2-ன் மடங்கு மற்றும் $x < 16\}$
   (iv) $R = \{a, b, c, d, e\}$, $S = \{d, e, a, b, c\}$

6. (i) $U = \{x : 0 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{W}\}$ மற்றும் $A = \{x : x$ என்பது 3-ன் மடங்கு$\}$ எனில், A' ஐக் காண்க.
   (ii) U என்பது இயல் எண்களின் கணம் மற்றும் A' என்பது அனைத்து பகுஎண்களின் கணம் எனில், A ஐக் காண்க.

7. $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ மற்றும் $B = \{b, d, f, g\}$ எனில், பின்வரும் கணங்களைக் காண்க.
   (i) $A \cup B$ (ii) $(A \cup B)'$ (iii) $A \cap B$ (iv) $(A \cap B)'$

8. $U = \{x : 1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{N}\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ மற்றும் $B = \{2, 3, 5, 9, 10\}$ எனில், பின்வரும் கணங்களைக் காண்க.
   (i) A' (ii) B' (iii) $A' \cup B'$ (iv) $A' \cap B'$

9. $U = \{3, 7, 9, 11, 15, 17, 18\}$, $M = \{3, 7, 9, 11\}$ மற்றும் $N = \{7, 11, 15, 17\}$ எனில், பின்வரும் கணங்களைக் காண்க.

(i) $M - N$ (ii) $N - M$ (iii) $N' - M$ (iv) $M' - N$

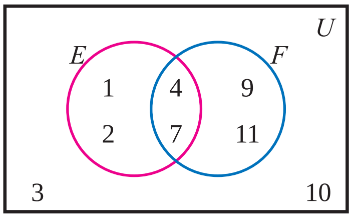
(v) $M \cap (M - N)$ (vi) $N \cup (N - M)$ (vii) $n(M - N)$

10. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ மற்றும் $D = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.
 (i) $A - B$ (ii) $B - C$ (iii) $C - D$ (iv) $D - A$ (v) $n(A - C)$

11. $U = \{x : x$ என்பது 50 ஐ விடக் குறைவான மிகை முழு$\}$,
 $A = \{x : x$ என்பது 4 ஆல் வகுபடும்$\}$,
 $B = \{x : x$ ஐ 14 ஆல் வகுத்தால் மீதி 2 கிடைக்கும்$\}$
 எனில், (i) U, A மற்றும் B ஆகியவற்றின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக.
 (ii) $A \cup B$, $A \cap B$, $n(A \cup B)$, $n(A \cap B)$ ஆகியவற்றைக் காண்க

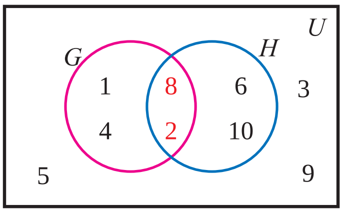
12. பின்வரும் கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம் காண்க.
 (i) $X = \{a, d, f, g, h\}, Y = \{b, e, g, h, k\}$
 (ii) $P = \{x : 3 < x < 9, x \in \mathbb{N}\}$, $Q = \{x : x < 5, x \in \mathbb{W}\}$
 (iii) $A = \{-3, -2, 0, 2, 3, 5\}$, $B = \{-4, -3, -1, 0, 2, 3\}$

13. வென்படம் 1.13ஐப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளி.
 (i) $U, E, F, E \cup F$ மற்றும் $E \cap F$ இவற்றின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக.
 (ii) $n(U)$, $n(E \cup F)$ மற்றும் $n(E \cap F)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.



படம் 1.13

14. வென்படம் 1.14ஐப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளி.
 (i) U, G மற்றும் H இவற்றின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக
 (ii) G', H', $G' \cap H'$, $n(G \cup H)'$ மற்றும் $n(G \cap H)'$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

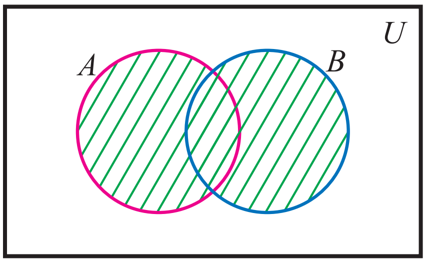


படம் 1.14

1.6 கணச் செயல்களை வென்படங்கள் மூலம் குறிப்பிடுதல்

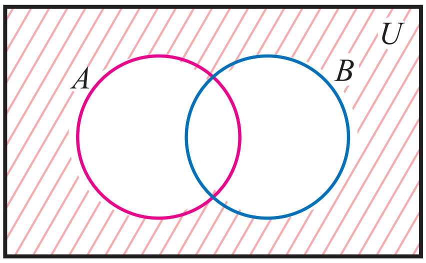
இப்பொழுது மேலும் சில கணச் செயல்களை வென்படங்கள் மூலம் குறிப்பிடுவோம்.

(a) $A \cup B$



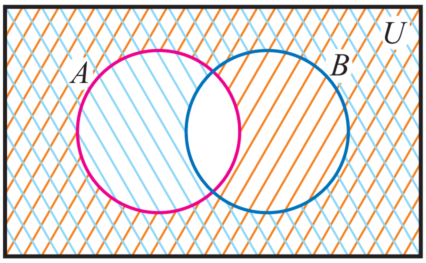
படம் 1.15

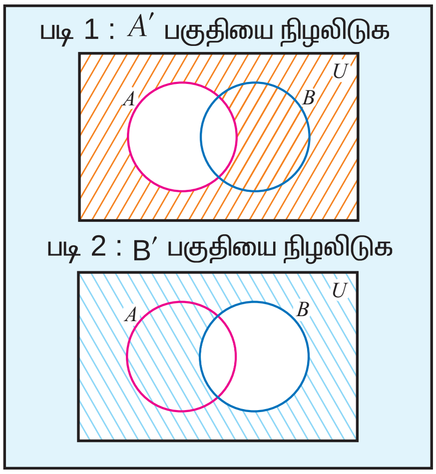
(b) $(A \cup B)'$



படம் 1.16

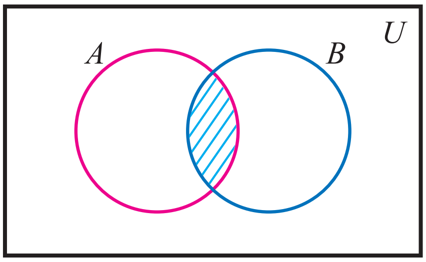
(c) $A' \cup B'$



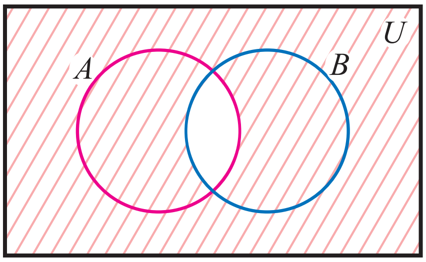


$A' \cup B'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.17

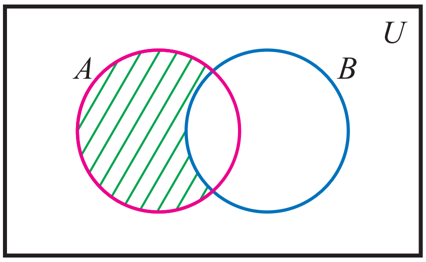
இதேபோல், கீழ்காணும் படங்களில் நிழலிட்டப்பகுதிகள் ஒவ்வொன்றும் பின்வரும் கணச்செயல்களைக் குறிக்கின்றன.



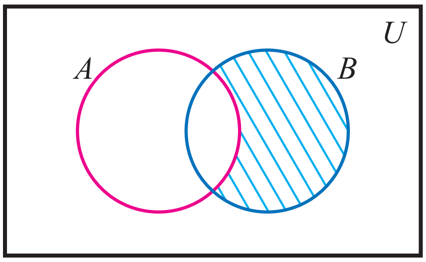
$A \cap B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.18



$(A \cap B)'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.19



$A \cap B'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.20.

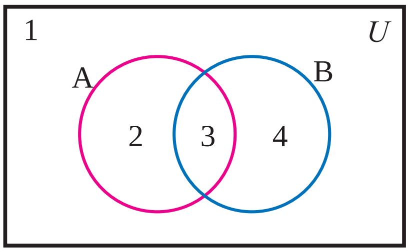


$A' \cap B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.21

குறிப்புரை

கணங்கள் மற்றும் கணச் செயல்களை வென்படங்கள் மூலம் குறிப்பிட பின்வரும் முறையையும் நாம் பயன்படுத்தலாம்.

கணங்கள் A மற்றும் B என்பவை அனைத்துக் கணத்தைப் படம் 1.22-ல் உள்ளவாறு நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது. இந்நான்கு பகுதிகளும் அடையாளத்திற்காக எண்ணிடப்படுகின்றன. இந்த எண்ணிடுதல் விருப்பம் போல் (arbitrary) அமையலாம்.



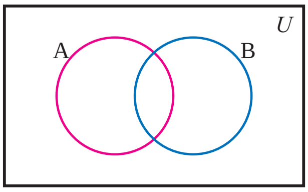
படம் 1.22

பகுதி 1 A மற்றும் B என்ற இருகணங்களுக்கும் வெளியேயுள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.
பகுதி 2 A-ல் உள்ள ஆனால் B-ல் இல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.
பகுதி 3 A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.
பகுதி 4 B-ல் உள்ள ஆனால் A-ல் இல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.17

அருகிலுள்ள படத்தைப் போன்ற வென்படங்கள் வரைந்து பின்வரும் கணங்களைக் குறிக்கும் பகுதிகளை நிழலிடுக

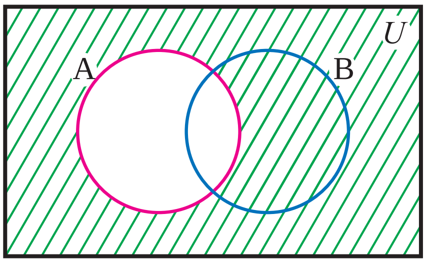
(i) A' (ii) B' (iii) $A' \cup B'$ (iv) $(A \cup B)'$ (v) $A' \cap B'$



படம் 1.23

தீர்வு

(i) A'



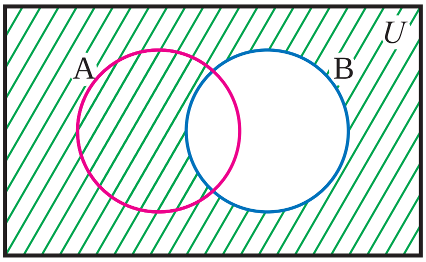
A' (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம் 1.24

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
A'	1 மற்றும் 4

(ii) B'



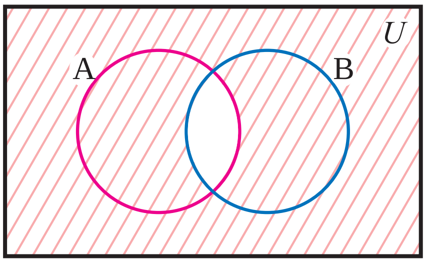
B' (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம் 1.25

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
B'	1 மற்றும் 2

(iii) $A' \cup B'$



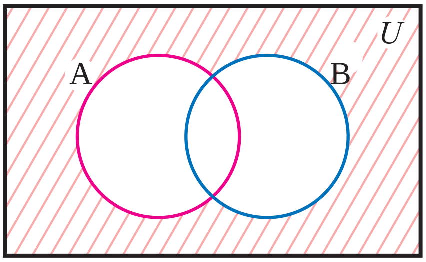
$A' \cup B'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம் 1.26

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
A'	1 மற்றும் 4
B'	1 மற்றும் 2
$A' \cup B'$	1, 2 மற்றும் 4

(iv) $(A \cup B)'$



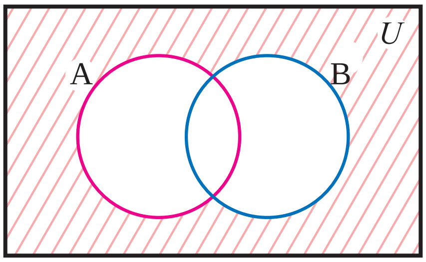
$(A \cup B)'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம் 1.27

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
$A \cup B$	2, 3 மற்றும் 4
$(A \cup B)'$	1

(v) $A' \cap B'$



$A' \cap B'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.28

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
A'	1 மற்றும் 4
B'	1 மற்றும் 2
$A' \cap B'$	1

முக்கிய முடிவுகள்

A மற்றும் B என்ற முடிவுறு கணங்களுக்கு பின்வரும் பயனுள்ள சில முடிவுகளை நாம் காண்போம்.

(i) $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

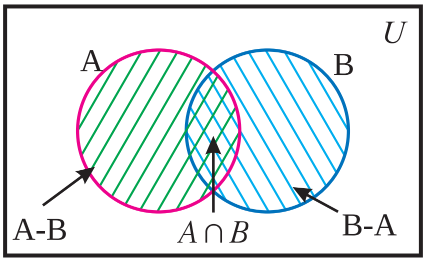
(ii) $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$

(iii) $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

(iv) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(v) $A \cap B = \varnothing$ எனும் போது, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

(vi) $n(A) + n(A') = n(U)$



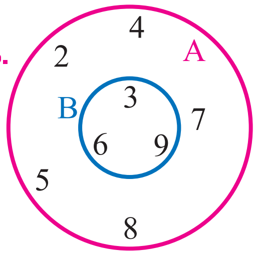
படம் 1.29

எடுத்துக்காட்டு 1.18

கொடுக்கப்பட்ட வென்படத்திலிருந்து பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) $A \cap B$

மேலும் $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ எனச் சரிபார்க்க.



படம் 1.30

தீர்வு வென்படத்திலிருந்து (i) A = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

(ii) B = {3, 6, 9,} (iii) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (iv) $A \cap B = \{3, 6, 9\}$

இப்பொழுது, $n(A) = 8,\ n(B) = 3,\ n(A \cup B) = 8,\ n(A \cap B) = 3$.

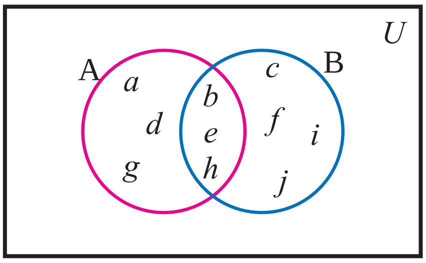
$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 8 + 3 - 3 = 8$

எனவே, $n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B)$

எடுத்துக்காட்டு 1.19

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வென்படத்திலிருந்து

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) $A \cap B$ ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ எனச் சரிபார்க்க.



படம் 1.31

தீர்வு வென்படத்திலிருந்து

(i) $A = \{a,b,d,e,g,h\}$ (ii) $B = \{b,c,e,f,h,i,j\}$

(iii) $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ (iv) $A \cap B = \{b,e,h\}$

எனவே, $n(A) = 6,\ n(B) = 7,\ n(A \cup B) = 10,\ n(A \cap B) = 3$.

$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 6 + 7 - 3 = 10$

எனவே, $n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.20

$n(A) = 12, n(B) = 17$ மற்றும் $n(A \cup B) = 21$ எனில், $n(A \cap B)$ காண்க.

தீர்வு $n(A) = 12, n(B) = 17$ மற்றும் $n(A \cup B) = 21$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$n(A \cap B) = 12 + 17 - 21 = 8$

எடுத்துக்காட்டு 1.21

ஒரு நகரத்தில் உள்ளவர்களில் 65% நபர்கள் தமிழ் திரைபடங்களையும் 40% நபர்கள் ஆங்கிலத் திரைப்படங்களையும் காண்கிறார்கள். 20% நபர்கள் தமிழ் மற்றும் ஆங்கிலத் திரைப்படங்கள் இரண்டையும் காண்கிறார்கள். இவ்விரு மொழித் திரைப்படங்களையும் பார்க்காதவர்கள் எத்தனை சதவீதம் எனக்காண்க.

தீர்வு நகரில் உள்ள மொத்த நபர்கள் 100 பேர் என்க. T என்பது தமிழ் திரைப்படம் காண்போர் கணம் மற்றும் E என்பது ஆங்கிலத் திரைப்படம் காண்போர் கணம் என்க.

பிறகு $n(T) = 65, n(E) = 40$ மற்றும் $n(T \cap E) = 20$.

இவ்விரு திரைப்படங்களில் ஏதேனும் ஒரு மொழித் திரைப்படத்தையாவது காணும் மக்களின் சதவீதம்

$$n(T \cup E) = n(T) + n(E) - n(T \cap E)$$
$$= 65 + 40 - 20 = 85$$

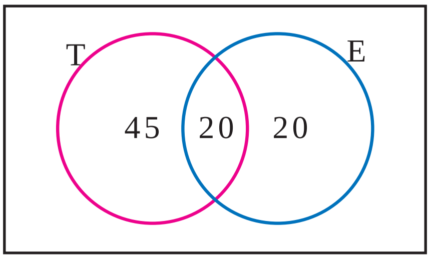
எனவே, இவ்விரு திரைப்படங்களில் எந்த ஒரு திரைப்படத்தையும் பார்க்காதவர் சதவீதம்

$100 - 85 = 15$

மாற்றுமுறை

வென்படத்திலிருந்து, இரு திரைப்படங்களில் ஏதேனும் ஒரு திரைப்படத்தையாவது காணும் மக்களின் சதவீதம் $= 45 + 20 + 20 = 85$

எனவே, இவ்விரு மொழித்திரைபடங்களில் எந்த ஒரு திரைப்படத்தையும் பார்க்காதவர் சதவீதம் $= 100 - 85 = 15$



படம் 1.32

எடுத்துக்காட்டு 1.22

1000 குடும்பங்களில் நடத்தப்பட்ட ஓர் ஆய்வில், 484 குடும்பங்கள் மின்சார அடுப்பையும், 552 குடும்பங்கள் எரிவாயு அடுப்பையும் பயன்படுத்துவதாக கண்டறியப்பட்டது. அனைத்து குடும்பங்களும் இவ்விரு அடுப்புகளில் குறைந்தபட்சம் ஏதேனும் ஒரு அடுப்பை பயன்படுத்துகிறார்கள் எனில், இரண்டு வகை அடுப்புகளையும் பயன்படுத்தும் குடும்பங்கள் எத்தனை எனக் காண்க.

தீர்வு E என்பது மின்சார அடுப்பைப் பயன்படுத்தும் குடும்பங்களின் கணம் மற்றும் G என்பது எரிவாயு அடுப்பைப் பயன்படுத்தும் குடும்பங்களின் கணம் என்க.

$n(E) = 484, n(G) = 552,\ n(E \cup G) = 1000.$

இரண்டு வகை அடுப்புகளையும் பயன்படுத்தும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை x என்க. பின்னர், $n(E \cap G) = x$

$n(E \cup G) = n(E) + n(G) - n(E \cap G)$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$1000 = 484 + 552 - x$$

$$\Rightarrow \quad x = 1036 - 1000 = 36$$

எனவே, 36 குடும்பங்கள் இரண்டு வகை அடுப்புகளையும் பயன்படுத்துகின்றனர்.

மாற்றுமுறை

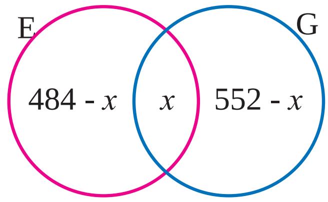
வென்படத்திலிருந்து,

$$484 - x + x + 552 - x = 1000$$

$$\Rightarrow \quad 1036 - x = 1000$$

$$\Rightarrow \quad -x = -36$$

$$x = 36$$



படம் 1.33

எனவே, 36 குடும்பங்கள் இரண்டு வகை அடுப்புகளையும் பயன்படுத்துகின்றனர்.

எடுத்துக்காட்டு 1.23

50 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு வகுப்பில், ஒவ்வொரு மாணவனும் கணிதம் அல்லது அறிவியல் அல்லது இரண்டிலும் தேர்ச்சிப் பெற்றுள்ளனர். 10 மாணவர்கள் இரண்டு பாடங்களிலும் தேர்ச்சிப் பெற்றுள்ளனர் மற்றும் 28 மாணவர்கள் அறிவியலில் தேர்ச்சிப் பெற்றுள்ளனர். கணிதத்தில் தேர்ச்சிப் பெற்ற மாணவர்கள் எத்தனை பேர்?

தீர்வு $M =$ கணிதத்தில் தேர்ச்சிப் பெற்ற மாணவர்களின் கணம் என்க.

$S =$ அறிவியலில் தேர்ச்சிப் பெற்ற மாணவர்களின் கணம் என்க.

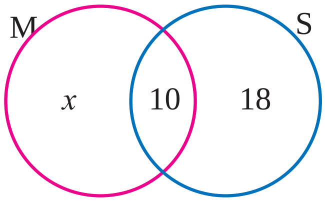
பின்னர், $n(S) = 28,\ n(M \cap S) = 10,\ n(M \cup S) = 50$

$$n(M \cup S) = n(M) + n(S) - n(M \cap S)$$

$$50 = n(M) + 28 - 10$$

$$\Rightarrow \quad n(M) = 32$$

மாற்றுமுறை



படம் 1.34

வென்படத்திலிருந்து,

$x + 10 + 18 = 50$

$x = 50 - 28 = 22$

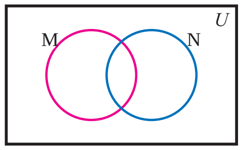
கணிதத்தில் தேர்ச்சிப் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= x + 10 = 22 + 10 = 32$

பயிற்சி 1.3

1. பின்வரும் கணங்களின் உறுப்புகளைக் கொடுக்கப்பட்ட வெண்படத்தில் சரியான இடத்தில் குறிக்கவும்.

   $U = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

   $M = \{5, 8, 10, 11\}$, $N = \{5, 6, 7, 9, 10\}$



படம் 1.35

2. A, B என்ற இரு கணங்களில், A என்பது 50 உறுப்புகளையும் B என்பது 65 உறுப்புகளையும் மற்றும் $A \cup B$ என்பது 100 உறுப்புகளையும் கொண்டிருந்ததால், $A \cap B$ என்பது எத்தனை உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும் ?

3. A, B என்ற இருகணங்கள் முறையே 13 மற்றும் 16 உறுப்புகளைப் பெற்றிருந்தால், $A \cup B$ பெற்றுள்ள குறைந்தபட்ச மற்றும் அதிகபட்ச உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க

4. $n(A \cap B) = 5,\ n(A \cup B) = 35, n(A) = 13$ எனில், $n(B)$ காண்க.

5. $n(A) = 26,\ n(B) = 10,\ n(A \cup B) = 30, n(A') = 17$ எனில், $n(A \cap B)$ மற்றும் $n(\cup)$ காண்க.

6. $n(\cup) = 38, n(A) = 16, n(A \cap B) = 12, n(B') = 20$ எனில், $n(A \cup B)$ காண்க.

7. $n(A - B) = 30, n(A \cup B) = 180, n(A \cap B) = 60$ என்றவாறு உள்ள இரண்டு முடிவுறு கணங்கள் A மற்றும் B எனில், $n(B)$ ஐக் காண்க.

8. ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை 10000. இவர்களில் 5400 பேர் செய்தித்தாள் A ஐயும் 4700 பேர் செய்தித்தாள் B ஐயும் படிக்கின்றனர். 1500 பேர் இரண்டு செய்தித்தாள்களையும் படிக்கின்றனர். இவ்விரு செய்தித்தாள்களில் ஒன்றைக் கூட படிக்காத நபர்கள் எத்தனை பேர் எனக் காண்க.

9. ஒரு பள்ளியில் உள்ள அனைத்து மாணவர்களும் கால்பந்து அல்லது கைப்பந்து அல்லது இரண்டும் விளையாடுகிறார்கள். அவர்களில் 300 மாணவர்கள் கால்பந்தும், 270 மாணவர்கள் கைப்பந்தும், 120 மாணவர்கள் இரண்டு விளையாட்டுக்களையும் விளையாடுகிறார்கள் எனில்,

   (i) கால்பந்து மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

   (ii) கைப்பந்து மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

   (iii) பள்ளியில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க.

10. ஒரு தேர்வில், 150 மாணவர்கள் ஆங்கிலம் அல்லது கணிதத்தில் முதல் வகுப்பு மதிப்பெண்கள் பெற்றுள்ளனர். இவர்களில் 50 மாணவர்கள் ஆங்கிலம் மற்றும் கணிதம் இரண்டிலும் முதல் வகுப்பு மதிப்பெண்கள் பெற்றுள்ளனர். 115 மாணவர்கள் கணிதத்தில் முதல் வகுப்பு மதிப்பெண்கள் பெற்றுள்ளனர். ஆங்கிலத்தில் மட்டும் முதல் வகுப்பு மதிப்பெண் பெற்ற மாணவர்கள் எத்தனை பேர் ?

11. 30 நபர்கள் உள்ள ஒரு குழுவில், 10 பேர் தேநீர் அருந்துவார்கள் ஆனால் காபி அருந்தமாட்டார்கள். 18 பேர் தேநீர் அருந்துவார்கள். குழுவில் உள்ள ஒவ்வொரு நபரும் இவ்விரண்டில் குறைந்தபட்சம் ஒன்றையாவது அருந்துவார்கள் எனில், காபி அருந்தி தேநீர் அருந்தாதவர்கள் எத்தனை பேர் எனக் காண்க.

12. ஒரு கிராமத்தில் 60 குடும்பங்கள் உள்ளன. இவற்றில் 28 குடும்பங்கள் தமிழ் மட்டும் பேசுகிறார்கள் . 20 குடும்பங்கள் உருது மட்டும் பேசுகிறார்கள். தமிழ் மற்றும் உருது இரண்டினையும் பேசும் குடும்பங்கள் எத்தனை எனக் காண்க.

13. ஒரு பள்ளியில் 150 மாணவர்கள் பத்தாம் வகுப்புத் தேர்வில் தேர்ச்சிப் பெற்றுள்ளனர். இவர்களில் மேல்நிலை வகுப்பில் 95 மாணவர்கள் பிரிவு I-க்கு விண்ணப்பித்தார்கள். 82 மாணவர்கள் பிரிவு II-க்கு விண்ணப்பித்தார்கள் 20 மாணவர்கள் இவ்விரு பிரிவுகளில் எதற்கும் விண்ணப்பிக்கவில்லை எனில், இரண்டு பிரிவுகளுக்கும் விண்ணப்பித்த மாணவர்கள் எத்தனை பேர் எனக் காண்க.

14. மின்சாதன பயன்பாட்டு நிறுவனத்தின் ஒரு பிரிவின் உயர் அதிகாரி பிரதீப். இவருடைய பிரிவில் உள்ள பணியாளர்கள் உயரமான மரங்களை வெட்டுவார்கள் அல்லது மின்கம்பத்தில் ஏறுவார்கள். அண்மையில், பிரதீப் அவருடைய நிறுவனத்திற்கு தனது பிரிவு சார்பான விவர அறிக்கையைப் பின்வருமாறு அனுப்பினார்.

'என்னுடைய பிரிவில் பணிபுரியும் 100 பணியாளர்களில், 55 பேர் உயரமான மரங்களை வெட்டுவார்கள், 50 பேர் மின் கம்பம் ஏறுவார்கள், 11 பேர் இரண்டடையும் செய்வார்கள், 6 பேர் இவ்விரண்டில் எதையும் செய்ய மாட்டார்கள்'. அவர் அனுப்பிய விவரம் சரியானதா?

15. A மற்றும் B என்பன $n(A-B)=32+x, n(B-A)=5x$ மற்றும் $n(A\cap B)=x$ என்றவாறு உள்ள இரு கணங்கள் என்க. இவ்விவரங்களை வென்படம்மூலம் விளக்குக. $n(A)=n(B)$ என கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் (i) x-ன் மதிப்பு (ii) $n(A\cup B)$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

16. ஒரு பள்ளியில் நடைபெற்ற பேச்சு மற்றும் ஓவியப் போட்டிகளில் பங்கு பெற்ற மாணவர்கள் சதவீதத்தை பின்வரும் அட்டவணை காட்டுகிறது.

போட்டி	பேச்சு	ஓவியம்	இரண்டும்
மாணவர்கள் சதவீதம்	55	45	20

இவ்விவரங்களைக் குறிக்க வென்படம் வரைக மற்றும் அதனைப் பயன்படுத்தி

(i) பேச்சுப் போட்டியில் மட்டும் பங்குபெற்ற

(ii) ஓவியப் போட்டியில் மட்டும் பங்கு பெற்ற

(iii) எந்தவொரு போட்டியிலும் பங்குபெறாத

மாணவர்களின் சதவீதம் காண்க.

17. ஒரு கிராமத்தின் மொத்த மக்கள் தொகை 2500. இவர்களில் 1300 நபர்கள் A வகை சோப்பையும், 1050 நபர்கள் B வகை சோப்பையும் 250 நபர்கள் இரண்டு வகை சோப்புகளையும் பயன்படுத்துகிறார்கள். இவ்விரு வகை சோப்புகளையும் பயன்படுத்தாதவர்கள் சதவீதம் காண்க.

நினைவில் கொள்க

- நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருட்களின் தொகுப்பு கணம் எனப்படும்.
- ஒரு கணத்தினை பின்வரும் மூன்று வழிகளில் ஏதேனும் ஒன்றால் குறிப்பிடலாம்
  (i) விவரித்தல் முறை அல்லது வருணனை முறை (Descriptive Form)
  (ii) கணக்கட்டமைப்பு முறை அல்லது விதி முறை (Set-Builder Form or Rule Form)
  (iii) பட்டியல் முறை அல்லது அட்டவணை முறை (Roster Form or Tabular Form)
- ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அக்கணத்தின் ஆதி எண் அல்லது செவ்வெண் எனப்படும்.
- உறுப்புகள் இல்லாத கணம் வெற்றுக்கணம் என்றழைக்கப்படும்.
- ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை பூச்சியம் அல்லது முடிவுறு (எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட) எண் எனில், அக்கணம் முடிவுறு கணம் எனப்படும். அவ்வாறு இல்லையெனில், அது முடிவிலா கணம் எனப்படும்.
- A, B என்ற இரு கணங்களில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமம் எனில், அவை சமான கணங்கள் எனப்படும்.
- A, B என்ற இரு கணங்களில் உள்ள உறுப்புகள்அவை எழுதப்பட்டுள்ள வரிசையை பொருட்படுத்தாமல் சரியாக அதே உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால், அவை சம கணங்கள் எனப்படும்.
- கணம் A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் B-ன் உறுப்பாகவும் இருக்குமானால், A ஆனது B-ன் ஓர் உட்கணமாகும்.
- $A \subseteq B$ மற்றும் $A \neq B$ என்றவாறு இருப்பின், கணம் A ஆனது கணம் B-ன் தகு உட்கணம் எனப்படும்.
- A என்ற கணத்தின் அனைத்து உட்கணங்களையும் கொண்ட கணம், அக்கணத்தின் அடுக்குக்கணம் எனப்படும். A-ன் அடுக்குக்கணம் $P(A)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
- m உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2^m ஆகும்.

- ***m*** உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $2^m - 1$ ஆகும்.
- கணம் A-ல் இல்லாத ஆனால் அனைத்துக்கணம் U-ல் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம், A-ன் நிரப்புக்கணம் எனப்படும். A என்ற கணத்தின் நிரப்புக்கணத்தை A' எனக் குறிப்போம்.
- A, B என்ற இரு கணங்களின் சேர்ப்புக்கணம் என்பது A அல்லது B அல்லது இரண்டிலும் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும்.
- A, B என்ற இரு கணங்களின் வெட்டுக்கணம் என்பது A மற்றும் B இரண்டிலும் பொதுவாக உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும்.
- A மற்றும் B என்பன வெட்டாக்கணங்கள் எனில், $A \cap B = \varnothing$
- A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் வித்தியாச கணமானது, A-ல் உள்ள ஆனால் B-ல் இல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும்.
- A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசமானது $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.
- A மற்றும் B என்ற முடிவுறு கணங்களுக்கு பின்வரும் பயனுள்ள சில முடிவுகளை நாம் காண்போம்.

(i) $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

(ii) $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$

(iii) $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

(iv) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(v) $A \cap B = \varnothing$ எனும் போது, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

2 மெய்யெண் தொகுப்பு

Life is good for only two things, discovering mathematics and teaching mathematics

\- SIMEON POISSON

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- இயல்எண்கள், முழு எண்கள் மற்றும் முழுக்களை நினைவு கூர்தல்.
- விகிதமுறு எண்களை முடிவுறு / சுழல் தன்மையுள்ள தசமஎண்களாக வகைப்படுத்துதல்.
- முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம எண்கள் இருப்பதை புரிந்து கொள்ளுதல்.
- முடிவுறு மற்றும் முடிவுறா தசம எண்களை எண்கோட்டில் குறித்தல்.
- விகிதமுறா எண்களின் நான்கு அடிப்படைச் செயல்களை புரிந்து கொள்ளுதல்.
- விகிதமுறா எண்ணின் பகுதியை விகிதப்படுத்துதல்.

ரிச்சர்ட் டெடிகண்ட்

(1831-1916)

ரிச்சர்ட் டெடிகண்ட் *(Richard Dedekind)* என்பவர் புகழ்பெற்ற கணிதவியல் அறிஞர்களில் ஒருவராவார். இவர் மாபெரும் கணிதவியல் அறிஞர் கார்ல் பிரடரிக் காஸ் என்பவரின் மாணவராவார். இவர் நுண் இயற்கணிதம், இயற்கணித எண்ணியல் ஆகியவற்றில் முக்கியமான ஆராய்ச்சிகளை மேற்கொண்டு மெய்யெண் கருத்தாக்கத்திற்கு அடித்தளத்தை அமைத்தார். கேண்டர் என்பவரால் உருவாக்கப்பட்ட கணவியலின் முக்கியத்துவத்தை உணர்ந்து பயன்படுத்தியவர்களில் இவரும் ஒருவராவார். தொழில் நுட்பக் கல்லூரியில் நுண்கணிதத்தை போதித்த போது உருவான டெடிகண்ட் துண்டு (Dedekind cut) பற்றிய வரையறை மெய்யெண்களின் முக்கியமான கோட்பாடு ஆகும்.

2.1 அறிமுகம்

அன்றாட வாழ்க்கையில் சாதாரணமாக நாம் பயன்படுத்தும் தொலைவு, நேரம், வேகம், பரப்பளவு, இலாபம், நட்டம், வெப்பநிலை போன்ற அளவைகளை குறிப்பிடப் பயன்படுத்தும் எண்கள் மெய்யெண்கள் ஆகும். இயல் எண்களின் தொகுப்பை தேவைக்கேற்ப மென்மேலும் விரிவாக்கியதின் விளைவாக மெய்யெண்களின் தொகுப்பு தோன்றியது. மனிதன் முதலில் எண்ணத் தொடங்கிய போது இயல் எண்கள் வழக்கத்திற்கு வந்தன. கி.மு 1700 ஆம் ஆண்டுகளில் எகிப்தியர்கள் பின்னங்களைப் பயன்படுத்தினர். கி.மு 500 ஆம் ஆண்டில் கிரேக்க கணித அறிஞர்கள் பிதாகரசின் தலைமையில் ஆராய்ந்து விகிதமுறா எண்களின் தேவையை உணர்ந்தனர். கி.பி 1600ஆம் ஆண்டுகளில் குறை எண்களை ஏற்றுக்கொள்ளத் தொடங்கினர். கி.பி 1700 ஆம் ஆண்டுகளில் நுண்கணிதத்தில் மெய்யெண்களின் கணம் தெளிவாக வரையறுக்கப்படாமல் பயன்படுத்தப்பட்டது. கி.பி 1871-ல் ஜார்ஜ் கேண்டர் என்பவர் மெய்யெண்களுக்கு முதன் முதலில் சரியான வரையறையை அளித்தார்.

இப்பாடத்தில் மெய்யெண்களின் சில பண்புகளைப் பற்றி நாம் காணலாம். முன் வகுப்புகளில் நாம் கற்றுக் கொண்ட பல்வேறு எண் தொகுப்புகளைப் பற்றி முதலில் நினைவு கூர்வோம்.

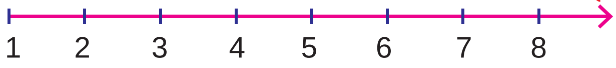
2.1.1 இயல் எண்கள் (Natural Numbers)

எண்ணுவதற்குப் பயன்படும் $1, 2, 3, \cdots$ என்பன இயல் எண்கள் எனப்படும்.

இக்கோடு 1-ன் வலப்புறம் மட்டும் முடிவில்லாமல் நீண்டு செல்லும்.

இயல் எண்களின் கணத்தை $\mathbb{N}$ எனக் குறிப்போம்.

i.e., $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$



படம் 2.1

குறிப்புரை இயல் எண்களில் மிகச்சிறிய எண் 1 ஆகும். இவ்வெண்கள் முடிவில்லாமல் தொடர்ந்து செல்வதால் மிகப்பெரிய எண் எது என கூறமுடியாது.

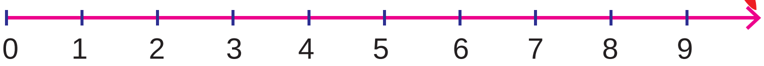
2.1.2 முழு எண்கள் (Whole Numbers)

இயல் எண்களுடன் பூச்சியம் சேர்ந்தது முழு எண்களின் கணமாகும்.

முழு எண்களின் கணத்தை $\mathbb{W}$ எனக் குறிப்போம்.

இக்கோடு 0-ன் வலப்புறம் மட்டும் முடிவில்லாமல் நீள்கிறது.

$\mathbb{W} = \{ 0, 1, 2, 3, \cdots \}$

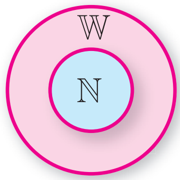


படம் 2.2

முழு எண்களில் மிகச்சிறிய எண் 0 ஆகும்.

குறிப்புரை

1) ஒவ்வொரு இயல் எண்ணும் ஒரு முழு எண்ணாகும்.
2) ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் ஒரு இயல் எண்ணாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. ஏனெனில், $0 \in \mathbb{W}$ ஆனால் $0 \notin \mathbb{N}$
3) $\mathbb{N} \subset \mathbb{W}$



2.1.3 முழுக்கள் (Integers)

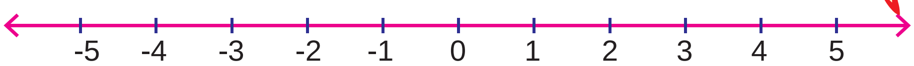
இயல் எண்கள் மற்றும் அவற்றின் குறை எண்கள் இவற்றுடன் பூச்சியம் சேர்ந்த கணம் முழுக்கள் எனப்படும்.

$\mathbb{Z}$ என்பது 'Zahlen', என்ற ஜெர்மன் வார்த்தையிலிருந்து பெறப்பட்டது. 'எண்ணுதல்' என்பது இதன் பொருளாகும்.

முழுக்களின் கணத்தை $\mathbb{Z}$ எனக் குறிப்போம்.

$\mathbb{Z} = \{\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

இக்கோடு 0-ன் இரு புறமும் முடிவில்லாமல் செல்கிறது.



படம் 2.3

$1, 2, 3, \cdots$ என்பன மிகை முழுக்கள் எனப்படும்.

$-1, -2, -3, \cdots$ என்பன குறை முழுக்கள் எனப்படும்.

எனவே, $\{\cdots -3, -2, -1, 1, 2, 3, \cdots\}$ என்பது பூச்சியமற்ற முழுக்களின் கணமாகும்.

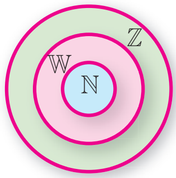
நினைவு கூர்ந்து விடையளி !
0 என்பது மிகை முழுவா அல்லது குறை முழுவா ?

குறிப்புரை

1) ஒவ்வொரு இயல் எண்ணும் ஒரு முழு ஆகும்.

2) ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் ஒரு முழு ஆகும்.

3) $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z}$



2.1.4 விகிதமுறு எண்கள் (Rational Numbers)

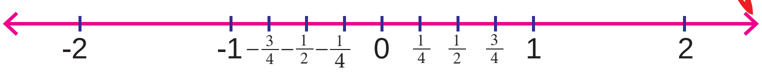
p மற்றும் q முழுக்கள், மேலும் $q \neq 0$ எனில், $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவில் அமையும் எண் விகிதிமுறு எண் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $3 = \frac{3}{1}, -\frac{5}{6}, \frac{7}{8}$ என்பன விகிதமுறு எண்களாகும்.

விகிதமுறு எண்களின் கணம் $\mathbb{Q}$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, \text{மற்றும் } q \neq 0\right\}$$

இரு முழுக்களுக்கு இடையில் விகிதமுறு எண்களை காண்கிறோம்.



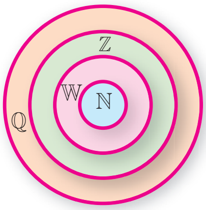
படம் 2.4

குறிப்புரை

1) ஒரு விகிதமுறு எண் மிகை, குறை அல்லது பூச்சியமாக இருக்கலாம்.

2) ஒரு முழு n-ஐ $\frac{n}{1}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். எனவே, ஒவ்வொரு முழுவும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்.

3) $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$



முக்கிய முடிவுகள்

1) இரண்டு வெவ்வேறு விகிதமுறு எண்கள் a மற்றும் b என்பவற்றிற்கு இடையே $a < \frac{a+b}{2} < b$ என்றவாறு $\frac{a+b}{2}$ என்ற ஒரு விகிதமுறு எண் அமையும்.

2) கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் இருக்கும்.

நினைவு கூர்ந்து விடையளி !
விகிதம் என்பதை விகிதமுறு எண்களுடன் தொடர்பு படுத்த முடியுமா ?

எடுத்துக்காட்டு 2.1

$\frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{3}{4}$ ஆகிய எண்களுக்கிடையே உள்ள ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

தீர்வு $\frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{3}{4}$ இவற்றிற்கு இடையே அமையும் ஒரு விகிதமுறு எண்

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\,(1)=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{3}{4}$ இவற்றிற்கு இடையே அமையும் விகிதமுறு எண் $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}=\frac{5}{8}$

$\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{5}{8}$ என்ற விகிதமுறு எண்கள் $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$-க்கு இடையே அமைந்துள்ளன.

குறிப்பு $\frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{3}{4}$ இவற்றிற்கு இடையில் எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன. எடுத்துக்காட்டு 2.1-ல் நமக்கு கிடைத்த $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$ என்பவை அவ்வாறான இரண்டு எண்களாகும்.

பயிற்சி 2.1

1. பின்வரும் கூற்றுகளில் எவை சரி அல்லது தவறு எனக் கூறுக.

   (i) ஒவ்வொரு இயல் எண்ணும் ஒரு முழு எண் ஆகும்.

   (ii) ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் ஒரு இயல் எண் ஆகும்.

   (iii) ஒவ்வொரு முழுவும் ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

   (iv) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் ஒரு முழு எண் ஆகும்.

   (v) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் ஒரு முழு ஆகும்.

   (vi) ஒவ்வொரு முழுவும் ஒரு முழு எண் ஆகும்.

2. பூச்சியம் என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகுமா? உங்கள் விடைக்கு காரணம் கூறுக.

3. $-\frac{5}{7}$ மற்றும் $-\frac{2}{7}$ என்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ள ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

2.2 விகிதமுறு எண்களை தசமவடிவில் குறிப்பிடுதல்

$\frac{p}{q}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணின் தசம வடிவத்தை நீள் வகுத்தல் முறையில் நாம் பெறலாம்.

p என்ற எண்ணை q ஆல் வகுக்கும் போது சில படிகளுக்குப் பின்னர் மீதி பூச்சியமாகும் அல்லது மீதி எந்நிலையிலும் பூச்சியமாகாது மற்றும் மீண்டும் மீண்டும் வரும் எண் தொகுதி மீதியாக கிடைக்கும்.

நிலை (i) சில படிகளுக்கு பின்னர் மீதி பூச்சியமாகும்

முதலில், $\frac{7}{16}$-ஐ தசம வடிவத்தில் எழுதுவோம். இங்கு $\frac{7}{16}=0.4375$

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, $\frac{7}{16}$ -ன் தசமவடிவத்தை நீள்வகுத்தல் முறையில் காணும் போது சில படிகளுக்குப் பின்னர் மீதி பூச்சியமாவதைக் காண்கிறோம். மேலும் தசம விரிவும் முடிவு பெறுகிறது.

$$\begin{array}{r|l} & 0.4375 \\ \hline 16 & 7.0000 \\ & 6\,4 \\ \hline & \;\;60 \\ & \;\;48 \\ \hline & \;\;120 \\ & \;\;112 \\ \hline & \;\;\;\;80 \\ & \;\;\;\;80 \\ \hline & \;\;\;\;\;0 \end{array}$$

இதைப்போலவே, நீள்வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் விகிதமுறு எண்களை தசம வடிவில் எழுதலாம்.

$$\frac{1}{2} = 0.5,\ \frac{7}{5} = 1.4,\ -\frac{8}{25} = -0.32,\ \frac{9}{64} = 0.140625,\ \frac{527}{500} = 1.054$$

இந்த எடுத்துக்காட்டுகளில் தசம விரிவுகளானது சில படிகளுக்குப் பின்னர் முற்றுப்பெறுவதைக் காண்கிறோம்.

முக்கிய கருத்து **முடிவுறு தசம விரிவு**

$\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ என்ற வடிவில் உள்ள எண்ணின் தசம விரிவானது முடிவு பெறும் எனில், $\frac{p}{q}$ -ன் தசம விரிவு முடிவுறு தசமவிரிவு (Terminating decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறு தசம விரிவினைக்கொண்ட எண் முடிவுறு தசம எண் எனப்படும்.

நிலை (ii) எந்நிலையிலும் மீதி பூச்சியமாகாது

ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் முடிவுறு தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்குமா?

இவ்வினாவிற்கு விடையளிக்குமுன், $\frac{5}{11}$, $\frac{7}{6}$ மற்றும் $\frac{22}{7}$ ஆகிய விகிதமுறு எண்களின் தசம விரிவுகளைக் காண்போம்.

$$\begin{array}{r|l} & 0.4545\cdots \\ \hline 11 & 5.0000 \\ & 4\,4 \\ \hline & \;\;60 \\ & \;\;55 \\ \hline & \;\;\;50 \\ & \;\;\;44 \\ \hline & \;\;\;\;60 \\ & \;\;\;\;55 \\ \hline & \;\;\;\;\;50 \\ & \;\;\;\;\;\;\ddots \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} & 1.1666\cdots \\ \hline 6 & 7.0000 \\ & 6\,0 \\ \hline & \;\;10 \\ & \;\;\;6 \\ \hline & \;\;\;40 \\ & \;\;\;36 \\ \hline & \;\;\;\;40 \\ & \;\;\;\;36 \\ \hline & \;\;\;\;\;40 \\ & \;\;\;\;\;36 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;40 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\ddots \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} & 3.142857\,142857\cdots \\ \hline 7 & 22.00000000 \\ & 21 \\ \hline & \;10 \\ & \;\;7 \\ \hline & \;\;30 \\ & \;\;28 \\ \hline & \;\;\;20 \\ & \;\;\;14 \\ \hline & \;\;\;\;60 \\ & \;\;\;\;56 \\ \hline & \;\;\;\;\;40 \\ & \;\;\;\;\;35 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;50 \\ & \;\;\;\;\;\;49 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;\;10 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;\ddots \end{array}$$

$$\therefore \frac{5}{11} = 0.4545\cdots, \qquad \frac{7}{6} = 1.1666\cdots, \qquad \frac{22}{7} = 3.142857\,1\cdots$$

எனவே, அனைத்து விகிதமுறு எண்களின் தசம விரிவுகளும் முற்றுப்பெற்று இருக்க வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை.

மேற்கண்ட எண்களின் தசம விரிவுகளை நீள் வகுத்தல் முறையில் காணும் போது எந்நிலையிலும் மீதி பூச்சியமாகவில்லை. மேலும் குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளில் கிடைக்கின்ற மீதிகள் வரிசை மாறாமல் மீண்டும் மீண்டும் வருவதைக் காண்கிறோம். ஆதலால் ஈவில் மீண்டும் மீண்டும் வரும் இலக்கங்களின் தொகுதியை (repeating block of digits) நாம் பெறுகிறோம்.

முக்கிய கருத்து **முடிவுறா சுழல் தசம விரிவு**

$\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ என்ற எண்ணின் தசம விரிவு காணும் போது எந்நிலையிலும் மீதி பூச்சியமாகவில்லை எனில், ஈவில் மீண்டும் மீண்டும் வரும் இலக்கங்களின் தொகுதி கிடைக்கும். இந்நிலையில் $\frac{p}{q}$-ன் தசம விரிவு முடிவுறா சுழல் தசம விரிவு அல்லது முடிவுறா மீள்வரு தசம விரிவு (Non-terminating and recurring decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறா சுழல் தசம விரிவினைக் கொண்ட எண் முடிவுறா சுழல் தசம எண் எனப்படும்.

தசம எண்ணில் இலக்கங்களின் தொகுதி மீண்டும் மீண்டும் வருவதைக்குறிக்க, அந்தத் தொகுதியின் மீது கோடிட்டுக் (bar) காட்டி, மற்ற எண் தொகுதிகளை நீக்கிவிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$\frac{5}{11}$, $\frac{7}{6}$ மற்றும் $\frac{22}{7}$ -ன் விரிவுகளை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$\frac{5}{11} = 0.4545\cdots = 0.\overline{45}$, $\quad \frac{7}{6} = 1.16666\cdots = 1.1\overline{6}$

$\frac{22}{7} = 3.142857\ 142857\ \cdots = 3.\overline{142857}$

n என்ற எண்ணின் தலைகீழி $\frac{1}{n}$ ஆகும். மேலும் இயல்எண்களின் தலைகீழிகள் விகிதமுறு எண்களாகும். முதல் பத்து இயலெண்களின் தலைகீழிகளின் தசம வடிவங்களை பின்வரும் அட்டவணை காட்டுகிறது.

எண்	தலைகீழி	தசம எண் வகை
1	1.0	முடிவுறு தசம எண்
2	0.5	முடிவுறு தசம எண்
3	$0.\overline{3}$	முடிவுறா சுழல் தசம எண்
4	0.25	முடிவுறு தசம எண்
5	0.2	முடிவுறு தசம எண்
6	$0.1\overline{6}$	முடிவுறா சுழல் தசம எண்
7	$0.\overline{142857}$	முடிவுறா சுழல் தசம எண்
8	0.125	முடிவுறு தசம எண்
9	$0.\overline{1}$	முடிவுறா சுழல் தசம எண்
10	0.1	முடிவுறு தசம எண்

ஆகவே,

> ஒரு விகிதமுறு எண்ணை முடிவுறு தசம விரிவாகவோ அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவாகவோ குறிப்பிடலாம்.

இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். அதாவது,

முடிவுறு தசம விரிவு அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவைப் பெற்றுள்ள ஒரு எண் விகிதமுறு எண்ணாகும்.

இதனை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் விளக்குவோம்.

2.2.1 முடிவுறு தசம எண்களை $\frac{p}{q}$ வடிவில் குறித்தல்

முடிவுறு தசம எண்ணை எளிதாக $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $q \neq 0)$ என்ற வடிவத்தில் குறிப்பிடலாம். அவ்வாறு குறிப்பிடும் முறையை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.2

கீழ்க்காணும் தசம எண்களை $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதுக. இங்கு p, q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

(i) 0.75 (ii) 0.625 (iii) 0.5625 (iv) 0.28

தீர்வு (i) $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

(ii) $0.625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$

(iii) $0.5625 = \frac{5625}{10000} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$

(iv) $0.28 = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$

2.2.2 முடிவுறா சுழல் தசம எண்ணை $\frac{p}{q}$ வடிவில் குறித்தல்

முடிவுறா சுழல் தசம எண்ணை $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $q \neq 0)$ என்ற வடிவத்திற்கு மாற்றும் முறை எளிதான செயல் அல்ல. முடிவுறா சுழல் தசம எண்ணை $\frac{p}{q}$ வடிவத்திற்கு மாற்றும் முறையை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.3

பின்வருவனவற்றை $\frac{p}{q}$, வடிவில் எழுதுக. இங்கு p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

(i) $0.\overline{47}$ (ii) $0.\overline{001}$ (iii) $0.5\overline{7}$ (iv) $0.2\overline{45}$ (v) $0.\overline{6}$ (vi) $1.\overline{5}$

தீர்வு (i) $x = 0.\overline{47}$ என்க. $x = 0.474747\cdots$

இங்கு இரண்டு இலக்கத் தொகுதி 47 மீண்டும் மீண்டும் வருவதால், இருபுறமும் 100 ஆல் பெருக்குக.

$$100x = 47.474747\cdots = 47 + 0.474747\cdots = 47 + x$$

$$99x = 47$$

$$x = \frac{47}{99} \qquad \therefore\ 0.\overline{47} = \frac{47}{99}$$

(ii) $x = 0.\overline{001}$ என்க. $x = 0.001001001\cdots$

மூன்று இலக்கங்கள் மீண்டும் மீண்டும் வருவதால், இரு புறமும் 1000 ஆல் பெருக்குக.

$$1000x = 1.001001001\cdots = 1 + 0.001001001\cdots = 1 + x$$

$$1000x - x = 1$$

$$999x = 1$$

$$x = \frac{1}{999} \qquad \therefore\ 0.\overline{001} = \frac{1}{999}$$

(iii) $x = 0.5\overline{7}$ என்க. பிறகு $x = 0.57777\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க,

$$10x = 5.7777\cdots = 5.2 + 0.57777\cdots = 5.2 + x$$

$$9x = 5.2$$

$$x = \frac{5.2}{9}$$

$$x = \frac{52}{90} \qquad \therefore\ 0.5\overline{7} = \frac{52}{90} = \frac{26}{45}$$

(iv) $x = 0.2\overline{45}$ என்க. பிறகு $x = 0.2454545\cdots$

இருபுறமும் 100 ஆல் பெருக்க,

$$100x = 24.545454\cdots = 24.3 + 0.2454545\cdots = 24.3 + x$$

$$99x = 24.3$$

$$x = \frac{24.3}{99}$$

$$0.2\overline{45} = \frac{243}{990} = \frac{27}{110}$$

(v) $x = 0.\overline{6}$ என்க. பின்னர் $x = 0.66666\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க,

$$10x = 6.66666\cdots = 6 + 0.6666\cdots = 6 + x$$

$$9x = 6$$

$$x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \qquad \therefore\ 0.\overline{6} = \frac{2}{3}$$

(vi) $x = 1.\overline{5}$ என்க. பின்னர் $x = 1.55555\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க,

$$10x = 15.5555\cdots = 14 + 1.5555\cdots = 14 + x$$

$$9x = 14$$

$$x = \frac{14}{9} \therefore\ 1.\overline{5} = 1\frac{5}{9}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.3 (vi)

மாற்றுமுறை

$x = 1.\overline{5}$ என்க.

அதாவது, $x = 1.55555\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க,

$10x = 15.5555\cdots$

$\therefore\ 10x - x = 14$

$9x = 14$

$x = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}$

எடுத்துக்காட்டு2.3-ல் உள்ள எல்லா கணக்குகளையும் $\frac{p}{q}$, p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$ வடிவில் எழுத, மாற்று முறையையும் பயன்படுத்தலாம்.

எனவே, முடிவுறா சுழல் தசம விரிவினைப் பெற்றுள்ள ஒவ்வொரு எண்ணையும் $\frac{p}{q}$, (p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$) என்ற வடிவில் எழுத முடிகிறது.

ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் தசம வடிவம் முடிவுற்றதா அல்லது முடிவுறாததா என்பதைக் கண்டறிய பின்வரும் விதியைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ வடிவில் உள்ள விகிதமுறு எண்ணை $\frac{p}{2^m \times 5^n}$, ($p \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $m, n \in \mathbb{W}$) என்ற வடிவில் எழுத முடியுமானால், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறு தசம விரிவினைப்பெற்றிருக்கும். அவ்வாறில்லையெனில், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறா சுழல் தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும்.

தசம எண்கள் 10-ன் அடுக்குகளைப் பின்னத்தின் பகுதிகளாக் கொண்டிருக்கும் மற்றும் 2,5 என்பவை 10-ன் பகாக் காரணிகள் என்ற உண்மைகளின் அடிப்படையில் இம்முடிவானது அமைந்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 2.4

வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல், பின்வரும் எண்களின் தசம விரிவுகளில் எவையெவை முடிவுறு தசம விரிவு அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும் என வகைப்படுத்துக.

(i) $\frac{7}{16}$ (ii) $\frac{13}{150}$ (iii) $\frac{-11}{75}$ (iv) $\frac{17}{200}$

தீர்வு

(i) $16 = 2^4$

$$\frac{7}{16} = \frac{7}{2^4} = \frac{7}{2^4 \times 5^0}$$. எனவே, $\frac{7}{16}$ என்பது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

(ii) $150 = 2 \times 3 \times 5^2$

$$\frac{13}{150} = \frac{13}{2 \times 3 \times 5^2}$$

இது $\frac{p}{2^m \times 5^n}$, என்ற வடிவில் இல்லை. எனவே, $\frac{13}{150}$ என்பது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

(iii) $$\frac{-11}{75} = \frac{-11}{3 \times 5^2}$$

இது $\frac{p}{2^m \times 5^n}$, என்ற வடிவில் இல்லை. எனவே, $\frac{-11}{75}$ என்பது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

(iv) $\frac{17}{200} = \frac{17}{8 \times 25} = \frac{17}{2^3 \times 5^2}$. எனவே, $\frac{17}{200}$ என்பது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.5

$0.\overline{9}$ ஐ விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுக.

தீர்வு $x = 0.\overline{9}$ என்க. பின்னர் $x = 0.99999\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க

$$10x = 9.99999\cdots = 9 + 0.9999\cdots = 9 + x$$

$$\Longrightarrow \quad 9x = 9$$

$$\Longrightarrow \quad x = 1.$$ அதாவது, $0.\overline{9} = 1$ ($\because$ 1 என்பது விகிதமுறு எண்)

உங்கள் சிந்தனைக்கு

நாம் $0.\overline{9} = 1$ என நிருபித்தோம். இது வியப்பூட்டுவதாக இல்லையா?

$0.9999\cdots$ என்பது 1-ஐ விடக்குறைவானது என பெரும்பாலானோர் கருதுகின்றனர். ஆனால் உண்மை அதுவல்ல. மேற்கண்ட விவாதத்திலிருந்து $0.\overline{9} = 1$ என்பது தெளிவாகிறது. மேலும் இம்முடிவானது $3 \times 0.333\cdots = 0.999\cdots$ மற்றும் $3 \times \frac{1}{3} = 1$ என்ற உண்மைகளையும் நிறைவு செய்கிறது. இதேபோல், ஒவ்வொரு முடிவுறு தசமவிரிவினையும் முடிவில்லாத 9-களின் தொகுதியாக எழுதுவதன் மூலம் முடிவுறா சுழல் தசம விரிவாக குறிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $6 = 5.9999\cdots$,
$2.5 = 2.4999\cdots$.

பயிற்சி 2.2

1. பின்வரும் விகிதமுறு எண்களை தசம எண்களாக மாற்றி அவை ஒவ்வொன்றும் எவ்வகை தசம விரிவினைப் பெற்றுள்ளது எனக் கூறுக.

   (i) $\frac{42}{100}$ (ii) $8\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{13}{55}$ (iv) $\frac{459}{500}$

   (v) $\frac{1}{11}$ (vi) $-\frac{3}{13}$ (vii) $\frac{19}{3}$ (viii) $-\frac{7}{32}$

2. நீள் வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல், பின்வரும் விகிதமுறு எண்களில் எவை முடிவுறு தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும் எனக் காண்க.

   (i) $\frac{5}{64}$ (ii) $\frac{11}{12}$ (iii) $\frac{27}{40}$ (iv) $\frac{8}{35}$

3. கீழ்க்கண்ட தசம எண்களை விகிதமுறு எண்களாக்குக.

   (i) $0.\overline{18}$ (ii) $0.\overline{427}$ (iii) $0.\overline{0001}$

   (iv) $1.4\overline{5}$ (v) $7.\overline{3}$ (vi) $0.4\overline{16}$

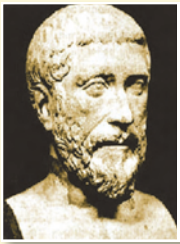
4. $\frac{1}{13}$ஐ தசம வடிவில் எழுதுக. மீண்டும் மீண்டும் வரும் எண் தொகுதியில் எத்தனை இலக்கங்கள் உள்ளன ?

5. $\frac{1}{7}$ மற்றும் $\frac{2}{7}$ ஆகியவற்றின் தசம விரிவுகளை நீள் வகுத்தல் முறையில் காண்க. நீள் வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல் $\frac{1}{7}$-ன் தசம விரிவினைப் பயன்படுத்தி $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ஆகியவற்றின் தசம விரிவுகளைப் பெறுக.

2.3 விகிதமுறா எண்கள் (Irrational Numbers)

முன் வகுப்புகளில் பயின்ற எண் கோடு பற்றிய பாடக்கருத்துகளை மீண்டும் நினைவு கூர்வோம். விகிதமுறு எண்களை எண் கோட்டில் குறிக்க முடியும் என்பதை நாம் அறிந்துள்ளோம்.

மேலும் எந்த இரண்டு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையேயும் எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன என்பதையும் அறிந்துள்ளோம். உண்மையில் விகிதமுறு எண்கள் அல்லாத எண்ணிலடங்கா மேலும் பல எண்கள் எண் கோட்டில் உள்ளன. அதாவது, முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவுகளைக் கொண்ட எண்ணற்ற எண்கள் எண்கோட்டில் உள்ளன. ஆகவே விகிதமுறு எண்களின் தொகுப்பை மேலும் விரிவுபடுத்த வேண்டியது அவசியமாகிறது.



பிதாகரஸ்

(கி.மு 569 - கி.மு 479)

கி.மு 400 ஆம் ஆண்டுகளில், கிரேக்க நாட்டு கணித அறிஞர் பிதாகரஸ் வழி வந்தவர்கள் முதன் முதலில் பின்ன வடிவில் எழுத முடியாத எண்களைக் கண்டுபிடித்தனர். அவ்வகை எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் என்றழைக்கப்பபட்டன.

பின்வரும் தசம விரிவினை எடுத்துக்கொள்க.

$$0.808008000800008\cdots \qquad (1)$$

இது முடிவுறா தசம விரிவாகும். இந்த தசம விரிவு சுழல் தன்மையுடையதா ?

தசம விரிவு (1) ஆனது ஒரு குறிப்பிட்ட அமைப்பினைப் பெற்றுள்ளது என்பது உண்மை. ஆனால், எந்த ஒரு இலக்கங்களின் தொகுதியும் இவ்விரிவில் மீண்டும் மீண்டும் காணப்படாததால் இத்தசம விரிவு சுழல் தன்மையற்றது.

ஆகவே, இத்தசமவிரிவு முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற (மீள்வரு தன்மையற்ற) (non-terminating and recurring) தசமவிரிவாகும் எனவே, இது ஒரு விகிதமுறு எண்ணைக் குறிக்காது.
இவ்வகை எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் எனப்படும்.

முக்கிய கருத்து — **விகிதமுறா எண்**

முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவினை கொண்ட எண் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும். எனவே, ஒரு விகிதமுறா எண்ணை $\frac{p}{q}$ (இங்கு p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$) என்ற வடிவில் எழுதமுடியாது.

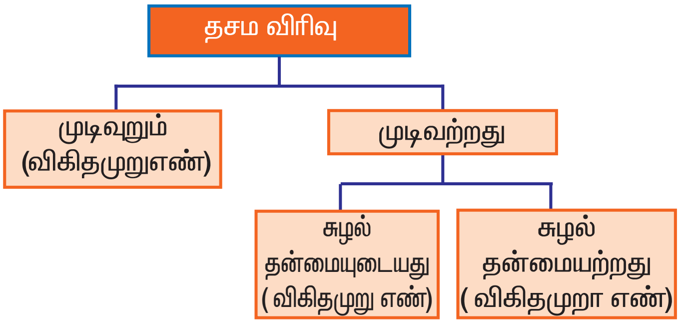
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, e, \pi, \sqrt{17}$, $0.2020020002\cdots$ போன்றவை விகிதமுறா எண்களுக்கு மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

குறிப்பு (1)-ல் எடுத்துக்கொண்ட தசம எண்ணில் உள்ள எண்ணுரு 8-க்குப் பதிலாக நம் விருப்பம் போல் எந்தவொரு இயல் எண்ணையும் பயன்படுத்தி எண்ணற்ற முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவுகளைப் பெறமுடியும்.

π ஐப் பற்றி அறிந்து கொள்க: 18 ஆம் நூற்றாண்டின் பிற்பகுதியில் கணிதவியல் அறிஞர்கள் லாம்பர்ட், லெஜண்டர் ஆகியோர் π ஒரு விகிதமுறா எண் என நிருபித்தார்கள்.

$\frac{22}{7}$ (ஒரு விகிதமுறு எண்) என்பதை π (ஒரு விகிதமுறா எண்)-ன் தோராய மதிப்பாக எடுத்துக் கொள்வது வழக்கம்.

தசம விரிவுகளின் வகைப்பாடு



2.4 மெய்யெண்கள் (Real Numbers)

முக்கிய கருத்து	மெய்யெண்கள்
மெய்யெண்களின் கணமானது விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் சேர்ப்புக் கணமாகும். ஆகவே, ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கும். அதாவது, ஒருமெய்யெண் விகிதமுறு எண் அல்ல எனில், அது ஒரு விகிமுறா எண்ணாகும்.	

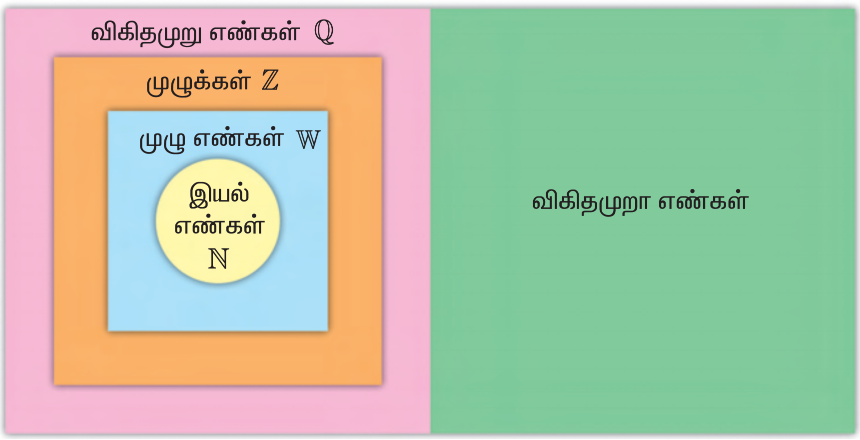
அனைத்து மெய்யெண்களின் கணத்தை $\mathbb{R}$ எனக் குறிப்போம்.

ஜெர்மன் நாட்டு கணிதவியல் அறிஞர்கள் ஜார்ஜ் கேண்டர் மற்றும் ரிச்சர்ட் டெடிகண்ட் இருவரும் தனித்தனியே ஆய்வுகளை மேற்கொண்டு ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் எண் கோட்டில் ஒரு தனித்த புள்ளியால் குறிக்கப்படும் எனவும், எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு தனித்த மெய்யெண்ணால் குறிக்கப்படும் எனவும் நிருபித்தனர்.

எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு தனித்த மெய்யெண்ணைக் குறிக்கும். அதேபோல், ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு தனித்த புள்ளியால் குறிப்பிடப்படும்.

மெய்யெண்கள் கணம் உள்ளடக்கியுள்ள கணங்களுக்கு இடையேயான தொடர்புகளைப் பின்வரும் படம் விளக்குகிறது.

மெய்யெண்கள் $\mathbb{R}$



படம் 2.5

2-ன் வர்க்க மூலத்தை தசம விரிவாகக் காண்போம்.

	$1.4142135\cdots$
1	2.00 00 00 00 00
	1
24	100
	96
281	400
	281
2824	11900
	11296
28282	60400
	56564
282841	383600
	282841
2828423	10075900
	8485269
28284265	159063100
	141421325
	17641775
	$\vdots$

$\therefore \sqrt{2} = 1.4142135\cdots$

இவ்வகுத்தல் செயலை தொடர்ந்து செய்யும் போது கிடைக்கும் தசம விரிவானது முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற இலக்கங்களைக் கொண்டிருப்பதைக் காணலாம். $\sqrt{2}$ -ன் தசம விரிவு முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்றது. எனவே, $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

குறிப்பு

(i) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \cdots$ என்பவற்றின் தசம விரிவுகள் முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்றவை. எனவே $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \cdots$ என்பன விகிதமுறா எண்களாகும்.

(ii) ஒரு மிகைமுழுவின் வர்க்கமூலம் எப்பொழுதும் விகிதமுறா எண்ணாகும் என்பது உண்மையல்ல.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{25} = 5 \cdots$. எனவே $\sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{25}$, என்பன விகிதமுறு எண்களாகும்.

(iii) முழு வர்க்கஎண் அல்லாத எந்தவொரு மிகைமுழுவின் வர்க்க மூலமும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

2.4.1 விகிதமுறா எண்களை எண்கோட்டில் குறித்தல்

$\sqrt{2}$ மற்றும் $\sqrt{3}$ என்ற விகிதமுறா எண்களை எண் கோட்டில் குறிக்கலாம்.

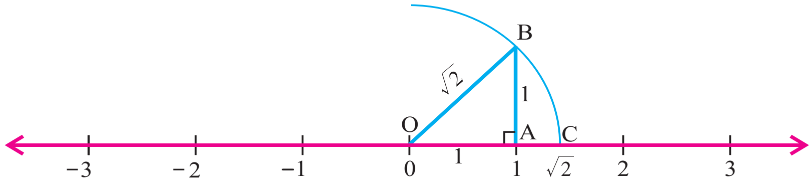
(i) $\sqrt{2}$ ஐ எண் கோட்டில் குறித்தல்.

எண் கோட்டை வரைக. O என்பது பூச்சியம் என்ற எண்ணையும், A என்பது 1 என்ற எண்ணையும் குறிப்பிடுமாறு O மற்றும் A என்ற புள்ளிகளை எண் கோட்டில் குறிக்க. அதாவது, $OA = 1$ அலகு.

$AB = 1$ அலகு என இருக்குமாறு $AB \perp OA$ ஐ வரைக. OB ஐச் சேர்க்க.

செங்கோண முக்கோணம் OAB-ல், பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$
$$= 1^2 + 1^2$$
$$OB^2 = 2$$
$$OB = \sqrt{2}$$



படம் 2.6

O-ன் வலப்புறம் C என்ற புள்ளியில் எண்கோட்டை வெட்டுமாறு O ஐ மையமாகவும் OB ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டவில் வரைக.

இப்பொழுது, படத்திலிருந்து $OC = OB = \sqrt{2}$ என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே, எண்கோட்டின் மீதுள்ள C என்ற புள்ளி $\sqrt{2}$ ஐக் குறிக்கிறது.

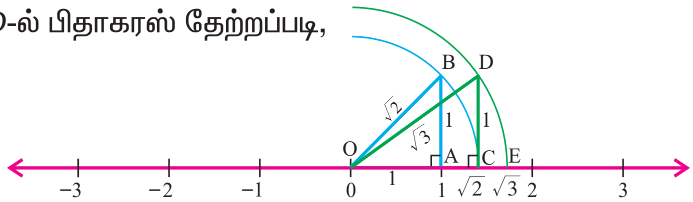
(ii) $\sqrt{3}$ ஐ எண் கோட்டில் குறித்தல்.

எண் கோட்டை வரைக. O என்பது பூச்சியம் என்ற எண்ணையும் C என்பது $\sqrt{2}$ ஐயும் குறிக்குமாறு O மற்றும் C என்ற புள்ளிகளை (i)-ல் உள்ளவாறு எண் கோட்டில் குறிக்க.

$\therefore OC = \sqrt{2}$ அலகு. $CD = 1$ அலகு உள்ளவாறு $CD \perp OC$ ஐ வரைக. ODஐச் சேர்க்க.

செங்கோண முக்கோணம் OCD-ல் பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$OD^2 = OC^2 + CD^2$$
$$= (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$$
$$\therefore OD = \sqrt{3}$$



படம் 2.7

O-ன் வலப்புறம் E என்ற புள்ளியில் எண் கோட்டை வெட்டுமாறு Oஐ மையமாவும் ODஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டவில் வரைக. படத்திலிருந்து $OE = OD = \sqrt{3}$ என்பது தெளிவாகிறது. எனவே, எண் கோட்டின் மீதுள்ள E என்ற புள்ளி $\sqrt{3}$ ஐக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.6

பின்வருவனவற்றில் எவை விகிதமுறு அல்லது விகிதமுறா எண்கள் என வகைப்படுத்துக.

(i) $\sqrt{11}$ (ii) $\sqrt{81}$ (iii) 0.0625 (iv) $0.8\overline{3}$ (v) $1.505500555\cdots$

தீர்வு

(i) $\sqrt{11}$ ஒரு விகிதமுறா எண். (11ஒரு முழுவர்க்க எண் அல்ல)

(ii) $\sqrt{81} = 9 = \dfrac{9}{1}$, ஒரு விகிதமுறு எண் .

(iii) 0.0625 ஒரு முடிவுறு தசம விரிவு.

$\therefore$ 0.0625 ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்.

(iv) $0.8\overline{3} = 0.8333\cdots$

இந்த தசம விரிவு முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையுள்ளது.

$\therefore$ $0.8\overline{3}$ விகிதமுறு எண்ணாகும்.

(v) $1.505500555\cdots$ இத்தசம விரிவு முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவாகும். $\therefore$ $1.505500555\cdots$ ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.7

$\frac{5}{7}$ மற்றும் $\frac{9}{11}$ ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட ஏதேனும் மூன்று விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.

தீர்வு

$$\begin{array}{r|l} & 0.714285\cdots \\ \hline 7 & 5.000000 \\ & 4\,9 \\ \hline & \;\;10 \\ & \;\;\;7 \\ \hline & \;\;\;30 \\ & \;\;\;28 \\ \hline & \;\;\;\;20 \\ & \;\;\;\;14 \\ \hline & \;\;\;\;\;60 \\ & \;\;\;\;\;56 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;40 \\ & \;\;\;\;\;\;35 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;\;50 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;\ddots \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.8181\cdots \\ \hline 11 & 9.0000 \\ & 8\,8 \\ \hline & \;\;20 \\ & \;\;11 \\ \hline & \;\;\;90 \\ & \;\;\;88 \\ \hline & \;\;\;\;20 \\ & \;\;\;\;\;\ddots \end{array}$$

$$\frac{5}{7} = 0.\overline{714285} \qquad \frac{9}{11} = 0.8181\cdots = 0.\overline{81}$$

$\frac{5}{7}$ மற்றும் $\frac{9}{11}$ இவற்றுக்கு இடையே (அதாவது 0.714285... மற்றும் 0.8181... ஆகியவற்றுக்கு இடையே) மூன்று விகிதாமுறா எண்களைக் காண, நாம் முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவுகளைக் கொண்ட மூன்று எண்களைக் காண வேண்டும். உண்மையில், $\frac{5}{7}$ -க்கும் $\frac{9}{11}$ -க்கும் இடையில் இது போன்ற எண்ணற்ற எண்கள் உள்ளன. அவற்றில் மூன்று எண்கள்,

$0.72022002220002\cdots$

$0.73033003330003\cdots$

$0.75055005550005\cdots$

எடுத்துக்காட்டு 2.8

பின்வரும் சமன்பாடுகளில் x, y, z என்பன விகிதமுறு அல்லது விகிதமுறா எண்களைக் குறிக்கின்றனவா என்பதை தீர்மானிக்க.

(i) $x^3 = 8$ (ii) $x^2 = 81$ (iii) $y^2 = 3$ (iv) $z^2 = 0.09$

தீர்வு

(i) $x^3 = 8 = 2^3$ (8 என்பது ஒரு முழு கன எண்)

$\Rightarrow\ x = 2$, ஒரு விகித முறு எண்.

(ii) $x^2 = 81 = 9^2$ (81 ஒரு முழு வர்க்கம்)

$\Rightarrow x = 9$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(iii) $y^2 = 3 \quad \Rightarrow\ y = \sqrt{3}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(iv) $z^2 = 0.09 = \dfrac{9}{100} = \left(\dfrac{3}{10}\right)^2$

$\Rightarrow\ z = \dfrac{3}{10}$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

பயிற்சி 2.3

1. $\sqrt{5}$ ஐ எண்கோட்டில் குறிக்க.
2. $\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{5}$ இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் மூன்று விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.
3. 3 மற்றும் 3.5 இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.
4. 0.15 மற்றும் 0.16 இவற்றிற்கு இடையில் ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.
5. $\dfrac{4}{7}$ மற்றும் $\dfrac{5}{7}$ இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க..
6. $\sqrt{3}$ மற்றும் 2 இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.
7. $1.1011001110001\cdots$ மற்றும் $2.1011001110001\cdots$ இவற்றிற்கு இடையில் ஒரு விகிதமுறு எண்ணையும், ஒரு விகிதமுறா எண்ணையும் காண்க.
8. $0.12122122212222\cdots$ மற்றும் $0.2122122212222\cdots$ இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

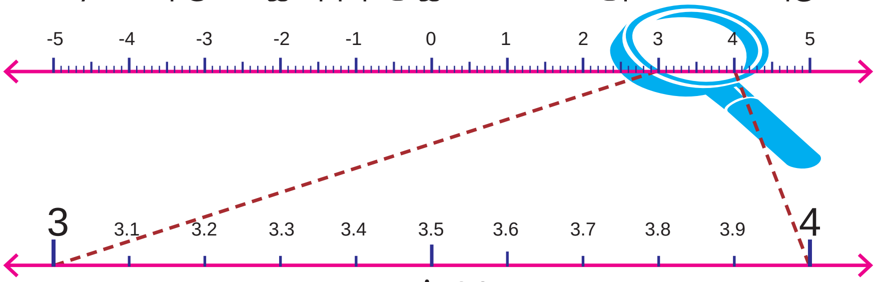
(குறிப்பு : 2 முதல் 8 முடிய உள்ள கணக்குகளுக்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் இருக்கும். அவ்வாறான தீர்வுகளில் ஏதேனும் இரண்டு அல்லது மூன்று தீர்வுகள் போதுமானது.)

2.4.2 மெய்யெண்களை எண்கோட்டில் குறித்தல்

எந்தவொரு மெய்யெண்ணையும் தசமவிரிவாகக் குறிப்பிடலாம் எனக் கண்டோம். இது ஒரு மெய்யெண்ணை எண் கோட்டில் குறிக்க உதவுகிறது.

3.776 ஐ நாம் எண் கோட்டில் குறிப்போம். 3.776 என்பது 3-க்கும் 4-க்கும் இடையில் உள்ளது என்பது நமக்கு தெரியும்.

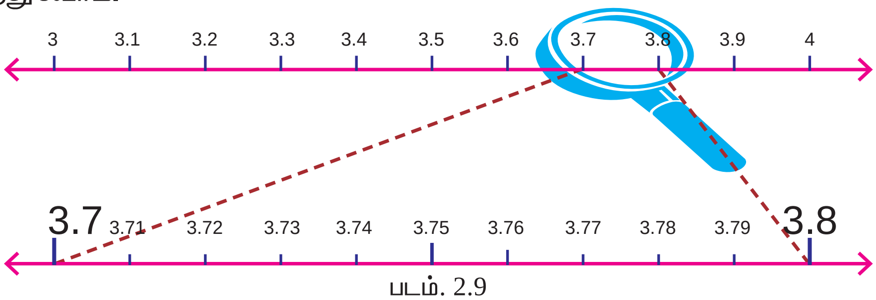
எண் கோட்டில் 3 மற்றும் 4 இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பகுதியை மிக அருகில் காண்போம்.



படம் . 2.8

3-க்கும் 4-க்கும் இடைப்பட்ட பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து, படம் 2.8-ல் காட்டியுள்ளவாறு குறிப்பிடுவோம். 3-ன் வலப்புறம் உள்ள முதல் குறியீடு 3.1, இரண்டாவது 3.2 என தொடர்ந்து குறிக்கப்பட்டுள்ளது. 3-க்கும் 4-க்கும் இடைப்பட்ட இக்குறியீடுகளை தெளிவாகக் காண உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்துவோம். இந்த உருப்பெருக்கம் படம் 2.8-ல் உள்ளவாறு இருக்கும்.

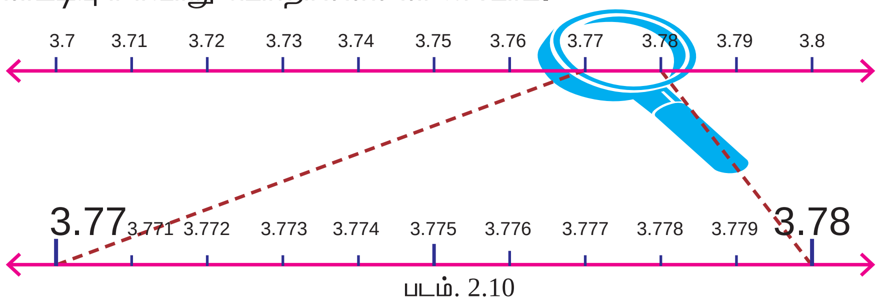
இப்பொழுது 3.776 ஆனது 3.7-க்கும் 3.8-க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம். எனவே நம்முடைய கவனத்தை 3.7 மற்றும் 3.8 இவற்றிற்கு இடைப்பட்டப் பகுதியின்(படம் 2.9) மேல் செலுத்துவோம்.



படம். 2.9

3.7 மற்றும் 3.8 இவற்றிற்கு இடைப்பட்டப் பகுதியை மீண்டும் 10 சமபாகங்களாகப் பிரிப்போம். முதல் குறியீடு 3.71,இரண்டாவது 3.72 என தொடர்ந்து குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. இக்குறியீடுகளை தெளிவாகக் காண, 3.7-க்கும் 3.8-க்கும் இடைப்பட்ட பகுதி படம் 2.9-ல் காட்டியுள்ளவாறு உருப்பெருக்கம் செய்யப்பட்டுள்ளது.

இப்போது 3.776 என்பது 3.77-க்கும் 3.78-க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம். ஆகவே, 3.77-க்கும் 3.78-க்கும் இடைப்பட்ட பகுதியை மீண்டும் 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து படம் 2.10-ல் காட்டியுள்ளவாறு பெரிதாக்கிக் காண்போம்.



படம். 2.10

முதல் குறியீடு 3.771, அடுத்த குறியீடு 3.772 எனத் தொடர்ந்து குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. 3.776 என்பது இக்குறியீட்டில் ஆறாவதாக இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

இவ்வாறு,உருப்பெருக்கும் கண்ணாடிமூலம் இருஎண்களின் இடைவெளியை பெரிதாக்கி எண்களை எண்கோட்டில் குறிக்கும் முறை தொடர் உருப்பெருக்க முறை (process of successive magnification) எனப்படும்.

ஆகவே, எண்கோட்டின் மீது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றுள்ள ஒரு மெய்யெண்ணின் நிலையை போதுமான அளவு தொடர் உருப்பெருக்கம் செய்து காணலாம்.

இப்போது, முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையுள்ள தசம விரிவினைக் கொண்ட ஒரு மெய்யெண்ணை எடுத்துக்கொண்டு எண் கோட்டின் மீது அதன் நிலையினைக் காண முற்படுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு **2.9**

$4.\overline{26}$ஐ எண் கோட்டின் மீது 4 தசம இடத்திருத்தமாக அதாவது, 4.2626 முடிய பெரிதாக்கிக் காண்க.

தீர்வு எண்கோட்டின் மீது $4.\overline{26}$-ன் நிலையை தொடர் உருப்பெருக்க முறையில் காண்போம். இம் முறையானது படம். 2.11-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

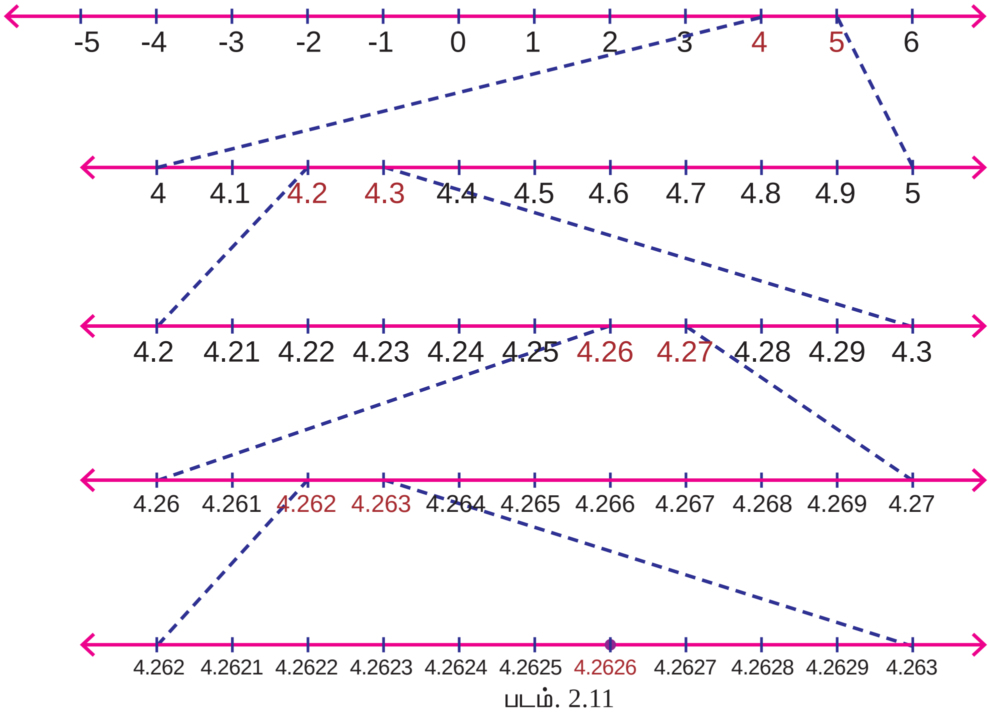
படி 1: $4.\overline{26}$ என்பது 4-க்கும் 5-க்கும் இடையில் இருப்பதைக்காண்கிறோம்.

படி 2: 4-க்கும் 5-க்கும் இடைப்பட்டப்பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப்பிரித்து, உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்தி $4.\overline{26}$ என்பது 4.2-க்கும் 4.3-க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

படி 3: 4.2-க்கும் 4.3-க்கும் இடைப்பட்டப்பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து, உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்தி, $4.\overline{26}$ என்பது 4.26-க்கும் 4.27-க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

படி 4: 4.26-க்கும் 4.27-க்கும் இடைப்பட்டப்பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்தி, $4.\overline{26}$ என்பது 4.262-க்கும் 4.263-க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

படி 5: 4.262-க்கும் 4.263-க்கும் இடைப்பட்டப்பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து, உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்தி, $4.\overline{26}$ என்பது 4.2625-க்கும் 4.2627- க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.



படம். 2.11

படத்திலிருந்து, $4.\overline{26}$ என்பது 4.262ஐ விட 4.263-க்கு நெருக்கமாக அமைந்துள்ளதைக் காண்கிறோம்.

இதேமுறையைப் பயன்டுத்தி எண் கோட்டின் மீது முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவினைக் கொண்ட ஒரு மெய்யெண்ணின் நிலையை தேவையான அளவு துல்லியமாகக் காணலாம்.

மேற்கண்ட விவாதங்களிலிருந்து, ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணையும் எண்கோட்டின் மீது ஒரு தனித்த புள்ளியால் குறிக்கலாம் என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம். மேலும் எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரே ஒரு மெய்யெண்ணை மட்டுமே குறிக்கும் எனவும் முடிவு செய்யலாம்.

பயிற்சி 2.4

1. தொடர் உருப்பெருக்க முறையைப் பயன்படுத்தி
   (i) எண் கோட்டின் மீது 3.456-ன் நிலையைக் காண்க.
   (ii) எண் கோட்டின் மீது $6.7\overline{3}$-ன் நிலையை 4 தசம இடத்திருத்தமாகக் காண்க.

2.4.3 மெய்யெண்களின் பண்புகள்

- a, b என்ற ஏதேனும் இரண்டு மெய்யெண்களுக்கு, $a = b$ அல்லது $a > b$ அல்லது $a < b$ ஆகும்.
- இரண்டு மெய்யெண்களின் கூடுதல், கழித்தல் மற்றும் பெருக்கல் மீண்டும் ஒரு மெய் எண்ணாகும்.
- ஒரு மெய்யெண்ணை, பூச்சியமல்லாத மெய்யெண்ணால் வகுக்கக் கிடைப்பது ஒரு மெய்யெண்ணாகும்.
- விகிதமுறு எண்களைப்போலவே மெய்யெண்களும் அடைப்புவிதி, சேர்ப்புவிதி, பரிமாற்று விதி, கூட்டல் மற்றும் பெருக்கலின் கீழ் பங்கீட்டு விதிகளை நிறைவு செய்கின்றன.
- ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் அதனுடைய எதிர்மறை மெய்யெண்ணைப் பெற்றுள்ளது. பூச்சியம் தனக்குத்தானே எதிர் மறையாகும். மேலும் பூச்சியம் என்பது குறைஎண்ணும் அல்ல மிகைஎண்ணும் அல்ல.

இரு விகிதமுறு எண்களின் கூடுதல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் (பூச்சியத்தால் வகுப்பதை தவிர) ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும். இருப்பினும், இரு விகிதமுறா எண்களின் கூடுதல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் சில நேரங்களில் விகிதமுறு எண்ணாக மாறும்.

விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்கள் தொடர்பான சில உண்மைகளைக் காண்போம்.

முக்கிய கருத்து
1. ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் கூடுதல் அல்லது கழித்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
2. ஒரு பூச்சியமற்ற விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் பெருக்கல் அல்லது வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
3. இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் கூடுதல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும் எனக் கூறமுடியாது. இது விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கலாம்.

குறிப்புரை

a ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் $\sqrt{b}$ ஒரு விகிமுறா எண் எனில்,

(i) $a+\sqrt{b}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (ii) $a-\sqrt{b}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

(iii) $a\sqrt{b}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (iv) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

(v) $\dfrac{\sqrt{b}}{a}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

எடுத்துக்காட்டாக, (i) $2+\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (ii) $2-\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

(iii) $2\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (iv) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

2.4.4 மெய்யெண்களின் வர்க்கமூலம்

$a>0$ ஒரு மெய்யெண் என்க. $\sqrt{a}=b$ என்பதின் பொருள் $b^2=a$ மற்றும் $b>0$ என்பதாகும்.

$2\times 2=4$ என்பதால் 2 என்பது 4-ன் ஒரு வர்க்க மூலமாகும். ஆனால் $(-2)\times(-2)=4$ என்பதால் -2 என்பதும் 4-ன் ஒரு வர்க்க மூலமாகும். இவ்விரண்டுக்கும் இடையே உள்ள குழப்பத்தைத் தவிர்க்க, $\sqrt{\ }$ என்ற குறியீடு முதன்மை அல்லது மிகை வர்க்க மூலத்தை குறிக்கிறது என வரையறுப்போம்.

இனி வர்க்க மூலம் தொடர்பான சில பயனுள்ள முற்றொருமைகளைக் குறிப்பிடுவோம்.

a, b என்பன மிகை மெய்யெண்கள் எனில்,	
1	$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$
2	$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
3	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$
4	$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$
5	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d})=\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$
6	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$

எடுத்துக்காட்டு 2.10

இரண்டு விகிதமுறா எண்களை, அவற்றின்

(i) கூடுதல் ஒரு விகிதமுறா எண்

(ii) கூடுதல் ஒரு விகிதமுறா எண் அல்ல

(iii) கழித்தல் ஒரு விகிதமுறா எண்

(iv) கழித்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் அல்ல

(v) பெருக்கல் ஒரு விகிதமுறா எண்

(vi) பெருக்கல் ஒரு விகிதமுறா எண் அல்ல

(vii) வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண்

(viii) வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் அல்ல

என்றிருக்குமாறு காண்க.

தீர்வு

(i) $2+\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{3}-2$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் கூடுதல் $2+\sqrt{3}+\sqrt{3}-2=2\sqrt{3}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(ii) $\sqrt{2}$ மற்றும் $-\sqrt{2}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் கூடுதல் $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(iii) $\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{2}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் கழித்தல் $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(iv) $5+\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{3}-5$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் கழித்தல் $(5+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-5)=10$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(v) $\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{5}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் பெருக்கல் $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(vi) $\sqrt{18}$ மற்றும் $\sqrt{2}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் பெருக்கல் $\sqrt{18}\times\sqrt{2}=\sqrt{36}=6$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(vii) $\sqrt{15}$ மற்றும் $\sqrt{3}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் வகுத்தல் $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{15}{3}}=\sqrt{5}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(viii) $\sqrt{75}$ மற்றும் $\sqrt{3}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் வகுத்தல் $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{75}{3}}=5$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

2.5 விகிதமுறா மூலங்கள் (Surds)

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ என்பன விகிதமுறா எண்கள் என்பதை நாமறிவோம். இவற்றை எந்தவொரு விகிதமுறு எண்ணின் வர்க்கங்களாகவும் எழுத முடியாது. $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{7}$ என்பன விகிதமுறு எண்களின் கனமூலங்கள். இவற்றை எந்தவொரு விகிதமுறு எண்ணின் கனங்களாகவும் எழுதமுடியாது. இவ்வகை விகிதமுறா எண்கள் விகிதமுறா மூலங்கள் (surds or radicals) எனப்படும்.

முக்கிய கருத்து **விகிதமுறா மூலங்கள்**

'a' ஒரு மிகை விகிதமுறு எண் மற்றும் n ஒரு மிகைமுழு என்க. $\sqrt[n]{a}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனில், $\sqrt[n]{a}$ என்பது விகிதமுறா மூலம் எனப்படும்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

ஒரு விகிதமுறா மூலத்தின் பொது வடிவம் $\sqrt[n]{a}$

$\sqrt{\ }$ என்பது *மூலக்குறியீடு*

n என்பது மூலத்தின் *வரிசை*

a என்பது *அடிமானம்* எனப்படும்.

வரிசை — $\sqrt[n]{a}$ — மூலக்குறியீடு

அடிமானம்

2.5.1 விகிதமுறா மூலத்தின் அடுக்குக்குறி வடிவம்

$\sqrt[n]{a}$ என்ற விகிதமுறா மூலத்தின் அடுக்குக்குறி வடிவம் $a^{\frac{1}{n}}$ ஆகும்.

நினைவு கூர்ந்து விடையளி ! $a^{\frac{1}{3}}$ மற்றும் a^3 இரண்டும் வெவ்வேறானவை ஏன் ?

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt[5]{8}$ என்பதன் அடுக்குக்குறிவடிவம் $(8)^{\frac{1}{5}}$ ஆகும்.

சில விகிதமுறா மூலங்களின் அடுக்குக்குறி வடிவம், வரிசை மற்றும் அடிமானம் ஆகியவை பின்வரும் அட்டவனையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

விகிதமுறா மூலம்	அடுக்குக்குறி வடிவம்	வரிசை	அடிமானம்
$\sqrt{5}$	$5^{\frac{1}{2}}$	2	5
$\sqrt[3]{14}$	$(14)^{\frac{1}{3}}$	3	14
$\sqrt[4]{7}$	$7^{\frac{1}{4}}$	4	7
$\sqrt{50}$	$(50)^{\frac{1}{2}}$	2	50
$\sqrt[5]{11}$	$(11)^{\frac{1}{5}}$	5	11

குறிப்புரை $\sqrt[n]{a}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா மூலம் எனில்

(i) a என்பது ஒரு மிகை விகிதமுறு எண்ணாகும்.

(ii) $\sqrt[n]{a}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

பின்வரும் அட்டவணையில் A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு நிரல்களிலும் உள்ள எண்கள் விகிதமுறா எண்களாகும்.

A	B
$\sqrt{5}$	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$
$\sqrt[3]{7}$	$\sqrt[3]{5+\sqrt{7}}$
$\sqrt[3]{100}$	$\sqrt[3]{10-\sqrt[3]{3}}$
$\sqrt{12}$	$\sqrt[4]{15+\sqrt{5}}$

மேற்கண்ட அட்டவணையில் A என்ற நிரலில் உள்ள எண்கள் விகித முறா மூலங்களாகும். B என்ற நிரலில் உள்ள எண்கள் விகிதமுறா எண்கள். ஆனால், விகிதமுறா மூலங்கள் அல்ல.

ஆகவே, ஒவ்வொரு விகிதமுறா மூலமும் விகிதமுறா எண்ணாகும், ஆனால், ஒவ்வொரு விகிதமுறா எண்ணும் ஒரு விகிதமுறா மூலமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

2.5.2 ஒரு விகிதமுறா மூலத்தை எளிய வடிவில்(Simplest Form) எழுதுதல்

ஒரு விகிதமுறா மூலத்தை அதன் எளிய வடிவமாக சுருக்கி எழுதமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{50}$ என்ற விகிதமுறா மூலத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = \sqrt{5^2}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

ஆகவே, $5\sqrt{2}$ என்பது $\sqrt{50}$ ன் எளிய வடிவமாகும்.

2.5.3 ஒத்த மற்றும் ஒவ்வா விகிதமுறா மூலங்கள் (Like and Unlike Surds)

எளிய வடிவில் உள்ள இரண்டு விகிதமுறா மூலங்களின் வரிசை மற்றும் அடிமானம் சமம் எனில், அவை ஒத்த விகிதமுறா மூலங்கள் (like surds) எனப்படும். அவ்வாறு இல்லையெனில், அவை ஒவ்வா விகிதமுறா மூலங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, -6\sqrt{5}$ என்பன ஒத்த விகிதமுறா மூலங்கள்.

(ii) $\sqrt{10}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[3]{81}$ என்பன ஒவ்வா விகிதமுறா மூலங்கள்.

2.5.4 முழுமையான விகிதமுறா மூலங்கள் (Pure Surds)

ஒரு விகிதமுறா மூலத்தின் விகிதமுறு எண் குணகம் அல்லது கெழு 1 எனில், அது முழுமையான விகிதமுறா மூலம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{12}, \sqrt{80}$ என்பன முழுமையான விகிதமுறா மூலங்களாகும்.

2.5.5 கலப்பு விகிதமுறா மூலங்கள் (Mixed Surds)

ஒரு விகிதமுறா மூலத்தின் குணகம் அல்லது கெழு 1-ஐத் தவிர வேறு விகிதமுறு எண்ணாக இருப்பின், அது கலப்பு விகிதமுறா மூலம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $2\sqrt{3}$, $5\sqrt[3]{5}$, $3\sqrt[4]{12}$ என்பன கலப்பு விகிதமுறா மூலங்களாகும்.

ஒரு கலப்பு விகிதமுறா மூலத்தை முழுமையான விகிதமுறா மூலமாக மாற்றலாம், ஆனால், அனைத்து முழுமையான விகிதமுறா மூலங்களையும் கலப்பு விகிதமுறா மூலங்களாக மாற்ற முடியாது.

(i) $\sqrt{80} = \sqrt{16\times 5} = 4\sqrt{5}$ (ii) $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2\times 2} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{18}$

(iii) $\sqrt{17}$ ஒரு முழுமையான விகிதமுறா மூலம். ஆனால், இதனை கலப்பு விகிதமுறா மூலமாக மாற்ற இயலாது.

மூலக்குறியீட்டு விதிகள்	
m, n என்பன மிகை முழுக்கள் மற்றும் a, b என்பன மிகை விகிதமுறு எண்கள் எனில்,	
(i) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = \sqrt[n]{a^n}$	(ii) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
(iii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	(iv) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(i) ஐப் பயன்படுத்தி $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\sqrt[3]{a^3} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$ எனப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.11

பின்வரும் விகிதமுறா மூலங்களை அடுக்குக்குறி வடிவில் எழுதுக.

(i) $\sqrt{7}$ (ii) $\sqrt[4]{8}$ (iii) $\sqrt[3]{6}$ (iv) $\sqrt[8]{12}$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறா மூலங்களை அடுக்குக் குறிவடிவில் பின்வருமாறு எழுதுகிறோம்.

(i) $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$ (ii) $\sqrt[4]{8} = 8^{\frac{1}{4}}$ (iii) $\sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}$ (iv) $\sqrt[8]{12} = (12)^{\frac{1}{8}}$

எடுத்துக்காட்டு 2.12

பின்வரும் விகிதமுறா மூலங்களை எளிய வடிவில் எழுதுக.

(i) $\sqrt[3]{32}$ (ii) $\sqrt{63}$ (iii) $\sqrt{243}$ (iv) $\sqrt[3]{256}$

தீர்வு

(i) $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8\times 4} = \sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$

(ii) $\sqrt{63} = \sqrt{9\times 7} = \sqrt{9}\times\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

(iii) $\sqrt{243} = \sqrt{81\times 3} = \sqrt{81}\times\sqrt{3} = \sqrt{9^2}\times\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

(iv) $\sqrt[3]{256} = \sqrt[3]{64\times 4} = \sqrt[3]{64}\times\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4^3}\times\sqrt[3]{4} = 4\sqrt[3]{4}$

எடுத்துக்காட்டு 2.13

பின்வரும் கலப்பு விகிதமுறா மூலங்களை முழுமையான விகிதமுறா மூலங்களாக எழுதுக.

(i) $16\sqrt{2}$ (ii) $3\sqrt[3]{2}$ (iii) $2\sqrt[4]{5}$ (iv) $6\sqrt{3}$

தீர்வு

(i) $16\sqrt{2} = \sqrt{16^2}\times\sqrt{2}$ $\quad (\because 16=\sqrt{16^2})$

$= \sqrt{16^2\times 2} = \sqrt{256\times 2} = \sqrt{512}$

(ii) $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3\times 2}$ $\quad (\because 3=\sqrt[3]{3^3})$

$= \sqrt[3]{27\times 2} = \sqrt[3]{54}$

(iii) $2\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{2^4\times 5}$ $\quad (\because 2=\sqrt[4]{2^4})$

$= \sqrt[4]{16\times 5} = \sqrt[4]{80}$

(iv) $6\sqrt{3} = \sqrt{6^2\times 3}$ $\quad (\because 6=\sqrt{6^2})$

$= \sqrt{36\times 3} = \sqrt{108}$

எடுத்துக்காட்டு 2.14

$\sqrt{32}$ என்பது விகிதமுறு எண்ணா அல்லது விகிதமுறா எண்ணா எனக் காண்க.

தீர்வு $\sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}$

4 ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

$\therefore 4\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண். அதாவது $\sqrt{32}$ ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.15

பின்வரும் எண்கள் விகிதமுறு எண்களா அல்லது விகிதமுறா எண்களா எனக் காண்க.

(i) $3+\sqrt{3}$ (ii) $(4+\sqrt{2})-(4-\sqrt{3})$ (iii) $\dfrac{\sqrt{18}}{2\sqrt{2}}$ (iv) $\sqrt{19}-(2+\sqrt{19})$

(v) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (vi) $\sqrt{12}\times\sqrt{3}$

தீர்வு (i) $3+\sqrt{3}$

3 ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண். எனவே, $3+\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

(ii) $(4+\sqrt{2})-(4-\sqrt{3})$

$= 4+\sqrt{2}-4+\sqrt{3} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(iii) $\dfrac{\sqrt{18}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{9\times 2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{9}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2}$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(iv) $\sqrt{19}-(2+\sqrt{19}) = \sqrt{19}-2-\sqrt{19} = -2$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(v) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ இங்கு 2 ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண். ஆகவே, $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

(vi) $\sqrt{12}\times\sqrt{3} = \sqrt{12\times 3} = \sqrt{36} = 6$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

2.6 விகிதமுறா மூலங்களின் மீதான நான்கு அடிப்படைச் செயல்கள்

2.6.1 விகிதமுறா மூலங்களின் கூட்டலும் கழித்தலும்

ஒத்த விகிதமுறா மூலங்களை கூட்டவும் கழிக்கவும் முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.16

சுருக்குக :

(i) $10\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{32}$

(ii) $\sqrt{48} - 3\sqrt{72} - \sqrt{27} + 5\sqrt{18}$

(iii) $\sqrt[3]{16} + 8\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128}$

தீர்வு

(i) $10\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{32}$

$$= 10\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{16\times 2}$$

$$= 10\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\times 4\times\sqrt{2}$$

$$= (10 - 2 + 16)\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

(ii) $\sqrt{48} - 3\sqrt{72} - \sqrt{27} + 5\sqrt{18}$

$$= \sqrt{16\times 3} - 3\sqrt{36\times 2} - \sqrt{9\times 3} + 5\sqrt{9\times 2}$$

$$= \sqrt{16}\sqrt{3} - 3\sqrt{36}\sqrt{2} - \sqrt{9}\sqrt{3} + 5\sqrt{9}\sqrt{2}$$

$$= 4\sqrt{3} - 18\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 15\sqrt{2}$$

$$= (-18 + 15)\sqrt{2} + (4 - 3)\sqrt{3} = -3\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

(iii) $\sqrt[3]{16} + 8\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128}$

$$= \sqrt[3]{8\times 2} + 8\sqrt[3]{27\times 2} - \sqrt[3]{64\times 2}$$

$$= \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2} + 8\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{64}\sqrt[3]{2}$$

$$= 2\sqrt[3]{2} + 8\times 3\times\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2}$$

$$= 2\sqrt[3]{2} + 24\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2}$$

$$= (2 + 24 - 4)\sqrt[3]{2} = 22\sqrt[3]{2}$$

2.6.2 விகிதமுறா எண்களின் பெருக்கல்

இரண்டு ஒத்த விகிதமுறா மூலங்களின் பெருக்கற்பலனைக் காண பின்வரும் விதியைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.17

சுருக்குக : (i) $\sqrt[3]{13} \times \sqrt[3]{5}$ (ii) $\sqrt[4]{32} \times \sqrt[4]{8}$

தீர்வு

(i) $\sqrt[3]{13} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{13 \times 5} = \sqrt[3]{65}$

(ii) $\sqrt[4]{32} \times \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{32 \times 8}$

$= \sqrt[4]{2^5 \times 2^3} = \sqrt[4]{2^8} = \sqrt[4]{2^4 \times 2^4} = 2 \times 2 = 4$

2.6.3 விகிதமுறா மூலங்களின் வகுத்தல்

ஒத்த விகிதமுறா மூலங்களின் வகுத்தலை பின்வரும் விதியைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.18

சுருக்குக : (i) $15\sqrt{54} \div 3\sqrt{6}$ (ii) $\sqrt[3]{128} \div \sqrt[3]{64}$

தீர்வு

(i) $15\sqrt{54} \div 3\sqrt{6}$

$$= \frac{15\sqrt{54}}{3\sqrt{6}} = 5\sqrt{\frac{54}{6}} = 5\sqrt{9} = \quad 5 \times 3 = 15$$

(ii) $\sqrt[3]{128} \div \sqrt[3]{64}$

$$= \frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\frac{128}{64}} = \sqrt[3]{2}$$

குறிப்பு விகிதமுறா மூலங்களின் வரிசைகள் வெவ்வேறாக இருப்பின், அவற்றை ஒரேவரிசை கொண்ட விகிமுறா மூலங்களாக மாற்றிய பின்னர் பெருக்கல் அல்லது வகுத்தல் செயலை மேற்கொள்ள வேண்டும்.

முடிவு: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{a^{\frac{m}{n}}}$

எடுத்துக்காட்டாக, (i) $\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^{\frac{12}{3}}} = \sqrt[12]{5^4}$ (ii) $\sqrt[4]{11} = \sqrt[8]{11^{\frac{8}{4}}} = \sqrt[8]{11^2}$

2.6.4 விகிதமுறா மூலங்களை ஒப்பிடுதல்

ஒரே வரிசை கொண்ட விகிமுறா எண்களை ஒப்பிட முடியும். ஒரே வரிசை கொண்ட விகிதமுறா எண்களில் மிகப்பெரிய அடிமானம் கொண்ட விகிதமுறா எண் பெரியது ஆகும்.

விகிதமுறா எண்களின் வரிசைகள் சமமில்லை எனில், அவற்றின் வரிசைகளை சமப்படுத்திய பிறகு அடிமானங்களை ஒப்பிட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.19

$\sqrt{3}\,,\ \sqrt[3]{4}\,,\ \sqrt[4]{5}$ என்ற விகிதமுறா எண்களின் வரிசைகளை சமமாக்குக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறா எண்களின் வரிசைகள் 2, 3 மற்றும் 4.

2, 3 மற்றும் 4-ன் மீ. சி. ம 12. எனவே, ஒவ்வொரு விகிதமுறா எண்ணையும் வரிசை 12 கொண்ட விகிதமுறா எண்ணாக மாற்றுவோம்.

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.20

எது பெரியது ? $\sqrt[4]{5}$ அல்லது $\sqrt[3]{4}$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறா எண்களின் வரிசைகள் 3 மற்றும் 4.

கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறா எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் சம வரிசை கொண்ட விகிதமுறா எண்களாக மாற்ற வேண்டும்.

3 மற்றும் 4 இவற்றின் மீ.சி.ம 12. எனவே, ஒவ்வொரு விகிதமுறா எண்ணையும் வரிசை 12 கொண்ட விகிதமுறா எண்ணாக மாற்றுவோம்.

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$

$$\therefore\ \sqrt[12]{256} > \sqrt[12]{125} \qquad \Rightarrow \sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.21

$\sqrt[3]{2}\,,\ \sqrt[4]{4}\,,\ \sqrt{3}$ என்ற விகிதமுறா எண்களை

(i) ஏறுவரிசையில் எழுதுக (ii) இறங்கு வரிசையில் எழுதுக.

தீர்வு $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{4}$ and $\sqrt{3}$ என்ற விகிதமுறா எண்களின் வரிசைகள் முறையே 3, 4 மற்றும் 2.

2, 3 மற்றும் 4-ன் மீ.சி.ம 12.

எனவே, ஒவ்வொரு விகிதமுறா எண்ணையும் வரிசை 12 கொண்ட விகிதமுறா எண்ணாக மாற்றுவோம்.

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$

$\therefore$ ஏறுவரிசை: $\sqrt[3]{2}\,,\ \sqrt[4]{4}\,,\ \sqrt{3}$ இறங்குவரிசை: $\sqrt{3}\,,\ \sqrt[4]{4}\,,\ \sqrt[3]{2}$.

பயிற்சி 2.5

1. பின்வருவனவற்றுள் எவை விகிதமுறா மூலங்கள் மற்றும் எவை விகிதமுறா மூலங்கள் அல்ல என்பதைக் காரணத்துடன் கூறுக.

   (i) $\sqrt{8}\times\sqrt{6}$ (ii) $\sqrt{90}$ (iii) $\sqrt{180}\times\sqrt{5}$ (iv) $4\sqrt{5}\div\sqrt{8}$ (v) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}$

2. சுருக்குக.

   (i) $(10+\sqrt{3})(2+\sqrt{5})$ (ii) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$
   (iii) $(\sqrt{13}-\sqrt{2})(\sqrt{13}+\sqrt{2})$ (iv) $(8+\sqrt{3})(8-\sqrt{3})$

3. பின்வருவனவற்றை சுருக்குக.

   (i) $5\sqrt{75}+8\sqrt{108}-\frac{1}{2}\sqrt{48}$ (ii) $7\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}$
   (iii) $4\sqrt{72}-\sqrt{50}-7\sqrt{128}$ (iv) $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{625}-4\sqrt[3]{320}$

4. பின்வரும் விகிதமுறா மூலங்களை எளிய வடிவில் எழுதுக.

   (i) $\sqrt[3]{108}$ (ii) $\sqrt{98}$ (iii) $\sqrt{192}$ (iv) $\sqrt[3]{625}$

5. பின்வருவனவற்றை முழுமையான விகிதமுறா மூலங்களாக எழுதுக.

   (i) $6\sqrt{5}$ (ii) $5\sqrt[3]{4}$ (iii) $3\sqrt[4]{5}$ (iv) $\frac{3}{4}\sqrt{8}$

6. பின்வருவனவற்றைச் சுருக்குக.

   (i) $\sqrt{5}\times\sqrt{18}$ (ii) $\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{8}$ (iii) $\sqrt[4]{8}\times\sqrt[4]{12}$ (iv) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{5}$
   (v) $3\sqrt{35}\div2\sqrt{7}$ (vi) $\sqrt[4]{48}\div\sqrt[8]{72}$

7. பின்வருவனவற்றில் எது பெரியது?

   (i) $\sqrt{2}$ அல்லது $\sqrt[3]{3}$ (ii) $\sqrt[3]{3}$ அல்லது $\sqrt[4]{4}$ (iii) $\sqrt{3}$ அல்லது $\sqrt[4]{10}$

8. இறங்குவரிசை மற்றும் ஏறுவரிசையில் எழுதுக.

   (i) $\sqrt[4]{5},\sqrt{3},\sqrt[3]{4}$ (ii) $\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4},\sqrt[4]{4}$ (iii) $\sqrt[3]{2},\sqrt[9]{4},\sqrt[6]{3}$

2.7 விகிதமுறா மூலங்களின் பகுதியை விகிதப்படுத்துதல்

விகிதப்படுத்தும் காரணி

ஒரு கோவையின் பகுதியில் உள்ள உறுப்பு வர்க்கமூல அல்லது மூலக்குறியீட்டுக்குள் உள்ள மிகை எண்ணாக இருப்பின் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக்கி சமமான கோவையாக மாற்றும் முறை, பகுதியை விகிதப்படுத்தும் முறை எனப்படும்.

இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் பெருக்கல் ஒரு விகிதமுறு எண் எனில், ஒன்று மற்றொன்றின் விகிதப்படுத்தும் காரணி (rationalizing factor) ஆகும்.

குறிப்புரை a, b என்பன முழுக்கள் மற்றும் x, y என்பன மிகை முழுக்கள் என்க. பிறகு

(i) $(a+\sqrt{x})$ மற்றும் $(a-\sqrt{x})$ என்பன ஒன்றுக் கொன்று விகிதப்படுத்தும் காரணிகளாகும்.

(ii) $(a+b\sqrt{x})$ மற்றும் $(a-b\sqrt{x})$ என்பன ஒன்றுக் கொன்று விகிதப்படுத்தும் காரணிகளாகும்.

(iii) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ மற்றும் $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ என்பன ஒன்றுக் கொன்று விகிதப்படுத்தும் காரணிகளாகும்.

(iv) $a+\sqrt{b}$ என்பது $a-\sqrt{b}$-ன் இணை அல்லது துணையிய (conjugate) எண் எனவும் அழைக்கப்படும். இதேபோல் $a-\sqrt{b}$ ன் இணை எண் $a+\sqrt{b}$ ஆகும்.

(v) ஒரு எண்ணின் பகுதியை விகிதப்படுத்த, அவ்வெண்ணின் தொகுதி மற்றும் பகுதிகளை விகிதப்படுத்தும் காரணியால் பெருக்க வேண்டும்.

(vi) ஒரு விகிதமுறா மூலத்திற்கு ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விகிதப்படுத்தும் காரணிகள் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.22

$\frac{2}{\sqrt{3}}$-ன் பகுதியை விகிதப்படுத்துக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் பகுதி மற்றும் தொகுதியை $\sqrt{3}$ ஆல் பெருக்க

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.23

$\frac{1}{5+\sqrt{3}}$-ன் பகுதியை விகிதப்படுத்துக.

தீர்வு பகுதியில் உள்ள எண் $5+\sqrt{3}$. இதன் இணை எண் அல்லது விகிதப்படுத்தும் காரணி $5-\sqrt{3}$.

$$\frac{1}{5+\sqrt{3}} = \frac{1}{5+\sqrt{3}} \times \frac{5-\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5-\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5-\sqrt{3}}{25-3} = \frac{5-\sqrt{3}}{22}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.24

$\frac{1}{8-2\sqrt{5}}$-ன் பகுதியை விகிதப்படுத்தி சுருக்குக.

தீர்வு பகுதியில் உள்ள எண் $8-2\sqrt{5}$. எனவே, இதன் விகிதப்படுத்தும் காரணி $8+2\sqrt{5}$ ஆகும்.

$$\frac{1}{8-2\sqrt{5}} = \frac{1}{8-2\sqrt{5}} \times \frac{8+2\sqrt{5}}{8+2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{8+2\sqrt{5}}{8^2-(2\sqrt{5})^2} = \frac{8+2\sqrt{5}}{64-20}$$

$$= \frac{8+2\sqrt{5}}{44} = \frac{2(4+\sqrt{5})}{44} = \frac{4+\sqrt{5}}{22}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.25

$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ -ன் பகுதியை விகிதப்படுத்தி சுருக்குக.

தீர்வு பகுதியில் உள்ள எண் $\sqrt{3}+\sqrt{5}$. எனவே, இதன் விகிதப்படுத்தும் காரணி $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ ஆகும்.

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} \quad = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2} \qquad = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.26

$\dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}+\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1} = a+b\sqrt{7}$ எனில், a மற்றும் b இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு $$\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}+\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}\times\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}-1}+\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}\times\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{7}-1)^2}{(\sqrt{7})^2-1}+\frac{(\sqrt{7}+1)^2}{(\sqrt{7})^2-1}$$

$$= \frac{7+1-2\sqrt{7}}{7-1}+\frac{7+1+2\sqrt{7}}{7-1}$$

$$= \frac{8-2\sqrt{7}}{6}+\frac{8+2\sqrt{7}}{6}$$

$$= \frac{8-2\sqrt{7}+8+2\sqrt{7}}{6}$$

$$= \frac{16}{6} = \frac{8}{3}+0(\sqrt{7})$$

$$\therefore \frac{8}{3}+0(\sqrt{7}) = a+b\sqrt{7} \implies a = \frac{8}{3},\ b = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.27

$x = 1+\sqrt{2}$ எனில், $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $$x = 1+\sqrt{2}$$

$$\implies \frac{1}{x} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{2}}\times\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} \quad = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} \quad = -(1-\sqrt{2})$$

$$\therefore\ x - \frac{1}{x} = (1+\sqrt{2}) - \{-(1-\sqrt{2})\}$$

$$= 1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2} \ = 2$$

எனவே, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2^2 = 4.$

பயிற்சி 2.6

1. பின்வருவனவற்றின் விகிதப்படுத்தும் காரணிகளைக் காண்க.

(i) $3\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{7}$ (iii) $\sqrt{75}$ (iv) $2\sqrt[3]{5}$

(v) $5-4\sqrt{3}$ (vi) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (vii) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (viii) $2+\sqrt{3}$

2. பின்வருவனவற்றின் பகுதிகளை விகிதப்படுத்துக.

(i) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{12}}$ (iv) $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$ (v) $\frac{3\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{9}}$

3. பகுதியை விகிதப்படுத்தி சுருக்குக.

(i) $\frac{1}{11+\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{1}{9+3\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{13}}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ (v) $\frac{3-\sqrt{3}}{2+5\sqrt{3}}$

4. $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{10} \approx 3.162$ எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளை 3 தசம இடத்திருத்தமாகக் காண்க.

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ (iv) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

(v) $\frac{3-\sqrt{5}}{3+2\sqrt{5}}$ (vi) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ (vii) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ (viii) $\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{5}}$

5. $\frac{5+\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}} = a + b\sqrt{6}$ எனில், a மற்றும் b இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

6. $\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4-2\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$ எனில், a மற்றும் b இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

7. $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = a + b\sqrt{5}$ எனில், a மற்றும் b இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

8. $\frac{4+\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}} - \frac{4-\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}} = a + b\sqrt{5}$ எனில், a மற்றும் b இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

9. $x = 2+\sqrt{3}$ எனில், $x^2 + \frac{1}{x^2}$ -ன் மதிப்புக் காண்க.

10. $x = \sqrt{3}+1$ எனில், $\left(x - \frac{2}{x}\right)^2$-ன் மதிப்புக் காண்க.

2.8 வகுத்தல் விதிமுறை (Division Algorithm)

ஒரு கணக்கின் தீர்வு காண பயன்படும் நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான படிகள் விதிமுறை அல்லது வழிமுறை (algorithm) எனப்படும். இப்பாடப்பகுதியில் வகுத்தல் விதிமுறை எனப்படும் முழுக்களின் மிக முக்கியமான பண்பினைக் காணலாம்.

ஒரு முழுவை பூச்சியமற்ற மற்றொரு முழுவால் வகுக்கும் போது, ஒரு முழுவை ஈவாகவும் மற்றொரு முழுவை மீதியாகவும் பெறுகிறோம் என்பதை முன் வகுப்புகளில் அறிந்துள்ளோம். எனவே,

$$\text{பின்னம்} = \text{ஈவு} + \frac{\text{மீதி}}{\text{வகுஎண்}}$$

எடுத்துக்காட்டாக,
$$\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} \qquad (1)$$

இந்த வகுத்தலை, வகுத்தல் செயலை கணக்கில் கொள்ளாமல் முழுக்களை உறுப்புகளாகக் கொண்டு பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$13 = 5(2) + 3$

இக்கோவையானது, (1)ஐ வகு எண் 5ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் கிடைக்கிறது. இம்மாதிரி எழுதப்படும் முழுக்களின் வகுத்தலை வகுத்தல் விதி முறை (Division Algorithm) என்கிறோம்.

> a மற்றும் b என்பன ஏதேனும் இரண்டு மிகை முழுக்கள் எனில், $a = bq + r$, $0 \le r < b$ என்றவாறு q மற்றும் r என்ற இரண்டு குறையற்ற முழுக்கள் இருக்கும்.

மேற்கண்ட கூற்றில் q அல்லது r பூச்சியமாகவும் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.28

வகுத்தல் விதி முறையைப் பயன்படுத்தி, பின்வரும் சோடிகளின் ஈவு மற்றும் மீதிகாண்க.

(i) 19, 5 (ii) 3, 13 (iii) 30, 6

தீர்வு

(i) 19, 5

கொடுக்கப்பட்ட சோடியை $a = bq + r$, $0 \le r < b$ வடிவத்தில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$19 = 5(3) + 4$ [19ஐ 5ஆல் வகுக்க ஈவு 3, மீதி 4 கிடைக்கிறது]

$\therefore$ ஈவு = 3; மீதி = 4

(ii) 3, 13

கொடுக்கப்பட்ட சோடியை $a = bq + r$, $0 \le r < b$ வடிவத்தில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$3 = 13(0) + 3$

$\therefore$ ஈவு = 0; மீதி = 3

(iii) 30, 6

கொடுக்கப்பட்ட சோடியை 30, 6ஐ $a = bq + r,\ 0 \le r < b$ வடிவத்தில் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

30 = 6(5) + 0 [30ஐ 6ஆல் வகுக்க ஈவு 5, மீதி 0 கிடைக்கிறது]

$\therefore$ ஈவு = 5; மீதி = 0

பயிற்சி 2.7

1. வகுத்தல் விதிமுறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் சோடிகளின் ஈவு மற்றும் மீதி காண்க.

(i) 10, 3 (ii) 5, 12 (iii) 27, 3

நினைவில் கொள்க

- $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ என்ற வடிவில் உள்ள எண்ணின் தசம விரிவானது முடிவு பெறும் எனில், $\frac{p}{q}$ -ன் தசம விரிவு முடிவுறு தசமவிரிவு (Terminating decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறு தசம விரிவினைக்கொண்ட எண் முடிவுறு தசம எண் எனப்படும்.
- $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ என்ற எண்ணின் தசம விரிவு காணும் போது எந்நிலையிலும் மீதி பூச்சியமாகவில்லை எனில், ஈவில் மீண்டும் மீண்டும் வரும் இலக்கங்களின் தொகுதி கிடைக்கும். இந்நிலையில் $\frac{p}{q}$-ன் தசம விரிவு முடிவுறா சுழல் தசம விரிவு அல்லது முடிவுறா மீள்வரு தசம விரிவு (Non-terminating and recurring decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறா சுழல் தசம விரிவினைக் கொண்ட எண் முடிவுறா சுழல் தசம எண் எனப்படும்.
- ஒரு விகிதமுறு எண்ணினை முடிவுறு தசம விரிவாகவோ அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவாகவோ குறிப்பிடலாம்.
- $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ வடிவில் உள்ள விகிதமுறு எண்ணை $\frac{p}{2^m \times 5^n}$, ($p \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $m, n \in \mathbb{W}$) என்ற வடிவில் எழுத முடியுமானால், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறு தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும். அவ்வாறில்லையெனில், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறா சுழல் தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும்.
- முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவினை கொண்ட எண் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும். எனவே, ஒரு விகிதமுறா எண்ணை $\frac{p}{q}$, (இங்கு p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$) என்ற வடிவில் எழுதமுடியாது.
- மெய்யெண்களின் கணமானது விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் சேர்ப்புக் கணமாகும்.

- ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கும்.
- ஒருமெய்யெண் விகிதமுறு எண் அல்ல எனில், அது ஒரு விகிமுறா எண்ணாகும்.
- ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் கூடுதல் அல்லது கழித்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
- ஒரு பூச்சியமற்ற விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் பெருக்கல் அல்லது வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
- இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் கூடுதல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும் எனக் கூறமுடியாது. இது விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கலாம்.
- 'a' ஒரு மிகை விகிதமுறு எண் மற்றும் n ஒரு மிகைமுழு என்க. $\sqrt[n]{a}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனில், $\sqrt[n]{a}$ என்பது விகிதமுறா மூலம் எனப்படும்.
- m, n என்பன மிகை முழுக்கள் மற்றும் a, b என்பன மிகை விகிதமுறு எண்கள் எனில்

  (i) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = \sqrt[n]{a^n}$ (ii) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

  (iii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ (iv) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- ஒரு கோவையின் பகுதியில் உள்ள உறுப்பு வர்க்கமூல அல்லது மூலக்குறியீட்டுக்குள் உள்ள மிகை எண்ணாக இருப்பின் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக்கி சமமான கோவையாக மாற்றும் முறை, பகுதியை விகிதப்படுத்தும் முறை எனப்படும்.
- இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் பெருக்கல் ஒரு விகிதமுறு எண் எனில், ஒன்று மற்றொன்றின் விகிதப்படுத்தும் காரணி (rationalizing factor) ஆகும்.
- a மற்றும் b என்பன ஏதேனும் இரண்டு மிகை முழுக்கள் எனில், $a = bq + r,\ 0 \le r < b$ என்றவாறு q மற்றும் r என்ற இரண்டு குறையற்ற முழுக்கள் இருக்கும்.

3 மெய்யெண்கள் மீதான அறிவியல் குறியீடுகள் மற்றும் மடக்கைகள்

"Seeing there is nothing that is so troublesome to mathematical practice, nor that doth more molest and hinder calculators, than the multiplications, divisions, square and cubical extractions of great numbers....I began therefore to consider in my mind by what certain and ready art I might remove those hindrances"

- JOHN NAPIER

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- அறிவியல் குறியீடு முறையில் எண்களை குறித்தல்.
- அடுக்குக்குறி அமைப்பினையும் மடக்கை அமைப்பினையும் ஒன்றை மற்றொன்றாக மாற்றுதல்.
- மடக்கை விதிகளைப் புரிந்துக் கொள்ளுதல்.
- மடக்கை அட்டவணை மற்றும் மடக்கை விதிகளைப் பயன்படுத்துதல்.

ஜான் நேப்பியர்
(1550 - 1617)

ஜான் நேப்பியர் (*John Napier*) 1550-ல் மெர்சிஸ்டான் டவர் எனும் இடத்தில் பிறந்தார். இது தற்போது அவர் பெயரிலேயே அமைந்துள்ள நேப்பியர் பல்கலைக் கழகத்தின் மெர்சிஸ்டான் வளாகத்தின் மையப்பகுதியில் உள்ளது. மடக்கையைக் கண்டுபிடித்த ஜான்நேப்பியர் கணிதத்தைப் பொழுதுபோக்கிற்காக ஆராய்ந்தவர். ஆர்க்கிமிடிசிலிருந்து தற்போதைய கணிதவல்லுநர்கள் நியூட்டன் மற்றும் ஐன்ஸ்டின் வரிசையில் ஜான் நேப்பியரும் இடம் பெறுகிறார்.

3.1 அறிவியல் குறியீடு (*Scientific Notation*)

மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச்சிறிய எண்களைக் கையாளும் போது அறிவியல் அறிஞர்கள், பொறியாளர்கள் மற்றும் தொழில் வல்லுநர்கள் ஆகியோர் அறிவியல் குறியீட்டினைப் பயன்படுத்துகின்றனர். ஒளியின் வேகம் வினாடிக்கு **29,900,000,000** செ.மீ., பூமியிலிருந்து சூரியனுக்குள்ள தூரம் **92,900,000** மைல்கள், எலக்ட்ரானுடைய எடை **0.000549** அணு எடை அலகுகள். இவ்வாறான எண்களைச் சுருக்கமான முறையில் குறிப்பிடலாம். இதனை அறிவியல் குறியீடு என்பர். இதன் மூலம் பூச்சியங்களை அதிக எண்ணிக்கையில் எழுதுதல் மற்றும் இடமாறுப் பிழைகளைத் தவிர்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$29,900,000,000 = 299 \times 10^{8} = 2.99 \times 10^{10}$$

$$92,900,000 = 929 \times 10^{5} = 9.29 \times 10^{7}$$

$$0 \cdot 000549 = \frac{549}{1000000} = \frac{5.49}{10000}$$

$$= 5.49 \times 10^{-4}$$

அதாவது, மிகப்பெரிய அல்லது மிகச்சிறிய எண்ணை ஒரு தசம எண் $1 \le a < 10$ மற்றும் 10-ன் முழு அடுக்கு ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனாக எழுதலாம்.

முக்கிய கருத்து **அறிவியல்குறியீடு**

ஒரு எண் N ஐ அறிவியல் குறியீட்டில் 1-லிருந்து 10-க்குள் உள்ள தசம எண் மற்றும் 10-ன் முழு அடுக்கு ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனாக எழுதலாம்.

அதாவது, $N = a \times 10^n$, இங்கு $1 \le a < 10$ மற்றும் n ஒரு முழு.

எண்களை தசமக்குறியீட்டிலிருந்து அறிவியல் குறியீட்டில் மாற்ற அடுக்குக்குறி விதிகள் அடிப்படையாய் அமைகிறது. m, n என்பன இயல் எண்கள் மற்றும் a மெய்யெண் என்க.

அடுக்குக்குறி விதிகள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்படுகின்றன.

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (பெருக்கல் விதி)

(ii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (வகுத்தல் விதி)

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (அடுக்கு விதி)

(iv) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ (சேர்க்கை விதி)

$a \neq 0$ -க்கு $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ எனவும் $a^0 = 1$ எனவும் நாம் வரையறுக்கிறோம்.

3.1.1 ஒரு எண்ணை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுதல்

ஒரு எண்ணை அறிவியல் குறியீட்டில் மாற்றுவதற்கான படிகள் பின்வருமாறு.

படி 1: தசமப்புள்ளியை அதன் இடதுபக்க வாக்கில் பூச்சியமற்ற ஒரே ஒரு இலக்கம் உள்ளவாறு நகர்த்து.

படி 2: பழைய மற்றும் புதிய தசமப்புள்ளிக்கு இடையே உள்ள இலக்கங்களை எண்ணுக. இது 10-ன் அடுக்கு n ஐ குறிக்கும்.

படி 3: தசமப்புள்ளி இடதுபுறம் மாறினால் அடுக்கு n ஆனது மிகை எண், தசமப்புள்ளி வலதுபுறம் மாறினால் அடுக்கு n ஆனது குறை எண்.

எடுத்துக்காட்டு 3.1

9781 ஐ அறிவியல் குறியீட்டில் குறிப்பிடுக.

தீர்வு பொதுவாக முழுக்களை எழுதும் போது தசமப்புள்ளி குறிப்பதில்லை.

9 7 8 1 .

3 2 1

தசமப்புள்ளி இடதுபுறம் மூன்று இடங்கள் பழைய நிலையிலிருந்து நகர்கிறது. எனவே 10-ன் அடுக்கு 3 ஆகும்.

$$\therefore\ 9781 = 9.781 \times 10^3$$

எடுத்துக்காட்டு 3.2

$0 \cdot 000432078$ ஐ அறிவியல் குறியீட்டில் குறிப்பிடுக.

தீர்வு $0\ .\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 0\ \ 7\ \ 8$

1 2 3 4

தசமப்புள்ளி வலதுபுறம் 4 இடங்கள் பழைய நிலையிலிருந்து நகர்கிறது. எனவே 10-ன் அடுக்கு –4 ஆகும்.

$\therefore\ 0.000432078 = 4.32078 \times 10^{-4}$

குறிப்புரை ஒரு எண்ணை அறிவியல் குறியீட்டில் மாற்றி எழுதும் போது, கொடுக்கப்பட்ட எண்ணில் உள்ள தசமப்புள்ளியினை இடதுபக்க வாக்கில் p இடங்கள் நகர்த்தினால் அதை ஈடுசெய்ய 10^{p} ஆல் பெருக்குகிறோம். அதேபோன்று, தசமப்புள்ளியினை வலதுபக்க வாக்கில் r இடங்கள் நகர்த்தினால் அதை ஈடு செய்ய 10^{-r} ஆல் பெருக்குகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.3

பின்வரும் எண்களை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக.

(i) 9345 (ii) 205852 (iii) 3449098.96

(iv) 0.0063 (v) 0.00008035 (vi) 0.000108

தீர்வு

(i) $9345 = 9\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ . = 9.345 \times 10^{3}$, $n = 3$ ஏனெனில், தசமப்புள்ளி இடப்புறம் 3 இடங்கள் நகர்கிறது.

3 2 1

(ii) $205852 = 2\ \ 0\ \ 5\ \ 8\ \ 5\ \ 2\ . = 2.05852 \times 10^{5}$, $n = 5$ ஏனெனில், தசமப்புள்ளி இடப்புறம் 5 இடங்கள் நகர்கிறது.

5 4 3 2 1

(iii) $3449098.96 = 3\ \ 4\ \ 4\ \ 9\ \ 0\ \ 9\ \ 8\ .\ 9\ \ 6 = 3.44909896 \times 10^{6}$, $n = 6$ ஏனெனில், தசமப்புள்ளி இடப்புறம் 6 இடங்கள் நகர்கிறது.

6 5 4 3 2 1

(iv) $0.0063 = 0\ .\ 0\ \ 0\ \ 6\ \ 3 = 6.3 \times 10^{-3}$, $n = -3$ ஏனெனில், தசமப்புள்ளி வலப்புறம் 3 இடங்கள் நகர்கிறது.

1 2 3

(v) $0.00008035 = 0\ .\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 8\ \ 0\ \ 3\ \ 5 = 8.035 \times 10^{-5}$, $n = -5$ ஏனெனில், தசமப்புள்ளி வலப்புறம் 5 இடங்கள் நகர்கிறது.

1 2 3 4 5

(vi) $0.000108 = 0\ .\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 8 = 1.08 \times 10^{-4}$, $n = -4$ ஏனெனில், தசமப்புள்ளி வலப்புறம் 4 இடங்கள் நகர்கிறது.

1 2 3 4

3.2 அறிவியல் குறியீட்டை தசமக்குறியீட்டில் மாற்றுதல்

அறிவியல் குறியீட்டில் உள்ள எண்களை தசம எண்கள் வடிவத்தில் அடிக்கடி குறிக்க வேண்டியதாகிறது. அறிவியல் குறியீட்டு எண்களை தசம எண்களாக மாற்றுவதற்கான படிகள் பின்வருமாறு.

படி 1: தசம எண்ணை எழுதுக.

படி 2: தசமப்புள்ளியை 10-ன் அடுக்கில் உள்ள எண்ணிற்கு ஏற்ப நகர்த்து. மிகை எனில் வலப்புறமும், குறை எனில் இடப்புறமும் நகர்த்து. தேவை எனில் பூச்சியங்களை சேர்க்கவும்.

படி3: எண்களை தசம வடிவில் எழுதுக.

எடுத்துக்காட்டு 3.4

பின்வரும் எண்களை தசம வடிவில் எழுதுக.

(i) 5.236×10^{5} (ii) 1.72×10^{9} (iii) 6.415×10^{-6} (iv) 9.36×10^{-9}

தீர்வு

(i) 5.236

$5.236\times10^{5} = 523600$

5 . 2 3 6 0 0
1 2 3 4 5

(ii) 1.72

$1.72\times10^{9} = 1720000000$

1 . 7 2 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 4 5 6 7 8 9

(iii) 6.415

$6.415\times10^{-6} = 0.000006415$

0 0 0 0 0 6 . 4 1 5
6 5 4 3 2 1

(iv) 9.36

$9.36\times10^{-9} = 0.00000000936$

0 0 0 0 0 0 0 0 9 . 3 6
9 8 7 6 5 4 3 2 1

3.2.1 அறிவியல் குறியீட்டில் பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல்

மிகப்பெரிய (googolplex)அல்லது மிகச்சிறிய எண்களின் பெருக்கல் அல்லது வகுத்தலை அறிவியல் குறியீட்டில் எளிதாக செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.5

பின்வருவனவற்றை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக.

(i) $(4000000)^{3}$ (ii) $(5000)^{4}\times(200)^{3}$

(iii) $(0.00003)^{5}$ (iv) $(2000)^{2}\div(0.0001)^{4}$

தீர்வு

(i) முதலில் எண்களை (அடைப்புக் குறிக்குள் உள்ளதை) அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக.

$$4000000 = 4.0\times10^{6}$$

இப்போது, இருபுறமும் அடுக்கு 3-க்கு உயர்த்த கிடைப்பது,

$$\therefore\ (4000000)^3 = (4.0\times10^6)^3 = (4.0)^3\times(10^6)^3$$
$$= 64\times10^{18} \quad = 6.4\times10^1\times10^{18} = 6.4\times10^{19}$$

(ii) அறிவியல் குறியீட்டில்,

$5000 = 5.0\times10^3$ மற்றும் $200 = 2.0\times10^2$ என எழுதலாம்.

$$\therefore (5000)^4\times(200)^3 = (5.0\times10^3)^4\times(2.0\times10^2)^3$$
$$= (5.0)^4\times(10^3)^4\times(2.0)^3\times(10^2)^3$$
$$= 625\times10^{12}\times8\times10^6 = 5000\times10^{18}$$
$$= 5.0\times10^3\times10^{18} = 5.0\times10^{21}$$

(iii) அறிவியல் குறியீட்டில், $0.00003 = 3.0\times10^{-5}$ என எழுதலாம்.

$$\therefore (0.00003)^5 = (3.0\times10^{-5})^5 = (3.0)^5\times(10^{-5})^5$$
$$= 243\times10^{-25} \quad = 2.43\times10^2\times10^{-25} = 2.43\times10^{-23}$$

(iv) அறிவியல் குறியீட்டில்,

$2000 = 2.0\times10^3$ மற்றும் $0.0001 = 1.0\times10^{-4}$ என எழுதலாம்.

$$\therefore (2000)^2\div(0.0001)^4 = \frac{(2.0\times10^3)^2}{(1.0\times10^{-4})^4} = \frac{(2.0)^2\times(10^3)^2}{(1.0)^4\times(10^{-4})^4}$$
$$= \frac{4\times10^6}{10^{-16}} = 4.0\times10^{6-(-16)} = 4.0\times10^{22}$$

பயிற்சி 3.1

1. பின்வரும் எண்களை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதவும்.

(i) 749300000000 (ii) 13000000 (iii) 105003

(iv) 543600000000000 (v) 0.0096 (vi) 0.0000013307

(vii) 0.0000000022 (viii) 0.0000000000009

2. பின்வரும் எண்களை தசம விரிவில் எழுதவும்.

(i) 3.25×10^{-6} (ii) 4.134×10^{-4} (iii) 4.134×10^4

(iv) 1.86×10^7 (v) 9.87×10^9 (vi) 1.432×10^{-9}

3. பின்வரும் எண்களை அறிவியல் குறியீட்டில் குறிப்பிடவும்.

(i) $(1000)^2\times(20)^6$ (ii) $(1500)^3\times(0.0001)^2$

(iii) $(16000)^3\div(200)^4$ (iv) $(0.003)^7\times(0.0002)^5\div(0.001)^3$

(v) $(11000)^3\times(0.003)^2\div(30000)$

3.3 மடக்கைகள் (Logarithms)

மிகவும் சிக்கலான கணக்கீடுகளை மிக எளிமையாக்குவதற்காகவே மடக்கைகள் உண்மையில் தோற்றுவிக்கப்பட்டன. அவை பெருக்கல்களைக் கூட்டல்களாக மாற்றுவதற்காக அமைக்கப்பட்டன. கணிப்பான்கள் கண்டுபிடிப்பதற்கு முன்பே மிக அதிக இலக்கங்களைக் கொண்ட எண்களைப் பெருக்குவதற்கும் அல்லது வகுப்பதற்கும் மடக்கைகள் உதவின. ஏனெனில், எண்களைப் பெருக்குவதை விட மடக்கைச் செயலில் அவற்றின் அடுக்குகளை கூட்டுகிறோம். இயற்பியலில் பெரும்பாலான விதிகள் அனைத்தும் அடுக்குக்குறி வடிவில் அமைவதால் அணுக்கருச் சம்பந்தமான கதிர் வீச்சு குறைகள், காமா உள்ளீர்ப்பு மற்றும் ஒரு நிலையான கால அளவில் அணுக்கரு உலை சக்தியில் ஏற்படும் மாற்றங்கள் ஆகியவற்றின் கணக்கீடுகளில் மடக்கை மிகவும் இன்றியமையாததாகிறது.

மடக்கைக்குறியீட்டை அறிமுகப்படுத்துவதற்கு மெய்யெண்களின் அடுக்குக்குறியீட்டை முதலில் அறிமுகப்படுத்துவோம்.

3.3.1 அடுக்குக்குறியீடு (Exponential Notation)

a ஒரு மிகை எண் என்க. x ஒரு முழு எனில் a^x என்பதைப் பற்றி முன்னரே அறிந்துள்ளோம்.

ஒரு மிகை எண்ணின் n ஆவது அடுக்கு a எனில் அது $a^{\frac{1}{n}}$ என நமக்குத் தெரியும். p ஒரு முழு மற்றும் q ஒரு மிகை முழு எனில், $a^{\frac{p}{q}}$ என்பதை எவ்வாறு வரையறுப்பது என்பதைப் பற்றி இங்கு காண்போம்.

$\frac{p}{q} = p \times \frac{1}{q}$ என்பதை கவனிக்க, அடுக்குக்குறி விதி உண்மையாக இருக்க வேண்டுமெனில்,

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = (a^p)^{\frac{1}{q}}$$

எனவே, $a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$ என நாம் வரையறுப்போம். எடுத்துக்காட்டாக, $8^{\frac{3}{5}} = (\sqrt[5]{8})^3$ மற்றும் $5^{\frac{-7}{3}} = (\sqrt[3]{5})^{-7}$

இவ்வாறு $a > 0$ எனில், அனைத்து விகிதமுறு எண்கள் x-க்கு a^x-ன் பொருளைக் கொடுத்துள்ளோம். மேலும் $a > 0$ எனில், அனைத்து விகிதமுறா எண்கள் x-க்கும் a^x-ன் வரையறையை அடுக்குக்குறி விதிகள் பொருந்துமாறு விரிவுப்படுத்த முடியும். நாம் இங்கு a^x -ன் வரையறையை விகிதமுறா எண் x-க்கு வரையறுக்கப் போவதில்லை. ஏனெனில், அதற்கு கணிதத்தின் உயர்பாடப்பிரிவுகளில் காணப்படும் கருத்தாக்கங்கள் தேவையாகிறது.

3.3.2 மடக்கைக்குறியீடு (Logarithmic Notation)

$a > 0$, $b > 0$ மற்றும் $a \neq 1$ எனில், a-ன் எந்த அடுக்கு b-க்கு சமமாகிறதோ அந்த அடுக்கானது a ஐ அடிமானமாகக் கொண்ட b-ன் மடக்கை ஆகும்.

முக்கிய கருத்து **மடக்கைக்குறியீடு**

a என்பது 1 ஐத் தவிர்த்த ஒரு மிகை எண் மற்றும் x ஒரு மெய்யெண் (மிகை, குறை அல்லது பூச்சியம்) என்க. $a^x = b$ எனில், அடுக்கு x ஆனது அடிமானம் a ஐப் பொறுத்த b-ன் மடக்கை என அழைப்போம். இதனை $x = \log_a b$ என எழுதுவோம்.

$x = \log_a b$ என்பது $b = a^x$ என்ற அடுக்குக்குறி அமைப்பின் மடக்கை அமைப்பு ஆகும். இரு அமைப்புகளிலும் அடிமானம் ஒன்றே ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

அடுக்குக்குறி அமைப்பு	மடக்கை அமைப்பு
$2^4 = 16$	$\log_2 16 = 4$
$8^{\frac{1}{3}} = 2$	$\log_8 2 = \frac{1}{3}$
$4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$	$\log_4\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 3.6

பின்வரும் மடக்கை அமைப்பினை அடுக்குக்குறி அமைப்பாக மாற்றவும்.

(i) $\log_4 64 = 3$ (ii) $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$ (iii) $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2$ iv) $\log_{10} 0.1 = -1$

தீர்வு

(i) $\log_4 64 = 3 \Longrightarrow 4^3 = 64$

(ii) $\log_{16} 2 = \frac{1}{4} \Longrightarrow (16)^{\frac{1}{4}} = 2$

(iii) $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2 \Longrightarrow (5)^{-2} = \frac{1}{25}$

(iv) $\log_{10} 0.1 = -1 \Longrightarrow (10)^{-1} = 0.1$

எடுத்துக்காட்டு 3.7

பின்வரும் அடுக்குக்குறி அமைப்பினை மடக்கை அமைப்பாக மாற்றவும்.

(i) $3^4 = 81$ (ii) $6^{-4} = \frac{1}{1296}$ (iii) $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$

(iv) $(216)^{\frac{1}{3}} = 6$ (v) $(13)^{-1} = \frac{1}{13}$

தீர்வு

(i) $3^4 = 81 \Longrightarrow \log_3 81 = 4$

(ii) $6^{-4} = \frac{1}{1296} \Longrightarrow \log_6\left(\frac{1}{1296}\right) = -4$

(iii) $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{27} \Longrightarrow \log_{\frac{1}{81}}\left(\frac{1}{27}\right) = \frac{3}{4}$

(vi) $(216)^{\frac{1}{3}} = 6 \Longrightarrow \log_{216} 6 = \frac{1}{3}$

(v) $(13)^{-1} = \frac{1}{13} \Longrightarrow \log_{13}\left(\frac{1}{13}\right) = -1$

எடுத்துக்காட்டு 3.8

மதிப்பிடுக (i) $\log_8 512$ (ii) $\log_{27} 9$ (iii) $\log_{16}\left(\frac{1}{32}\right)$

தீர்வு

(i) $x = \log_8 512$ என்க.

எனவே, $8^x = 512$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$8^x = 8^3 \implies x = 3$

$\therefore \log_8 512 = 3$

(ii) $x = \log_{27} 9$ என்க.

எனவே, $27^x = 9$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$(3^3)^x = (3)^2$ (இருபுறமும் அடிமானம் 3 ஆக மாற்றுக)

$3^{3x} = 3^2 \implies 3x = 2 \implies x = \frac{2}{3}$

$\therefore \log_{27} 9 = \frac{2}{3}$

(iii) $x = \log_{16}\left(\frac{1}{32}\right)$ என்க.

எனவே, $16^x = \frac{1}{32}$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$(2^4)^x = \frac{1}{(2)^5}$ (இருபுறமும் அடிமானம் 2 ஆக மாற்றுக)

$2^{4x} = 2^{-5} \implies 4x = -5 \implies x = -\frac{5}{4}$

$\therefore \log_{16}\left(\frac{1}{32}\right) = -\frac{5}{4}$

எடுத்துக்காட்டு 3.9

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

(i) $\log_5 x = -3$ (ii) $x = \log_{\frac{1}{4}} 64$ (iii) $\log_x 8 = 2$ (iv) $x + 3\log_8 4 = 0$ (v) $\log_x 7^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$

தீர்வு

(i) $\log_5 x = -3$

$5^{-3} = x$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$x = \frac{1}{5^3} \implies x = \frac{1}{125}$

(ii) $x = \log_{\frac{1}{4}} 64$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 64$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$\frac{1}{4^x} = 4^3 \implies 4^{-x} = 4^3 \implies x = -3$

(iii) $\log_x 8 = 2$

$x^2 = 8$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

(iv) $x + 3\log_8 4 = 0$

$\Longrightarrow \quad -x = 3\log_8 4 = \log_8 4^3$

$\Longrightarrow \quad -x = \log_8 64 \quad \Longrightarrow (8)^{-x} = 64$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$\Longrightarrow \quad (8)^{-x} = 8^2 \quad \Longrightarrow x = -2$

(v) $\log_x 7^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad x^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{6}}$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$7^{\frac{1}{6}} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ என எழுதுக. பின்னர், $x^{\frac{1}{3}} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore x = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

மடக்கை விதிகள்

1. **பெருக்கல் விதி :** ஒரே அடிமானத்தை உடைய இரு மிகை எண்களின் பெருக்கற்பலனின் மடக்கையானது, அவ்விரு எண்களின் மடக்கைகளின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும். அதாவது,

$$\log_a (M \times N) = \log_a M + \log_a N;\ a, M, N \text{ மிகை எண்கள், } a \neq 1$$

2. **வகுத்தல் விதி :** ஒரே அடிமானத்தை உடைய இரு மிகை எண்களின் வகுத்தலின் மடக்கையானது, தொகுதியின் மடக்கையிலிருந்து பகுதியின் மடக்கையை கழித்தலுக்குச் சமமாகும்.அதாவது,

$$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N\ ;\ a, M, N \text{ மிகை எண்கள், } a \neq 1$$

3. **அடுக்கு விதி :** ஒரு எண்ணின் அடுக்கின் மடக்கையானது அந்த எண்ணின் மடக்கையினை அடுக்கால் பெருக்குவதற்குச் சமமாகும். அதாவது,

$$\log_a (M)^n = n\log_a M;\ a, M \text{ மிகை எண்கள், } a \neq 1$$

4. **அடிமான மாற்றல் விதி :** M, a, b என்பன மிகை எண்கள் மற்றும் $a \neq 1$, $b \neq 1$ எனில்,

$$\log_a M = (\log_b M) \times (\log_a b)$$

குறிப்புரை:

(i) a ஒரு மிகை எண் மற்றும் $a \neq 1$ எனில், $\log_a a = 1$.

(ii) a ஒரு மிகை எண் மற்றும் $a \neq 1$ எனில், $\log_a 1 = 0$.

(iii) a மற்றும் b மிகை எண்கள் $a \neq 1$, $b \neq 1$ எனில், $(\log_a b) \times (\log_b a) = 1$ மற்றும் $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

(iv) a மற்றும் b மிகை எண்கள் மற்றும் $b \neq 1$ எனில், $b^{\log_b a} = a$.

(v) $a > 0$ எனில், $\log_a 0$ வரையறுக்கப்படவில்லை.

(vi) b, x மற்றும் y மிகை எண்கள், $b \neq 1$ மற்றும் $\log_b x = \log_b y$ எனில், $x = y$ ஆகும். இதன் மறுதலையும் உண்மை.

(vii) எல்லா மடக்கைகளிலும் அடிமானம் 1 ஆக இல்லாமல் பார்த்துக் கொள்ளவேண்டும். ஏனெனில், அடிமானம் 1 உடைய மடக்கையை கருதினால், எடுத்துக்காட்டாக, $\log_1 9$ ஐ கருதினால், இதன் மதிப்பு x எனில், $x = \log_1 9$ அல்லது $1^x = 9$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆனால் எந்த மெய்யெண் x-க்கும் $1^x = 9$ எனக் கிடைக்காது.

எடுத்துக்காட்டு 3.10

சுருக்குக (i) $\log_5 25 + \log_5 625$ (ii) $\log_5 4 + \log_5\left(\frac{1}{100}\right)$

தீர்வு

(i) $\log_5 25 + \log_5 625 = \log_5(25 \times 625)$ $(\because \log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N)$

$= \log_5(5^2 \times 5^4) = \log_5 5^6 = 6\log_5 5$ $(\because \log_a(M)^n = n\log_a M)$

$= 6(1) = 6$ $(\because \log_a a = 1)$

(ii) $\log_5 4 + \log_5\left(\frac{1}{100}\right) = \log_5\left(4 \times \frac{1}{100}\right)$ $(\because \log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N)$

$= \log_5\left(\frac{1}{25}\right) = \log_5\left(\frac{1}{5^2}\right) = \log_5 5^{-2} = -2\log_5 5$ $(\because \log_a(M)^n = n\log_a M)$

$= -2(1) = -2$ $(\because \log_a a = 1)$

எடுத்துக்காட்டு 3.11

சுருக்குக $\log_8 128 - \log_8 16$

தீர்வு $\log_8 128 - \log_8 16 = \log_8 \frac{128}{16}$ $(\because \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N)$

$= \log_8 8 = 1$ $(\because \log_a a = 1)$

எடுத்துக்காட்டு 3.12

$\log_{10} 125 = 3 - 3\log_{10} 2$ என நிரூபி.

தீர்வு $3 - 3\log_{10} 2 = 3\log_{10} 10 - 3\log_{10} 2 = \log_{10} 10^3 - \log_{10} 2^3$

$= \log_{10} 1000 - \log_{10} 8 = \log_{10}\frac{1000}{8}$

$= \log_{10} 125$

$\therefore \log_{10} 125 = 3 - 3\log_{10} 2$

எடுத்துக்காட்டு 3.13

$\log_3 2\times\log_4 3\times\log_5 4\times\log_6 5\times\log_7 6\times\log_8 7 = \frac{1}{3}$ என நிரூபி.

தீர்வு $\log_3 2\times\log_4 3\times\log_5 4\times\log_6 5\times\log_7 6\times\log_8 7$

$$= (\log_3 2\times\log_4 3)\times(\log_5 4\times\log_6 5)\times(\log_7 6\times\log_8 7)$$

$$= \log_4 2\times\log_6 4\times\log_8 6 = (\log_4 2\times\log_6 4)\times\log_8 6 \quad (\because \log_a M = \log_b M\times\log_a b)$$

$$= \log_6 2\times\log_8 6 = \log_8 2 = \frac{1}{\log_2 8} \qquad (\because \log_a b = \frac{1}{\log_b a})$$

$$= \frac{1}{\log_2 2^3} = \frac{1}{3\log_2 2} \qquad (\because \log_a (M)^n = n\log_a M)$$

$$= \frac{1}{3} \qquad (\because \log_2 2 = 1)$$

எடுத்துக்காட்டு 3.14

$25^{-2\log_5 3}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $25^{-2\log_5 3} = (5^2)^{-2\log_5 3} = 5^{-4\log_5 3} \qquad (\because n\log_a M = \log_a M^n)$

$$= 5^{\log_5 3^{-4}} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \qquad (\because b^{\log_b a} = a)$$

எடுத்துக்காட்டு 3.15

தீர்க்க $\log_{16}x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

தீர்வு $\log_{16}x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\log_x 16}+\frac{1}{\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 2} = 7 \qquad (\because \log_a b = \frac{1}{\log_b a})$$

$$\frac{1}{\log_x 2^4}+\frac{1}{\log_x 2^2}+\frac{1}{\log_x 2} = 7$$

$$\frac{1}{4\log_x 2}+\frac{1}{2\log_x 2}+\frac{1}{\log_x 2} = 7 \qquad (\because n\log_a M = \log_a M^n)$$

$$\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right]\frac{1}{\log_x 2} = 7 \quad \Longrightarrow \left[\frac{7}{4}\right]\frac{1}{\log_x 2} = 7$$

$$\frac{1}{\log_x 2} = 7\times\frac{4}{7}$$

$$\log_2 x = 4 \qquad (\because \log_a b = \frac{1}{\log_b a})$$

$$2^4 = x \qquad \text{(அடுக்குக்குறி அமைப்பு)}$$

$$\therefore \quad x = 16$$

எடுத்துக்காட்டு 3.16

தீர்க்க $\dfrac{1}{2+\log_x 10} = \dfrac{1}{3}$

தீர்வு $$\frac{1}{2+\log_x 10} = \frac{1}{3}$$

குறுக்குப் பெருக்கல் செய்ய, நாம் பெறுவது

$$2+\log_x 10 = 3$$

$$\Longrightarrow \log_x 10 = 3-2 = 1$$

$$x^1 = 10 \qquad \text{(அடுக்குக்குறி அமைப்பு)}$$

$$\therefore x = 10$$

எடுத்துக்காட்டு 3.17

தீர்க்க $\log_3(\log_2 x) = 1$

தீர்வு $\log_2 x = y$ என்க. (1)

பிறகு, $\log_3 y = 1$

$$3^1 = y \qquad \text{(அடுக்குக்குறி அமைப்பு)}$$

$$\therefore y = 3$$

$y = 3$ என (1)-ல் பதிலிட $\log_2 x = 3$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, $2^3 = x$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$$\therefore x = 8$$

எடுத்துக்காட்டு 3.18

தீர்க்க $\log_2(3x-1) - \log_2(x-2) = 3$

தீர்வு $\log_2(3x-1) - \log_2(x-2) = 3$

$$\log_2\left(\frac{3x-1}{x-2}\right) = 3 \qquad \left(\because \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N\right)$$

$$2^3 = \frac{3x-1}{x-2} \qquad \text{(அடுக்குக்குறி அமைப்பு)}$$

$$8 = \frac{3x-1}{x-2}$$

குறுக்குப் பெருக்கல் செய்ய, நாம் பெறுவது

$$8(x-2) = 3x-1 \Longrightarrow 8x-16 = 3x-1$$

$$8x-3x = -1+16 \Longrightarrow 5x = 15$$

$$\therefore x = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 3.19

$\log_5 1125 = 2\log_5 6 - \frac{1}{2}\log_5 16 + 6\log_{49} 7$ என நிரூபி.

தீர்வு $2\log_5 6 - \frac{1}{2}\log_5 16 + 6\log_{49} 7$

$$= \log_5 6^2 - \log_5 (16)^{\frac{1}{2}} + 3\times 2\log_{49} 7 = \log_5 36 - \log_5 4 + 3\log_{49} 7^2$$

$$= \log_5\left(\frac{36}{4}\right) + 3\log_{49} 49 = \log_5 9 + 3(1)$$

$$= \log_5 9 + 3\log_5 5 = \log_5 9 + \log_5 (5)^3$$

$$= \log_5 9 + \log_5 125 = \log_5 (9\times 125) = \log_5 1125$$

$$\therefore \log_5 1125 = 2\log_5 6 - \frac{1}{2}\log_5 16 + 6\log_{49} 7$$

எடுத்துக்காட்டு 3.20

தீர்க்க $\log_5\sqrt{7x-4} - \frac{1}{2} = \log_5\sqrt{x+2}$

தீர்வு $\log_5\sqrt{7x-4} - \frac{1}{2} = \log_5\sqrt{x+2}$

$$\log_5\sqrt{7x-4} - \log_5\sqrt{x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\log_5\left(\frac{\sqrt{7x-4}}{\sqrt{x+2}}\right) = \frac{1}{2} \qquad \left(\because \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N\right)$$

$$\log_5\left(\frac{7x-4}{x+2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left[\log_5\left(\frac{7x-4}{x+2}\right)\right] = \frac{1}{2} \qquad (\because \log_a M^n = n\log_a M)$$

$$\log_5\left(\frac{7x-4}{x+2}\right) = 1$$

$$5^1 = \frac{7x-4}{x+2}$$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

குறுக்குப் பெருக்கல் செய்ய, $7x - 4 = 5(x+2)$,

$$7x - 4 = 5x + 10 \Longrightarrow 7x - 5x = 10 + 4$$

$$\Longrightarrow 2x = 14$$

$$\therefore x = 7$$

பயிற்சி 3.2

1. பின்வரும் கூற்றுகளில் எவை சரி அல்லது தவறு எனக் காண்க.

(i) $\log_5 125 = 3$ (ii) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = 3$

(iii) $\log_4 (6+3) = \log_4 6 + \log_4 3$ (iv) $\log_2\left(\frac{25}{3}\right) = \frac{\log_2 25}{\log_2 3}$

(v) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$ (vi) $\log_a (M-N) = \log_a M \div \log_a N$

2. பின்வருவனவற்றிற்குச் சமமான மடக்கை அமைப்பினைக் காண்க.

(i) $2^4 = 16$ (ii) $3^5 = 243$ (iii) $10^{-1} = 0.1$

(iv) $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$ (v) $25^{\frac{1}{2}} = 5$ (vi) $12^{-2} = \frac{1}{144}$

3. பின்வருவனவற்றிற்குச் சமமான அடுக்குக்குறி அமைப்பினைக் காண்க.

(i) $\log_6 216 = 3$ (ii) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ (iii) $\log_5 1 = 0$

(iv) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$ (v) $\log_{64}\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{2}$ (vi) $\log_{0.5} 8 = -3$

4. பின்வருவனவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.

(i) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ (ii) $\log_7 343$ (iii) $\log_6 6^5$

(iv) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ (v) $\log_{10} 0.0001$ (vi) $\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3}$

5. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $\log_2 x = \frac{1}{2}$ (ii) $\log_{\frac{1}{5}} x = 3$ (iii) $\log_3 y = -2$

(iv) $\log_x 125\sqrt{5} = 7$ (v) $\log_x 0.001 = -3$ (vi) $x + 2\log_{27} 9 = 0$

6. பின்வருவனவற்றைச் சுருக்குக.

(i) $\log_{10} 3 + \log_{10} 3$ (ii) $\log_{25} 35 - \log_{25} 10$

(iii) $\log_7 21 + \log_7 77 + \log_7 88 - \log_7 121 - \log_7 24$ (iv) $\log_8 16 + \log_8 52 - \frac{1}{\log_{13} 8}$

(v) $5\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3 - 6\log_{64} 4$ (vi) $\log_{10} 8 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4$

7. பின்வரும் ஒவ்வொரு சமன்பாட்டினையும் தீர்க்க.

(i) $\log_4(x+4) + \log_4 8 = 2$ (ii) $\log_6(x+4) - \log_6(x-1) = 1$

(iii) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{6}$ (iv) $\log_4(8\log_2 x) = 2$

(v) $\log_{10} 5 + \log_{10}(5x+1) = \log_{10}(x+5) + 1$

(vi) $4\log_2 x - \log_2 5 = \log_2 125$

(vii) $\log_3 25 + \log_3 x = 3\log_3 5$

(viii) $\log_3(\sqrt{5x-2}) - \frac{1}{2} = \log_3(\sqrt{x+4})$

8. $\log_a 2 = x$, $\log_a 3 = y$ மற்றும் $\log_a 5 = z$ எனில், பின்வரும் ஒவ்வொன்றின் மதிப்பினையும் x, y மற்றும் z இவற்றின் மூலம் காண்க.

(i) $\log_a 15$ (ii) $\log_a 8$ (iii) $\log_a 30$

(iv) $\log_a\left(\frac{27}{125}\right)$ (v) $\log_a\left(3\frac{1}{3}\right)$ (vi) $\log_a 1.5$

9. பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க.

(i) $\log_{10}1600 = 2 + 4\log_{10}2$ (ii) $\log_{10}12500 = 2 + 3\log_{10}5$

(iii) $\log_{10}2500 = 4 - 2\log_{10}2$ (iv) $\log_{10}0.16 = 2\log_{10}4 - 2$

(v) $\log_5 0.00125 = 3 - 5\log_5 10$ (vi) $\log_5 1875 = \frac{1}{2}\log_5 36 - \frac{1}{3}\log_5 8 + 20\log_{32}2$

3.4 பொது மடக்கைகள் (Common Logarithms)

கணக்கீடுகளுக்குத் தசம எண்ணுருவின் அடிப்படை எண்ணான 10 ஐ அடிமானத்திற்கு தர்க்க ரீதியான எண்ணாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. அடிமானம் 10 ஆக உள்ள மடக்கைகள் பொது மடக்கைகள் எனப்படும். எனவே, இனிவரும் கணக்குகளில் மடக்கையானது அடிமானம் இல்லாமல் பயன்படுத்தப்படுகிறது. அதாவது, $\log N$ என்பது $\log_{10}N$ என பொருள் கொள்ளப்படுகிறது. பின்வரும் அட்டவணையைக் கருதுக.

எண் N	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000
N ன் அடுக்குக் குறி அமைப்பு	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4
$\log N$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

எனவே N என்பது 10-ன் முழு எண் அடுக்கு எனில், $\log N$ என்பது ஒரு முழு ஆகும். 3.16-ன் அல்லது 31.6-ன் அல்லது 316-ன் மடக்கை என்ன?

இப்போது, $3.16 = 10^{0.4997}$; $31.6 = 10^{1.4997}$; $316 = 10^{2.4997}$

$$\therefore \log 3.16 = 0.4997;\ \log 31.6 = 1.4997;\ \log 316 = 2.4997.$$

1-ல் இருந்து 10 வரை உள்ள ஒரு எண்ணின் மடக்கை 0-ல் இருந்து 1 வரை உள்ள ஒரு எண் ஆகும்; 10-ல் இருந்து 100 வரை உள்ள ஒரு எண்ணின் மடக்கை 1-ல் இருந்து 2 வரை உள்ள ஒரு எண் ஆகும். இதுபோன்றே மற்ற எண்களின் மடக்கைகளும் அமையும்.

ஒரு மடக்கையின் முழுஎண் பகுதி நேர்க்கூறு (characteristic) எனவும் தசமப்பின்னப் பகுதி பதின்மானக்கூறு (mantissa) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக,

$\log 3.16 = 0.4997$; நேர்க்கூறு 0 மற்றும் பதின்மானக்கூறு 0.4997

$\log 31.6 = 1.4997$; நேர்க்கூறு 1 மற்றும் பதின்மானக்கூறு 0.4997

$\log 316 = 2.4997$; நேர்க்கூறு 2 மற்றும் பதின்மானக்கூறு 0.4997

ஒன்றை விட குறைவான எண்களின் மடக்கை ஒரு குறை எண் ஆகும். ஒரு எண்ணின் மடக்கை குறை எண்ணாக இருந்த போதிலும், அதன் பதின்மானக்கூறினை எப்போதும் மிகை எண்ணாகவே எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

நேர்க்கூறினைக் காண்பதற்கு அறிவியல் குறீயீடு ஒரு சிறப்பான முறையைக் கொடுக்கிறது. அறிவியல் குறியீட்டில், $316 = 3.16\times10^2$. எனவே, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned}\log 316 &= \log(3.16\times10^2)\\ &= \log 3.16 + \log 10^2\\ &= 0.4997 + 2 = 2.4997.\end{aligned}$$

எனவே, 10-ன் அடுக்கு மடக்கையின் நேர்க்கூறினைக் காண்பதற்கு பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.21

பின்வருவனவற்றின் நேர்க்கூறினை எழுதுக.

(i) log 27.91 (ii) log 0.02871 (iii) log 0.000987 (iv) log 2475.

தீர்வு

(i) அறிவியல் குறியீட்டில், $27.91 = 2.791 \times 10^{1}$

$\therefore$ நேர்க்கூறு = 1

(ii) அறிவியல் குறியீட்டில், $0.02871 = 2.871 \times 10^{-2}$

$\therefore$ நேர்க்கூறு = –2

(iii) அறிவியல் குறியீட்டில், $0.000987 = 9.87 \times 10^{-4}$

$\therefore$ நேர்க்கூறு = – 4

(iv) அறிவியல் குறியீட்டில், $2475 = 2.475 \times 10^{3}$

$\therefore$ நேர்க்கூறு = 3

பின்வரும் விதிகளின்படி ஒரு எண்ணின் நேர்க்கூறினைப் பார்த்த மாத்திரத்தில் தீர்மானிக்க முடியும்.

(i) ஒன்று அல்லது ஒன்றை விட அதிகமான ஒரு எண்ணின் நேர்க்கூறு குறையற்ற (non-negative)மதிப்புடையது. மேலும் அது தசமப்புள்ளிக்கு முன் உள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையை விட ஒன்று குறைவாக இருக்கும்.

(ii) ஒன்றை விட குறைவான ஒரு எண்ணின் நேர்க்கூறு குறை (negative) மதிப்புடையது மேலும் அது தசமப்புள்ளியை அடுத்து உடனடியாக தொடர்ந்து வரும் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையை விட ஒன்று அதிகமாக இருக்கும். நேர்க்கூறின் குறைகுறியை $\bar{1}, \bar{2}, \ldots$ என எழுதுவோம். எடுத்துக்காட்டாக, 0.0316-ன் நேர்க்கூறு $\bar{2}$.

(iii) பதின்மானக்கூறு எப்போதும் மிகை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.22

log 4586 = 3.6615 என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) log 45.86 (ii) log 45860 (iii) log 0.4586

(iv) log 0.004586 (v) log 0.04586 (vi) log 4.586

தீர்வு log 4586-ன் பதின்மானக்கூறு 0.6615.

(i) log 45.86 = 1.6615 (ii) log 45860 = 4.6615

(iii) log 0.4586 = $-1 + 0.6615 = \bar{1}.6615$ (iv) log 0.004586 = $-3 + 0.6615 = \bar{3}.6615$

(v) log 0.04586 = $-2 + 0.6615 = \bar{2}.6615$ (vi) log 4.586 = 0.6615

3.4.1 மடக்கையைக் காணும் முறை

ஒரு எண்ணின் நேர்க்கூறு ஏற்கனவே கூறப்பட்டது போல எளிதில் அறிய முடியும் என்பதால், மடக்கை அட்டவணை வெறும் பதின்மானக்கூறுகளை மட்டுமே கொண்டிருக்கும். சம இலக்கங்களை வரிசை மாறாமல் கொண்டுள்ள, ஆனால் தசமப்புள்ளியில் மட்டும் மாறுபடும் எல்லா எண்களின் மடக்கைகளின் பதின்மானக்கூறுகளும் ஒன்றே. பதின்மானக்கூறுகள் நான்கு தசம திருத்தமான எண்ணாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மடக்கை அட்டவணை பின்வரும் மூன்று பகுதிகளைக் கொண்டது.

(i) முதல் நிரல் 1.0, 1.1, 1.2, 1.3,...என 9.9 வரை உள்ள எண்களைக் கொண்டது.

(ii) அடுத்து பத்து நிரல்கள் 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 என்ற தலைப்புகளைக் கொண்டு பதின்மானக்கூறுகளைக் கொண்டுள்ளது.

(iii) இந்த நிரல்களுக்கு அடுத்து சராசரி வித்தியாசம் என்ற தலைப்பில் மீண்டும் 9 நிரல்கள் உள்ளது. இந்த நிரல்கள் 1, 2, ..., 9 என்ற எண்களால் குறிக்கப்படுகிறது.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு எண்ணின் பதின்மானக்கூறினை எவ்வாறு காண்பது என்று நாம் விளக்குவோம்.

கொடுக்கப்பட்ட எண் 40.85 என்க. இதனை $40.85 = 4.085 \times 10^{1}$ என எழுதலாம்.

$\therefore$ நேர்க்கூறு 1 ஆகும்.

4.0 என்ற எண்ணுக்கு எதிரே உள்ள நிரை பின்வருமாறு மடக்கை அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

											சராசரி வித்தியாசங்கள்								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10

N = 4.0-க்கு நேராக இலக்கம் 8 ஆவது நிரலுக்குக் கீழே உள்ள எண்ணை நாம் குறிக்க அந்த எண் 0.6107 . பிறகு சராசரி வித்தியாசத்தில் **5** ஆவது நிரலுக்குக் கீழே உள்ள எண் 0.0005 ஐ எடுத்துக்கொள்ள தேவையான பதின்மானக்கூறு 0.6107 + 0.0005 = 0.6112.

$\therefore \log 40.85 = 1.6112$.

3.4.2 எதிர்மடக்கைகள் (Antilogarithms)

ஒரு எண்ணின் மடக்கை x எனில், அந்த எண்ணை x-ன் எதிர்மடக்கை என அழைக்கப்படும். இதை antilog x என எழுதலாம். அதாவது, $\log y = x$ எனில், $y = \text{antilog } x$ ஆகும்.

3.4.3 எதிர்மடக்கையைக் காணும் முறை

இப்புத்தகத்தின் கடைசியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள எதிர்மடக்கை அட்டவணை மூலம் ஒரு எண்ணின் எதிர்மடக்கையைக் காணலாம். இந்த அட்டவணையில் எதிர்மடக்கையின் மதிப்பு நான்கு தசமப்புள்ளி திருத்தமாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எதிர்மடக்கையைக் காண, நாம் பதின்மானக்கூறை மட்டும் கருத்தில் கொள்ளவேண்டும். முழுஎண் பகுதியில் எத்தனை இலக்கங்கள் உள்ளது என காண அல்லது தசமப்புள்ளிக்கு அடுத்து எத்தனை பூச்சியங்கள் உள்ளது என காண நாம் நேர்க்கூறைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

மடக்கை அட்டவணையை எவ்வாறு பயன்படுத்த வேண்டும் என்று மேலே குறிப்பிட்டோமோ அது போலவே எதிர்மடக்கை அட்டவணையையும் பயன்படுத்த வேண்டும்.

குறிப்பு: இப்புத்தகத்தின் கடைசியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மடக்கை அட்டவணையை நான்கு இலக்கங்ளைக் கொண்ட எண்களுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்த முடியும். எனவே இப்பகுதியில் தீர்க்கப்படும் எல்லா மடக்கை கணக்குகளிலும் எண்களை நான்கு இலக்க எண்களாக மாற்றிக் கொள்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.23

(i) log 86.76 (ii) log 730.391 (iii) log 0.00421526 **காண்க.**

தீர்வு :

(i) $86.76 = 8.676 \times 10^{1}$ **(அறிவியல் குறியீடு)**

$\therefore$ நேர்க்கூறு 1 ஆகும். பதின்மானக்கூறைக் காண 8.676 என்ற எண்ணை எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

அட்டவணையிலிருந்து, $\log 8.67 = 0.9380$

6-ன் சராசரி வித்தியாசம் $= 0.0003$

$$\log 8.676 = 0.9380 + 0.0003 = 0.9383$$

$$\therefore \log 86.76 = 1.9383$$

(ii) $730.391 = 7.30391 \times 10^{2}$ (அறிவியல் குறியீடு)

$\therefore$ நேர்க்கூறு 2 ஆகும். பதின்மானக்கூறைக் காண 7.30391 என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். இதை 7.304 (நான்காவது தசம இலக்கம் 9, 5 ஐ விட பெரியது) என எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

அட்டவணையிலிருந்து, $\log 7.30 = 0.8633$

4-ன் சராசரி வித்தியாசம் $= 0.0002$

$$\log 7.304 = 0.8633 + 0.0002 = 0.8635$$

$$\therefore \log 730.391 = 2.8635$$

(iii) $0.00421526 = 4.21526 \times 10^{-3}$ (அறிவியல் குறியீடு)

$\therefore$ நேர்க்கூறு -3 ஆகும். பதின்மானக்கூறைக் காண 4.21526 என்ற எண்ணை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். இதை 4.215 என எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். (நான்காவது தசம இலக்கம் 2, 5ஐ விட குறைவு).

அட்டவணையிலிருந்து, $\log 4.21 = 0.6243$

5-ன் சராசரி வித்தியாசம் $= 0.0005$

$$\log 4.215 = 0.6243 + 0.0005 = 0.6248$$

$$\therefore \log 0.00421526 = -3 + 0.6248 = \bar{3}.6248$$

எடுத்துக்காட்டு 3.24

பின்வருவனவற்றின் எதிர்மடக்கையினைக் காண்க.

(i) 1.8652 (ii) 0.3269 (iii) $\overline{2}.6709$

தீர்வு

(i) நேர்க்கூறு 1 ஆகும். எனவே அந்த எண், முழுஎண் பகுதியில் இரண்டு இலக்கங்களைக் கொண்டுள்ளது. பதின்மானக்கூறு 0.8652.

அட்டவணையிலிருந்து, antilog 0.865 = 7.328

2-ன் சராசரி வித்தியாசம் = 0.003

$$\text{antilog } 0.8652 = 7.328 + 0.003 = 7.331$$

$$\therefore \quad \text{antilog } 1.8652 = 73.31$$

(ii) நேர்க்கூறு 0 ஆகும். எனவே அந்த எண், முழுஎண் பகுதியில் ஒரு இலக்கத்தை கொண்டுள்ளது. பதின்மானக்கூறு 0.3269.

அட்டவணையிலிருந்து, antilog 0.326 = 2.118

9-ன் சராசரி வித்தியாசம் = 0.004

$$\therefore \text{antilog } 0.3269 = 2.118 + 0.004 = 2.122$$

(iii) நேர்க்கூறு -2. எனவே அந்த எண்ணில் முழுஎண் பகுதி இருக்காது. மேலும் தசமப்புள்ளியை அடுத்து உடனடியாக ஒரு பூச்சியம் இருக்கும். பதின்மானக்கூறு 0.6709.

அட்டவணையிலிருந்து, antilog 0.670 = 4.677

9-ன் சராசரி வித்தியாசம் = 0.010

$$\text{antilog } 0.6709 = 4.677 + 0.010 = 4.687$$

$$\therefore \text{antilog } \overline{2}.6709 = 0.04687$$

எடுத்துக்காட்டு 3.25

(i) 42.6×2.163 (ii) 23.17×0.009321 **ஆகியவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.**

தீர்வு

(i) $x = 42.6 \times 2.163$ என்க. இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \log x &= \log(42.6 \times 2.163) \\ &= \log 42.6 + \log 2.163 \\ &= 1.6294 + 0.3351 = 1.9645 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \text{antilog } 1.9645 = 92.15$$

(ii) $x = 23.17 \times 0.009321$ என்க. இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\log x = \log(23.17 \times 0.009321) = \log 23.17 + \log 0.009321$$

$$= 1.3649 + \bar{3}.9694 = 1 + 0.3649 - 3 + 0.9694$$

$$= -2 + 1.3343 = -2 + 1 + 0.3343$$

$$= -1 + 0.3343 = \bar{1}.3343$$

$$\therefore \quad x = \text{antilog}\,\bar{1}.3343 = 0.2159$$

எடுத்துக்காட்டு 3.26

(i) $(36.27)^6$ (ii) $(0.3749)^4$ (iii) $\sqrt[5]{0.2713}$ ஆகியவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு

(i) $x = (36.27)^6$ என்க. இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\log x = \log(36.27)^6 = 6 \log 36.27 = 6(1.5595) = 9.3570$$

$$\therefore x = \text{antilog}\, 9.3570 = 2275000000$$

(ii) $x = (0.3749)^4$ என்க. இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\log x = \log(0.3749)^4 = 4 \log 0.3749 = 4(\bar{1}.5739) = 4(-1 + 0.5739)$$

$$= -4 + 2.2956 = -4 + 2 + 0.2956 = -2 + 0.2956 = -2.2956$$

$$= \bar{2}.2956$$

$$\therefore x = \text{antilog}\,\bar{2}.2956 = 0.01975$$

(iii) $x = \sqrt[5]{0.2713} = (0.2713)^{\frac{1}{5}}$ என்க. இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\log x = \log(0.2713)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\log 0.2713$$

$$= \frac{1}{5}(\bar{1}.4335) = \frac{-1 + 0.4335}{5}$$

$$= \frac{(-1-4) + 4 + 0.4335}{5}$$

$$= \frac{-5 + 4.4335}{5} = \frac{-5}{5} + \frac{4.4335}{5}$$

$$= -1 + 0.8867 = \bar{1}.8867$$

$$\therefore x = \text{antilog}\,\bar{1}.8867 = 0.7703$$

எடுத்துக்காட்டு 3.27

சுருக்குக (i) $\dfrac{(46.7)\times\sqrt{65.2}}{(2.81)^3\times(4.23)}$ (ii) $\dfrac{(84.5)^4\times\sqrt[3]{0.0064}}{(72.5)^2\times\sqrt{62.3}}$

தீர்வு

(i) $x = \dfrac{(46.7)\times\sqrt{65.2}}{(2.81)^3\times(4.23)} = \dfrac{46.7\times(65.2)^{\frac{1}{2}}}{(2.81)^3\times 4.23}$ என்க.

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\log x = \log\left[\frac{46.7\times(65.2)^{\frac{1}{2}}}{(2.81)^3\times 4.23}\right]$$

$$= \log 46.7 + \log(65.2)^{\frac{1}{2}} - \log(2.81)^3 - \log 4.23$$

$$= \log 46.7 + \frac{1}{2}\log 65.2 - 3\log 2.81 - \log 4.23$$

$$= 1.6693 + \frac{1}{2}(1.8142) - 3(0.4487) - 0.6263$$

$$= 1.6693 + 0.9071 - 1.3461 - 0.6263$$

$$= 2.5764 - 1.9724 = 0.6040$$

$$\therefore x = \text{antilog } 0.6040 = 4.018$$

(ii) $x = \dfrac{(84.5)^4\times\sqrt[3]{0.0064}}{(72.5)^2\times\sqrt{62.3}} = \dfrac{(84.5)^4\times(0.0064)^{\frac{1}{3}}}{(72.5)^2\times(62.3)^{\frac{1}{2}}}$ என்க.

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\log x = \log\left[\frac{(84.5)^4\times(0.0064)^{\frac{1}{3}}}{(72.5)^2\times(62.3)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$= \log(84.5)^4 + \log(0.0064)^{\frac{1}{3}} - \log(72.5)^2 - \log(62.3)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4\log 84.5 + \frac{1}{3}\log 0.0064 - 2\log 72.5 - \frac{1}{2}\log 62.3$$

$$= 4(1.9269) + \frac{1}{3}(\bar{3}.8062) - 2(1.8603) - \frac{1}{2}(1.7945)$$

$$= 7.7076 + \frac{1}{3}(-3 + 0.8062) - 3.7206 - 0.8973$$

$$= 3.0897 + (-1+0.2687) = 3+0.0897-1+0.2687$$

$$= 2+0.3584 = 2.3584$$

$$\therefore x = \text{antilog}2.3584 = 228.2$$

எடுத்துக்காட்டு 3.28

$\log_4 13.26$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $\log_4 13.26 = \log_{10} 13.26 \times \log_4 10$ $\quad (\because \log_a M = \log_b M \times \log_a b)$

$= \log_{10} 13.26 \times \dfrac{1}{\log_{10} 4}$ $\quad (\because \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a})$

$= \dfrac{1.1225}{0.6021} = x$ என்க.

பிறகு $x = \dfrac{1.1225}{0.6021}$. இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\log x = \log\left(\frac{1.1225}{0.6021}\right)$$

$$= \log 1.1225 - \log 0.6021 = 0.0503 - \bar{1}.7797$$

$$= 0.0503 - (-1 + 0.7797) = 0.0503 + 1 - 0.7797$$

$$= 1.0503 - 0.7797 = 0.2706$$

$$\therefore x = \text{antilog } 0.2706 = 1.865$$

பயிற்சி 3.3

1. பின்வருவனவற்றை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக

(i) 92.43 (ii) 0.9243 (iii) 9243

(iv) 924300 (v) 0.009243 (vi) 0.09243

2. பின்வருவனவற்றின் நேர்க்கூறினைக் காண்க.

(i) log 4576 (ii) log 24.56 (iii) log 0.00257

(iv) log 0.0756 (v) log 0.2798 (vi) log 6.453

3. log 23750-ன் பதின்மானக்கூறு 0.3756 எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.

(i) log 23750 (ii) log 23.75 (iii) log 2.375

(iv) log 0.2375 (v) log 23750000 (vi) log 0.00002375

4. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.

(i) log 23.17 (ii) log 9.321 (iii) log 329.5

(iv) log 0.001364 (v) log 0.9876 (vi) log 6576

5. எதிர்மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.

(i) antilog 3.072 (ii) antilog 1.759 (iii) antilog $\bar{1}.3826$

(iv) antilog $\bar{3}.6037$ (v) antilog 0.2732 (vi) antilog $\bar{2}.1798$

6. மதிப்பிடுக.

(i) 816.3×37.42 (ii) $816.3 \div 37.42$ (iii) 0.000645×82.3

(iv) $0.3421 \div 0.09782$ (v) $(50.49)^5$ (vi) $\sqrt[3]{561.4}$

(vii) $\dfrac{175.23 \times 22.159}{1828.56}$ (viii) $\dfrac{\sqrt[3]{28} \times \sqrt[5]{729}}{\sqrt{46.35}}$ (ix) $\dfrac{(76.25)^3 \times \sqrt[3]{1.928}}{(42.75)^5 \times 0.04623}$

(x) $\sqrt[3]{\dfrac{0.7214 \times 20.37}{69.8}}$ (xi) $\log_9 63.28$ (xii) $\log_3 7$

நினைவில் கொள்க

- ஒரு எண் N ஐ அறிவியல் குறியீட்டில் $1 \le a < 10$ என உள்ள தசமஎண் மற்றும்10-ன் முழு அடுக்கு ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனாக எழுதலாம். அதாவது,

  $N = a \times 10^n$ இங்கு $1 \le a < 10$ மற்றும் n ஒரு முழு.
- $a^x = b\,(a > 0, a \neq 1)$ எனில், x என்பது அடிமானம் a உடைய b-ன் மடக்கையாகும். இதை $x = \log_a b$ என எழுதுவோம்.
- பெருக்கல் விதி : $\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N$; a, M,N மிகை எண்கள், $a \neq 1$
- வகுத்தல் விதி : $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$; a, M, N மிகை எண்கள், $a \neq 1$
- அடுக்கு விதி : $\log_a (M)^n = n \log_a M$; a, M மிகை எண்கள், $a \neq 1$
- அடிமான மாற்றல் விதி : $\log_a M = \log_b M \times \log_a b, a \neq 1, b \neq 1$.
- ஒரு மடக்கையின் முழுஎண் பகுதி நேர்க்கூறு *(characteristic)* எனவும் தசமப்பின்னப் பகுதி பதின்மானக்கூறு *(mantisa)* எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

4 இயற்கணிதம்

Mathematics is as much an aspect of culture as it is a collection of algorithms

- CARL BOYER

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகைப்படுத்துதல்.
- மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துதல்.
- காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துதல்.
- இயற்கணித முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்துதல்.
- பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்துதல்.
- இரு மாறிகளில் உள்ள நேரியச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்.
- ஒரு மாறியில் உள்ள அசமன்பாட்டைத் தீர்த்தல்.

டையோபாண்டஸ்

(கி.பி.200 - கி.பி.284)
அல்லது
(கி.பி 214 -கி.பி 298)

சிர்க்கா என்ற நகரத்தில் வாழ்ந்த டையோபாண்டஸ் *(Diophantus)* ஒரு ஹெல்லனிஸ்டிக் கணித அறிஞர் ஆவார். அவர் வாழ்ந்த காலம் தெளிவாகத் தெரியாததால் நூறு ஆண்டுகளுக்கு முன்பே வாழ்ந்திருக்கலாம் எனவும் கருதப்படுகிறது. பதிமூன்று நூல்கள் அடங்கிய ஒரு கணிதப்புதையலான அரித்மெடிக்கா என்ற நூல்களின் தொகுப்பினை எழுதினார். ஆனால் அவற்றில் எஞ்சியுள்ளவை முதல் ஆறு நூல்கள் மட்டுமே. வடிவியல் முறைகளிலிருந்தும் பாபிலோனிய கணிதவியலிலிருந்தும் அவை மாறுபட்டவை. மேலும் இவர் தோராய **தீர்வு**களுக்கு பதிலாக மிகச்சரியான **தீர்வு**களை முதன்மைப்படுத்தினார். ஆகவே அரித்மெடிக்கா நூலானது கிரேக்க பாரம்பரிய கணிதவியலுடன் சிறிதளவே பொதுவாக இருந்தது.

4.1 அறிமுகம்

இயற்கணிதம் என்பது புரிந்து கொள்ள இயலாத கருத்துக்களை கொண்ட மிகவும் கடினமான தொடர்புகளைச் சுருக்கமாக, தெளிவாக, வேகமாக மற்றும் கேட்பவர்களைச் சிந்திக்கும் படியாக எடுத்துக் கூறுவதாகும். $ax = b$ என்ற நேரியச் சமன்பாடு, $ax^2 + bx = c$ என்ற இருபடிச் சமன்பாடு மற்றும் $x^2 + y^2 = z^2$ போன்ற பல்வேறு மாறிகளை உடைய தீர்மானிக்க முடியாத சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க பழங்கால எகிப்து மற்றும் பாபிலோனியா மக்கள் அறிய முற்பட்டதிலிருந்து இயற்கணித வரலாறு ஆரம்பிக்கிறது. 4000 வருடங்களுக்கும் மேலாக இது வளர்ச்சிப் பெற்றுள்ளது. ஆனால் 17 ஆம் நூற்றாண்டின் மத்தியில் விவரிக்கப்பட்ட இயற்கணித எளிய கணக்குகள் மற்றும் தொடர்புகள் நாம் இன்றைய நிலையில் குறிப்பிடப்படுவது போல இருந்தது. 20ஆம் நூற்றாண்டின் முற்பகுதியில் இயற்கணிதமானது அடிகோள்களின் தொகுப்பாக உருவெடுத்தது. பின்னர் இந்த அடிகோள் உத்திகள் நவீன இயற்கணிதம் எனக் கூறப்பட்டது. புதிய முக்கியமான முடிவுகள் கண்டறியப்பட்டன. மேலும் இயற்கணிதம் கணிதத்தின் அனைத்துத் துறைகளிலும் மற்றும் அறிவியலின் பற்பல துறைகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

4.2 இயற்கணிதக் கோவைகள் (Algebraic Expressions)

கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் என்ற நான்கு அடிப்படைக் கணிதச் செயல்கள், அடுக்குக்குறிகள் அல்லது

மூலங்களைக் கண்டெடுத்தல் ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி எண்கள் மற்றும் மாறிகளின் இணைப்பைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் கோவைதான் ஒரு இயற்கணிதக் கோவை.

எடுத்துக்காட்டாக, $7,\ x,\ 2x-3y+1,\ \frac{5x^3-1}{4xy+1},\ \pi r^2$ மற்றும் $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ என்பன இயற்கணிதக் கோவைகள். சில மாறிகளின் கோவை என்பது அம்மாறிகளை மட்டுமே கொண்டுள்ள கோவை எனப் பொருள்படும். ஒரு இயற்கணிதக் கோவையில் மாறிகளே இல்லாவிடில் அது மாறிலி எனப் பொருள்படும். ஒரு இயற்கணிதக் கோவையில் மாறிகளுக்கு எண்களை பிரதியிடப்படும் போது கிடைக்கப்பெறும் விளைவெண் அம்மாறிகளின் மதிப்புகளுக்குண்டான கோவையின் மதிப்பு எனப்படும்.

ஒரு இயற்கணிதக் கோவையின் பகுதிகள் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் குறிகளால் இணைக்கப்பட்டிருந்தால் அது இயற்கணிதக் கூடுதல் எனப்படும். ஒவ்வொரு பகுதியும் அதற்கு முன்னால் உள்ள குறியுடன் சேர்த்து ஒரு உறுப்பு எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $3x^2y-\frac{4xz^2}{y}+\pi x^{-1}y$ என்ற இயற்கணிதக் கூடுதலில் $3x^2y,\ -\frac{4xz^2}{y}$ மற்றும் $\pi x^{-1}y$ ஆகியன உறுப்புகளாகும்.

ஒரு உறுப்பின் ஏதேனும் ஒருபகுதி மீதமுள்ள பகுதியுடன் பெருக்கப்பட்டிருப்பின், அப்பகுதியானது மீதமுள்ள பகுதியின் கெழு அல்லது குணகம் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $-\frac{4xz^2}{y}$ என்ற உறுப்பில் $\frac{z^2}{y}$ -ன் கெழு $-4x$ மற்றும் $\frac{xz^2}{y}$-ன் கெழு –4 ஆகும். –4 ஐப் போன்று மாறிகளில்லாத கெழு எண்கெழு எனப்படும். $5x^2y$ மற்றும் $-12x^2y$ போன்ற உறுப்புகள் எண்கெழுக்களில் மட்டுமே வேறுபட்டுள்ளதால், இவைகள் ஒத்த உறுப்புகள் எனப்படும்.

$4\pi r^2$ போன்ற இயற்கணிதக் கோவை ஒரே ஒரு உறுப்பைக் கொண்ட இயற்கணிதக் கோவையாக கருதப்படும். இவ்வாறான ஒரு உறுப்பைக் கொண்ட கோவையானது ஓருறுப்புக் கோவை எனப்படும். இரண்டு உறுப்புகளைக் கொண்ட கோவையானது ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $3x^2+2xy$ என்பது ஒரு ஈருறுப்புக் கோவை. அதேபோன்று $-2xy^{-1}+3\sqrt{x}-4$ என்பது ஒரு மூவுறுப்புக் கோவை எனவும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட கோவை ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எனவும் அழைக்கலாம்.

4.3 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (Polynomials)

வகுத்திகளில் மாறிகள் இல்லாததும், மூலக் குறிகளின் உள்ளே மாறிகள் இல்லாததும் மற்றும் மிகை முழுக்களை அடுக்குகளாகக் கொண்ட, மாறிகளைக் கொண்டு அமையும் இயற்கணிதக் கோவை ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, $-2xy^{-1}+3\sqrt{x}-4$ என்ற மூவுறுப்புக் கோவை ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையல்ல. இருப்பினும் $3x^2y^4+\sqrt{2}\,xy-\frac{1}{2}$ என்ற மூவுறுப்புக் கோவை x மற்றும் y என்ற மாறிகளைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். மாறிகளில்லாத $-\frac{1}{2}$ என்ற உறுப்பு பல்லுறுப்புக் கோவையின் மாறிலியாகும். பல்லுறுப்புக் கோவையிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்கெழுக்கள் பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுக்களாகும். மேலேயுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுக்கள் 3, $\sqrt{2}$ மற்றும் $-\frac{1}{2}$ ஆகும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையிலுள்ள ஒரு உறுப்பின் படி என்பது அவ்வுறுப்பிலுள்ள மாறிகளின் அடுக்குகளின் கூடுதல் ஆகும். அடுக்குகளைக் கூட்டும் போது ஒரு மாறியில் அடுக்கு இல்லையெனில் அதன் அடுக்கு ஒன்று எனக் கருதவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, $9xy^7 - 12x^3yz^2 + 3x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் $9xy^7$ என்ற உறுப்பின் படி $1 + 7 = 8$ மற்றும் $-12x^3yz^2$ என்ற உறுப்பின் படி $3 + 1 + 2 = 6$ மற்றும் $3x$ என்ற உறுப்பின் படி 1 ஆகும். மாறிலி உறுப்பின் படி பூச்சியம் என எப்போதும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் பூச்சியமல்லாத கெழுவைக் கொண்ட உறுப்புகளில் மிக உயர்ந்த படி கொண்ட உறுப்பின் படி அப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி (degree) எனக் கூறப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, மேலே எடுத்துக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 8. 0 என்ற ஒருறுப்பு மாறிலியும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் கருதப்பட்டாலும் இந்த குறிப்பிட்ட பல்லுறுப்பு கோவைக்கு படி வரையறுக்கப் படவில்லை.

4.3.1 ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

இப்பாடப் பகுதியில் ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகளை மட்டுமே நாம் எடுத்துக் கொள்வோம்.

முக்கிய கருத்து — ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவை

x என்ற ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் இயற்கணித அமைப்பு

$$\mathrm{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \;\; a_n \neq 0$$

இங்கு $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ ஆகியன மாறிலிகள் மற்றும் n என்பது ஒரு குறையற்ற மிகை முழு.

இங்கு, n என்பது பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி மற்றும் $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ என்பன பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுக்கள். a_0 என்பது மாறிலி உறுப்பு. $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, \cdots, a_2x^2, a_1x, a_0$. ஆகியன பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$-ன் உறுப்புகள். எடுத்துக்காட்டாக, $5x^2 + 3x - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் x^2 - ன் கெழு 5, x -ன் கெழு 3 மற்றும் -1 என்பது மாறிலி. இப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் மூன்று உறுப்புகள் $5x^2, 3x$ மற்றும் -1 ஆகும்.

4.3.2 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைகள்

முக்கிய கருத்து — உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அடிப்படையிலான பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைகள்

ஒருறுப்புக் கோவை

ஒரே ஒரு உறுப்பைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

ஈருறுப்புக் கோவை

இரண்டு உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

மூவுறுப்புக் கோவை

மூன்று உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை மூவுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

குறிப்பு

1. ஒரு ஈருறுப்புக் கோவையானது, வெவ்வேறு படிகளைக் கொண்ட இரண்டு ஒருறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல் ஆகும்.
2. ஒரு மூவுறுப்புக் கோவையானது, வெவ்வேறு படிகளைக் கொண்ட மூன்று ஒருறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல் ஆகும்.
3. ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையானது, ஒருறுப்புக் கோவை அல்லது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட ஒருறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல் ஆகும்.

முக்கிய கருத்து **படியின் அடிப்படையில் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைகள்**

மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை

படி பூச்சியமாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும்.

இதன் பொதுவடிவம் : $p(x) = c$, இங்கு c ஒரு மெய்யெண்.

ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லது நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை

படி ஒன்றாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும்.

இதன் பொதுவடிவம் : $p(x) = ax+b$, a மற்றும் b மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.

இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை

படி இரண்டாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

இதன் பொது வடிவம்: $ax^2 + bx + c$, இங்கு a, b மற்றும் c ஆகியன மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.

முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை

படி மூன்றாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

இதன் பொது வடிவம் : $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ இங்கு a, b, c மற்றும் d ஆகியன மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.

எடுத்துக்காட்டு 4.1

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அவற்றின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து வகைப்படுத்துக.

(i) $x^3 - x^2$	(ii) $5x$	(iii) $4x^4 + 2x^3 + 1$	(iv) $4x^3$
(v) $x + 2$	(vi) $3x^2$	(vii) $y^4 + 1$	(viii) $y^{20} + y^{18} + y^2$
(ix) 6	(x) $2u^3 + u^2 + 3$	(xi) $u^{23} - u^4$	(xii) y

தீர்வு

$5x$, $3x^2$, $4x^3$, y மற்றும் 6 என்பன ஒருறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், இவற்றில் ஒரே ஒரு உறுப்பு உள்ளது.

$x^3 - x^2$, $x + 2$, $y^4 + 1$ மற்றும் $u^{23} - u^4$ என்பன ஈருறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், இவற்றில் இரண்டு உறுப்புகள் உள்ளன.

$4x^4 + 2x^3 + 1$, $y^{20} + y^{18} + y^2$ மற்றும் $2u^3 + u^2 + 3$ என்பன மூவுறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், இவற்றில் மூன்று உறுப்புகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 4.2

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அவற்றின் படிகளைப் பொறுத்து வகைப்படுத்துக.

(i) $p(x) = 3$ (ii) $p(y) = \frac{5}{2}y^2 + 1$ (iii) $p(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 1$

(iv) $p(x) = 3x^2$ (v) $p(x) = x + 3$ (vi) $p(x) = -7$

(vii) $p(x) = x^3 + 1$ (viii) $p(x) = 5x^2 - 3x + 2$ (ix) $p(x) = 4x$

(x) $p(x) = \frac{3}{2}$ (xi) $p(x) = \sqrt{3}\,x + 1$ (xii) $p(y) = y^3 + 3y$

தீர்வு

$p(x) = 3,\ p(x) = -7,\ p(x) = \frac{3}{2}$ என்பன மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவைகள்.

$p(x) = x + 3,\ p(x) = 4x,\ p(x) = \sqrt{3}\,x + 1$ என்பன ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், மாறி x-ன் மிக உயர்ந்த படி 1.

$p(x) = 5x^2 - 3x + 2,\ p(y) = \frac{5}{2}y^2 + 1,\ p(x) = 3x^2$ என்பன இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், மாறியின் மிக உயர்ந்த படி 2.

$p(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 1,\ p(x) = x^3 + 1,\ p(y) = y^3 + 3y$ என்பன முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், மாறியின் மிக உயர்ந்த படி 3.

பயிற்சி 4.1

1. பின்வரும் இயற்கணிதக் கோவைகள் ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவையா எனக் கூறு. உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறுக.

   (i) $2x^5 - x^3 + x - 6$ (ii) $3x^2 - 2x + 1$ (iii) $y^3 + 2\sqrt{3}$

   (iv) $x - \frac{1}{x}$ (v) $\sqrt[3]{t} + 2t$ (vi) $x^3 + y^3 + z^6$

2. பின்வரும் ஒவ்வொன்றிலும் x^2 மற்றும் x-ன் கெழுக்களைக் காண்க.

   (i) $2 + 3x - 4x^2 + x^3$ (ii) $\sqrt{3}\,x + 1$ (iii) $x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + 4x - 1$

   (iv) $\frac{1}{3}x^2 + x + 6$

3. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் ஒவ்வொன்றின் படியினைக் காண்க.

   (i) $4 - 3x^2$ (ii) $5y + \sqrt{2}$ (iii) $12 - x + 4x^3$ (iv) 5

4. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அவற்றின் படியினைப் பொறுத்து வகைப்படுத்துக.

   (i) $3x^2 + 2x + 1$ (ii) $4x^3 - 1$ (iii) $y + 3$

   (iv) $y^2 - 4$ (v) $4x^3$ (vi) $2x$

5. படி 27 ஆக உள்ள ஒரு ஈருறுப்புக் கோவை, படி 49 ஆக உள்ள ஒரு ஒருறுப்புக் கோவை, படி 36 ஆக உள்ள ஒரு மூவுறுப்புக் கோவை ஆகியவற்றிக்கு ஓர் உதாரணம் தருக.

4.3.3 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்கள்

$p(x) = x^2 - x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கருதுக. $x = -1$, $x = 1$ மற்றும் $x = 2$ எனில், $p(x)$ - ன் மதிப்புகளைக் காண்போம்.

$$p(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$
$$p(1) = (1)^2 - 1 - 2 = 1 - 1 - 2 = -2$$
$$p(2) = (2)^2 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$$

அதாவது, $x = -1, 1$ மற்றும் 2 எனும் போது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$-ன் மதிப்புகள் முறையே 0, –2 மற்றும் 0 ஆகும்.

மாறியின் சில மதிப்புகளுக்கு பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சியம் எனில், அந்த மதிப்பு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம் எனப்படும்.

$p(-1) = 0$. எனவே $x = -1$ என்பது $p(x) = x^2 - x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு பூச்சியம் ஆகும். இதேபோன்று, $x = 2$ எனில், $p(2) = 0$. எனவே $x = 2$ என்பதுவும் $p(x)$-ன் ஒரு பூச்சியம் ஆகும்.

முக்கிய கருத்து	பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம்
$p(x)$ என்பது x-ல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்க. $p(a) = 0$ எனில், a என்பது $p(x)$-ன் ஒரு பூச்சியம் எனக் கூறுவோம்.	

குறிப்பு ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை பல்லுறுப்புக் கோவையின் படிக்கு சமமாகவோ அல்லது அதற்குக் குறைவாகவோ இருக்கும். கார்ல் பிரெடெரிக் காஸ் (1777 - 1855) என்பவர் 1798 ஆம் ஆண்டு தனது ஆராய்ச்சிப் பட்டப் படிப்புக் கட்டுரையில் n படி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு சரியாக n **தீர்வு**கள் உண்டு என நிரூபித்துள்ளார். இந்த முக்கியமான முடிவு இயற்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.3

$p(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 9$ எனில், (i) $p(-1)$ மற்றும் (ii) $p(2)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு $p(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 9$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) $p(-1) = 5(-1)^3 - 3(-1)^2 + 7(-1) - 9 = -5 - 3 - 7 - 9$

$\therefore\ p(-1) = -24$

(ii) $p(2) = 5(2)^3 - 3(2)^2 + 7(2) - 9 = 40 - 12 + 14 - 9$

$\therefore\ p(2) = 33$

எடுத்துக்காட்டு 4.4

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களைக் காண்க.

(i) $p(x) = 2x - 3$ (ii) $p(x) = x - 2$

தீர்வு

(i) $p(x) = 2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $p\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) = 2(0) = 0$ என நாம் பெறுகிறோம்.

$\therefore\ x = \frac{3}{2}$ என்பது $p(x)$-ன் பூச்சியம் ஆகும்.

(ii) $p(x) = x - 2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இப்போது, $p(2) = 2 - 2 = 0$

$\therefore\ x = 2$ என்பது $p(x)$- ன் பூச்சியம் ஆகும்.

4.3.4 பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள்

$p(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. பின்னர் $p(x) = 0$ என்பது x-ல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு எனப்படும்.

$p(x) = x - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக் கொள்க. $x = 1$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = x - 1$-ன் பூச்சியம் ஆகும். இப்போது, $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்க. அதாவது, $x - 1 = 0$-ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். $x - 1 = 0$ எனில், $x = 1$ ஆகும். $x = 1$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு $p(x) = 0$-ன் மூலம் ஆகும்.

எனவே, பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள், ஒத்த பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆகும்.

முக்கிய கருத்து	பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலம்
$x = a$ என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்தால், $x = a$ என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் எனப்படும்.	

எடுத்துக்காட்டு 4.5

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களைக் காண்க.

(i) $x - 6 = 0$ (ii) $2x + 1 = 0$

தீர்வு

(i) $x - 6 = 0$ எனில், $x = 6$

$\therefore\ x = 6$ என்பது $x - 6 = 0$ -ன் ஒரு மூலம் ஆகும்.

(ii) $2x + 1 = 0$ எனில், $2x = -1 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ x = -\frac{1}{2}$ என்பது $2x + 1 = 0$ -ன் ஒரு மூலம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.6

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளுக்கு அவற்றிற்கு எதிரே குறிப்பிட்டுள்ளவைகள் மூலங்களா என ஆராய்க.

(i) $2x^2 - 3x - 2 = 0;\quad x = 2, 3$

(ii) $x^3 + 8x^2 + 5x - 14 = 0;\quad x = 1, 2$

தீர்வு

(i) $p(x) = 2x^2 - 3x - 2$ என்க.

இப்போது, $p(2) = 2(2)^2 - 3(2) - 2 = 8 - 6 - 2 = 0$

$\therefore\quad x = 2$ என்பது $2x^2 - 3x - 2 = 0$-ன் ஒரு மூலம்ஆகும்.

ஆனால், $p(3) = 2(3)^2 - 3(3) - 2 = 18 - 9 - 2 = 7 \neq 0$

$\therefore\quad x = 3$ என்பது $2x^2 - 3x - 2 = 0$-ன் ஒரு மூலம் ஆகாது.

(ii) $p(x) = x^3 + 8x^2 + 5x - 14$ என்க.

$p(1) = (1)^3 + 8(1)^2 + 5(1) - 14 = 1 + 8 + 5 - 14 = 0$

$\therefore\quad x = 1$ என்பது $x^3 + 8x^2 + 5x - 14 = 0$-ன் ஒரு மூலம் ஆகும்.

ஆனால், $p(2) = (2)^3 + 8(2)^2 + 5(2) - 14 = 8 + 32 + 10 - 14 = 36 \neq 0$

$\therefore\quad x = 2$ என்பது $x^3 + 8x^2 + 5x - 14 = 0$-ன் ஒரு மூலம் ஆகாது.

பயிற்சி 4.2

1. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களைக் காண்க.
   (i) $p(x) = 4x - 1$ (ii) $p(x) = 3x + 5$ (iii) $p(x) = 2x$ (iv) $p(x) = x + 9$
2. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களைக் காண்க.
   (i) $x - 3 = 0$ (ii) $5x - 6 = 0$ (iii) $11x + 1 = 0$ (iv) $-9x = 0$
3. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளுக்கு, அவற்றிக்கு எதிரே குறிப்பிட்டுள்ளவைகள் மூலங்களா என ஆராய்க.
   (i) $x^2 - 5x + 6 = 0;\quad x = 2, 3$ (ii) $x^2 + 4x + 3 = 0;\quad x = -1, 2$
   (iii) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0;\ x = 1, -2, 3$ (iv) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0;\ x = -1, 2, 3$

4.4 மீதித் தேற்றம் (Remainder Theorem)

மீதித் தேற்றம்

$p(x)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. $p(x)$-ஐ $(x - a)$ என்ற நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(a)$ ஆகும்.

குறிப்பு

1. $p(x)$-ஐ $(x+a)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(-a)$ ஆகும்.
2. $p(x)$-ஐ $(ax-b)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p\left(\frac{b}{a}\right)$ ஆகும்.
3. $p(x)$-ஐ $(ax+b)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p\left(-\frac{b}{a}\right)$ ஆகும்.
4. இங்கு $-a$, $\frac{b}{a}$ மற்றும் $-\frac{b}{a}$ ஆகியவைகள் முறையே வகுத்திகள் $x+a$, $ax-b$ மற்றும் $ax+b$ ஆகியவற்றின் பூச்சியங்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.7

$4x^3-5x^2+6x-2$ ஐ $(x-1)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு $p(x)=4x^3-5x^2+6x-2$ என்க. $x-1$-ன் பூச்சியம் 1.

$p(x)$ ஐ $(x-1)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(1)$ ஆகும்.

இப்போது, $p(1) = 4(1)^3-5(1)^2+6(1)-2$

$= 4-5+6-2 = 3$

$\therefore$ மீதி $= 3$.

எடுத்துக்காட்டு 4.8

x^3-7x^2-x+6 ஐ $(x+2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு $p(x)=x^3-7x^2-x+6$ என்க. $x+2$-ன் பூச்சியம் -2 ஆகும்.

$p(x)$ ஐ $(x+2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(-2)$ ஆகும்.

இப்போது, $p(-2) = (-2)^3-7(-2)^2-(-2)+6$

$= -8-7(4)+2+6$

$= -8-28+2+6 = -28$

$\therefore$ மீதி $= -28$

எடுத்துக்காட்டு 4.9

$2x^3-6x^2+5ax-9$ என்பதை $(x-2)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 13 எனில், a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $p(x)=2x^3-6x^2+5ax-9$ என்க. $(x-2)$-ன் பூச்சியம் 2.

$p(x)$-ஐ $(x-2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(2)$ ஆகும்.

$p(2)= 13$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\Longrightarrow \quad 2(2)^3-6(2)^2+5a(2)-9 = 13$$

$$2(8)-6(4)+10a-9 = 13$$

$$16-24+10a-9 = 13$$

$$10a-17 = 13$$

$$10a = 30$$

$$\therefore \quad a = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 4.10

$x^3 + ax^2 - 3x + a$ ஐ $(x + a)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு

$p(x) = x^3 + ax^2 - 3x + a$ என்க.

$p(x)$-ஐ $(x + a)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(-a)$ ஆகும்.

$p(-a) = (-a)^3 + a(-a)^2 - 3(-a) + a = -a^3 + a^3 + 4a = 4a$

$\therefore$ மீதி $= 4a$.

எடுத்துக்காட்டு 4.11

$f(x) = 12x^3 - 13x^2 - 5x + 7$ ஐ $(3x + 2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு $f(x) = 12x^3 - 13x^2 - 5x + 7$.

$f(x)$-ஐ $(3x + 2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ ஆகும்.

இப்போது,
$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 12\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 13\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 5\left(-\frac{2}{3}\right) + 7$$
$$= 12\left(-\frac{8}{27}\right) - 13\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{10}{3} + 7$$
$$= -\frac{32}{9} - \frac{52}{9} + \frac{10}{3} + 7 = \frac{9}{9} = 1$$

$\therefore$ மீதி $= 1$.

எடுத்துக்காட்டு 4.12

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $2x^3 + ax^2 + 4x - 12$ மற்றும் $x^3 + x^2 - 2x + a$ ஆகியவற்றை $(x - 3)$ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதிகள் சமம் எனில், a-ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் மீதியையும் காண்க.

தீர்வு $p(x) = 2x^3 + ax^2 + 4x - 12$

மற்றும் $q(x) = x^3 + x^2 - 2x + a$ என்க.

$p(x)$-ஐ $(x - 3)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(3)$ ஆகும்.

இப்போது,
$$p(3) = 2(3)^3 + a(3)^2 + 4(3) - 12$$
$$= 2(27) + a(9) + 12 - 12$$
$$= 54 + 9a \qquad (1)$$

$q(x)$-ஐ $(x - 3)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $q(3)$ ஆகும்.

இப்போது,
$$q(3) = (3)^3 + (3)^2 - 2(3) + a$$
$$= 27 + 9 - 6 + a$$
$$= 30 + a \qquad (2)$$

மீதிகள் சமம் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், $p(3) = q(3)$ ஆகும்.

அதாவது, $54 + 9a = 30 + a$ ((1), (2) ஆகியவற்றின் படி)

$$9a - a = 30 - 54$$

$$8a = -24$$

$$\therefore a = -\frac{24}{8} = -3$$

$a = -3$ என $p(3)$-ல் பதிலிட, நாம் பெறுவது

$$p(3) = 54 + 9(-3) = 54 - 27 = 27$$

$\therefore$ மீதி $= 27$.

பயிற்சி 4.3

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் பல்லுறுப்புக் கோவையை இரண்டாம் பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதியை மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.
   (i) $3x^3 + 4x^2 - 5x + 8$, $x - 1$
   (ii) $5x^3 + 2x^2 - 6x + 12$, $x + 2$
   (iii) $2x^3 - 4x^2 + 7x + 6$, $x - 2$
   (iv) $4x^3 - 3x^2 + 2x - 4$, $x + 3$
   (v) $4x^3 - 12x^2 + 11x - 5$, $2x - 1$
   (vi) $8x^4 + 12x^3 - 2x^2 - 18x + 14$, $x + 1$
   (vii) $x^3 - ax^2 - 5x + 2a$, $x - a$
2. $2x^3 - ax^2 + 9x - 8$ ஐ $(x - 3)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 28 எனில், a-ன் மதிப்பைக் காண்க.
3. $(x + 2)$ ஆல் வகுக்கும் போது $x^3 - 6x^2 + mx + 60$ எனும் கோவையானது மீதி 2 ஐத் தருமானால் m-ன் மதிப்பைக் காண்க.
4. $(x - 1)$ என்பது $mx^3 - 2x^2 + 25x - 26$ ஐ மீதியின்றி வகுக்கிறது எனில், m-ன் மதிப்பைக் காண்க.
5. பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $x^3 + 3x^2 - m$ மற்றும் $2x^3 - mx + 9$ ஆகியவற்றை $(x - 2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதிகள் சமம் எனில், m-ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் மீதியையும் காண்க.

4.5 காரணித் தேற்றம் (Factor Theorem)

காரணித் தேற்றம்

$p(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. $p(a) = 0$ எனில், $(x - a)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

குறிப்பு $p(x)$-ன் ஒரு காரணி $(x - a)$ எனில், $p(a) = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.13

$(x-5)$ என்பது $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.

தீர்வு காரணித் தேற்றத்தின்படி, $p(5) = 0$ எனில், $(x-5)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

இப்போது,
$$\begin{aligned} p(5) &= 2(5)^3 - 5(5)^2 - 28(5) + 15 \\ &= 2(125) - 5(25) - 140 + 15 \\ &= 250 - 125 - 140 + 15 = 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ $(x-5)$ என்பது $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.14

$(x-2)$ என்பது $2x^3 - 6x^2 + 5x + 4$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.

தீர்வு $p(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x + 4$ என்க.

காரணித் தேற்றத்தின் படி, $p(2) = 0$ எனில், $(x-2)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

இப்போது, $p(2) = 2(2)^3 - 6(2)^2 + 5(2) + 4 = 2(8) - 6(4) + 10 + 4$

$= 16 - 24 + 10 + 4 = 6 \neq 0$

$\therefore$ $(x-2)$ என்பது $2x^3 - 6x^2 + 5x + 5$-ன் ஒரு காரணி ஆகாது.

எடுத்துக்காட்டு 4.15

$(2x-3)$ என்பது $2x^3 - 9x^2 + x + 12$ -ன் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.

தீர்வு $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$ என்க. காரணித் தேற்றத்தின் படி, $p\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ எனில், $(2x-3)$ என்பது $p(x)$ -ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

இப்போது,
$$\begin{aligned} p\left(\frac{3}{2}\right) &= 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + 12 = 2\left(\frac{27}{8}\right) - 9\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} + 12 \\ &= \frac{27}{4} - \frac{81}{4} + \frac{3}{2} + 12 = \frac{27 - 81 + 6 + 48}{4} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ $(2x-3)$ என்பது $2x^3 - 9x^2 + x + 12$ -ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.16

$(x-1)$ என்பது $x^3 + 5x^2 + mx + 4$-ன் ஒரு காரணி எனில், m-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $p(x) = x^3 + 5x^2 + mx + 4$ என்க

$(x-1)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, $p(1) = 0$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} p(1) = 0 &\Longrightarrow (1)^3 + 5(1)^2 + m(1) + 4 = 0 \\ &\Longrightarrow 1 + 5 + m + 4 = 0 \\ m + 10 &= 0 \\ \therefore m &= -10 \end{aligned}$$

பயிற்சி 4.4

1. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு $(x+1)$ என்பது ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.
   (i) $6x^4+7x^3-5x-4$ (ii) $2x^4+9x^3+2x^2+10x+15$
   (iii) $3x^3+8x^2-6x-5$ (iv) $x^3-14x^2+3x+12$
2. $(x+4)$ என்பது $x^3+3x^2-5x+36$-ன் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.
3. காரணித் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $(x-1)$ என்பது $4x^3-6x^2+9x-7$-ன் ஒரு காரணி எனக் காண்பி.
4. $(2x+1)$ என்பது $4x^3+4x^2-x-1$-ன் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.
5. $(x+3)$ என்பது $x^3-3x^2-px+24$-ன் ஒரு காரணி எனில், p-ன் மதிப்பைக் காண்க.

4.6 இயற்கணித முற்றொருமைகள் (Algebraic Identities)

முக்கிய கருத்து	இயற்கணித முற்றொருமைகள்
ஒரு சமன்பாடு அதிலுள்ள மாறிகளின் எம்மதிப்புக்கும் உண்மையாகவே இருக்குமானால், அச்சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமை எனப்படும்.	

பின்வரும் முற்றொருமைகளை எட்டாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறோம். முதலில் அவற்றை பயன்படுத்தி சில கணக்குகளைத் தீர்ப்போம். இம்முற்றொருமைகளை விரிவாக்கி மூன்றாம் படியில் உள்ள மூவுறுப்புக் கோவைகளுக்குத் **தீர்வு** காண்போம்.

$$(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2 \qquad (a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$$
$$(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2 \qquad (x+a)(x+b) \equiv x^2+(a+b)x+ab$$

எடுத்துக்காட்டு 4.17

முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றை விரித்தெழுதுக.

(i) $(2a+3b)^2$ (ii) $(3x-4y)^2$ (iii) $(4x+5y)(4x-5y)$ (iv) $(y+7)(y+5)$

தீர்வு

(i) $(2a+3b)^2 = (2a)^2+2(2a)(3b)+(3b)^2$
$= 4a^2+12ab+9b^2$

(ii) $(3x-4y)^2 = (3x)^2-2(3x)(4y)+(4y)^2$
$= 9x^2-24xy+16y^2$

(iii) $(4x+5y)(4x-5y) = (4x)^2-(5y)^2$
$= 16x^2-25y^2$

(iv) $(y+7)(y+5) = y^2+(7+5)y+(7)(5)$
$= y^2+12y+35$

4.6.1 $(x \pm y \pm z)^2$ –ன் விரிவாக்கம்

(i) $(x+y+z)^2 = (x+y+z)(x+y+z)$

$= x(x+y+z) + y(x+y+z) + z(x+y+z)$

$= x^2 + xy + xz + yx + y^2 + yz + zx + zy + z^2$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

$$\boxed{(x+y+z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx}$$

(ii) $(x-y+z)^2 = [x+(-y)+z]^2$

$= x^2 + (-y)^2 + z^2 + 2(x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(x)$

$= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx$

$(x-y+z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx$

இதேபோன்று, பின்வரும் விரிவாக்கங்களும் கிடைக்கின்றன.

(iii) $(x+y-z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx$

(iv) $(x-y-z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

எடுத்துக்காட்டு 4.18

விரித்தெழுதுக (i) $(2x+3y+5z)^2$ (ii) $(3a-7b+4c)^2$ (iii) $(3p+5q-2r)^2$
(iv) $(7l-9m-6n)^2$

தீர்வு

(i) $(2x+3y+5z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(3y)(5z) + 2(5z)(2x)$

$= 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy + 30yz + 20zx$

(ii) $(3a-7b+4c)^2$

$= (3a)^2 + (-7b)^2 + (4c)^2 + 2(3a)(-7b) + 2(-7b)(4c) + 2(4c)(3a)$

$= 9a^2 + 49b^2 + 16c^2 - 42ab - 56bc + 24ca$

(iii) $(3p+5q-2r)^2$

$= (3p)^2 + (5q)^2 + (-2r)^2 + 2(3p)(5q) + 2(5q)(-2r) + 2(-2r)(3p)$

$= 9p^2 + 25q^2 + 4r^2 + 30pq - 20qr - 12rp$

(iv) $(7l-9m-6n)^2$

$= (7l)^2 + (-9m)^2 + (-6n)^2 + 2(7l)(-9m) + 2(-9m)(-6n) + 2(-6n)(7l)$

$= 49l^2 + 81m^2 + 36n^2 - 126lm + 108mn - 84nl$

4.6.2 முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி $(x+a)(x+b)(x+c)$–ன் பெருக்கற்பலன் காணல்

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c) &= [(x+a)(x+b)](x+c)\\ &= [x^2+(a+b)x+ab](x+c)\\ &= x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+c(a+b)x+abc\\ &= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc\end{aligned}$$

$$\boxed{(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc}$$

4.6.3 $(x \pm y)^3$ -ன் விரிவாக்கம்

மேலே உள்ள முற்றொருமையில் $a = b = c = y$ என பிரதியிட,

$$(x+y)(x+y)(x+y) = x^3+(y+y+y)x^2+[(y)(y)+(y)(y)+(y)(y)]x+(y)(y)(y)$$

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= x^3+(3y)x^2+(3y^2)x+y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}$$

$$(x+y)^3 \equiv x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

(அல்லது) $$(x+y)^3 \equiv x^3+y^3+3xy(x+y)$$

மேலே உள்ள முற்றொருமையில் y-க்கு பதில் $-y$ என எடுத்துக்கொள்ள,

$$(x-y)^3 \equiv x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

(அல்லது) $$(x-y)^3 \equiv x^3-y^3-3xy(x-y)$$

4.6.2 மற்றும் 4.6.3-ல் உள்ள முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் கணக்குகளைத் தீர்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.19

பெருக்கற் பலன் காண்க. (i) $(x+2)(x+5)(x+7)$

(ii) $(a-3)(a-5)(a-7)$

(iii) $(2a-5)(2a+5)(2a-3)$

தீர்வு

(i) $(x+2)(x+5)(x+7)$

$$\begin{aligned}&= x^3+(2+5+7)x^2+[(2)(5)+(5)(7)+(7)(2)]x+(2)(5)(7)\\ &= x^3+14x^2+(10+35+14)x+70\\ &= x^3+14x^2+59x+70\end{aligned}$$

(ii) $(a-3)(a-5)(a-7) = [a+(-3)][a+(-5)][a+(-7)]$

$= a^3 + (-3-5-7)a^2 + [(-3)(-5)+(-5)(-7)+(-7)(-3)]a + (-3)(-5)(-7)$

$= a^3 - 15a^2 + (15+35+21)a - 105$

$= a^3 - 15a^2 + 71a - 105$

(iii) $(2a-5)(2a+5)(2a-3) = [2a+(-5)][2a+5][2a+(-3)]$

$= (2a)^3 + (-5+5-3)(2a)^2 + [(-5)(5)+(5)(-3)+(-3)(-5)](2a) + (-5)(5)(-3)$

$= 8a^3 + (-3)4a^2 + (-25-15+15)2a + 75$

$= 8a^3 - 12a^2 - 50a + 75$

எடுத்துக்காட்டு 4.20

$a+b+c = 15$ மற்றும் $ab+bc+ca = 25$ எனில், $a^2+b^2+c^2$ ஐ காண்க.

தீர்வு $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$.

எனவே, $15^2 = a^2+b^2+c^2+2(25)$

$225 = a^2+b^2+c^2+50$

$\therefore a^2+b^2+c^2 = 225-50 = 175$

எடுத்துக்காட்டு 4.21

விரித்தெழுதுக. (i) $(3a+4b)^3$ (ii) $(2x-3y)^3$

தீர்வு

(i) $(3a+4b)^3 = (3a)^3 + 3(3a)^2(4b) + 3(3a)(4b)^2 + (4b)^3$

$= 27a^3 + 108a^2b + 144ab^2 + 64b^3$

(ii) $(2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3$

$= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

எடுத்துக்காட்டு 4.22

தகுந்த முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் ஒவ்வொன்றினையும் மதிப்பிடுக.

(i) $(105)^3$ (ii) $(999)^3$

தீர்வு

(i) $(105)^3 = (100+5)^3$

$= (100)^3 + (5)^3 + 3(100)(5)(100+5)$ $(\because (x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y))$

$= 1000000 + 125 + 1500(105)$

$= 1000000 + 125 + 157500 = 1157625$

(ii) $(999)^3 = (1000-1)^3$

$$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000-1)$$

$$(\because (x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y))$$

$$= 1000000000 - 1 - 3000(999)$$

$$= 1000000000 - 1 - 2997000 = 997002999$$

x மற்றும் y-ன் கூட்டல், கழித்தல் மற்றும் பெருக்கலை உள்ளடக்கிய சில பயனுள்ள முற்றொருமைகள்.

$$\boxed{\begin{aligned} x^3 + y^3 &\equiv (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ x^3 - y^3 &\equiv (x-y)^3 + 3xy(x-y) \end{aligned}}$$

மேலே உள்ள முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி சில கணக்குகளைத் தீர்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.23

$x + y = 4$ மற்றும் $xy = 5$ எனில், $x^3 + y^3$ ஐக் காண்க.

தீர்வு $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore \quad x^3 + y^3 = (4)^3 - 3(5)(4) = 64 - 60 = 4$

எடுத்துக்காட்டு 4.24

$x - y = 5$ மற்றும் $xy = 16$ எனில், $x^3 - y^3$ ஐக் காண்க.

தீர்வு $x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore \quad x^3 - y^3 = (5)^3 + 3(16)(5) = 125 + 240 = 365$

எடுத்துக்காட்டு 4.25

$x + \frac{1}{x} = 5$ எனில், $x^3 + \frac{1}{x^3}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$y = \frac{1}{x}$ என பிரதியிட, $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$$= (5)^3 - 3(5) = 125 - 15 = 110$$

எடுத்துக்காட்டு 4.26

$y - \frac{1}{y} = 9$ எனில், $y^3 - \frac{1}{y^3}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$x = y, y = \frac{1}{y}$ என பிரதியிட, $y^3 - \frac{1}{y^3} = \left(y - \frac{1}{y}\right)^3 + 3\left(y - \frac{1}{y}\right)$

$$= (9)^3 + 3(9) = 729 + 27 = 756$$

பின்வரும் முற்றொருமை மேற்படிப்புகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

குறிப்பு $x+y+z = 0$ எனில், $x^3+y^3+z^3= 3xyz$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.27

சுருக்குக $(x + 2y + 3z)(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2xy - 6yz - 3zx)$

தீர்வு $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore \quad (x + 2y + 3z)(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2xy - 6yz - 3zx)$

$= (x + 2y + 3z)[x^2 + (2y)^2 + (3z)^2 - (x)(2y) - (2y)(3z) - (3z)(x)]$

$= (x)^3 + (2y)^3 + (3z)^3 - 3(x)(2y)(3z)$

$= x^3 + 8y^3 + 27z^3 - 18xyz$

எடுத்துக்காட்டு 4.28

மதிப்பிடுக $12^3 + 13^3 - 25^3$

தீர்வு $x = 12,\ y = 13,\ z = -25$ என்க. பின்னர்,

$$x + y + z = 12 + 13 - 25 = 0$$

$x + y + z = 0$ எனில், $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ என நமக்குத் தெரியும்.

$$\therefore 12^3 + 13^3 - 25^3 = 12^3 + 13^3 + (-25)^3 = 3(12)(13)(-25) = -11700$$

பயிற்சி 4.5

1. பின்வருவனவற்றை விரித்தெழுதுக.

   (i) $(5x + 2y + 3z)^2$ (ii) $(2a + 3b - c)^2$ (iii) $(x - 2y - 4z)^2$ (iv) $(p - 2q + r)^2$

2. விரிவுக் காண்க.

   (i) $(x + 1)(x + 4)(x + 7)$ (ii) $(p + 2)(p - 4)(p + 6)$

   (iii) $(x + 5)(x - 3)(x - 1)$ (iv) $(x - a)(x - 2a)(x - 4a)$

   (v) $(3x + 1)(3x + 2)(3x + 5)$ (vi) $(2x + 3)(2x - 5)(2x - 7)$

3. இயற்கணித முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி x^2-ன் கெழு, x-ன் கெழு மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளைக் காண்க.

   (i) $(x + 7)(x + 3)(x + 9)$ (ii) $(x - 5)(x - 4)(x + 2)$

   (iii) $(2x + 3)(2x + 5)(2x + 7)$ (iv) $(5x + 2)(1 - 5x)(5x + 3)$

4. $(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3 - 10x^2 + 45x - 15$ எனில், $a+b+c$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ மற்றும் $a^2+b^2+c^2$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. விரித்தெழுதுக : (i) $(3a+5b)^3$ (ii) $(4x-3y)^3$ (iii) $\left(2y-\frac{3}{y}\right)^3$

6. மதிப்புக் காண்க : (i) 99^3 (ii) 101^3 (iii) 98^3 (iv) 102^3 (v) 1002^3

7. $2x+3y=13$ மற்றும் $xy=6$ எனில், $8x^3+27y^3$ ஐக் காண்க.

8. $x-y=-6$ மற்றும் $xy=4$ எனில், x^3-y^3-ன் மதிப்பைக் காண்க.

9. $x+\frac{1}{x}=4$ எனில், $x^3+\frac{1}{x^3}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

10. $x-\frac{1}{x}=3$ எனில், $x^3-\frac{1}{x^3}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

11. சுருக்குக : (i) $(2x+y+4z)(4x^2+y^2+16z^2-2xy-4yz-8zx)$

(ii) $(x-3y-5z)(x^2+9y^2+25z^2+3xy-15yz+5zx)$

12. மதிப்புக் காண்க : (i) $6^3-9^3+3^3$ (ii) $16^3-6^3-10^3$

4.7 பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துதல் (Factorization of Polynomials)

இயற்கணித கோவைகளின் பெருக்கற் பலனைக் கோவைகளின் கூடுதலாகவோ அல்லது வித்தியாசமாகவோ எவ்வாறு பங்கீட்டு பண்பைப் பயன்படுத்தி பிரித்து எழுதுவதைப் பற்றி கண்டோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $x(x+y) = x^2 + xy$

(ii) $x(y-z) = xy - xz$

(iii) $a(a^2-2a+1) = a^3 - 2a^2 + a$

இனி, கோவைகளின் கூடுதல் அல்லது வித்தியாசங்களை எவ்வாறு பெருக்கற் பலனாக மாற்றுவது என்பதைக் கற்போம்.

இப்போது, $ab+ac$ -ஐ எடுத்துக்கொள்க. பங்கீட்டு விதியைப் பயன்படுத்தி $a(b+c) = ab+ac$ என்பதை மாற்றுமுறையில் $ab+ac = a(b+c)$ என எழுதலாம். இம்முறையில் $ab+ac$ என்பதை $a(b+c)$ என எழுதுவது காரணிபடுத்துதல் எனப்படும். ab மற்றும் ac என்ற இரண்டு உறுப்புகளில் a என்பது ஒரு பொதுக் காரணி. இதேபோன்று,

$5m + 15 = 5(m) + 5(3) = 5(m+3)$.

$b(b-5) + g(b-5)$ ல் $(b-5)$ என்பது பொதுக் காரணி.

$b(b-5) + g(b-5) = (b-5)(b+g)$

எடுத்துக்காட்டு 4.29

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $pq + pr - 3ps$ (ii) $4a - 8b + 5ax - 10bx$ (iii) $2a^3 + 4a^2$ (iv) $6a^5 - 18a^3 + 42a^2$

தீர்வு

(i) $pq + pr - 3ps = p(q + r - 3s)$

(ii) $4a - 8b + 5ax - 10bx = (4a - 8b) + (5ax - 10bx)$

$= 4(a - 2b) + 5x(a - 2b) = (a - 2b)(4 + 5x)$

(iii) $2a^3 + 4a^2$

$2a^2$ என்பது $2a^3$ மற்றும் $4a^2$ ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொதுக் காரணி.

$\therefore 2a^3 + 4a^2 = 2a^2(a + 2)$.

(iv) $6a^5 - 18a^3 + 42a^2$

$6a^2$ என்பது $6a^5$, $-18a^3$ மற்றும் $42a^2$ ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொதுக் காரணி.

$\therefore 6a^5 - 18a^3 + 42a^2 = 6a^2(a^3 - 3a + 7)$

4.7.1 முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல்.

(i) $a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^2$

(ii) $a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a - b)^2$ **(அல்லது)** $a^2 - 2ab + b^2 \equiv (-a + b)^2$

(iii) $a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b)$

(iv) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \equiv (a + b + c)^2$

எடுத்துக்காட்டு 4.30

காரணிப்படுத்துக (i) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ (ii) $16a^2 - 8a + 1$ (iii) $9a^2 - 16b^2$

(iv) $(a + b)^2 - (a - b)^2$ (v) $25(a + 2b - 3c)^2 - 9(2a - b - c)^2$ (vi) $x^5 - x$

தீர்வு

(i) $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = (2x + 3y)^2$

(ii) $16a^2 - 8a + 1 = (4a)^2 - 2(4a)(1) + (1)^2 = (4a - 1)^2$ **(அல்லது)** $(1 - 4a)^2$

(iii) $9a^2 - 16b^2 = (3a)^2 - (4b)^2 = (3a + 4b)(3a - 4b)$

(iv) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = [(a + b) + (a - b)][(a + b) - (a - b)]$

$= (a + b + a - b)(a + b - a + b) = (2a)(2b) = (4)(a)(b)$

(v) $25(a + 2b - 3c)^2 - 9(2a - b - c)^2 = [5(a + 2b - 3c)]^2 - [3(2a - b - c)]^2$

$= [5(a + 2b - 3c) + 3(2a - b - c)]\,[5(a + 2b - 3c) - 3(2a - b - c)]$

$= (5a + 10b - 15c + 6a - 3b - 3c)(5a + 10b - 15c - 6a + 3b + 3c)$

$= (11a + 7b - 18c)(-a + 13b - 12c)$

(vi) $x^5 - x = x(x^4 - 1) = x[(x^2)^2 - (1)^2]$

$= x(x^2 + 1)(x^2 - 1) = x(x^2 + 1)[(x)^2 - (1)^2]$

$= x(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

4.7.2 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \equiv (a + b + c)^2$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல்.

எடுத்துக்காட்டு 4.31

காரணிப்படுத்துக $a^2 + 4b^2 + 36 - 4ab - 24b + 12a$

தீர்வு $a^2 + 4b^2 + 36 - 4ab - 24b + 12a$

$$= (a)^2 + (-2b)^2 + (6)^2 + 2(a)(-2b) + 2(-2b)(6) + 2(6)(a) = (a - 2b + 6)^2$$

குறிப்பு :

$$(a - 2b + 6)^2 = [(-1)(-a + 2b - 6)]^2 = (-1)^2(-a + 2b - 6)^2 = (-a + 2b - 6)^2$$

எடுத்துக்காட்டு 4.32

காரணிப்படுத்துக $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 6yz - 12zx$

தீர்வு $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 6yz - 12zx$

$= (2x)^2 + (-y)^2 + (-3z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(-3z) + 2(-3z)(2x)$

$= (2x - y - 3z)^2$ (அல்லது) $(-2x + y + 3z)^2$

4.7.3 $x^3 + y^3$ மற்றும் $x^3 - y^3$ ஆகியவற்றைக் காரணிப்படுத்துதல்

$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$ என நமக்குத் தெரியும்.

அதாவது, $x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = (x + y)^3$

$$\Longrightarrow x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$= (x + y)[(x + y)^2 - 3xy]$$

$$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2 - 3xy)$$

$$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$\boxed{x^3 + y^3 \equiv (x + y)(x^2 - xy + y^2)}$$

$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$ என நமக்குத் தெரியும்.

அதாவது, $x^3 - y^3 - 3xy(x - y) = (x - y)^3$

$$\Longrightarrow x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$$
$$= (x-y)\left[(x-y)^2 + 3xy\right]$$
$$= (x-y)(x^2 - 2xy + y^2 + 3xy)$$
$$= (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$\boxed{x^3 - y^3 \equiv (x-y)(x^2 + xy + y^2)}$$

மேலே உள்ள முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.33

காரணிப்படுத்துக (i) $8x^3 + 125y^3$ (ii) $27x^3 - 64y^3$

தீர்வு

(i) $$8x^3 + 125y^3 = (2x)^3 + (5y)^3$$
$$= (2x+5y)[(2x)^2 - (2x)(5y) + (5y)^2]$$
$$= (2x+5y)(4x^2 - 10xy + 25y^2)$$

(ii) $$27x^3 - 64y^3 = (3x)^3 - (4y)^3$$
$$= (3x-4y)[(3x)^2 + (3x)(4y) + (4y)^2]$$
$$= (3x-4y)(9x^2 + 12xy + 16y^2)$$

பயிற்சி 4.6

1. பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.

   (i) $2a^3 - 3a^2b + 2a^2c$ (ii) $16x + 64x^2y$ (iii) $10x^3 - 25x^4y$

   (iv) $xy - xz + ay - az$ (v) $p^2 + pq + pr + qr$

2. பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.

   (i) $x^2 + 2x + 1$ (ii) $9x^2 - 24xy + 16y^2$

   (iii) $b^2 - 4$ (iv) $1 - 36x^2$

3. பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.

   (i) $p^2 + q^2 + r^2 + 2pq + 2qr + 2rp$ (ii) $a^2 + 4b^2 + 36 - 4ab + 24b - 12a$

   (iii) $9x^2 + y^2 + 1 - 6xy + 6x - 2y$ (iv) $4a^2 + b^2 + 9c^2 - 4ab - 6bc + 12ca$

   (v) $25x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 20xy + 12yz - 30zx$

4. பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.

   (i) $27x^3 + 64y^3$ (ii) $m^3 + 8$ (iii) $a^3 + 125$

   (iv) $8x^3 - 27y^3$ (v) $x^3 - 8y^3$

4.7.4 $ax^2+bx+c;\ a \neq 0$ என்ற வடிவில் உள்ள இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துதல்

இதுவரை பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் குறிப்பிட்ட வகைகளை, முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி காரணிப்படுத்துதலைப் பார்த்தோம். இப்பகுதியில் (i) a = 1 மற்றும் (ii) $a \neq 1$ எனும்போது, ax^2+bx+c என்ற இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவையை முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தாமல் எவ்வாறு இரு நேரியப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளாக பிரிப்பது என்பதைப் பார்ப்போம்.

(i) x^2+bx+c என்ற வடிவில் உள்ள இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தல்.

$(x+p)$ மற்றும் $(x+q)$ என்பன x^2+bx+c-ன் இரண்டு காரணிகள் எனில், நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned} x^2+bx+c &= (x+p)(x+q) \\ &= x(x+p)+q(x+p) \\ &= x^2+px+qx+pq \\ &= x^2+(p+q)x+pq \end{aligned}$$

இதிலிருந்து, $x^2+bx+c = (x+p)(x+q)$ எனக் காரணிப்படுத்த p , q என்ற இரு எண்களை $c = pq$ மற்றும் $b = p+q$ என்றவாறு காண வேண்டும்.

பின்வரும் கணக்குகளைக் காரணிப்படுத்த இந்த அடிப்படை யுக்தியைப் பயன்படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(1) $x^2+8x+15 = (x+3)(x+5)$

இங்கு $c = 15 = 3\times 5$ மற்றும் $3+5 = 8 = b$

(2) $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

இங்கு $c = 6 = (-2)\times(-3)$ மற்றும் $(-2)+(-3) = -5 = b$

(3) $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$

இங்கு $c = -2 = (+2)\times(-1)$ மற்றும் $(+2)+(-1) = 1 = b$

(4) $x^2-4x-12 = (x-6)(x+2)$

இங்கு $c = -12 = (-6)\times(+2)$ மற்றும் $(-6)+(+2) = -4 = b$

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் மாறிலி உறுப்பின் இரு காரணிகள், அவற்றின் கூடுதல் x-ன் கெழுவிற்குச் சமமாக உள்ளவாறு கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.34

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $x^2 + 9x + 14$ (ii) $x^2 - 9x + 14$ (iii) $x^2 + 2x - 15$ (iv) $x^2 - 2x - 15$

தீர்வு

(i) $x^2 + 9x + 14$

காரணிப்படுத்த p, q என்ற இரு எண்களை $pq = 14$ மற்றும் $p + q = 9$ என்றவாறு நாம் காணவேண்டும்.

$$\begin{aligned} x^2 + 9x + 14 &= x^2 + 2x + 7x + 14 \\ &= x(x+2) + 7(x+2) \\ &= (x+2)(x+7) \\ \therefore\ x^2 + 9x + 14 &= (x+7)(x+2) \end{aligned}$$

14 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, 14	15
2, 7	9
தேவையான காரணிகள் 2, 7	

(ii) $x^2 - 9x + 14$

காரணிப்படுத்த p, q என்ற இரு எண்களை $pq = 14$ மற்றும் $p + q = -9$ என்றவாறு நாம் காணவேண்டும்.

$$\begin{aligned} x^2 - 9x + 14 &= x^2 - 2x - 7x + 14 \\ &= x(x-2) - 7(x-2) \\ &= (x-2)(x-7) \\ \therefore\ x^2 - 9x + 14 &= (x-2)(x-7) \end{aligned}$$

14 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
–1, –14	–15
–2, –7	–9
தேவையான காரணிகள்–2, –7	

(iii) $x^2 + 2x - 15$

காரணிப்படுத்த p, q என்ற இரு எண்களை $pq = -15$ மற்றும் $p + q = 2$ என்றவாறு நாம் காணவேண்டும்.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 15 &= x^2 - 3x + 5x - 15 \\ &= x(x-3) + 5(x-3) \\ &= (x-3)(x+5) \\ \therefore\ x^2 + 2x - 15 &= (x-3)(x+5) \end{aligned}$$

–15 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
–1, 15	14
–3, 5	2
தேவையான காரணிகள் –3, 5	

(iv) $x^2 - 2x - 15$

காரணிப்படுத்த p, q என்ற இரு எண்களை $pq = -15$ மற்றும் $p + q = -2$ என்றவாறு நாம் காணவேண்டும்.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 15 &= x^2 + 3x - 5x - 15 \\ &= x(x+3) - 5(x+3) \\ &= (x+3)(x-5) \\ \therefore\ x^2 - 2x - 15 &= (x+3)(x-5) \end{aligned}$$

–15 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, –15	–14
3, –5	–2
தேவையான காரணிகள் 3, –5	

(ii) $ax^2 + bx + c$ என்ற வடிவில் உள்ள இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துதல்

$a \neq 1$ என்பதால் $ax^2 + bx + c$-ன் நேரிய காரணிகள் $(rx + p)$ மற்றும் $(sx + q)$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.

எனவே, $ax^2 + bx + c = (rx + p)(sx + q)$
$$= rsx^2 + (ps + qr)x + pq$$

இருபுறமும் x^2-ன் கெழுக்களை ஒப்பிட, நாம் பெறுவது $a = rs$ இதேபோன்று x-ன் கெழுக்களை ஒப்பிட, நாம் பெறுவது $b = ps + qr$ மற்றும் மாறிலி உறுப்புக்களை ஒப்பிட, பெறுவது $c = pq$

இவை நமக்குத் தெரிவிப்பது என்னவெனில், ps மற்றும் qr என்ற இரு மெய்யெண்களின் கூடுதல் b மற்றும் அவ்வெண்களின் பெருக்கல் $(ps)\times(qr) = (pr)\times(sq) = ac$

எனவே, $ax^2 + bx + c$-ஐக் காரணிப்படுத்த, நாம் இரு எண்களின் கூடுதல் b-க்கு சமமாகவும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் ac-க்கு சமமாகவும் இருக்குமாறு காணவேண்டும்.

$ax^2 + bx + c$-ஐ காரணிப்படுத்த பின்பற்ற வேண்டிய படிகள் பின்வருமாறு.

படி 1 : x^2-ன் கெழுவை மாறிலி உறுப்புடன் பெருக்க வேண்டும்.

படி 2 : இப்பெருக்கற்பலனை இருகாரணிகளாகப் பிரிக்க வேண்டும். அவ்வாறு பிரிக்கும் போது காரணிகளின் கூடுதல் x-ன் கெழுவிற்குச் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

படி 3 : இப்பெருக்கற்பலனை இரு சோடிகளாகப் பிரித்து காரணிப்படுத்தவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.35

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $2x^2 + 15x + 27$ (ii) $2x^2 - 15x + 27$

(iii) $2x^2 + 15x - 27$ (iv) $2x^2 - 15x - 27$

தீர்வு

(i) $2x^2 + 15x + 27$

x^2-ன் கெழு $= 2$; மாறிலி உறுப்பு $= 27$

$\therefore$ அவற்றின் பெருக்கல் $= 2 \times 27 = 54$

x-ன் கெழு $= 15$

அதாவது, நாம் காண வேண்டிய இரு எண்களின் பெருக்கல் 54 மற்றும் அவற்றின் கூடுதல் 15

54 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, 54	55
2, 27	29
3, 18	21
6, 9	15
தேவையான காரணிகள் 6, 9	

அவ்விரு எண்கள் 6 மற்றும் 9

$$2x^2 + 15x + 27 = 2x^2 + 6x + 9x + 27$$
$$= 2x(x + 3) + 9(x + 3)$$
$$= (x + 3)(2x + 9)$$
$$\therefore\ 2x^2 + 15x + 27 = (x + 3)(2x + 9)$$

(ii) $2x^2 - 15x + 27$

x^2-ன் கெழு = 2 ; மாறிலி உறுப்பு = 27

அவற்றின் பெருக்கல் = $2 \times 27 = 54$

x-ன் கெழு = –15

$\therefore$ இரு எண்களின் பெருக்கல் = 54;

அவற்றின் கூடுதல் = –15

54 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
–1, –54	–55
–2, –27	–29
–3, –18	–21
–6, –9	–15
தேவையான காரணிகள் –6, –9	

$$2x^2 - 15x + 27 = 2x^2 - 6x - 9x + 27$$
$$= 2x(x-3) - 9(x-3)$$
$$= (x-3)(2x-9)$$
$$\therefore 2x^2 - 15x + 27 = (x-3)(2x-9)$$

(iii) $2x^2 + 15x - 27$

x^2-ன் கெழு = 2 ; மாறிலி உறுப்பு = – 27

அவற்றின் பெருக்கல்= $2 \times - 27 = -54$

x-ன் கெழு = 15

$\therefore$ இரு எண்களின் பெருக்கல் = –54;

அவற்றின் கூடுதல் = 15

–54 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
–1, 54	53
–2, 27	25
–3, 18	15
தேவையான காரணிகள் –3, 18	

$$2x^2 + 15x - 27 = 2x^2 - 3x + 18x - 27$$
$$= x(2x-3) + 9(2x-3)$$
$$= (2x-3)(x+9)$$
$$\therefore 2x^2 + 15x - 27 = (2x-3)(x+9)$$

(iv) $2x^2 - 15x - 27$

x^2-ன் கெழு = 2 ; மாறிலி உறுப்பு = –27

அவற்றின் பெருக்கல்= $2 \times - 27 = -54$

x-ன் கெழு = –15

$\therefore$ இரு எண்களின் பெருக்கல் = –54;

அவற்றின் கூடுதல் = –15

–54 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, –54	–53
2, –27	–25
3, –18	–15
தேவையான காரணிகள் 3, –18	

$$2x^2 - 15x - 27 = 2x^2 + 3x - 18x - 27$$
$$= x(2x+3) - 9(2x+3)$$
$$= (2x+3)(x-9)$$
$$\therefore 2x^2 - 15x - 27 = (2x+3)(x-9)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.36

காரணிப்படுத்துக $(x+y)^2 + 9(x+y) + 8$

தீர்வு $x + y = p$ என்க.

பின்னர் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $p^2 + 9p + 8$ என மாறுகிறது.

8 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, 8	9
தேவையான காரணிகள்	1, 8

p^2-ன் கெழு = 1; மாறிலி உறுப்பு = 8

அவற்றின் பெருக்கல் $= 1 \times 8 = 8$

p-ன் கெழு = 9

$\therefore$ இரு எண்களின் பெருக்கல் = 8;

அவற்றின் கூடுதல் = 9

$$p^2 + 9p + 8 = p^2 + p + 8p + 8$$
$$= p(p+1) + 8(p+1)$$
$$= (p+1)(p+8)$$

$p = x + y$ எனப் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$(x+y)^2 + 9(x+y) + 8 = (x+y+1)(x+y+8)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.37

காரணிப்படுத்துக (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 + 3x^2 - x - 3$

தீர்வு

(i) $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ என்க.

$p(x)$ என்பது முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை, எனவே இதற்கு மூன்று நேரிய காரணிகள் இருக்கலாம். மாறிலி உறுப்பு 2. 2-ன் காரணிகள் –1, 1, –2 மற்றும் 2 ஆகும்.

$$p(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$$

$\therefore$ $(x+1)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$$p(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - 1 + 2 = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$$

$\therefore$ $(x-1)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$$p(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - (-2) + 2 = -8 - 8 + 2 + 2 = -12 \neq 0$$

$\therefore$ $(x+2)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகாது.

$$p(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 2 + 2 = 8 - 8 - 2 + 2 = 0$$

$\therefore$ $(x-2)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$p(x)$-ன் மூன்று காரணிகள் $(x+1), (x-1)$ மற்றும் $(x-2)$ ஆகும்.

$\therefore$ $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$.

மாற்று முறை

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - 1(x-2)$$
$$= (x-2)(x^2-1)$$
$$= (x-2)(x+1)(x-1) \qquad [\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ என்க.

$p(x)$ என்பது முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை, எனவே இதற்கு மூன்று நேரிய காரணிகள் இருக்கலாம்.மாறிலி உறுப்பு -3. -3 -ன் காரணிகள் $-1, 1, -3$ மற்றும் 3 ஆகும்.

$p(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - (-1) - 3 = -1 + 3 + 1 - 3 = 0$

$\therefore (x+1)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$p(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 1 - 3 = 1 + 3 - 1 - 3 = 0$

$\therefore (x-1)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$p(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - (-3) - 3 = -27 + 27 + 3 - 3 = 0$

$\therefore (x+3)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$p(x)$-ன் மூன்று காரணிகள் $(x+1), (x-1)$ மற்றும் $(x+3)$ ஆகும்.

$\therefore x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x+1)(x-1)(x+3)$.

பயிற்சி 4.7

1. பின்வரும் ஒவ்வொன்றினையும் காரணிப்படுத்துக.

(i) $x^2 + 15x + 14$ (ii) $x^2 + 13x + 30$ (iii) $y^2 + 7y + 12$

(iv) $x^2 - 14x + 24$ (v) $y^2 - 16y + 60$ (vi) $t^2 - 17t + 72$

(vii) $x^2 + 14x - 15$ (viii) $x^2 + 9x - 22$ (ix) $y^2 + 5y - 36$

(x) $x^2 - 2x - 99$ (xi) $m^2 - 10m - 144$ (xii) $y^2 - y - 20$

2. பின்வரும் ஒவ்வொன்றினையும் காரணிப்படுத்துக.

(i) $3x^2 + 19x + 6$ (ii) $5x^2 + 22x + 8$ (iii) $2x^2 + 9x + 10$

(iv) $14x^2 + 31x + 6$ (v) $5y^2 - 29y + 20$ (vi) $9y^2 - 16y + 7$

(vii) $6x^2 - 5x + 1$ (viii) $3x^2 - 10x + 8$ (ix) $3x^2 + 5x - 2$

(x) $2a^2 + 17a - 30$ (xi) $11 + 5x - 6x^2$ (xii) $8x^2 + 29x - 12$

(xiii) $2x^2 - 3x - 14$ (xiv) $18x^2 - x - 4$ (xv) $10 - 7x - 3x^2$

3. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $(a+b)^2 + 9(a+b) + 14$ (ii) $(p-q)^2 - 7(p-q) - 18$

4. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

(iii) $x^3 + x^2 - 4x - 4$ (iv) $x^3 + 5x^2 - x - 5$

4.8 நேரியச் சமன்பாடுகள் (Linear Equations)

a, b ஆகியன மாறிலிகளாகவும் மற்றும் $a \neq 0$ எனவும் கொண்ட $ax + b = 0$ என்றமைந்த ஒரு மாறியில் உள்ள நேரியச் சமன்பாடுகளை நினைவு கூர்வோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $3x + 2 = 8$ ஐ தீர்ப்போம்.

$$3x = 8 - 2 \Longrightarrow 3x = 6 \Longrightarrow x = \frac{6}{3} \Longrightarrow x = 2$$

உண்மையில், ஒரு மாறியைக் கொண்ட நேரியச்சமன்பாட்டுக்கு ஒரே ஒரு (தனித்த) **தீர்வு** மட்டுமே உண்டு.

4.8.1 இரு மாறிகளில் ஒரு சோடி நேரியச் சமன்பாடுகள்

இரு மாறிகளில் உள்ள நேரியச் சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் $ax + by = c$, இங்கு a, b மற்றும் c என்பன மாறிலிகள் மேலும் $a \neq 0$, $b \neq 0$.

x, y என்ற இருமாறிகளில் அமைந்த ஒரு சோடி நேரியச் சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2)$$

இங்கு, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 மற்றும் c_2 என்பன மாறிலிகள் மற்றும் $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ மற்றும் $b_2 \neq 0$.

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் (x_0, y_0) நிவர்த்தி செய்தால், (x_0, y_0) என்பது இவ்விரு சமன்பாடுகளின் ஒரு **தீர்வு** ஆகும். ஆகவே, இவ்விரு சமன்பாடுகளுக்கும் **தீர்வு** காண்பது அவற்றை நிறைவு செய்யும் வரிசைச் சோடி (x_0, y_0) ஐ கண்டுபிடிப்பதாகும்.

பிரதியிடும் முறை, நீக்கல் முறை மற்றும் குறுக்குப் பெருக்கல் முறை ஆகியன சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குத் **தீர்வு** காணும் சில முறைகள் ஆகும்.

இப்பாடப்பகுதியில் பிரதியிடும் முறையை மட்டுமே எடுத்துக்கொண்டு இருமாறிகளில் உள்ள நேரியச் சமன்பாடுகளுக்குத் **தீர்வு** காண்போம்.

பிரதியிடும் முறை (Substitution Method)

இந்த முறையில், ஒரு சமன்பாட்டில் உள்ள இரு மாறிகளில் ஒன்றை மற்றதின் சார்பாக கண்டுபிடித்து பின்னர் அதை அடுத்த சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு **தீர்வு** காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.38

பின்வரும் ஒருசோடி சமன்பாடுகளை பிரதியிடும் முறையில் தீர்க்க.

$2x + 5y = 2$ மற்றும் $x + 2y = 3$

தீர்வு $2x + 5y = 2 \qquad (1)$

$x + 2y = 3 \qquad (2)$

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து, $x = 3 - 2y$ (3)

எனக் கிடைக்கிறது.

x-ன் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட, $2(3-2y)+5y = 2$

$$\Longrightarrow 6 - 4y + 5y = 2$$

$$-4y + 5y = 2 - 6$$

$\therefore\ y = -4$ எனக் கிடைக்கிறது.

$y = -4$ என (3)-ல் பிரதியிட,

$x = 3 - 2(-4) = 3 + 8 = 11$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\therefore$ **தீர்வு** $x = 11$ மற்றும் $y = -4$

எடுத்துக்காட்டு 4.39

$x + 3y = 16,\ 2x - y = 4$ ஐ பிரதியிடும் முறையில் தீர்.

தீர்வு

$$x + 3y = 16 \qquad (1)$$

$$2x - y = 4 \qquad (2)$$

சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து, $x = 16 - 3y$ (3)

எனக் கிடைக்கிறது.

x-ன் மதிப்பை (2)-ல் பிரதியிட,

$$2(16-3y) - y = 4$$

$$\Longrightarrow 32 - 6y - y = 4$$

$$-6y - y = 4 - 32$$

$$-7y = -28$$

$y = \dfrac{-28}{-7} = 4$ எனக் கிடைக்கிறது.

$y = 4$ என (3)-ல் பிரதியிட, $x = 16 - 3(4)$

$= 16 - 12 = 4$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\therefore$ **தீர்வு** $x = 4$ மற்றும் $y = 4$.

எடுத்துக்காட்டு 4.40

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 4$ மற்றும் $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 7\ (x \neq 0, y \neq 0)$ என்பதைப் பிரதியிடும் முறையில் தீர்.

தீர்வு

$\dfrac{1}{x} = a$ மற்றும் $\dfrac{1}{y} = b$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு மாறுகின்றன.

$$a + b = 4 \qquad (1)$$

$$2a + 3b = 7 \qquad (2)$$

சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து, $b = 4 - a$ (3)

எனக் கிடைக்கிறது.

b-ன் மதிப்பை (2)-ல் பிரதியிட, $2a + 3(4 - a) = 7$

$\Longrightarrow 2a + 12 - 3a = 7$

$2a - 3a = 7 - 12$

$-a = -5 \Longrightarrow a = 5$ எனக் கிடைக்கிறது.

$a = 5$ என (3)-ல் பிரதியிட, $b = 4 - 5 = -1$

ஆனால், $\frac{1}{x} = a \Rightarrow x = \frac{1}{a} = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{y} = b \Rightarrow y = \frac{1}{b} = \frac{1}{-1} = -1$

$\therefore$ **தீர்வு** $x = \frac{1}{5}$, $y = -1$

எடுத்துக்காட்டு 4.41

ஒரு பேனா மற்றும் ஒரு நோட்டுப் புத்தகம் சேர்ந்து விலை ₹ 60. பேனாவின் விலை நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலையை விட ₹ 10 குறைவு எனில், ஒவ்வொன்றின் விலையைக் காண்க.

தீர்வு ஒரு பேனாவின் விலை ₹ x என்க.

ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை ₹ y என்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி, $x + y = 60$ (1)

$x = y - 10$ (2)

x-ன் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட, $y - 10 + y = 60$

$\Longrightarrow y + y = 60 + 10 \Longrightarrow 2y = 70$

$\therefore y = \frac{70}{2} = 35$

$y = 35$ ஐ (2)-ல் பிரதியிட, $x = 35 - 10 = 25$

ஒரு பேனாவின் விலை ₹ 25.

ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை ₹ 35.

எடுத்துக்காட்டு 4.42

மூன்று கணிதப் புத்தகங்கள் மற்றும் நான்கு அறிவியல் புத்தகங்களின் மொத்த விலை ₹ 216. மூன்று கணிதப் புத்தகங்களின் விலையும் நான்கு அறிவியல் புத்தகங்களின் விலையும் சமம் எனில், ஒவ்வொரு புத்தகத்தின் விலையைக் காண்க.

தீர்வு

ஒரு கணிதப் புத்தகத்தின் விலை ₹ x மற்றும் ஒரு அறிவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹ y என்க.
கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி,

$$3x + 4y = 216 \qquad (1)$$

$$3x = 4y \qquad (2)$$

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து, $x = \frac{4y}{3}$ (3)

x-ன் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட, $3\left(\frac{4y}{3}\right) + 4y = 216$

$$\Longrightarrow 4y + 4y = 216 \Longrightarrow 8y = 216$$

$$\therefore y = \frac{216}{8} = 27$$

$y = 27$ என (3)-ல் பிரதியிட, $x = \frac{4(27)}{3} = 36$

$\therefore$ ஒரு கணிதப் புத்தகத்தின் விலை ₹ 36.

ஒரு அறிவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹ 27.

எடுத்துக்காட்டு 4.43

தருமபுரி பேருந்து நிலையத்திலிருந்து பாலக்கோட்டிற்கு இரண்டு பயணச்சீட்டுகளும், காரிமங்கலத்திற்கு மூன்று பயணச்சீட்டுகளும் வாங்க மொத்த கட்டணம் ₹ 32. பாலக்கோட்டிற்கு மூன்று பயணச்சீட்டுகளும், காரிமங்கலத்திற்கு ஒரு பயணச்சீட்டும் வாங்க மொத்த கட்டணம் ₹ 27. தருமபுரியிலிருந்து பாலக்கோடு மற்றும் காரிமங்கலம் செல்ல கட்டணங்களைக் காண்க.

தீர்வு

தருமபுரியிலிருந்து பாலக்கோட்டிற்கு கட்டணம் ₹ x எனவும் மற்றும் காரிமங்கலத்திற்கு கட்டணம் ₹ y எனவும் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி,

$$2x + 3y = 32 \qquad (1)$$

$$3x + y = 27 \qquad (2)$$

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து, $y = 27 - 3x$ (3)

y-ன் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட, $2x + 3(27 - 3x) = 32$

$$\Longrightarrow 2x + 81 - 9x = 32$$

$$2x - 9x = 32 - 81$$

$$-7x = -49$$

$$\therefore x = \frac{-49}{-7} = 7$$

$x = 7$ என (3)-ல் பிரதியிட, $y = 27 - 3(7) = 27 - 21 = 6$

$\therefore$ தருமபுரியிலிருந்து பாலக்கோட்டிற்கு கட்டணம் ₹ 7, காரிமங்கலத்திற்கு கட்டணம் ₹ 6.

எடுத்துக்காட்டு 4.44

இரு எண்களின் கூடுதல் 55, அவற்றின் வித்தியாசம் 7 எனில், அந்த எண்களைக் காண்க.

தீர்வு

இரு எண்கள் x, y என்க. இங்கு $x > y$ என்போம்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி, $x + y = 55$ (1)

$x - y = 7$ (2)

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து, $x = 7 + y$ (3)

x-ன் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட, $7 + y + y = 55$

$$\Longrightarrow 2y = 55 - 7 = 48$$

$$\therefore y = \frac{48}{2} = 24$$

$y = 24$ என (3)-ல் பிரதியிட, $x = 7 + 24 = 31$.

$\therefore$ தேவையான இரு எண்கள் 31 மற்றும் 24.

எடுத்துக்காட்டு 4.45

ஒரு இரண்டு இலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 11. இலக்கங்களை இடமாற்றி அமைக்கும் போது கிடைக்கும் எண் முந்தைய எண்ணை விட 9 குறைவு எனில், அந்த எண்ணைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு

ஒரு இரண்டிலக்க எண்ணின் பத்தாம் இலக்கம் x எனவும் ஒன்றாம் இலக்கம் y எனவும் கொள்க. பிறகு அந்த எண் $10x + y$.

இலக்கங்களின் கூடுதல் $x + y = 11$ (1)

இலக்கங்களை இடமாற்றி அமைக்க கிடைக்கும் எண் $10y + x$.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின்படி, $(10x + y) - 9 = 10y + x$

$$\Longrightarrow 10x + y - 10y - x = 9$$

$$9x - 9y = 9$$

இருபுறமும் 9 ஆல் வகுக்க, $x - y = 1$ (2)

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து, $x = 1 + y$ (3)

x-ன் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட, $1 + y + y = 11$

$$\Longrightarrow 2y + 1 = 11$$

$$2y = 11 - 1 = 10$$

$\therefore y = \frac{10}{2} = 5$, $y = 5$ என (3) ல் பிரதியிட, $x = 1 + 5 = 6$

$\therefore$ அந்த எண் $10x + y = 10(6) + 5 = 65$

4.9 ஒரு மாறியில் உள்ள நேரிய அசமன்பாடுகள் (Linear Inequations in One Variable)

$x + 4 = 6$ என்பது ஒரு மாறியில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடு ஆகும். இச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்க $x = 2$ என கிடைக்கும். ஒரு மாறியில் உள்ள நேரியச்சமன்பாட்டில் மாறிக்கு ஒரே ஒரு மதிப்பு மட்டும் உண்டு.

$x + 4 > 6$ என்ற அசமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

அதாவது, $x > 6 - 4$

$x > 2$

ஆகவே **2**-க்குஅதிகமான எந்த மெய்யெண்ணும் இந்த அசமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும். நிழலிடப்படாத வட்டப் பகுதி குறிக்கும் எண்ணை **தீர்வு** கணத்தில் சேர்க்கக் கூடாது என்பதைக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.46

தீர்க்க $4(x-1) \leq 8$

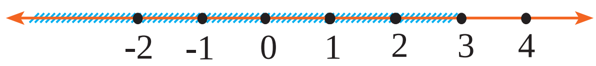
தீர்வு

$4(x-1) \leq 8$

இருபுறமும் 4 ஆல் வகுக்க,

$x - 1 \leq 2$

$\Longrightarrow \quad x \leq 2 + 1 \Longrightarrow x \leq 3$



மூன்று மற்றும் மூன்றுக்கு குறைவான அனைத்து மெய்யெண்களும் கொடுக்கப்பட்ட அசமன்பாட்டின் **தீர்வு**கள் ஆகும்.

நிழலிடப்பட்ட வட்டப்பகுதி குறிக்கும் எண்ணை **தீர்வு** கணத்தில் சேர்க்க வேண்டும் என்பதைக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.47

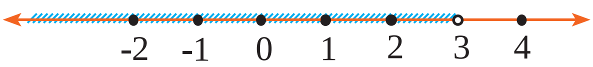
தீர்க்க $3(5-x) > 6$

தீர்வு $3(5-x) > 6$

இருபுறமும் 3 ஆல் வகுக்க, $5 - x > 2$

$\Longrightarrow -x > 2 - 5 \Longrightarrow -x > -3$

$\therefore\ x < 3$ (கீழே கொடுத்துள்ள குறிப்புரையை பார்க்க)



மூன்றைவிட குறைவான அனைத்து மெய்யெண்களும் கொடுக்கப்பட்ட அசமன்பாட்டின் **தீர்வு**கள் ஆகும்.

குறிப்புரை
(i) $-a > -b \Longrightarrow a < b$ (ii) $a < b \Longrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; $a \neq 0, b \neq 0$
(iii) $a < b \Longrightarrow ka < kb$ for $k > 0$ (iv) $a < b \Longrightarrow ka > kb$; $k < 0$

எடுத்துக்காட்டு 4.48

தீர்க்க $3-5x \leq 9$

தீர்வு $3-5x \leq 9$

$$\Longrightarrow -5x \leq 9-3 \Longrightarrow -5x \leq 6$$

$$\Longrightarrow 5x \geq -6 \Longrightarrow x \geq -\frac{6}{5} \Longrightarrow x \geq -1.2$$

-1.2 மற்றும் -1.2-க்கு அதிகமான அனைத்து மெண்யெண்களும் கொடுக்கப்பட்ட அசமன்பாட்டின் **தீர்வு**கள் ஆகும்.

பயிற்சி 4.8

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளை பிரதியிடும் முறையில் தீர்க்க.
   (i) $x+3y=10;\ 2x+y=5$ (ii) $2x+y=1;\ 3x-4y=18$
   (iii) $5x+3y=21;\ 2x-y=4$ (iv) $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=9;\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=12 \quad (x\neq 0, y\neq 0)$
   (v) $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=7;\ \frac{5}{x}-\frac{4}{y}=6\ (x\neq 0, y\neq 0)$

2. கூடுதல் 24 மற்றும் வித்தியாசம் 8 என்றவாறு உள்ள இரு எண்களைக் காண்க.

3. ஒரு இரண்டிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 9. இலக்கங்களை இடமாற்ற கிடைக்கும் இரு இலக்க எண், முந்தைய எண்ணின் இருமடங்கைக் காட்டிலும் 18 அதிகம் எனில், அவ்வெண்ணைக் காண்க.

4 கவியிடமும் குறளிடமும் ஆப்பிள் பழங்கள் உள்ளன. “ நீ எனக்கு 4 பழங்களைத் தந்தால், என்னிடம் உள்ள பழங்களின் எண்ணிக்கை உன்னிடம் உள்ளதைப் போல மூன்று மடங்கு'', என கவி குறளிடம் கூறினார். “நீ எனக்கு 26 பழங்களைத் தந்தால் என்னிடம் உள்ள பழங்களின் எண்ணிக்கை, உன்னிடம் உள்ளதைப் போல இருமடங்காகும்'', என குறள் பதிலளித்தார். ஒவ்வொருவரிடமும் எத்தனைப் பழங்கள் உள்ளன ?

5. பின்வரும் அசமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.
   (i) $2x+7>15$ (ii) $2(x-2)<3$ (iii) $2(x+7)\leq 9$ (iv) $3x+14\geq 8$

நினைவில் கொள்க

- x என்ற ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் இயற்கணித அமைப்பு $p(x)= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$ இங்கு $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ என்பன மாறிலிகள் மற்றும் n ஒரு குறையற்ற மிகை முழு.
- $p(x)$ என்பது x-ல் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. $p(a) = 0$ எனில், a என்பது $p(x)$-ன் ஒரு பூச்சியம் எனக் கூறுவோம்.
- $x = a$ என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்தால், $x = a$ என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் எனப்படும்
- மீதித் தேற்றம்: $p(x)$என்பது ஏதேனும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. $p(x)$ஐ $(x - a)$ என்ற நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுத்தால் மீதி $p(a)$ ஆகும்
- காரணித் தேற்றம்: $p(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. $p(a) = 0$ எனில், $(x-a)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

- $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
- $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ $\qquad$ $x^3 + y^3 \equiv (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ $\qquad$ $x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
- $(x + a)(x + b)(x + c) \equiv x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$

5 ஆயத்தொலை வடிவக்கணிதம்

I hope that posterity will judge me kindly, not only as to the things which I have explained, but also as to those which I have intentionally omitted so as to leave to others the pleasure of discovery

- RENE DESCARTES

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- கார்டீசியன் ஆயத்தொலை முறையை புரிந்து கொள்ளுதல்.
- x மற்றும் y ஆயத்தொலைவுகளை அறிந்து கொள்ளுதல்.
- கார்டீசியன் தளத்தில் ஒரு புள்ளியை குறித்தல்.
- இரு புள்ளிகளுக்கு இடையிலான தொலைவைக் காணுதல்.

5.1 அறிமுகம்

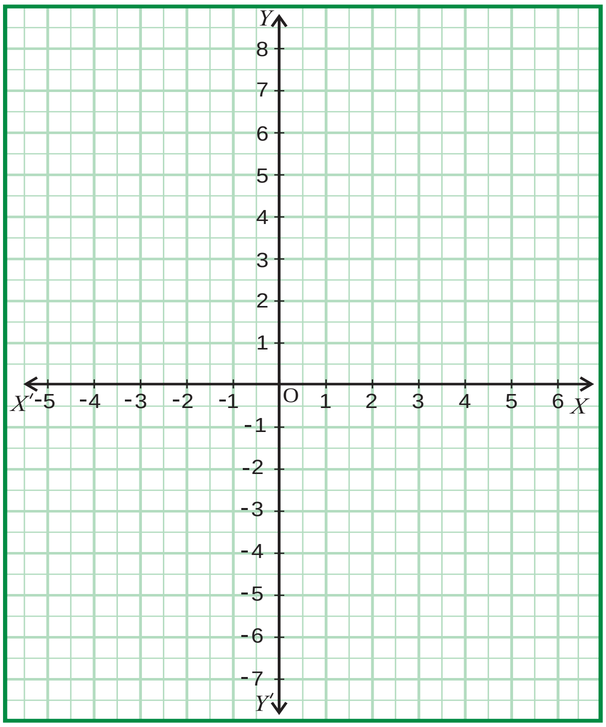
ஆயத்தொலை வடிவக்கணிதம் அல்லது பகுமுறை வடிவக்கணிதம் என்பது, எண்களாலான அச்சு தூரங்களின் வரிசை சோடிகளின் மூலம் தளத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகளை விவரிப்பதே. இம்முறையை அறிமுகப்படுத்தி அதன்மூலம் புள்ளிகளை குறிக்கும் முறையை விவரித்தவர் ரேனே டேகார்ட் என்ற பிரெஞ்சு நாட்டு கணித வல்லுனர் ஆவார். அவர் இதே முறையை கொண்டு வளைவரைகளையும், கோடுகளையும் சமன்பாடுகளின் மூலம் விவரிக்க முடியும் என்று எடுத்துரைத்தார். இவரே வடிவியலையும் இயற்கணிதத்தையும் முதன் முதலில் இணைத்து பார்த்தவர். இந்த கண்டுபிடிப்புகளுக்காக அவரை கௌரவப்படுத்தும் விதமாக, ஒரு புள்ளியின் அச்சுத்தொலைவுகளை (அச்சுத்தூரங்களை) "கார்டீசியன்" அச்சுத்தூரங்கள் எனவும், அச்சு தளங்களை "கார்டீசியன் அச்சுத்தளங்கள்" எனவும் அழைக்கின்றோம். பகுமுறை வடிவக்கணிதத்தின் கண்டுபிடிப்பு நவீன கணிதத்தின் ஆரம்பமாக கருதப்படுகின்றது.

இந்த பாடப்பிரிவில், புள்ளிகளை கார்டீசியன் அச்சு தளத்தில் குறிக்கவும், புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்களை கொண்டு இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவை அறிய உதவும் சூத்திரத்தை வருவிக்கவும் தெரிந்து கொள்வோம்.

டேகார்ட்
(1596-1650)

டேகார்ட் *(Descartes)* நவீன தத்துவத்தின் தந்தை என அழைக்கப்படுகிறார். அவர் அறிவியல் வழியில் அறிவுபூர்வமாக ஒரு புதிய முறையை சிந்தித்தார். அதன் மூலம் இயற்பியலிலும், வானவியலிலும் ஒரு புதிய பார்வையை ஏற்படுத்தினார். டேகார்ட் குறியீடுகளின் உதவியோடு பகுமுறை வடிவியலை எண் கணிதப்படுத்தி அதனை உயர்நிலைபடிகளைக் கொண்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பாக்கினார். ஒரு புள்ளியை அதன் அச்சு தூரங்கள் என்று அழைக்கப்படும் இரு எண்களைக் கொண்டு குறிக்க முடியும் எனக் கண்டவர் டேகார்ட்.

5.2 கார்டீசியன் அச்சுத்தொலைவு முறை



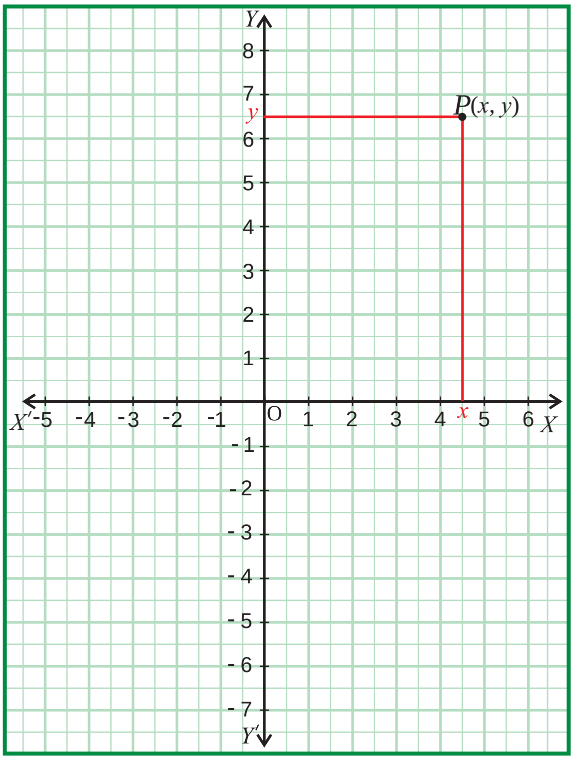
படம் 5.1

மெய்யெண்களின் தொகுப்பு என்ற பாடப்பிரிவில், எண் கோட்டின் மீது மெய்யெண்களை எவ்வாறு குறிக்கலாம் என நாம் கற்றிருக்கிறோம். மெய்யெண் கோட்டின் மீது ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக்கும், ஒரு தனிப்பட்ட P என்ற புள்ளி இருக்கும். அதே போல் எண் கோட்டின் மீது உள்ள ஒவ்வொரு P என்ற புள்ளியும் ஒரு தனிப்பட்ட மெய்யெண்ணால் அறியப்படும். இதேபோல் கார்டீசியன் அச்சுத்தொலைவு முறையில், தளத்தின் மேலுள்ள எந்த ஒரு P என்ற புள்ளியையும் அச்சுத்தூரங்கள் என்று அழைக்கப்படும் இரண்டு மெய்யெண்களை கொண்டு ஒரு நிலையான இடத்தில் குறிக்கலாம்.

கார்டீசியன் அச்சுத்தொலைவு முறை அல்லது செவ்வக அச்சுத்தொலைவு முறை என்பது ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு மெய்யெண் நேர்கோடுகளை கொண்ட ஒரு தளமாகும். அந்த இரண்டு செங்குத்து மெய்யெண் நேர்கோடுகள் கார்டீசியன் தளத்தின் அச்சுகள் எனப்படும். அவ்விரண்டு அச்சுகளும் பூச்சியத்தில் வெட்டிக் கொள்ளுமாறு அமைக்கப்பெற்று, அந்த புள்ளி ஆதிப்புள்ளி என அழைக்கப்படுகிறது. கிடையான மெய்யெண் நேர்கோடு x-அச்சு எனவும் குத்தான மெய்யெண் நேர்கோடு y-அச்சு எனவும் அழைக்கப்படுகின்றது. y-அச்சின் வலதுபுறம் உள்ள புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தொலைவு மிகை எண்களாகவும் இடதுபுறம் உள்ள புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தொலைவு குறை எண்களாகவும் கொள்ளப்படும். அதேபோல் x-அச்சின் மேற்புறம் உள்ள புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தொலைவு மிகை எண்களாகவும் கீழ்புறம் உள்ள புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தொலைவு குறை எண்களாகவும் கொள்ளப்படும். இரண்டு அச்சுகளிலும் ஒரே அலகினை பயன்படுத்துவோம்.

5.2.1 ஒரு புள்ளியின் அச்சுத்தொலைவுகள்

கார்டீசியன் முறையில் தளத்தின் மேல் உள்ள P என்ற எந்த ஒரு புள்ளியும் மெய்யெண்களாலான ஒரு வரிசை சோடியின் மூலம் அறியப்படும். அந்த மெய்யெண்களை



படம் 5.2

பெறுவதற்கு P என்ற புள்ளி வழியே இரண்டு நேர்க்கோடுகள் அச்சுகளுக்கு இணையாக வரையப்படும். குத்துக்கோடு x-அச்சினை வெட்டும் புள்ளி x-அச்சுத்தொலைவு எனவும், கிடைக்கோடு y-அச்சினை வெட்டும் புள்ளி y-அச்சுத்தொலைவு எனவும் அழைக்கப்படும். இவ்விரண்டும் P என்ற புள்ளியின் அச்சுத் தொலைவுகள் என்றழைக்கப்படுகின்றது. இதனை வழக்கமாக, முதலில் x-அச்சுத் தொலைவையும் இரண்டாவதாக y-அச்சுத் தொலைவையும் கொண்டு (x, y) என்ற வரிசை சோடியாக எழுதலாம்.

குறிப்புரை

1. (a, b) என்ற எந்த ஒரு வரிசை சோடியிலும், அதன் உறுப்புகள் a மற்றும் b ஒரு குறிப்பட்ட வரிசையில் அமைக்கப்படுகின்றது. எனவே வரிசை சோடிகள் (a, b) மற்றும் (b, a) வேறுபட்ட இரு வரிசை சோடிகள் ஆகும். அதாவது $(a,b) \neq (b,a)$.
2. $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ எனில் $a_1 = a_2$ மற்றும் $b_1 = b_2$ ஆகும்.
3. பின்வரும் பாடப்பகுதியில் புள்ளி மற்றும் புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் இரண்டும் ஒன்றாக அறியப்படும்.

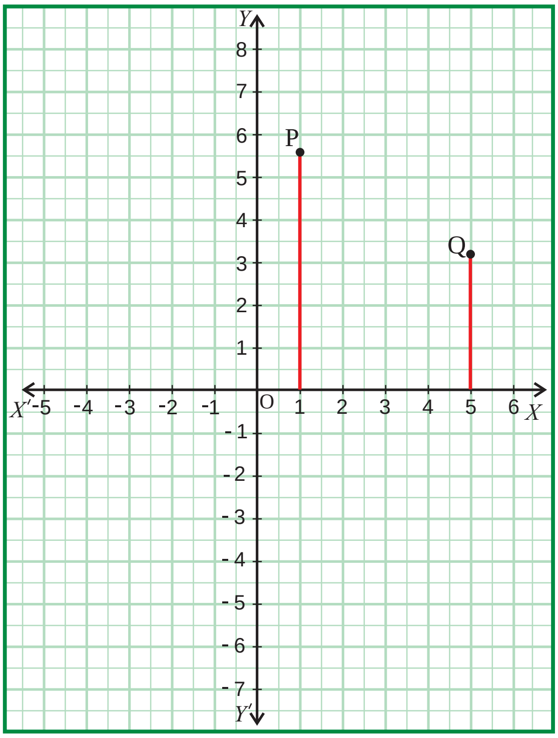
5.2.2 x-அச்சுத்தொலைவு

ஒரு புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் அல்லது x-தொலைவு (abscissa), அப்புள்ளி y-அச்சின் வலப்புறமாக உள்ளதா அல்லது இடப்புறமாக உள்ளதா என அறிய உதவுகின்றது. P என்ற புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரத்தை காண்பதற்கு:

(i) P என்ற புள்ளியிலிருந்து x-அச்சிற்கு ஒரு செங்குத்து கோடு வரைக.

(ii) அச்செங்குத்து கோடு x-அச்சினை சந்திக்கும் இடத்தின் எண்மதிப்பு அப்புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் ஆகும்.

படம் 5.3-ல், P என்ற புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் 1 மற்றும் Q என்ற புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் 5 எனக் காண்கிறோம்.



படம் 5.3

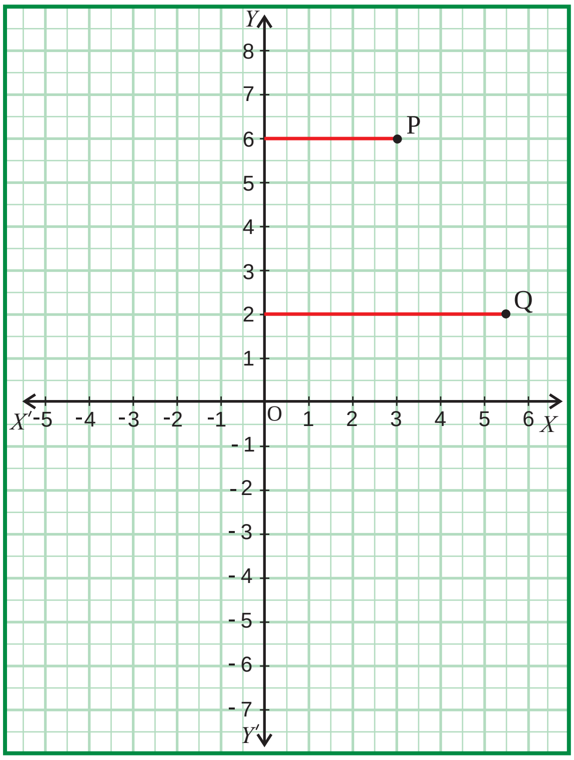
5.2.3 y-அச்சுத்தொலைவு

ஒரு புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரம் அல்லது y-தொலைவு (ordinate), அப்புள்ளி x-அச்சின் மேற்புறமாக உள்ளதா அல்லது கீழ்புறமாக உள்ளதா என அறிய உதவுகின்றது. P என்ற புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரத்தை காண்பதற்கு:

(i) P என்ற புள்ளியிலிருந்து y-அச்சிற்கு ஒரு செங்குத்து கோடு வரைக.

(ii) அச்செங்குத்து கோடு y-அச்சினை சந்திக்கும் இடத்தின் எண்மதிப்பு அப்புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரம் ஆகும்.

படம் 5.4-ல், P என்ற புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரம் 6 மற்றும் Q என்ற புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரம் 2 எனக் காண்கிறோம்.



படம் 5.4

குறிப்பு

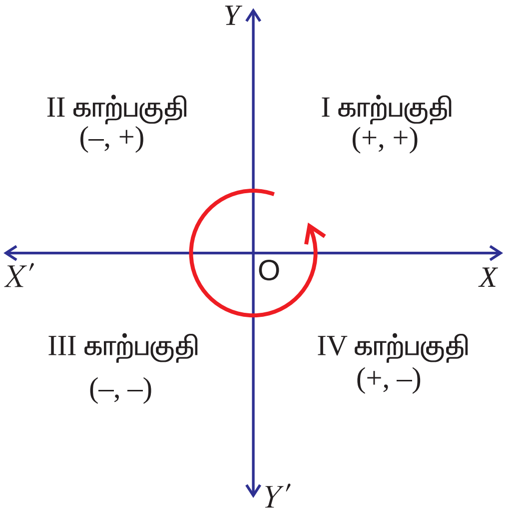
(i) x-அச்சின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியின் y-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் ஆகும்.

(ii) y-அச்சின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியின் x-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் ஆகும்.

(iii) ஆதிப்புள்ளியின் x மற்றும் y அச்சுத்தொலைவுகள் பூச்சியம் ஆகும். எனவே, ஆதிப்புள்ளியை (0,0) எனக் குறிப்போம்.

5.2.4 காற்பகுதிகள் (Quadrants)

செவ்வக அச்சுகளைக் கொண்ட தளம் கார்டீசியன் தளம் என்றழைக்கப்படும். கார்டீசியன் தளத்தின் அச்சுகள் அத்தளத்தை நான்கு பகுதிகளாக பிரிக்கின்றன. அவை படம் 5.5-ல் உள்ளவாறு, கடிகார எதிர் திசையில் எண்ணிடப்பட்டு I-ம் காற்பகுதி, II-ம் காற்பகுதி, III-ம் காற்பகுதி, மற்றும் IV-ம் காற்பகுதி என்றழைக்கப்படுகின்றன. x-அச்சுத்தூரம் I-ம் மற்றும் IV-ம் காற்பகுதிகளில் மிகை எண்களாகவும், II-ம் மற்றும் III-ம் காற்பகுதிகளில் குறை எண்களாகவும் இருக்கும். y-அச்சுத்தூரம் I-ம் மற்றும் II-ம் காற்பகுதிகளில் மிகை எண்களாகவும், III-ம் மற்றும் IV-ம் காற்பகுதிகளில் குறை எண்களாகவும் இருக்கும். படம் 5.5-ல் அச்சுத்தூரங்களின் இயற்கணித குறிகள் அடைப்பு குறிகளுக்குள் காட்டப்பட்டுள்ளன.



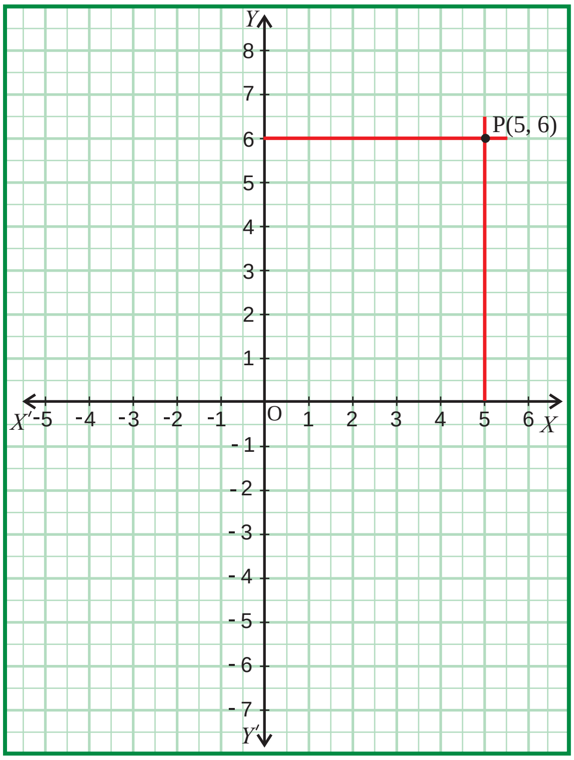
படம் 5.5

ஒவ்வொரு புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்களின் குறிகள் எவ்வாறு அமைகின்றன என்பது பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பகுதி	காற்பகுதி	அச்சுத்தூரங்களின் தன்மை	அச்சுத்தூரங்களின் இயற்கணித குறிகள்
XOY	I	$x > 0, y > 0$	+, +
X′OY	II	$x < 0, y > 0$	−, +
X′OY′	III	$x < 0, y < 0$	−, −
XOY′	IV	$x > 0, y < 0$	+, −

5.2.5 செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் ஒரு புள்ளியை குறித்தல்

கார்டீசியன் அச்சுத்தூர முறையில் ஒரு புள்ளியை எப்படி குறிப்பது என ஒரு எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்குவோம். கார்டீசியன் அச்சுத்தூர முறையில் $(5, 6)$ என்ற புள்ளியை குறிக்க, x-அச்சின் மேல் 5 வரும் வரை நகர்ந்து, பின் 5-ன் வழியே x-அச்சிற்கு செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைய வேண்டும். அதே போல் y-அச்சின் மேல் 6 வரும் வரை நகர்ந்து, பின் 6-ன் வழியே y-அச்சிற்கு செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைய வேண்டும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி (5, 6) ஆகும்.



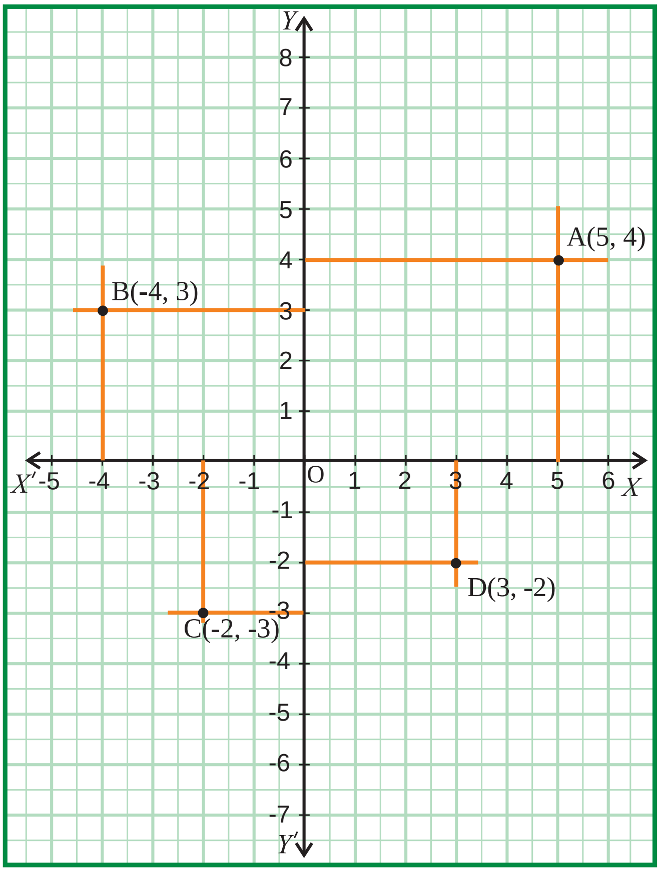
படம் 5.6

அதாவது, x-அச்சின் மிகை திசையில் 5 அலகுகள் நகர்ந்து பின் அங்கிருந்து y-அச்சின் மிகை திசையில் 6 அலகுகள் நகர்ந்தால் நாம் (5, 6) என்ற புள்ளியை அடைவோம். (5, 6) என்ற புள்ளி, y-அச்சிலிருந்து 5 அலகுகள் தொலைவிலும் x-அச்சிலிருந்து 6 அலகுகள் தொலைவிலும் உள்ளது. இவ்வாறு (5, 6) என்ற புள்ளி கார்டீசியன் தளத்தில் குறிக்கப்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 5.1

கீழ்வரும் புள்ளிகளை செவ்வக அச்சுத்தொலைவு முறையில் குறிக்கவும்.

(i) $A\ (5, 4)$ (ii) $B\ (-4, 3)$ (iii) $C\ (-2, -3)$ (iv) $D\ (3, -2)$



படம் 5.7

தீர்வு

(i) கார்டீசியன் தளத்தில் (5,4) என்ற புள்ளியை குறிக்க, $x = 5$-ல் ஒரு குத்துக்கோடும், y = 4-ல் ஒரு கிடைக்கோடும் வரையவும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே A(5, 4) என்ற புள்ளியாகும்.

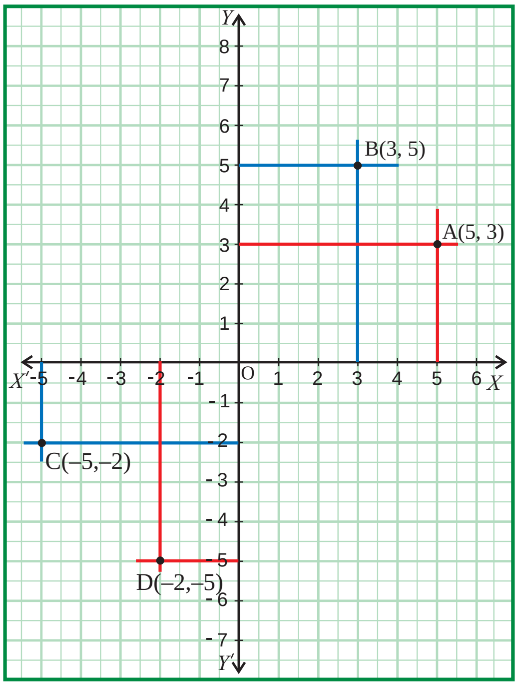
(ii) கார்டீசியன் தளத்தில் $(-4, 3)$ என்ற புள்ளியை குறிக்க, $x = -4$-ல் ஒரு குத்துக்கோடும், y = 3-ல் ஒரு கிடைக்கோடும் வரையவும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே $B(-4, 3)$ என்ற புள்ளியாகும்.

(iii) கார்டீசியன் தளத்தில் $(-2, -3)$ என்ற புள்ளியை குறிக்க, $x = -2$-ல் ஒரு குத்துக்கோடும், $y = -3$-ல் ஒரு கிடைக்கோடும் வரையவும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே $C(-2, -3)$ என்ற புள்ளியாகும்.

(iv) கார்டீசியன் தளத்தில் $(3, -2)$ என்ற புள்ளியை குறிக்க, $x = 3$-ல் ஒரு குத்துக்கோடும், $y = -2$-ல் ஒரு கிடைக்கோடும் வரையவும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே $D(3, -2)$ என்ற புள்ளியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.2

(i) (3, 5) மற்றும் (5, 3) (ii) $(-2, -5)$ மற்றும் $(-5, -2)$ என்ற புள்ளிகளை செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் குறிக்கவும்.

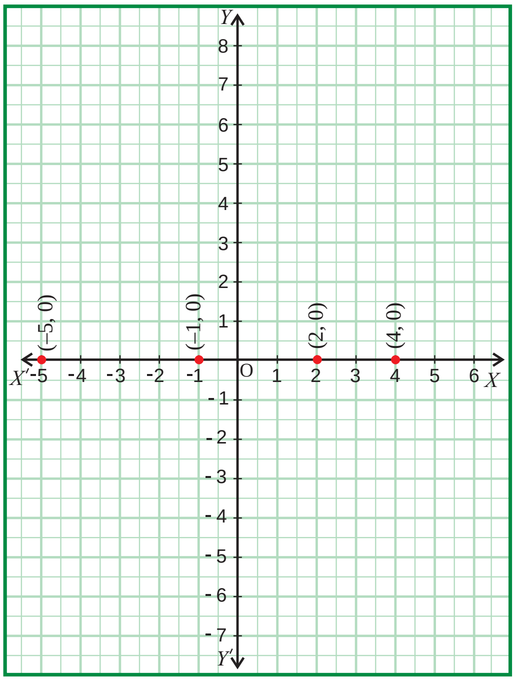


படம் 5.8

கார்டீசியன் தளத்தில், (x, y) என்ற புள்ளியின் x-அச்சுத்தொலைவு மற்றும் y-அச்சுத்தொலைவு ஆகியவற்றை இடம் மாற்றி எழுதும் போது, அது (y, x) என்ற வேறொரு புள்ளியாக அமையும் என அறியவும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.3

(–1, 0), (2, 0), (–5, 0) மற்றும் (4, 0) என்ற புள்ளிகளை செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் குறிக்கவும்.

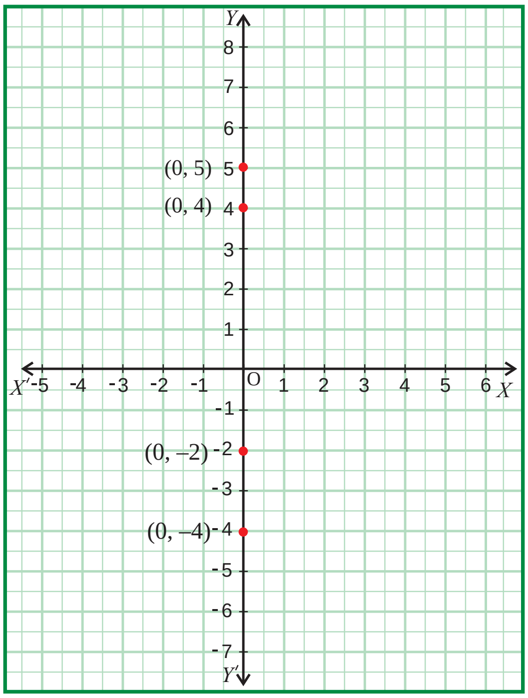


படம் 5.9

கார்டீசியன் தளத்தில், ஒரு புள்ளியின் y-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் எனில், அந்த புள்ளி x-அச்சின் மேல் அமையும் என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.4

(0, 4), (0,–2), (0, 5) மற்றும் (0,–4) என்ற புள்ளிகளை செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் குறிக்கவும்.

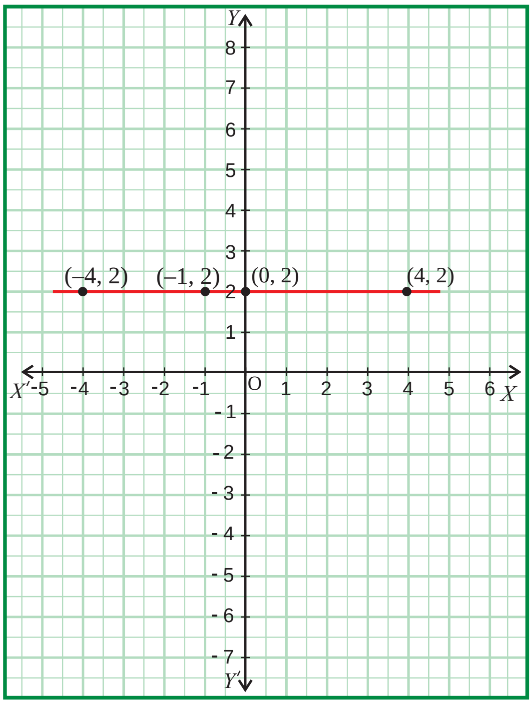


படம் 5.10

கார்டீசியன் தளத்தில், ஒரு புள்ளியின் x-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் எனில் அப்புள்ளி y-அச்சின் மேல் அமையும் எனக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.5

(i) (–1, 2), (–4, 2), (4, 2) மற்றும் (0, 2) என்ற புள்ளிகளை செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் குறிக்கவும். அப்புள்ளிகளின் அமைப்பைப் பற்றி உன்னால் என்ன கூற முடியும்?



படம் 5.11

இப்புள்ளிகளைக் குறித்து, ஒரு கோட்டின் மூலம் இணைக்கும் போது அக்கோடு x-அச்சிற்கு இணையான ஒரு நேர்கோடாக அமைவதைக் காணலாம்.

குறிப்புரை x-அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் மேல் உள்ள புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தொலைவுகள் சமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.6

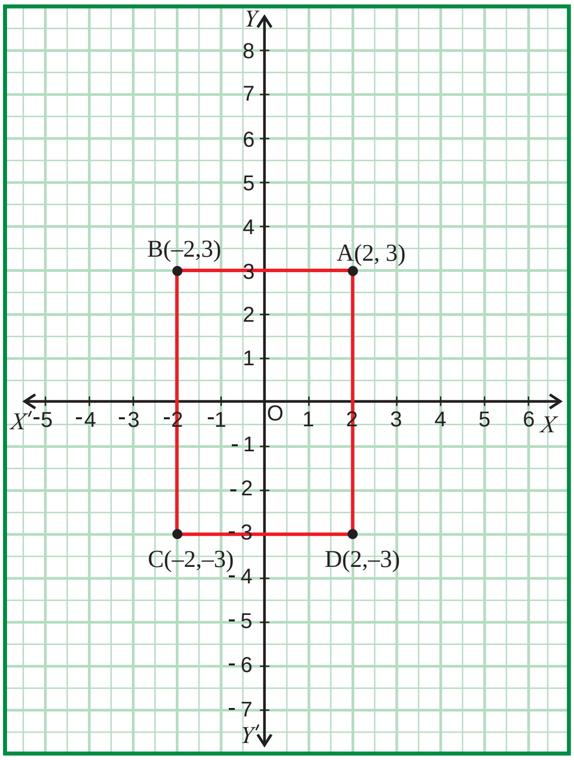
$A\,(2, 3), B\,(-2, 3), C\,(-2, -3)$ மற்றும் $D\,(2, -3)$ என்ற புள்ளிகள் அமையும் காற்பகுதியைக் காண்க. இப்புள்ளிகளை இணைப்பதால் எவ்வகை வரைபடம் கிடைக்கும் எனக் கூறுக.

தீர்வு

புள்ளி	A	B	C	D
காற்பகுதி	I	II	III	IV

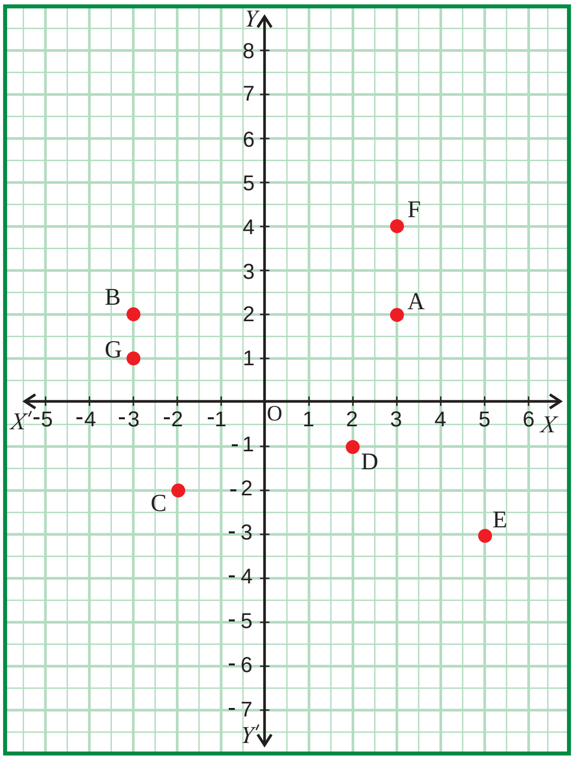
படத்திலிருந்து, $ABCD$ ஒரு செவ்வகமாகும்.

படம் 5.12-ல் உள்ள செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் பரப்பளவை உன்னால் காண முடியுமா?



படம் 5.12

எடுத்துக்காட்டு 5.7



படம் 5.13

படம் 5.13-ல் குறிக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க. இங்கு ஒவ்வொரு சதுரமும் ஓரலகு சதுரம் (Unit Square) ஆகும்.

தீர்வு A என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. இப்புள்ளி x-அச்சின் மிகை திசையில் ஆதிப்புள்ளியில் இருந்து மூன்று அலகுகள் தொலைவிலும் y-அச்சின் மிகை திசையில் ஆதிப்புள்ளியில் இருந்து இரண்டு அலகுகள் தொலைவிலும் அமைந்துள்ளது. எனவே, A-ன் அச்சுத்தொலைவுகள் $(3, 2)$ ஆகும்.

இதேபோல் மற்ற புள்ளிகள் B, C, D, E, F மற்றும் G ஆகியவற்றின் அச்சுத்தொலைவுகள் முறையே $(-3,2), (-2,-2), (2,-1), (5,-3), (3,4), (-3,1)$ ஆகும்.

பயிற்சி 5.1

1. கீழ்வரும் வாக்கியங்கள் சரியா அல்லது தவறா எனக் கூறவும்.

   (i) (5, 7) என்ற புள்ளி நான்காம் காற்பகுதியில் அமைகிறது.

   (ii) $(-2, -7)$ என்ற புள்ளி மூன்றாம் காற்பகுதியில் அமைகிறது.

   (iii) $(8, -7)$ என்ற புள்ளி x-அச்சிற்கு கீழே அமைகிறது.

   (iv) (5, 2) மற்றும் $(-7, 2)$ என்ற புள்ளிகள் y-அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் மேல் உள்ளன.

   (v) $(-5, 2)$ என்ற புள்ளி y-அச்சிற்கு இடப்பக்கம் உள்ளது.

   (vi) (0, 3) என்ற புள்ளி x-அச்சின் மேல் உள்ளது.

   (vii) $(-2, 3)$ என்பது இரண்டாம் காற்பகுதியில் உள்ள ஒரு புள்ளி ஆகும்.

   (viii) $(-10, 0)$ என்ற புள்ளி x-அச்சின் மேல் உள்ளது.

   (ix) $(-2, -4)$ என்ற புள்ளி x-அச்சிற்கு மேற்பகுதியில் அமைகிறது.

   (x) x-அச்சின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளிக்கும் y-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் ஆகும்.

2. கார்டீசியன் அச்சுத்தூர முறையில், பின்வரும் புள்ளிகளைக் குறித்து அவை எந்த காற்பகுதியில் அமைகின்றன எனக் கூறவும்.

   (i) (5, 2) (ii) $(-1, -1)$ (iii) (7, 0) (iv) $(-8, -1)$ (v) $(0, -5)$
   (vi) (0, 3) (vii) $(4, -5)$ (viii) (0, 0) (ix) (1, 4) (x) $(-5, 7)$

3. பின்வரும் புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தொலைவுக் காண்க.

   (i) $(-7, 2)$ (ii) (3, 5) (iii) $(8, -7)$ (iv) $(-5, -3)$

4. பின்வரும் புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தொலைவுக் காண்க.

   (i) (7, 5) (ii) (2, 9) (iii) $(-5, 8)$ (iv) $(7, -4)$

5. பின்வரும் புள்ளிகளை அச்சுத்தளத்தில் குறிக்கவும்.

   (i) (4, 2) (ii) $(4, -5)$ (iii) (4, 0) (iv) $(4, -2)$

   இப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு எவ்வாறு அமைந்துள்ளது எனக் கூறுக.

6. இரண்டுபுள்ளிகளில்ஒவ்வொன்றின் y-அச்சுத்தொலைவும் -6 என்க. அந்த புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு x-அச்சினை பொறுத்து எவ்வாறு அமையும் எனக் கூறுக.

7. இரண்டு புள்ளிகளில் ஒவ்வொன்றின் x-அச்சுத்தொலைவும் பூச்சியம் எனில், அந்த புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு x-அச்சினை பொறுத்து எவ்வாறு அமையும் எனக் கூறுக.

8. கார்டீசியன் தளத்தில் A (2, 4), B $(-3, 4)$, C $(-3, -1)$ மற்றும் D $(2, -1)$ என்ற புள்ளிகளை குறிக்கவும். வரிசை மாறாமல் இப்புள்ளிகளைக் கோட்டு துண்டுகளால் இணைப்பதால் எவ்வகை வரைபடம் கிடைக்கும் எனக் கூறுக.

9. செவ்வக அச்சுத்தொலைவு முறையில் $O(0, 0)$, $A(5, 0)$, $B(5, 4)$ என்ற புள்ளிகளை குறிக்கவும். $OABC$ ஒரு செவ்வகமாக அமையுமாறு C-ன் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க.

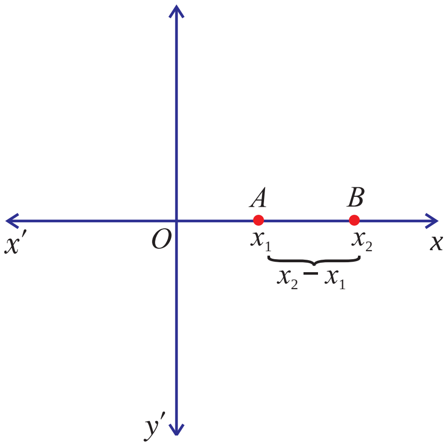
10. $ABCD$ என்ற செவ்வகத்தில், A, B, D என்ற புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்கள் முறையே $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 3)$ எனில், C-ன் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க.

5.3 இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு

பகுமுறை வடிவக்கணிதத்தில், மிக எளிமையானது இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவை கணக்கிடுவது ஆகும். A, B என்ற இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு AB என்று குறிக்கப்படும்.

5.3.1 கார்டீசியன் தளத்தில் அச்சுக்களின் மீது உள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு

இரு புள்ளிகள் x-அச்சின் மீது அமையும் போது அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொலைவை எளிதில் காண முடியும், ஏனெனில் அவ்விரு புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தூரங்களின் வித்தியாசமே அத்தொலைவாகும்.



படம் 5.14

x-அச்சின் மீது அமையும் $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ என்ற இரு புள்ளிகளைக் கருதுக.

$x_2 > x_1$ எனில், A-லிருந்து B-ன் தொலைவு

$AB = OB - OA = x_2 - x_1$

$x_1 > x_2$ எனில், $AB = x_1 - x_2$

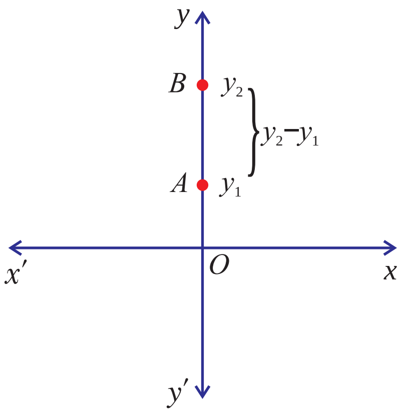
எனவே, $AB = |x_2 - x_1|$ ஆகும்.

அதேபோல் இரு புள்ளிகள் y-அச்சின் மீது அமையும் போது அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொலைவு அவற்றின் y-அச்சுத்தூரங்களின் வித்தியாசத்திற்கு சமமாகும். y-அச்சின் மீது அமையும் $A(0, y_1)$, $B(0, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளை கருதுக.

$y_2 > y_1$ எனில், A-ல் இருந்து B-ன் தொலைவு $AB = OB - OA = y_2 - y_1$

$y_1 > y_2$ எனில் $AB = y_1 - y_2$

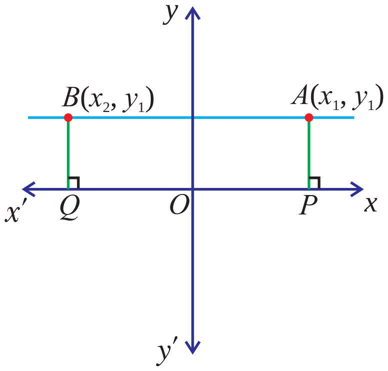
எனவே, $AB = |y_2 - y_1|$ ஆகும்.



படம் 5.15

5.3.2 அச்சுக்கு இணையான நேர்கோட்டின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு

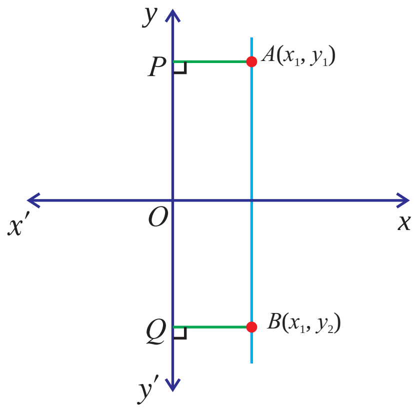
$A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_1)$ என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்து கொள்வோம். இப்புள்ளிகளின் y அச்சுத்தூரங்கள் சமமாக உள்ளதால் இவ்விரு புள்ளிகளும் x-அச்சிற்கு இணையான ஒரு நேர் கோட்டின் மேல் அமையும். A மற்றும் B-லிருந்து x-அச்சிற்கு முறையே AP மற்றும் BQ என்ற குத்துக்கோடுகளை வரையவும். A, B ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொலைவானது, P, Q ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொலைவுக்கு சமமாகும்.



படம் 5.16

எனவே, $AB = PQ = |x_1 - x_2|$

தற்போது y-அச்சிற்கு இணையாக உள்ள ஒரு கோட்டின் மேல் $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_1, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்க. y-அச்சிற்கு, A மற்றும் B-லிருந்து முறையே AP மற்றும் BQ என்ற குத்துக் கோடுகளை வரையவும். தற்போது P மற்றும் Q-ன் அச்சுத்தூரங்கள் $(0, y_1)$ மற்றும் $(0, y_2)$ ஆகும். A, B ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொலைவானது, P, Q ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொலைவுக்கு சமமாகும்.



படம் 5.17

எனவே, $PQ = AB = |y_1 - y_2|$

குறிப்புரை அச்சுக்கு இணையான நேர்கோட்டின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடையிலான தொலைவு, அந்த நேர்கோடு எந்த அச்சிற்கு இணையாக உள்ளதோ, அந்த அச்சுத்தொலைவுகளின் வித்தியாசமாகும்.

5.3.3 இரு புள்ளிகளின் இடைப்பட்டத் தொலைவு

கார்டீசியன் தளத்தில் $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். A, B-ல் இருந்து x-அச்சிற்கு வரையப்பட்ட குத்துகோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள் முறையே P மற்றும் Q என்க. A-ல் இருந்து BQ விற்கு AR என்ற குத்துக்கோடு வரையவும். படம் 5.18-ல் இருந்து நாம் அறிவது,

$AR = PQ = OQ - 0P = x_2 - x_1$ மற்றும்

$BR = BQ - RQ = y_2 - y_1$

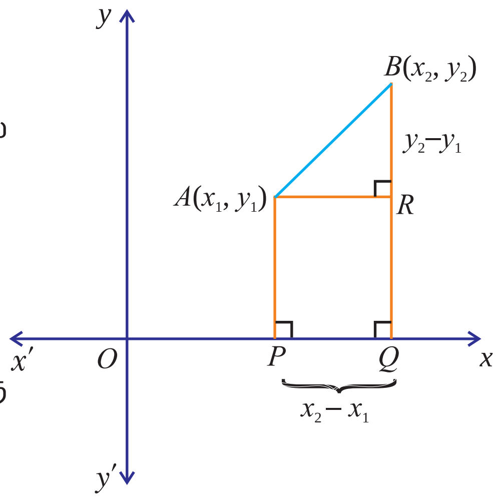
செங்கோண முக்கோணம் ARB-ல் இருந்து பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AB^2 = AR^2 + RB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

அதனால், $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

எனவே A மற்றும் B என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



படம் 5.18

முக்கியகருத்து **இரு புள்ளிகளுக்கு இடையிலான தொலைவு**

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயான தொலைவைக் காணும் சூத்திரம்

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

குறிப்புரை

(i) இச்சூத்திரம் மேலே கூறப்பட்ட அனைத்து வகை புள்ளிகளுக்கும் பொருந்தும்.

(ii) ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியின் தொலைவு $OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.8

(–4, 0) மற்றும் (3, 0) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு $(-4, 0)$ மற்றும் $(3, 0)$ என்பன x-அச்சின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகள்.

எனவே, $d = |x_1 - x_2| = |3 - (-4)| = |3 + 4| = 7$

மாற்றுமுறை :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 + 4)^2 + 0^2} = \sqrt{49} = 7$$

எடுத்துக்காட்டு 5.9

(–7, 2) மற்றும் (5, 2) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு $(5, 2)$ மற்றும் $(-7, 2)$ என்ற புள்ளிகள் x-அச்சிற்கு இணையான ஒரு கோட்டின் மீதுள்ளன.

எனவே, $d = |x_1 - x_2| = |-7 - 5| = |-12| = 12$

மாற்றுமுறை :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 + 7)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{12^2} = \sqrt{144} = 12$$

எடுத்துக்காட்டு 5.10

(–5, – 6) மற்றும் (– 4, 2) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு $(x_1, y_1) = (–5, –6), (x_2, y_2) = (–4, 2)$ என்க.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ என்ற தொலைவு சூத்திரத்தை பயன்படுத்த,

$$d = \sqrt{(-4+5)^2 + (2+6)^2} = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.11

(0, 8) மற்றும் (6, 0) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க.

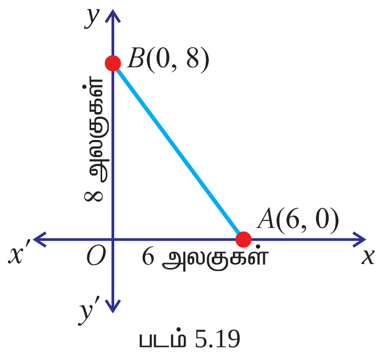
தீர்வு $(x_1, y_1) = (0, 8)$, $(x_2, y_2) = (6, 0)$ என்க. இவ்விருப் புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(6-0)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

மாற்றுமுறை :

A, B என்பன (6, 0) மற்றும் (0, 8) என்ற புள்ளிகளையும், O என்பது ஆதிப்புள்ளியையும் குறிக்கட்டும். $A(6, 0)$ என்ற புள்ளிx-அச்சின் மீதும், $B(0, 8)$ என்ற புள்ளி y-அச்சின் மீதும் அமைந்துள்ளன. அச்சுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் செங்கோணம் என்பதால் AOB என்ற முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.



படம் 5.19

$OA = 6, OB = 8$

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் படி,

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 36 + 64 = 100.$$

$$\therefore \; AB = \sqrt{100} = 10$$

எடுத்துக்காட்டு 5.12

(–3, –4) மற்றும் (5, –7) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு $(x_1, y_1) = (–3, –4)$, $(x_2, y_2) = (5, –7)$ என்க.

இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(5+3)^2 + (-7+4)^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.13

(4, 2), (7, 5) மற்றும் (9, 7) என்ற மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டின் மீது அமையும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட மூன்று புள்ளிகள் A(4, 2), B(7, 5) மற்றும் C(9, 7) என்க.

தொலைவு சூத்திரத்தினைப் பயன்படுத்த,

$$AB^2 = (4-7)^2 + (2-5)^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 9 + 9 = 18$$

$$BC^2 = (9-7)^2 + (7-5)^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$$

$$CA^2 = (9-4)^2 + (7-2)^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$$

எனவே, $AB = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$; $BC = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$;

$CA = \sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$.

இங்கு $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டின் மீது அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 5.14

$A(-3, -4)$, $B(2, 6)$ மற்றும் $C(-6, 10)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகளாகுமா என தீர்மானிக்க.

தீர்வு தொலைவு சூத்திரத்தினைப் பயன்படுத்த,

$$AB^2 = (2+3)^2 + (6+4)^2 = 5^2 + 10^2 = 25 + 100 = 125$$

$$BC^2 = (-6-2)^2 + (10-6)^2 = (-8)^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$$

$$CA^2 = (-6+3)^2 + (10+4)^2 = (-3)^2 + (14)^2 = 9 + 196 = 205$$

மேலும், $AB^2 + BC^2 = 125 + 80 = 205 = CA^2$

ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கமானது மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் என்பதால், ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.15

$(a, a), (-a, -a)$ மற்றும் $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $A(a, a)$, $B(-a, -a)$ மற்றும் $C(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ எனக் கொள்க.
தொலைவு சூத்திரம் $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ –ஐப் பயன்படுத்த,

$$AB = \sqrt{(a+a)^2+(a+a)^2}$$
$$= \sqrt{(2a)^2+(2a)^2} = \sqrt{4a^2+4a^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}\,a$$
$$BC = \sqrt{(-a\sqrt{3}+a)^2+(a\sqrt{3}+a)^2} = \sqrt{3a^2+a^2-2a^2\sqrt{3}+3a^2+a^2+2a^2\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{8a^2} = \sqrt{4\times 2a^2} = 2\sqrt{2}\,a$$
$$CA = \sqrt{(a+a\sqrt{3})^2+(a-a\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2+2a^2\sqrt{3}+3a^2+a^2-2a^2\sqrt{3}+3a^2}$$
$$= \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}\,a$$

எனவே, $AB = BC = CA = 2\sqrt{2}\,a$.

அனைத்து பக்கங்களும் சமமானதால், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.16

(–7, –3), (5, 10), (15, 8) மற்றும் (3, –5) என்ற புள்ளிகளை, வரிசைமாறாமல் எடுத்து கொண்டால், அவை ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகளாகும் என நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு A, B, C மற்றும் D என்பன முறையே (–7, –3), (5, 10), (15, 8) மற்றும் (3, –5) என்ற புள்ளிகளைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. தொலைவு சூத்திரம் $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$AB^2 = (5+7)^2+(10+3)^2 = 12^2+13^2 = 144+169 = 313$$
$$BC^2 = (15-5)^2+(8-10)^2 = 10^2+(-2)^2 = 100+4 = 104$$
$$CD^2 = (3-15)^2+(-5-8)^2 = (-12)^2+(-13)^2 = 144+169 = 313$$
$$DA^2 = (3+7)^2+(-5+3)^2 = 10^2+(-2)^2 = 100+4 = 104$$

எனவே,

$AB = CD = \sqrt{313}$ மற்றும் $BC = DA = \sqrt{104}$ என்பதால்

எதிர் பக்கங்கள் சமம். எனவே, $ABCD$ ஒரு இணைகரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.17

(3, –2), (3, 2), (–1, 2) மற்றும் (–1, –2) என்ற புள்ளிகளை வரிசை மாறாமல் எடுத்துக்கொண்டால் அவை ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளாகும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு A, B, C மற்றும் D என்பன முறையே (3, –2), (3, 2), (–1, 2) மற்றும் (–1, –2) என்ற புள்ளிகளைக் குறிப்பதாகக் கொள்க.

தொலைவு சூத்திரம் $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

$AB^2 = (3-3)^2 + (2+2)^2 = 4^2 = 16$

$BC^2 = (3+1)^2 + (2-2)^2 = 4^2 = 16$

$CD^2 = (-1+1)^2 + (2+2)^2 = 4^2 = 16$

$DA^2 = (-1-3)^2 + (-2+2)^2 = (-4)^2 = 16$

மேலும்,

$AC^2 = (3+1)^2 + (-2-2)^2 = 4^2 + (-4)^2 = 16 + 16 = 32$

$BD^2 = (3+1)^2 + (2+2)^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$

$AB = BC = CD = DA = \sqrt{16} = 4.$

எனவே, அனைத்து பக்கங்களும் சமம்.

மேலும், $AC = BD = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. எனவே, மூலைவிட்டங்கள் சமம்.

ஆகவே, A, B, C மற்றும் D என்ற புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தை அமைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.18

P என்ற புள்ளி (2, 3) மற்றும் (6, 5) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் மையக்குத்துக் கோட்டின் மேல் அமைவதாகக் கொள்க. அப்புள்ளியின் x-அச்சுத்தொலைவு y-அச்சுத்தொலைவுக்கு சமம் எனில், P-ன் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க.

தீர்வு P என்ற புள்ளியை (x, y) என்க. இப்புள்ளியின் x-அச்சுத்தொலைவு y-அச்சுத்தொலைவுக்கு சமம் என்பதால், $y = x$ ஆகும். எனவே, P என்ற புள்ளி (x, x) ஆகும். A, B என்பன முறையே (2, 3) மற்றும் (6, 5) என்ற புள்ளிகளை குறிப்பதாகக் கொள்க. P என்ற புள்ளி AB-ன் மையக் குத்துக் கோட்டின் மீது அமைந்துள்ளதால், $PA^2 = PB^2$ ஆகும்.

எனவே, $$(x-2)^2 + (x-3)^2 = (x-6)^2 + (x-5)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + x^2 - 6x + 9 = x^2 - 12x + 36 + x^2 - 10x + 25$$

$$2x^2 - 10x + 13 = 2x^2 - 22x + 61$$

$$22x - 10x = 61 - 13$$

$$12x = 48$$

$$x = \frac{48}{12} = 4$$

எனவே, P என்ற புள்ளி (4, 4) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.19

(9, 3), (7, –1) மற்றும் (1, –1) என்ற புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் ஒரு வட்டத்தின் மையப்புள்ளி (4, 3) என நிருபிக்க. மேலும் அவ்வட்டத்தின் ஆரத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு (4, 3) என்ற புள்ளியை C எனவும், (9, 3), (7, -1) மற்றும் (1, -1) என்ற புள்ளிகளை முறையே P, Q மற்றும் R எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

தொலைவு சூத்திரம் $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$CP^2 = (9-4)^2 + (3-3)^2 = 5^2 = 25$

$CQ^2 = (7-4)^2 + (-1-3)^2 = 3^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$

$CR^2 = (4-1)^2 + (3+1)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

எனவே, $CP^2 = CQ^2 = CR^2 = 25$ அல்லது $CP = CQ = CR = 5$ ஆகும். இதிலிருந்து P, Q, R என்ற புள்ளிகளின் வழியாக செல்லும் வட்டத்தின் மையப்புள்ளி (4, 3) எனவும், அதன் ஆரம் 5 அலகுகள் எனவும் அறிகின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.20

(α, β) என்ற புள்ளி (3, –4) மற்றும் (8, –5) என்ற புள்ளிகளுக்கு சமதூரத்தில் அமைந்தால் $5\alpha - \beta - 32 = 0$ எனக் காட்டு.

தீர்வு (α, β) என்ற புள்ளியை P எனவும், (3, -4) மற்றும் (8, -5) என்ற புள்ளிகளை முறையே A மற்றும் B எனவும் எடுத்துக் கொள்ளவும். P என்ற புள்ளி A மற்றும் B-லிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளதால், $PA = PB$ ஆகும். எனவே, $PA^2 = PB^2$

அதாவது, $(\alpha - 3)^2 + (\beta + 4)^2 = (\alpha - 8)^2 + (\beta + 5)^2$

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 + \beta^2 + 8\beta + 16 = \alpha^2 - 16\alpha + 64 + \beta^2 + 10\beta + 25$$

$$-6\alpha + 8\beta + 25 + 16\alpha - 10\beta - 89 = 0$$

$$10\alpha - 2\beta - 64 = 0$$

$$\therefore\ 5\alpha - \beta - 32 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 5.21

A (9, 3), B (7, –1) மற்றும் C (1, –1) என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் S (4, 3) என நிறுவுக.

தீர்வு தொலைவு சூத்திரம் $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$SA = \sqrt{(9-4)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$SB = \sqrt{(7-4)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$SC = \sqrt{(1-4)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

எனவே, $SA = \mathrm{SB} = SC$.

ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் அதன் உச்சிப் புள்ளிகளில் இருந்து சம தூரத்தில் அமையும். S என்ற புள்ளி உச்சிப் புள்ளிகளில் இருந்து சம தூரத்தில் அமைந்துள்ளதால், அப்புள்ளி முக்கோணம் ABC-ன் சுற்றுவட்டமையமாகும்.

பயிற்சி 5.2

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சோடிப்புள்ளிகளுக்கும் இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க.

(i) $(7, 8)$ மற்றும் $(-2, -3)$ (ii) $(6, 0)$ மற்றும் $(-2, 4)$

(iii) $(-3, 2)$ மற்றும் $(2, 0)$ (iv) $(-2, -8)$ மற்றும் $(-4, -6)$

(v) $(-2, -3)$ மற்றும் $(3, 2)$ (vi) $(2, 2)$ மற்றும் $(3, 2)$

(vii) $(-2, 2)$ மற்றும் $(3, 2)$ (viii) $(7, 0)$ மற்றும் $(-8, 0)$

(ix) $(0, 17)$ மற்றும் $(0, -1)$ (x) $(5, 7)$ மற்றும் ஆதிப்புள்ளி.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையும் எனக் காட்டுக.

(i) $(3, 7)$, $(6, 5)$ மற்றும் $(15, -1)$ (ii) $(3, -2)$, $(-2, 8)$ மற்றும் $(0, 4)$

(iii) $(1, 4)$, $(3, -2)$ மற்றும் $(-1, 10)$ (iv) $(6, 2)$, $(2, -3)$ மற்றும் $(-2, -8)$

(v) $(4, 1)$, $(5, -2)$ மற்றும் $(6, -5)$

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரு இருசம பக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் எனக் காட்டுக.

(i) $(-2, 0)$, $(4, 0)$ மற்றும் $(1, 3)$ (ii) $(1, -2)$, $(-5, 1)$ மற்றும் $(1, 4)$

(iii) $(-1, -3)$, $(2, -1)$ மற்றும் $(-1, 1)$ (iv) $(1, 3)$, $(-3, -5)$ மற்றும் $(-3, 0)$

(v) $(2, 3)$, $(5, 7)$ மற்றும் $(1, 4)$

4. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் எனக் காட்டுக.

(i) $(2, -3)$, $(-6, -7)$ மற்றும் $(-8, -3)$ (ii) $(-11, 13)$, $(-3, -1)$ மற்றும் $(4, 3)$

(iii) $(0, 0)$, $(a, 0)$ மற்றும் $(0, b)$ (iv) $(10, 0)$, $(18, 0)$ மற்றும் $(10, 15)$

(v) $(5, 9)$, $(5, 16)$ மற்றும் $(29, 9)$

5. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரு சம பக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் எனக் காட்டுக.

(i) (0, 0), (10, 0) மற்றும் $(5, 5\sqrt{3})$ (ii) $(a, 0), (-a, 0)$ மற்றும் $(0, a\sqrt{3})$

(iii) $(2, 2), (-2, -2)$ மற்றும் $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ (iv) $(\sqrt{3}, 2), (0, 1)$ மற்றும் $(0, 3)$

(v) $(-\sqrt{3}, 1), (2\sqrt{3}, -2)$ மற்றும் $(2\sqrt{3}, 4)$

6. வரிசையில் அமைந்த கீழ்காணும் புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகள் எனக் காட்டுக.

(i) $(-7, -5)$, $(-4, 3)$, (5, 6) மற்றும் $(2, -2)$ (ii) (9, 5), (6, 0), $(-2, -3)$ மற்றும் (1, 2)

(iii) (0, 0), (7, 3), (10, 6) மற்றும் (3, 3) (iv) $(-2, 5)$, (7, 1), $(-2, -4)$ மற்றும் (7, 0)

(v) $(3, -5)$, $(-5, -4)$, (7, 10) மற்றும் (15, 9)

7. வரிசையில் அமைந்த கீழ்காணும் புள்ளிகள் ஒரு சாய் சதுரத்தின் உச்சிகள் எனக் காட்டுக.

(i) (0, 0), (3, 4), (0, 8) மற்றும் $(-3, 4)$ (ii) $(-4, -7)$, $(-1, 2)$, (8, 5) மற்றும் $(5, -4)$

(iii) (1, 0), (5, 3), (2, 7) மற்றும் $(-2, 4)$ (iv) $(2, -3)$, (6, 5), $(-2, 1)$ மற்றும் $(-6, -7)$

(v) (15, 20), $(-3, 12)$, $(-11, -6)$ மற்றும் (7, 2)

8. வரிசையில் அமைந்த கீழ்காணும் புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தை அமைக்குமா எனக் காண்க.

(i) $(0, -1)$, (2, 1), (0, 3) மற்றும் $(-2, 1)$ (ii) (5, 2), (1, 5), $(-2, 1)$ மற்றும் $(2, -2)$

(iii) (3, 2), (0, 5), $(-3, 2)$ மற்றும் $(0, -1)$ (iv) (12, 9), $(20, -6)$, $(5, -14)$ மற்றும் $(-3, 1)$

(v) $(-1, 2)$, (1, 0), (3, 2) மற்றும் (1, 4)

9. வரிசையில் அமைந்த கீழ்காணும் புள்ளிகள் ஒரு செவ்வகத்தை அமைக்குமா எனக் காண்க.

(i) (8, 3), $(0, -1)$, $(-2, 3)$ மற்றும் (6, 7) (ii) $(-1, 1)$, (0, 0), (3, 3) மற்றும் (2, 4)

(iii) $(-3, 0)$, $(1, -2)$, (5, 6) மற்றும் (1, 8)

10. $(x, 7)$ மற்றும் (1, 15) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு 10 எனில், x-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

11. (4, 1) என்ற புள்ளி, $(-10, 6)$ மற்றும் $(9, -13)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளது எனக் காட்டுக.

12. (x, y) என்ற புள்ளி, (2, 3) மற்றும் $(-6, -5)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் அமைந்தால், $x + y + 3 = 0$ எனக் காட்டுக.

13. $(2, -6)$ மற்றும் $(2, y)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு 4 எனில், y-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

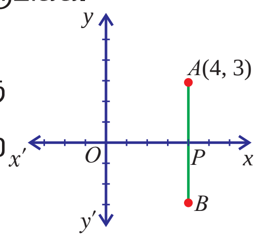
14. கீழ்க்காணும் புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணங்களின் சுற்றளவுகளைக் காண்க. (i) (0, 8), (6, 0) மற்றும் ஆதிப்புள்ளி ; (ii) (9, 3), $(1, -3)$ மற்றும் ஆதிப்புள்ளி.

15. $(-5, 2)$, $(9, -2)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு சம தூரத்தில் உள்ள புள்ளி y-அச்சின் மீது அமைந்தால் அப்புள்ளியை காண்க. (குறிப்பு : y-அச்சின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியின் x-அச்சுதூரம் பூச்சியம் ஆகும்)

16. $(-5, 6)$ என்ற புள்ளி வழி செல்லும் ஒரு வட்டத்தின் மையம் $(3, 2)$ எனில், அதன் ஆரத்தைக் காண்க.

17. ஆதிப்புள்ளியை மையமாகவும், ஆரம் 5 அலகுகள் ஆகவும் உள்ள ஒரு வட்டத்தின் மேல் $(0, -5)$ $(4, 3)$ மற்றும் $(-4, -3)$ என்ற புள்ளிகள் அமையும் என நிரூபிக்க.

18. படம் 5.20-ல், AB என்பது $A(4,3)$ என்ற புள்ளியில் இருந்து x-அச்சுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து கோடு மற்றும் $PA = PB$ எனில், B என்ற புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க.



படம் 5.20

19. $A(2, 0)$, $B(5, -5)$, $C(8, 0)$ மற்றும் $D(5, 5)$ என்ற வரிசையில் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு சாய்சதுரத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள் எனில், அதன் பரப்பளவைக் காண்க. (குறிப்பு : சாய்சதுரத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}d_1 d_2$)

20. $(1, 5)$ $(5, 8)$ மற்றும் $(13, 14)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாக கொண்டு ஒரு முக்கோணம் வரைய முடியுமா? காரணம் கூறவும்.

21. ஒரு வட்டத்தின் மையம் ஆதிப்புள்ளி மற்றும் ஆரம் 17 அலகுகள் எனில், அவ்வட்டத்தின் மேல் அமைந்த ஆனால் அச்சுகளின் மேல் அமையாத நான்கு புள்ளிகளைக் காண்க. (குறிப்பு : 8, 15, 17 என்பவை பிதாகரஸ் செங்கோண முக்கோண எண்களாகும்)

22. $(3, 1)$, $(2, 2)$ மற்றும் $(1, 1)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாக கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் $(2, 1)$ எனக் காட்டுக.

23. $(1, 0)$, $(0, -1)$ மற்றும் $\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாக கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் ஆதிப்புள்ளி எனக் காட்டுக.

24. வரிசையில் அமைந்த $A(6, 1)$, $B(8, 2)$, $C(9, 4)$ மற்றும் $D(p, 3)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிப்புள்ளிகளானால், தொலைவு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, p-ன் மதிப்பைக் காண்க.

25. ஒரு வட்டத்தின் மையம் ஆதிப்புள்ளி மற்றும் ஆரம் 10 அலகுகள் என்க. இவ்வட்டம் கார்டீசியன் அச்சுக்களை வெட்டும் புள்ளிகளின் அச்சுத்தொலைவுகளைக் காண்க. மேலும் அவ்வாறான ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க.

நினைவில் கொள்க

- ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளியை குறிக்க ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் இரு கோடுகள் தேவை. செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் அவ்விரு கோடுகளில் ஒன்று கிடைக்கோடாகவும் மற்றொன்று குத்துக் கோடாகவும் இருக்கும்.
- இவ்விரண்டு கிடை மற்றும் குத்துக்கோடுகள் கார்டீசியன் தளத்தின் அச்சுகள் என்று அழைக்கப்படும். (x-அச்சு மற்றும் y-அச்சு)
- x-அச்சு மற்றும் y-அச்சு வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி $(0, 0)$ ஆதிப்புள்ளி ஆகும்.
- எந்த ஒரு புள்ளிக்கும் y-அச்சிற்கும் இடையிலான தொலைவு x-அச்சுத்தூரம் அல்லது x-தொலைவு என்றும், புள்ளிக்கும் x-அச்சிற்கும் இடையிலான தொலைவு y-அச்சுத்தூரம் அல்லது y-தொலைவு என்றும் அழைக்கப்படும்.
- x-அச்சின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியின் y அச்சுத்தூரம் பூச்சியம் ஆகும்.
- y-அச்சின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியின் x அச்சுத்தூரம் பூச்சியம் ஆகும்.
- ஒரு கிடைக்கோட்டின் மேல் உள்ள புள்ளிகளின் y அச்சுத்தூரங்கள் சமமாக இருக்கும்.
- ஒரு குத்துக்கோட்டின் மேல் உள்ள புள்ளிகளின் x அச்சுத்தூரங்கள் சமமாக இருக்கும்.
- x-அச்சின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தூரங்கள் x_1 மற்றும் x_2 எனில், அவைகளுக்கு இடையிலான தொலைவு $|x_1 - x_2|$ ஆகும்.
- y-அச்சின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தூரங்கள் y_1 மற்றும் y_2 எனில், அவைகளுக்கு இடையிலான தொலைவு $|y_1 - y_2|$ ஆகும்.
- (x_1, y_1) மற்றும் ஆதிப்புள்ளிக்கும் இடையிலான தொலைவு $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ஆகும்.
- (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையிலான தொலைவு $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ஆகும்.

6 முக்கோணவியல்

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.

– J.F. HERBART

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- முக்கோணவியல் விகிதங்களை அறிதல்
- நிரப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களை அறிதல்
- முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்துதல்

6.1 அறிமுகம்

முக்கோணவியலின் ஆங்கில மொழியாக்கமான ***Trigonometry*** என்ற சொல் கிரேக்க மொழியிலிருந்து பெறப்பட்டது. இதன் பொருள் முக்கோணத்தின் அளவுகள் என்பதாகும். ஆரம்ப காலங்களில் முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கும், அதன் கோணங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பினை அறிய முக்கோணவியல் பயன்பட்டது. *ஹிப்பார்க்கஸ் (Hipparchus)* எனும் கிரேக்க வானவியல் மற்றும் கணித வல்லுநர் முதன் முதலில் முக்கோணவியல் விகித அட்டவணையை கட்டமைத்து, முக்கோணவியலின் முன்னேற்றத்திற்கு வித்திட்டார். எனவே, இவர் *முக்கோணவியலின் தந்தை* என அழைக்கப்படுகிறார். முக்கோணவியலானது தற்காலத்தில் பெருமளவில் பயன்படுத்தப்பட்டு வரும் பல பயன்பாடுகளை உள்ளடக்கிய மிகப்பழமையான கணித யுக்தியாகும். பண்டைக்காலங்களில் நிலஅளவை மற்றும் வானவியலில் கோணங்கள் மற்றும் தூரங்கள் அளவிட செங்கோண முக்கோணவியலை பயன்படுத்தினர். கப்பல் பயணத்தின் போது வழி காணவும், வான்வெளியில் கோள்களின் இயங்கு பாதைகள் மற்றும் அதிர்வுகளை (ஒலி அலைகள், கிடார் கம்பியின் அதிர்வுகள்) காணவும் முக்கோணவியல் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

6.2 முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

6.2.1 கோணம் *(Angle)*

நாம் இப்பாடப்பிரிவை கோணத்தின் வரையறையை அறிவதன் மூலம் தொடங்குவோம். இவ்வரையறை பல்வேறு விதிகளை உள்ளடக்கியது ஆகும்.

ஆரியபட்டா

(A.D. 476 – 550)

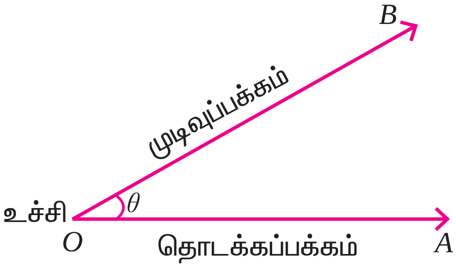
நாம் இப்போது *sine* எனும் குறியீட்டை எவ்வாறு பயன்படுத்துகிறோமோ, அதே பொருளில் முதன் முதலில் உபயோகித்தவர் ஆரியபட்டா *(Aryabhatta)*. கி. பி 500-ல் அவர் எழுதிய ஆரியபட்டியம் எனும் கணித நூலில் *sine* எனும் குறியீடு காணப்படுகிறது. ஆரியபட்டர் இந்தியாவின் மிகச்சிறந்த முற்கால கணித மேதைகளில் முதன்மையானவர். இவர் பீகார் மாநிலம் பாட்னாவில் உள்ள பாடலிபுத்திரம் எனும் இடத்தில் வாழ்ந்தவர் ஆவர். இவர் கி.பி 476 ஆம் ஆண்டு மார்ச் 21 மேச சங்கராந்தி அன்று பிறந்தார். இவர் தனது 23-வது வயதில் வானவியல் பற்றி குறைந்தபட்சம் ஆரியபட்டா, ஆரியபட்டா சித்தாந்தா எனும் இரு நூல்களை எழுதினார். இதில் ஆரியபட்டா எனும் நூல் கணிதம் மற்றும் வானவியலைப் பற்றியது.

முக்கிய கருத்து **கோணம்**

இருபரிமாண தளத்தில் திசையிட்ட இரு கோட்டுப் பகுதிகளுக்கு இடைப்பட்ட பகுதி கோணம் எனப்படும். கோணம் ஆரம்பிக்கும் பகுதி கோணத்தின் தொடக்கப்பக்கம் எனவும் அது முடியும் பகுதி முடிவுப்பக்கம் எனவும் அழைக்கப்படும். திசையிட்ட இரு கோட்டுப் பகுதிகள் ஆரம்பிக்கும் புள்ளி கோணத்தின் உச்சி எனப்படும்.

படம் 6.1 ஆனது கோணத்திற்கான வரைபட உதாரணமாகும்.

இங்கு O-வைப் பொறுத்து கதிர் OA ஆனது OB வரை சுழற்றப்படுவதால் கோணம் AOB உருவாகிறது. இதனை $\angle AOB$ எனக் குறிப்போம். இங்கு OA என்பது தொடக்கப்பக்கம் எனவும், OB என்பது முடிவுப்பக்கம் எனவும் மற்றும் O என்பது அக்கோணத்தின் உச்சி எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. நாம் கோணங்களைக் குறிக்க θ, α, β போன்ற கிரேக்க எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்துகிறோம்.



படம் 6.1

ஒரு கோணத்தின் அளவை பாகை என்ற அலகால் குறிக்கிறோம். இது கி.மு 1000 ஆம் ஆண்டிற்கு முன்பே பாபிலோனியர்களால் பயன்படுத்தப்பட்டது. ஒரு பாகை (1° என குறியிடுவோம்) என்பது ஒரு சுழற்சியில் உண்டாகும் கோணத்தின் $\frac{1}{360}$ மடங்கு ஆகும்.

6.2.2 பிதாகரஸ் தேற்றம் (*Pythagoras Theorem*)

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் தெரியாத பக்க அளவைக் காண பிதாகரஸ் தேற்றம் பயன்படுகிறது.

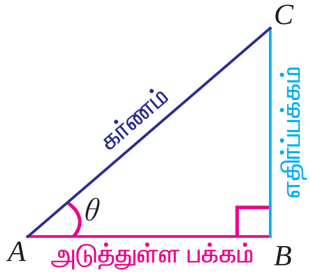
பிதாகரஸ் தேற்றம்: ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் மீது வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவானது, மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் மீது வரையப்படும் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூடுதலுக்கு சமம்.

பிதாகரஸ் தேற்றம் முக்கோணவியல் கருத்துக்களை மேம்படுத்தவும், பல கணக்குகளுக்கு **தீர்வு** காணவும் பயன்படுகிறது.

6.2.3 முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (*Trigonometric Ratios*)

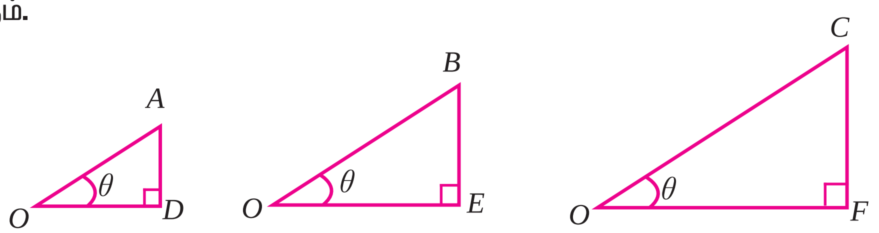
படம் 6.2-ல் உள்ள செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் கோணம் θ-விற்கு எங்ஙனம் தொடர்பு பெற்று அமைந்துள்ளது எனக் காண்போம்.

- செங்கோணத்திற்கு நேர் எதிரே அமைந்துள்ள பக்கம் கர்ணம் எனப்படும். இது செங்கோண முக்கோணத்தின் மிக நீளமான பக்கம் ஆகும்.
- கோணம் θ விற்கு நேர் எதிரே அமைந்துள்ள பக்கம் எதிர்ப்பக்கம் ஆகும்.
- θ விற்கு அருகிலுள்ள கர்ணம் அல்லாத பக்கம் அடுத்துள்ள பக்கம் ஆகும்.



படம் 6.2

வடிவொத்த செங்கோண முக்கோணங்களை அடிப்படையாக கொண்டே முக்கோணவியல் விகிதங்கள் *(Trigonometrical Ratios)* முதலில் உருவாக்கப்பட்டது. பொதுவான குறுங்கோணத்தைக் கொண்ட எல்லா செங்கோண முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை ஆகும். கீழ்க்காணும் செங்கோண முக்கோணங்களின் குறுங்கோணங்கள் ஒரே அளவினை உடையதாகும்.



எனவே, மேற்காணும் முக்கோணங்களில் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{AD}{OA} = \frac{BE}{OB} = \frac{CF}{OC}$; $\frac{OD}{OA} = \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC}$

இம்முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் விகிதங்கள் θ-ன் அளவைப் பொறுத்து அமைகிறதே தவிர குறிப்பிட்ட எந்த ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தைப் பொறுத்தும் அமைவதில்லை. இதன் மூலம் நாம் ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பெறுகிறோம். இந்த விகிதங்களுக்கு வெகுகாலத்திற்கு முன்பே பெயரிட்டுள்ளனர்.

$\frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$ என்ற விகிதம் கோணம் θ-வின் *sine* என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $\sin\theta$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

$\frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$ என்ற விகிதம் கோணம் θ-வின் *cosine* என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $\cos\theta$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

$\frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$ என்ற விகிதம் கோணம் θ-வின் *tangent* என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $\tan\theta$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

$\frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$ என்ற விகிதம் கோணம் θ-வின் *cosecant* என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $\operatorname{cosec}\theta$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

$\frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$ என்ற விகிதம் கோணம் θ-வின் *secant* என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $\sec\theta$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

$\frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$ என்ற விகிதம் கோணம் θ-வின் *cotangent* என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $\cot\theta$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

முக்கிய கருத்து **முக்கோணவியல் விகிதங்கள்**

செங்கோண முக்கோணத்தில் θ ஒரு குறுங்கோணம் என்க. கோணம் θ-வைப் பொறுத்து ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்கள் பின்வருமாறு

$$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$$

தலைகீழ் தொடர்புகள்

$\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$ மற்றும் $\cot\theta$ ஆகிய முக்கோணவியல் விகிதங்கள் முறையே $\sin\theta$, $\cos\theta$ மற்றும் $\tan\theta$ ஆகியவற்றின் தலைகீழ் விகிதங்கள் ஆகும்.

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

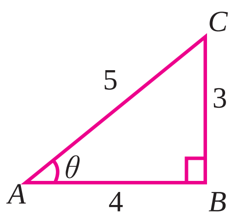
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

குறிப்புரை

1. அடிப்படை விகிதங்களாகிய $\sin\theta$, $\cos\theta$ மற்றும் $\tan\theta$ ஆகியன $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ என்பதன் மூலம் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளன.
2. குறுங்கோணம் θ ன் முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கணக்கிட, கோணம் θ வை கொண்ட எவ்வித செங்கோண முக்கோணத்தையும் பயன்படுத்தலாம்.
3. முக்கோணவியல் விகிதங்கள் பக்கங்களின் விகிதங்களாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதால் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் அலகு அற்றது.

எடுத்துக்காட்டு 6.1

படத்தில் காணும் செங்கோண முக்கோணம் ABC-ல், கோணம் θ-வைப் பொறுத்து ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.



படம் 6.3

தீர்வு படம் 6.3 லிருந்து, எதிர்ப்பக்கம் $BC = 3$, அடுத்துள்ள பக்கம் $AB = 4$, கர்ணம் $AC = 5$

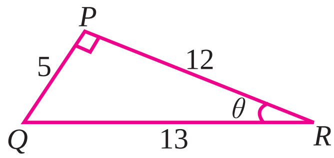
$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} \qquad \sec\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4} \qquad \cot\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.2

படத்தில் காணும் செங்கோண முக்கோணம் PQR-ல், கோணம் θ-வைப் பொறுத்து ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.



படம் 6.4

தீர்வு படம் 6.4-லிருந்து, எதிர்ப்பக்கம் $PQ = 5$, அடுத்துள்ள பக்கம் $PR = 12$, கர்ணம் $QR = 13$

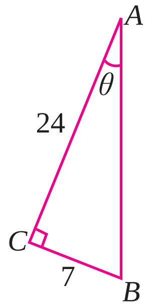
$$\sin\theta = \frac{PQ}{RQ} = \frac{5}{13} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{RQ}{PQ} = \frac{13}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{PR}{RQ} = \frac{12}{13} \qquad \sec\theta = \frac{RQ}{PR} = \frac{13}{12}$$

$$\tan\theta = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{12} \qquad \cot\theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{12}{5}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.3

படம் 6.5-லிருந்து, கோணம் θ-வின் ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.



படம் 6.5

தீர்வு படம் 6.5-லிருந்து, $AC = 24$ மற்றும் $BC = 7$. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$$

$$\therefore AB = \sqrt{625} = 25$$

நாம் இப்பொழுது மூன்று பக்கங்களின் அளவுகளைப் பயன்படுத்தி, கோணம் θ-வைப் பொறுத்து ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காணலாம்

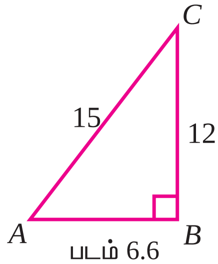
$$\sin\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{25} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{25}{7}$$

$$\cos\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{24}{25} \qquad \sec\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{25}{24}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{24} \qquad \cot\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{24}{7}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.4

செங்கோண முக்கோணம் ABC-ல், B செங்கோணம் மற்றும் $15 \sin A = 12$ எனில், கோணம் A-ன் மற்ற ஐந்து முக்கோணவியல் விகிதங்களையும், கோணம் C-ன் ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களையும் காண்க.



படம் 6.6

தீர்வு $15 \sin A = 12$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, $\sin A = \frac{12}{15}$. $BC = 12$, $AC = 15$ மற்றும் B-ஐ செங்கோணமாக கொண்ட ΔABC ஐ (படம் 6.6) கருதுக. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$15^2 = AB^2 + 12^2$$
$$AB^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$$
$$\therefore AB = \sqrt{81} = 9$$

நாம் இப்பொழுது மூன்று பக்கங்களின் அளவுகளைப் பயன்படுத்தி, கோணம் A மற்றும் C-ன் முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

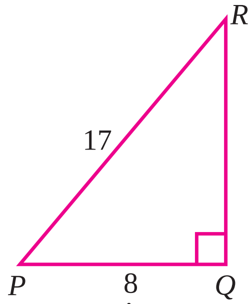
$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \qquad \sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$
$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \qquad \cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$
$$\operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \qquad \tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$
$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \qquad \operatorname{cosec} C = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$
$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \qquad \sec C = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$
$$\cot C = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.5

$\triangle PQR$-ல், Q செங்கோணம், $PQ = 8$ மற்றும் $PR = 17$ எனில், கோணம் P-ன் ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.

தீர்வு செங்கோண முக்கோணம் PQR-ல், Q செங்கோணம் (படம் 6.7ஐ பார்க்க), $PQ = 8$ மற்றும் $PR = 17$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$
$$17^2 = 8^2 + QR^2$$
$$QR^2 = 17^2 - 8^2$$
$$= 289 - 64 = 225$$
$$\therefore \quad QR = \sqrt{225} = 15$$



படம் 6.7

நாம் இப்பொழுது மூன்று பக்கங்களின் அளவுகளைப் பயன்படுத்தி, கோணம் P-ன் ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காணலாம்.

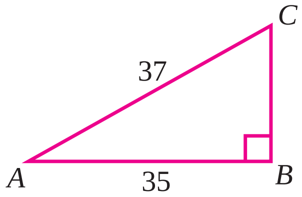
$$\sin P = \frac{RQ}{PR} = \frac{15}{17} \qquad \operatorname{cosec} P = \frac{PR}{RQ} = \frac{17}{15}$$
$$\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{8}{17} \qquad \sec P = \frac{PR}{PQ} = \frac{17}{8}$$
$$\tan P = \frac{RQ}{PQ} = \frac{15}{8} \qquad \cot P = \frac{PQ}{RQ} = \frac{8}{15}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.6

$\cos A = \dfrac{35}{37}$ எனில், $\dfrac{\sec A + \tan A}{\sec A - \tan A}$ வைக் காண்க.

தீர்வு $\cos A = \dfrac{35}{37}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $AB = 35$ மற்றும் $AC = 37$, $\angle B = 90^\circ$ கொண்ட செங்கோண முக்கோணம் ABC ஐக் (படம் 6.8) கருதுக. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ 37^2 &= 35^2 + BC^2 \\ BC^2 &= 37^2 - 35^2 \\ &= 1369 - 1225 = 144 \\ \therefore BC &= \sqrt{144} = 12 \end{aligned}$$



படம் 6.8

$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{37}{35}, \qquad \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{35}$$

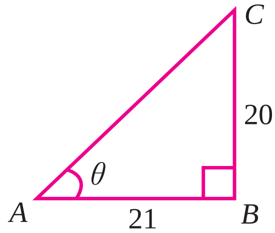
எனவே, $\sec A + \tan A = \dfrac{37}{35} + \dfrac{12}{35} = \dfrac{49}{35}$, $\quad \sec A - \tan A = \dfrac{37}{35} - \dfrac{12}{35} = \dfrac{25}{35}$

$$\therefore \frac{\sec A + \tan A}{\sec A - \tan A} = \frac{\frac{49}{35}}{\frac{25}{35}} = \frac{49}{35} \times \frac{35}{25} = \frac{49}{25}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.7

$\tan\theta = \dfrac{20}{21}$ எனில், $\dfrac{1 - \sin\theta + \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} = \dfrac{3}{7}$ என நிறுவுக.

தீர்வு $\tan\theta = \dfrac{20}{21}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $AB = 21$ மற்றும் $BC = 20$ அளவுகள் கொண்ட செங்கோண முக்கோணம் ABC-ஐ (படம் 6.9) கருதுக. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, நாம் பெறுவது



படம் 6.9

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841.$$

$$\therefore AC = \sqrt{841} = 29.$$

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{20}{29}, \qquad \cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{21}{29}$$

$$1 - \sin\theta + \cos\theta = 1 - \frac{20}{29} + \frac{21}{29} = \frac{29 - 20 + 21}{29} = \frac{30}{29}$$

$$1 + \sin\theta + \cos\theta = 1 + \frac{20}{29} + \frac{21}{29} = \frac{29 + 20 + 21}{29} = \frac{70}{29}$$

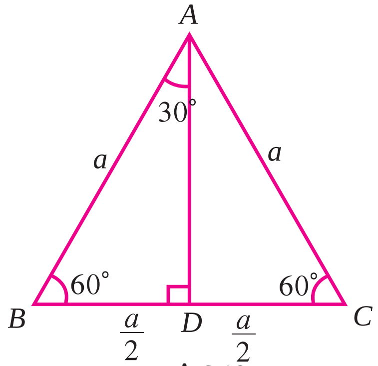
$$\frac{1 - \sin\theta + \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} = \frac{\frac{30}{29}}{\frac{70}{29}} = \frac{30}{29} \times \frac{29}{70} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$$

6.3 சில சிறப்பு கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

சிலவகை சிறப்புக் கோணங்களான $30^\circ, 45^\circ$ மற்றும் 60°-ன் விகிதங்களைக் காண வடிவியல் முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

6.3.1 30° மற்றும் 60°–ன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

$\triangle ABC$ என்பது a அலகு பக்க அளவு கொண்ட சமபக்க முக்கோணம் (படம் 6.10ஐ பார்க்க) என்க. $AD \perp BC$ ஐ வரைக. எனவே, D என்பது BC-ன் மையப்புள்ளி ஆகும். ஆதலால், $BD = DC = \frac{a}{2}$ மற்றும் $\angle BAD = \angle DAC = 30^\circ$. இப்போது, செங்கோண முக்கோணம் BDA-ல், $\angle BAD = 30^\circ$ மற்றும் $BD = \frac{a}{2}$. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,



படம் 6.10

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$a^2 = AD^2 + \left[\frac{a}{2}\right]^2$$

$$AD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \quad = \frac{3a^2}{4}$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

ஆகவே, செங்கோண முக்கோணம் BDA-ல் கோணம் 30°-ன் முக்கோணவியல் விகிதங்களை நாம் பின்வருமாறு காணலாம்.

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$

$\triangle BDA$-ல், $\angle ABD = 60^\circ$. எனவே, நாம் கோணம் 60°-க்கான முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

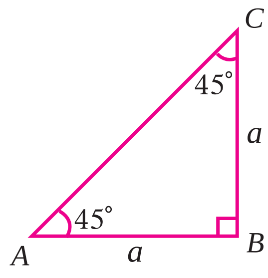
$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \qquad \sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

6.3.2 45°–ன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு குறுங்கோணம் 45° எனில், மற்றொரு குறுங்கோணமும் 45° ஆகும். எனவே, அம்முக்கோணம் ஒரு இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணமாகும். $\angle B = 90^\circ$ கொண்ட ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் ABC-ஐ கருதுக. இங்கு $\angle A = \angle C = 45^\circ$, எனவே, $AB = BC$.



படம் 6.11

$AB = BC = a$ என்க. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\therefore AC = a\sqrt{2}$$

படம் 6.11-லிருந்து, கோணம் 45°-ன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் பின்வருமாறு

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$$

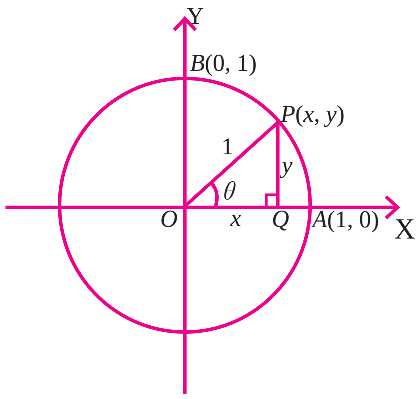
$$\cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1 \qquad \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$$

6.3.3 0° மற்றும் 90°–ன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

ஆதியை மையமாகவும் ஓரலகு ஆரமும் கொண்ட வட்டத்தை (படம் 6.12) கருதுக. $P(x, y)$ என்பது முதல் கால்பகுதியில் வட்டத்தின் மீதமைந்த ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

P-யிலிருந்து x அச்சுக்கு செங்குத்துக்கோடு PQஐ வரைக. இது செங்கோண முக்கோணம் OQPஐ அமைக்கிறது. மேலும் $\angle POQ = \theta$ என்க. எனவே,



படம் 6.12

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} = y \text{ (}P\text{-ன் } y \text{ அச்சுத்தொலைவு)}$$

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} = x \text{ (}P\text{-ன் } x \text{ அச்சுத்தொலைவு)}$$

$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

OP ஆனது OA-வுடன் ஒன்றும்போது $\theta = 0^\circ$ ஆகும். A-ன் ஆயத்தொலைவுகள் $(1,0)$ என்பதால், நாம் பெறுவது

$\sin 0^\circ = 0$ (A-ன் y அச்சுத்தொலைவு)	$\operatorname{cosec} 0^\circ$ வரையறுக்கப்படவில்லை
$\cos 0^\circ = 1$ (A-ன் x அச்சுத்தொலைவு)	$\sec 0^\circ = 1$
$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$	$\cot 0^\circ$ வரையறுக்கப்படவில்லை

OP ஆனது OB-யுடன் ஒன்றும் போது $\theta = 90^\circ$ ஆகும். B-ன் ஆயத்தொலைவுகள் $(0, 1)$ என்பதால், நாம் பெறுவது

$\sin 90^\circ = 1$ (B-ன் y அச்சுத்தொலைவு)	$\operatorname{cosec} 90^\circ = 1$
$\cos 90^\circ = 0$ (B-ன் x அச்சுத்தொலைவு)	$\sec 90^\circ$ வரையறுக்கப்படவில்லை
$\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0}$ வரையறுக்கப்படவில்லை	$\cot 90^\circ = 0$

கோணம் $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ மற்றும் 90° ஆகிய கோணங்களுக்கான ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கோணம் θ / விகிதம்	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	வரையறுக்கப் படவில்லை
$\operatorname{cosec}\theta$	வரையறுக்கப் படவில்லை	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	வரையறுக்கப் படவில்லை
$\cot\theta$	வரையறுக்கப் படவில்லை	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

எடுத்துக்காட்டு 6.8

மதிப்புக் காண்க : $\sin^2 45^\circ + \tan^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$

தீர்வு $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^\circ = 1$ மற்றும் $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ என நமக்குத் தெரியும்.

$$\therefore\ \sin^2 45^\circ + \tan^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$$

குறிப்பு $(\sin\theta)^2$ ஐ $\sin^2\theta$ என எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.9

மதிப்புக் காண்க : $\dfrac{12\cos^2 30^\circ - 2\tan^2 60^\circ}{4\sec^2 45^\circ}$

தீர்வு $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ மற்றும் $\sec 45^\circ = \sqrt{2}$ என நமக்குத் தெரியும்.

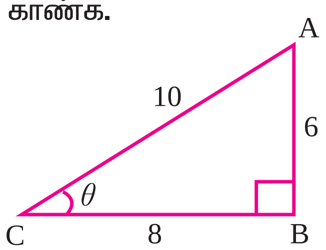
$$\therefore\ \frac{12\cos^2 30^\circ - 2\tan^2 60^\circ}{4\sec^2 45^\circ} = \frac{\left(12\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) - (2\times(\sqrt{3})^2)}{4\times(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\left(12\times\frac{3}{4}\right) - (2\times 3)}{4\times 2}$$

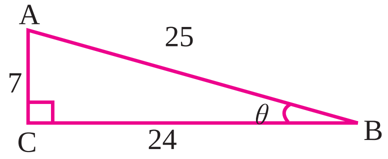
$$= \frac{9-6}{8} = \frac{3}{8}$$

பயிற்சி 6.1

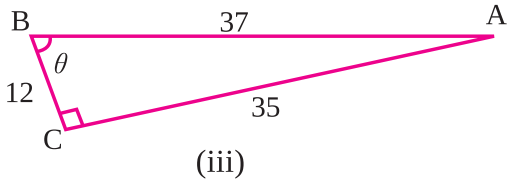
1. பின்வரும் படங்களிலிருந்து, கோணம் θ-வைப் பொறுத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.



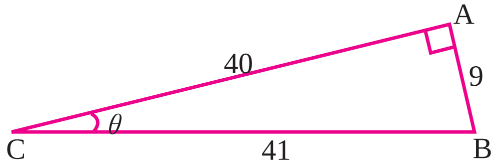
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

2. பின்வருவனவற்றிலிருந்து மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.

(i) $\sin A = \dfrac{9}{15}$ (ii) $\cos A = \dfrac{15}{17}$ (iii) $\tan P = \dfrac{5}{12}$

(iv) $\sec\theta = \dfrac{17}{8}$ (v) $\mathrm{cosec}\,\theta = \dfrac{61}{60}$ (vi) $\sin\theta = \dfrac{x}{y}$.

3. பின்வருவனவற்றில் θ-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sin\theta = 0$ (iii) $\tan\theta = \sqrt{3}$ (iv) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\triangle ABC$-ல், B செங்கோணம், $AB = 10$ மற்றும் $AC = 26$ எனில், கோணம் A மற்றும் Cஐப் பொறுத்து ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.

5. $5\cos\theta - 12\sin\theta = 0$ எனில், $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{2\cos\theta - \sin\theta}$ மதிப்பைக் காண்க.

6. $29\cos\theta = 20$ எனில், $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ மதிப்பைக் காண்க.

7. $\sec\theta = \frac{26}{10}$ எனில், $\frac{3\cos\theta + 4\sin\theta}{4\cos\theta - 2\sin\theta}$ மதிப்பைக் காண்க.

8. $\tan\theta = \frac{a}{b}$ எனில், $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ மதிப்பைக் காண்க.

9. $\cot\theta = \frac{15}{8}$ எனில், $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ மதிப்பைக் காண்க.

10. முக்கோணம் PQR-ல், Q செங்கோணம் மற்றும் $\tan P = \frac{1}{\sqrt{3}}$ எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\sin P\cos R + \cos P\sin R$ (ii) $\cos P\cos R - \sin P\sin R$.

11. $\sec\theta = \frac{13}{5}$ எனில், $\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = 3$ என நிருபி.

12. $\sec A = \frac{17}{8}$ எனில், $1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 - 1$ என நிருபி.

13. மதிப்புக் காண்க :

(i) $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$

(ii) $\sin 60^\circ \tan 30^\circ$

(iii) $\frac{\tan 45^\circ}{\tan 30^\circ + \tan 60^\circ}$

(iv) $\cos^2 60^\circ \sin^2 30^\circ + \tan^2 30^\circ \cot^2 60^\circ$

(v) $6\cos^2 90^\circ + 3\sin^2 90^\circ + 4\tan^2 45^\circ$

(vi) $\frac{4\cot^2 60^\circ + \sec^2 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ}{\sin^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ}$

(vii) $\frac{\tan^2 60^\circ + 4\cos^2 45^\circ + 3\sec^2 30^\circ + 5\cos^2 90^\circ}{\operatorname{cosec} 30^\circ + \sec 60^\circ - \cot^2 30^\circ}$

(viii) $4(\sin^4 30^\circ + \cos^4 60^\circ) - 3(\cos^2 45^\circ - \sin^2 90^\circ)$.

14. பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்க்க.

(i) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$

(ii) $1 + \tan^2 45^\circ = \sec^2 45^\circ$

(iii) $\cos 60^\circ = 1 - 2\sin^2 30^\circ = 2\cos^2 30^\circ - 1$

(iv) $\cos 90^\circ = 1 - 2\sin^2 45^\circ = 2\cos^2 45^\circ - 1$

(v) $\dfrac{\cos 60^\circ}{1+\sin 60^\circ} = \dfrac{1}{\sec 60^\circ + \tan 60^\circ}$

(vi) $\dfrac{1-\tan^2 60^\circ}{1+\tan^2 60^\circ} = 2\cos^2 60^\circ - 1$

(vii) $\dfrac{\sec 30^\circ + \tan 30^\circ}{\sec 30^\circ - \tan 30^\circ} = \dfrac{1+\sin 30^\circ}{1-\sin 30^\circ}$

(viii) $\tan^2 60^\circ - 2\tan^2 45^\circ - \cot^2 30^\circ + 2\sin^2 30^\circ + \frac{3}{4}\operatorname{cosec}^2 45^\circ = 0$

(ix) $4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$

(x) $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = \sin 90^\circ$.

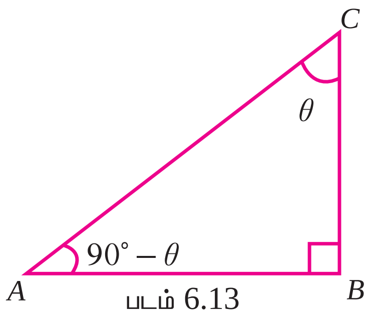
6.4 நிரப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்
(Trigonometric Ratios for Complementary Angles)

இரண்டு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் 90° எனில் ஒன்று மற்றொன்றின் நிரப்புக் கோணமாகும். செங்கோண முக்கோணத்தில் இரண்டு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் 90°. எனவே, செங்கோண முக்கோணத்தில் உள்ள இரு குறுங்கோணங்களும் எப்பொழுதும் ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

செங்கோண முக்கோணம் ABC–ல், B செங்கோணம் என்க (படம் 6.13ஐ பார்க்க). $\angle ACB = \theta$ எனில், $\angle BAC = 90^\circ - \theta$. ஆகவே, கோணங்கள் $\angle BAC$ மற்றும் $\angle ACB$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

கோணம் θ-விற்கான விகிதங்கள்

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{AB}{AC} & \operatorname{cosec}\theta &= \frac{AC}{AB} \\ \cos\theta &= \frac{BC}{AC} & \sec\theta &= \frac{AC}{BC} \\ \tan\theta &= \frac{AB}{BC} & \cot\theta &= \frac{BC}{AB} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$



படம் 6.13

இதே போன்று, கோணம் $(90^\circ - \theta)$-விற்கான விகிதங்கள்

$$\left.\begin{aligned} \sin(90^\circ-\theta) &= \frac{BC}{AC} & \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) &= \frac{AC}{BC} \\ \cos(90^\circ-\theta) &= \frac{AB}{AC} & \sec(90^\circ-\theta) &= \frac{AC}{AB} \\ \tan(90^\circ-\theta) &= \frac{BC}{AB} & \cot(90^\circ-\theta) &= \frac{AB}{BC} \end{aligned}\right\} (2)$$

(1) மற்றும் (2)-ல் உள்ள விகிதங்களை ஒப்பிட நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{AB}{AC} = \cos(90^\circ-\theta) & \operatorname{cosec}\theta &= \frac{AC}{AB} = \sec(90^\circ-\theta) \\ \cos\theta &= \frac{BC}{AC} = \sin(90^\circ-\theta) & \sec\theta &= \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) \\ \tan\theta &= \frac{AB}{BC} = \cot(90^\circ-\theta) & \cot\theta &= \frac{BC}{AB} = \tan(90^\circ-\theta) \end{aligned}$$

முக்கிய கருத்து — நிரப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

செங்கோண முக்கோணத்தில் θ என்பது ஒரு குறுங்கோணம் எனில், நிரப்புக் கோணங்களுக்கான முக்கோணவியல் விகிதங்களின் முற்றொருமைகளை நாம் பின்வருமாறு பெறுகிறோம்.

$\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\theta = \sec(90^\circ - \theta)$

$\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$ $\quad$ $\sec\theta = \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)$

$\tan\theta = \cot(90^\circ - \theta)$ $\quad$ $\cot\theta = \tan(90^\circ - \theta)$

எடுத்துக்காட்டு 6.10

மதிப்புக் காண்க : $\dfrac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ}$

தீர்வு கோணங்கள் 56° மற்றும் 34° ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக்கோணங்கள். ஆகவே, நிரப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பயன்படுத்த, $\cos 56^\circ = \cos(90^\circ - 34^\circ) = \sin 34^\circ$. ஆகவே, $\dfrac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ} = \dfrac{\sin 34^\circ}{\sin 34^\circ} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 6.11

மதிப்புக் காண்க : $\dfrac{\tan 25^\circ}{\cot 65^\circ}$

தீர்வு $\tan 25^\circ = \tan(90^\circ - 65^\circ) = \cot 65^\circ$ என எழுதலாம். ஆகவே,

$$\frac{\tan 25^\circ}{\cot 65^\circ} = \frac{\cot 65^\circ}{\cot 65^\circ} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 6.12

மதிப்புக் காண்க : $\dfrac{\cos 65^\circ \sin 18^\circ \cos 58^\circ}{\cos 72^\circ \sin 25^\circ \sin 32^\circ}$

தீர்வு நிரப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பயன்படுத்த, நாம் பெறுவது

$$\cos 65^\circ = \cos(90^\circ - 25^\circ) = \sin 25^\circ,$$
$$\sin 18^\circ = \sin(90^\circ - 72^\circ) = \cos 72^\circ$$
$$\cos 58^\circ = \cos(90^\circ - 32^\circ) = \sin 32^\circ.$$
$$\therefore \frac{\cos 65^\circ \sin 18^\circ \cos 58^\circ}{\cos 72^\circ \sin^\circ 25^\circ \sin 32^\circ} = \frac{\sin 25^\circ \cos 72^\circ \sin 32^\circ}{\cos 72^\circ \sin 25^\circ \sin 32^\circ} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 6.13

$\tan 35^\circ \tan 60^\circ \tan 55^\circ \tan 30^\circ = 1$ என நிறுவுக.

தீர்வு $\tan 35^\circ = \tan(90^\circ - 55^\circ) = \cot 55^\circ$,

$\tan 60^\circ = \tan(90^\circ - 30^\circ) = \cot 30^\circ$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \tan 35^\circ \tan 60^\circ \tan 55^\circ \tan 30^\circ = \cot 55^\circ \cot 30^\circ \tan 55^\circ \tan 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\tan 55^\circ} \times \frac{1}{\tan 30^\circ} \times \tan 55^\circ \times \tan 30^\circ = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 6.14

$\operatorname{cosec} A = \sec 25^\circ$ எனில், A-ஐக் காண்க.

தீர்வு $\operatorname{cosec} A = \sec(90^\circ - A)$ என நமக்கு தெரியும். எனவே,

$$\sec(90^\circ - A) = \sec 25^\circ \implies 90^\circ - A = 25^\circ$$

$$\therefore\ A = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

குறிப்பு

எடுத்துக்காட்டு 6.14-ன் தீர்வில், A-ன் மதிப்பைப் பெற இருபுறமும் sec-ஆல் வகுக்ககூடாது. மாறாக குறுங்கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களின் ஒருமைப் பண்பின் அடிப்படையில் A-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடவேண்டும். அதாவது, α மற்றும் β ஆகியவை குறுங்கோணங்கள் எனில்,

$$\sin\alpha = \sin\beta \implies \alpha = \beta$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \implies \alpha = \beta, \cdots$$

எடுத்துக்காட்டு 6.15

$\sin A = \cos 33^\circ$ எனில், A-ஐக் காண்க.

தீர்வு $\sin A = \cos(90^\circ - A)$ என நமக்குத் தெரியும். எனவே,

$$\cos(90^\circ - A) = \cos 33^\circ \implies 90^\circ - A = 33^\circ$$

$$\therefore\ A = 90^\circ - 33^\circ = 57^\circ$$

பயிற்சி 6.2

1. மதிப்புக் காண்க.

(i) $\dfrac{\sin 36^\circ}{\cos 54^\circ}$ (ii) $\dfrac{\operatorname{cosec} 10^\circ}{\sec 80^\circ}$ (iii) $\sin\theta\sec(90^\circ - \theta)$

(iv) $\dfrac{\sec 20^\circ}{\operatorname{cosec} 70^\circ}$ (v) $\dfrac{\sin 17^\circ}{\cos 73^\circ}$ (vi) $\dfrac{\tan 46^\circ}{\cot 44^\circ}$.

2. சுருக்குக.

(i) $\cos 38^\circ\cos 52^\circ - \sin 38^\circ\sin 52^\circ$ (ii) $\dfrac{\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} + \cos 59^\circ\operatorname{cosec} 31^\circ$

(iii) $\dfrac{\sin 36^\circ}{\cos 54^\circ} - \dfrac{\tan 54^\circ}{\cot 36^\circ}$ (iv) $3\dfrac{\tan 67^\circ}{\cot 23^\circ} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin 42^\circ}{\cos 48^\circ} + \dfrac{5}{2}\dfrac{\operatorname{cosec} 61^\circ}{\sec 29^\circ}$

(v) $\dfrac{\cos 37^\circ}{\sin 53^\circ}\times\dfrac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$ (vi) $2\dfrac{\sec(90^\circ - \theta)}{\operatorname{cosec}\theta} + 7\dfrac{\cos(90^\circ - \theta)}{\sin\theta}$

(vii) $\dfrac{\sec(90^\circ - \theta)}{\sin(90^\circ - \theta)}\times\dfrac{\cos\theta}{\tan(90^\circ - \theta)} - \sec\theta$ (viii) $\dfrac{\sin 35^\circ}{\cos 55^\circ} + \dfrac{\cos 55^\circ}{\sin 35^\circ} - 2\cos^2 60^\circ$

(ix) $\cot 12^\circ\cot 38^\circ\cot 52^\circ\cot 60^\circ\cot 78^\circ$.

3. பின்வருவனவற்றில் A-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\sin A = \cos 30^\circ$ (ii) $\tan 49^\circ = \cot A$ (iii) $\tan A \tan 35^\circ = 1$

(iv) $\sec 35^\circ = \operatorname{cosec} A$ (v) $\operatorname{cosec} A \cos 43^\circ = 1$ (vi) $\sin 20^\circ \tan A \sec 70^\circ = \sqrt{3}$.

4. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ = 0$ (ii) $\cos 20^\circ \cos 70^\circ - \sin 70^\circ \sin 20^\circ = 0$

(iii) $\sin(90^\circ - \theta)\tan\theta = \sin\theta$ (iv) $\dfrac{\cos(90^\circ - \theta)\tan(90^\circ - \theta)}{\cos\theta} = 1$.

6.5 முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தும் முறை

நாம் இதுவரை 0°, 30°, 45°, 60° மற்றும் 90° ஆகியவற்றின் முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கணக்கீடு செய்தோம். செங்கோண முக்கோணத்தின் தீர்வைக் காண இவை அல்லாத மாறுபட்ட மற்ற குறுங்கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களும் நமக்குத் தேவைப்படுகிறது. அனைத்து குறுங்கோணங்களின் sine, cosine மற்றும் tangent–ன் தோராய மதிப்புகள் இப்புத்தகத்தின் பின்பகுதியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பாகையின் பின்னங்களை, ஒரு பாகை என்பதை 60 நிமிடங்களாகவும், ஒரு நிமிடம் என்பதை 60 வினாடிகளாகவும் பிரித்து எழுதுகிறோம். ஒரு நிமிடம் என்பது $1'$ எனவும் ஒரு வினாடி என்பது $1''$ எனவும் குறிக்கப்படுகிறது. ஆகவே,

$$1^\circ = 60' \text{ மற்றும் } 1' = 60''.$$

sine, cosine மற்றும் tangent-ன் 0° முதல் 90° வரையிலான அனைத்து கோணங்களின் மதிப்புகளும் $6'$ இடைவெளி அளவில் நான்கு தசம இடத் திருத்தமாக அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும், முக்கோணவியல் அட்டவணை மூன்று பகுதிகளை உடையது.

(i) அட்டவணையில் இடது கோடியில் உள்ள நிரலில் பாகை 0° முதல் 90° வரை குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

(ii) அட்டவணையில் அடுத்துள்ள பத்து நிரல்கள் முறையே $0'$, $6'$, $12'$, $18'$, $24'$, $30'$, $36'$, $42'$, $48'$ மற்றும் $54'$ என்ற தலைப்பில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(iii) பொதுவித்தியாசம் *(Mean Difference)* என்ற தலைப்பின் கீழ் ஐந்து நிரல்கள் உள்ளன. அந்த ஐந்து நிரல்களுக்கு $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ மற்றும் $5'$ என தலைப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கோணங்கள் sine, cosine மற்றும் tangent-ன் மதிப்புகள் (ii)ல் குறிப்பிட்டுள்ளவாறு $6'$-ன் மடங்குகளில் பத்து நிரல்களாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மற்ற நிமிடங்களில் கொடுக்கப்பட்ட கோணங்களின் மதிப்புகளைக் காண பொதுவித்தியாச அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளைக் கொண்டு சரிசெய்து கொள்ளவேண்டும்.

sine மற்றும் tangent அட்டணையில் மதிப்பைக் காணும்போது பொதுவித்தியாசத்தைக் கூட்ட வேண்டும், அதே சமயம் cosine அட்டணையில் பொதுவித்தியாசத்தைக் கழிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.16

$\sin 46^\circ 51'$**-ன் மதிப்பைக் காண்க.**

தீர்வு *sine* அட்டவணையிலிருந்து தேவையான பகுதி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Diff.				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
46°									0.7290				6		

$46^\circ 51' = 46^\circ 48' + 3'$ என எழுதுக. அட்டவணையிலிருந்து நாம் பெறுவது,

$$\sin 46^\circ 48' = 0.7290$$

$3'$-ன் பொது வித்தியாசம் $= 0.0006$

$\therefore \sin 46^\circ 51' = 0.7290 + 0.0006 = 0.7296$

எடுத்துக்காட்டு 6.17

$\cos 37^\circ 16'$**-ன் மதிப்பைக் காண்க.**

தீர்வு

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Diff.				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
37°			0.7965											7	

$37^\circ 16' = 37^\circ 12' + 4'$ என எழுதுக. அட்டவணையிலிருந்து,

$$\cos 37^\circ 12' = 0.7965$$

$4'$-ன் பொது வித்தியாசம் $= 0.0007$

θ-ன் மதிப்பு 0°லிருந்து 90°-க்கு அதிகரிக்கும்போது $\cos\theta$-ன் மதிப்பு 1லிருந்து 0-க்கு குறைவதால், பொது வித்தியாசத்தைக் கழிக்க வேண்டும்.

$\therefore \cos 37^\circ 16' = 0.7965 - 0.0007 = 0.7958$

எடுத்துக்காட்டு 6.18

$\tan 25^\circ 15'$**-ன் மதிப்பைக் காண்க.**

தீர்வு

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Diff.				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
25°			0.4706										11		

$25^\circ 15' = 25^\circ 12' + 3'$ என எழுதுக. அட்டவணையிலிருந்து,

$$\tan 25^\circ 12' \quad = 0.4706$$

$3'$-ன் பொது வித்தியாசம் $= 0.0011$

$\therefore\ \tan 25^\circ 15' = 0.4706 + 0.011 = 0.4717$

எடுத்துக்காட்டு 6.19

$\sin\theta = 0.0958$ **எனில், கோணம்** θ**-வைக் காண்க.**

தீர்வு 0.0958 -க்கு எதிராக sine அட்டவணையிலிருந்து, நாம் காணும் மதிப்பு $\sin 5^\circ 30'$.

$\Longrightarrow \sin 5^\circ 30' = \ 0.0958$

$\therefore\ \theta = 5^\circ 30'$

எடுத்துக்காட்டு 6.20

$\sin\theta = 0.0987$ **எனில், கோணம்** θ**-வைக் காண்க.**

தீர்வு sine அட்டவணையிலிருந்து, $\sin\theta = 0.0993$-க்கு ஒத்த θ-ன் மதிப்பு $5^\circ 42'$ மற்றும் 0.0006 க்கு எதிரான மதிப்பு $2'$. ஆகவே,

$\sin\theta = 0.0987 \ = 0.0993 - 0.0006$

$= \sin 5^\circ 42' - \ (2'$ன் பொது வித்தியாசம்)

$\sin\theta = \sin 5^\circ 40'$

$\therefore\ \theta = 5^\circ 40'$

எடுத்துக்காட்டு 6.21

$\tan\theta = 0.4040$ **எனில், கோணம்** θ**-ன் மதிப்பைக் காண்க.**

தீர்வு 0.4040 க்கு எதிராக tangent அட்டவணையிலிருந்து, நாம் காணும் மதிப்பு $\tan 22^\circ 0'$.

$\Longrightarrow \tan 22^\circ = 0.4040$

$\therefore\ \theta = 22^\circ$

எடுத்துக்காட்டு 6.22

சுருக்குக. $\sin 30^\circ 30' + \cos 5^\circ 33'$

தீர்வு sine அட்டவணையிலிருந்து, $\sin 30^\circ 30' = 0.5075$. cosine அட்டவணையிலிருந்து, $\cos 5^\circ 30' = 0.9954$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $3' = 0.0001$. ஆகவே,

$$\cos 5^\circ 33' = 0.9954 - 0.0001 = 0.9953$$

$$\therefore\ \sin 30^\circ 30' + \cos 5^\circ 33' = 0.5075 + 0.9953 = 1.5028$$

எடுத்துக்காட்டு 6.23

சுருக்குக. $\cos 70^\circ 12' + \tan 48^\circ 54'$

தீர்வு cosine மற்றும் tangent அட்டவணையிலிருந்து, நாம் காண்பது

$\cos 70^\circ 12' = 0.3387$

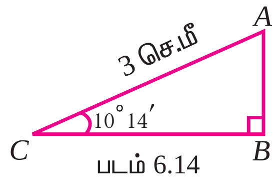
$\tan 48^\circ 54' = 1.1463$

$\therefore \cos 70^\circ 12' + \tan 48^\circ 54' = 0.3387 + 1.1463$

$= 1.4850$

எடுத்துக்காட்டு 6.24

படம் 6.14-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.



படம் 6.14

தீர்வு படம் 6.14-லிருந்து, $\sin\theta = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \sin 10^\circ 14' = \frac{AB}{3}$

sine அட்டவணையிலிருந்து, $\sin 10^\circ 12' = 0.1771$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $2' = 0.0006$

$\therefore \sin 10^\circ 14' = 0.1777$

$0.1777 = \frac{AB}{3}$

$\therefore AB = 0.1777 \times 3 = 0.5331$

$\cos\theta = \frac{BC}{AC} \Longrightarrow \cos 10^\circ 14' = \frac{BC}{3}$

cosine அட்டவணையிலிருந்து, $\cos 10^\circ 12' = 0.9842$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $2' = 0.0001$

$\therefore \cos 10^\circ 14' = 0.9842 - 0.0001 = 0.9841$

$0.9841 = \frac{BC}{3}$

$\therefore BC = 0.9841 \times 3 = 2.9523$

செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \times 2.9523 \times 0.5331$

$= 0.786935565$

$\therefore$ செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $= 0.7869$ ச.செ.மீ (தோராயமாக)

எடுத்துக்காட்டு 6.25

6 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்தில் 165° கோணஅளவைத் தாங்கும் நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

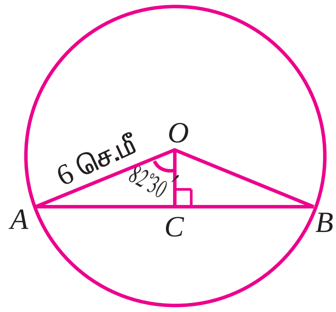
தீர்வு O-வை மையமாக உடைய 6 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்தில் 165° கோண அளவைத் தாங்கும் நாண் AB என்க. $OC \perp AB$ ஐ வரைக, ஆகவே C என்பது AB-ன் மையப்புள்ளி. எனவே,

$$\angle AOC = \frac{165^\circ}{2} = 82^\circ 30'$$

செங்கோண முக்கோணம் ACO-வில்,

$$\sin 82^\circ 30' = \frac{AC}{OA} \Longrightarrow AC = \sin 82^\circ 30' \times OA$$

$$AC = 0.9914 \times 6 = 5.9484 \text{ செ.மீ}$$



படம் 6.15

$\therefore$ நாணின் நீளம் $AB = AC \times 2 = 5.9484 \times 2 = 11.8968$ செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு 6.26

8 அலகு ஆரமுடைய வட்டத்தினுள் அமைந்த 9 பக்கங்களைக் கொண்ட ஒழுங்கு பலகோணத்தின் பக்கத்தின் நீளம் காண்க.

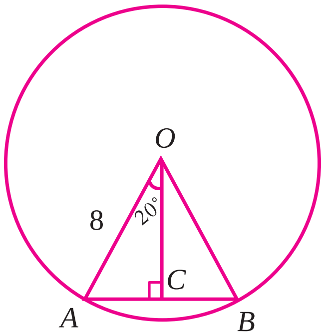
தீர்வு AB என்பது 8 அலகு ஆரமுடைய வட்டத்தினுள் அமைந்த 9 பக்கங்கள் கொண்ட ஒழுங்கு பலகோணத்தின் ஒரு பக்கம் என்க. O என்பது வட்டத்தின் மையம் எனில், $\angle AOB = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$. $OC \perp AB$ ஐ வரைக. எனவே,

$$\angle AOC = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

$$\sin 20^\circ = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{8}$$

$$\text{i.e., } 0.3420 = \frac{AC}{8}$$

$$AC = 0.3420 \times 8 = 2.736$$



படம் 6.16

$\therefore$ பக்கம் AB-ன் நீளம் $= 2 \times AC = 2 \times 2.736 = 5.472$ அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 6.27

6 செ.மீ பக்க அளவு கொண்ட ஒழுங்கு அறுகோணத்தில் அமைந்துள்ள உள்வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.

தீர்வு AB என்பது ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் ஒரு பக்கம் மற்றும் O என்பது உள்வட்ட மையம் என்க. $OC \perp AB$ ஐ வரைக. r என்பது வட்டத்தின் ஆரம் எனில், $OC = r$. மேலும்,

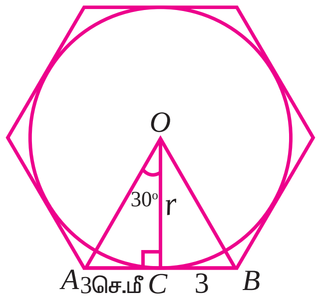
$\angle AOB = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

$\therefore \angle AOC = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

$\tan 30^\circ = \dfrac{AC}{r}$

i.e., $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{r}$

$\therefore\ r = 3 \times 1.732 = 5.196$ செ.மீ



படம் 6.17

ஆகவே, உள்வட்டத்தின் ஆரம் = 5.196 செ.மீ

பயிற்சி 6.3

1. பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

   (i) $\sin 26^\circ$ (ii) $\cos 72^\circ$ (iii) $\tan 35^\circ$ (iv) $\sin 75^\circ 15'$

   (v) $\sin 12^\circ 12'$ (vi) $\cos 12^\circ 35'$ (vii) $\cos 40^\circ 20'$ (viii) $\tan 10^\circ 26'$

   (ix) $\cot 20^\circ$ (x) $\cot 40^\circ 20'$

2. பின்வருவனவற்றில் θ-ன் மதிப்பைக் காண்க.

   (i) $\sin\theta = 0.7009$ (ii) $\cos\theta = 0.9664$ (iii) $\tan\theta = 0.3679$

   (iv) $\cot\theta = 0.2334$ (v) $\tan\theta = 63.6567$

3. முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி சுருக்குக.

   (i) $\sin 30^\circ 30' + \cos 40^\circ 20'$ (ii) $\tan 45^\circ 27' + \sin 20^\circ$

   (iii) $\tan 63^\circ 12' - \cos 12^\circ 42'$ (iv) $\sin 50^\circ 26' + \cos 18^\circ + \tan 70^\circ 12'$

   (v) $\tan 72^\circ + \cot 30^\circ$

4. கர்ணம் 20 செ.மீ மற்றும் ஒரு குறுங்கோணம் 48° கொண்ட செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

5. கர்ணம் 8 செ.மீ மற்றும் ஒரு குறுங்கோணம் 57° கொண்ட செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

6. அடிப்பக்கம் 16 செ.மீ மற்றும் உச்சிக்கோணம் $60^\circ 40'$ கொண்ட இருசமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

7. அடிப்பக்கம் 15 செ.மீ மற்றும் உச்சிக்கோணம் 80° கொண்ட இருசமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

8. ஒரு ஏணி 30° கோண அளவில் சுவற்றில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் அடிப்பக்கம் சுவற்றிலிருந்து 12 மீ தொலைவில் உள்ளது எனில், ஏணியின் நீளம் காண்க.

9. 4 மீ நீளமுள்ள ஏணி சுவற்றின் அடிபாகத்திலிருந்து 2 மீ தொலைவில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது எனில், ஏணி சுவருடன் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைக் காண்க.

10. 5 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்தில் 108° கோணஅளவைத் தாங்கும் நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

11. 6 செ.மீ ஆரமுடைய வட்டத்தினுள் அமைந்த 12 பக்கங்களைக் கொண்ட ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் பக்கத்தின் நீளம் காண்க.

12. 24 செ.மீ பக்க அளவு கொண்ட ஒழுங்கு அறுகோணத்தில் அமைந்துள்ள உள்வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.

நினைவில் கொள்க

- **பிதாகரஸ் தேற்றம்:**

  ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் மீது வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவானது, மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் மீது வரையப்படும் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூடுதலுக்கு சமம்.

- **முக்கோணவியல் விகிதங்கள்:**

  செங்கோண முக்கோணத்தில் θ ஒரு குறுங்கோணம் என்க. θ-வைப் பொறுத்து ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்கள் பின்வருமாறு

  $$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$$

  $$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$$

  $$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$$

- **முக்கோணவியல் விகிதங்களின் தலைகீழ் தொடர்புகள்:**

  $$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

  $$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- **நிரப்பு கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்:**

  செங்கோண முக்கோணத்தில் θ என்பது ஒரு குறுங்கோணம் எனில், நிரப்பு கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களிலிருந்து நாம் பின்வரும் முற்றொருமைகளைப் பெறுகிறோம்.

  $$\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta) \qquad \operatorname{cosec}\theta = \sec(90^\circ - \theta)$$

  $$\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta) \qquad \sec\theta = \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)$$

  $$\tan\theta = \cot(90^\circ - \theta) \qquad \cot\theta = \tan(90^\circ - \theta)$$

7 வடிவியல்

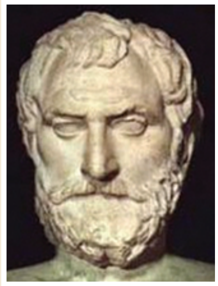
Truth can never be told so as to be understood,
and not to be believed
- WILLIAM BLAKE

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- வடிவியலின் அடிப்படைக் கருத்துகளை நினைவு கூர்தல்.
- இணைகரத்தின் மீதான தேற்றங்களை புரிந்து கொள்ளுதல்.
- வட்டத்தின் மீதான தேற்றங்களை புரிந்து கொள்ளுதல்

7.1 அறிமுகம்

Geometry என்ற பெயர் இரண்டு கிரேக்க வார்த்தைகளில் "புவியை அளவிடல்" என்ற பொருளிலிருந்து பெறப்பட்டது. காலப்போக்கில் வடிவியல் மிக அழகாக அமைக்கப்பட்ட தருக்க முறையில் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட கணித அறிவாகும். இது புள்ளிகள், கோடுகள், தளங்கள், உருவங்களுக்கு இடையேயுள்ள பண்புகள் மற்றும் தொடர்புகளை உள்ளடக்கியது. சுமார் கி.மு. 3000 ஆண்டின் போது முற்கால எகிப்து மற்றும் சிந்து சமவெளியில் வடிவியல் பற்றிய பதிவுகள் காணப்பட்டன. வரையறுக்கப்படாத வார்த்தைகள், வரையறைகள் மற்றும் ஊகங்கள் ஆகியவற்றால் வடிவியல் தொடங்குகிறது. இவை தேற்றங்களுக்கும் வரைபடங்களுக்கும் கொண்டுச் செல்கின்றன. இது நுட்பமான பாடம் ஆனால், மனக்கண்ணால் எளிதாக ஊகிக்கலாம். மேலும் உறுதியான நடைமுறைப் பயன்பாடுகளைக் கொண்டது. வடிவியல் நிலங்களை அளவெடுப்பதில் முக்கிய பங்காற்றினாலும், எடுத்துக்காட்டாக, தற்போது கட்டுமானத்தில் உறுதிபாடுடைய பாலங்கள், விண்வெளி ஆய்வுக்கூடங்கள் மற்றும் மிகப்பெரிய விளையாட்டு மற்றும் பொழுது போக்கு அரங்குகள் அமைக்க இவ்வறிவானது பயன்படுத்தப்படுகிறது. யூக்ளிட்டின் முதல்புத்தகமான *Elements*-இல் குறிப்பிடப்பட்டவைகளின் மேற்கூறிய கட்டுமானப் பணிகளின் வடிவியல் தேற்றம் தெளிவாக எழுதப்பட்டுள்ளது.

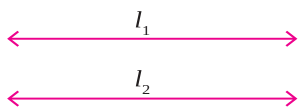
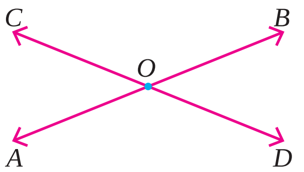
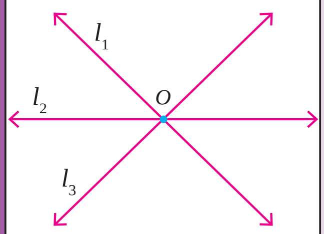
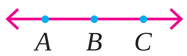


தேலீஸ்
(640 - 546 BC)

Thales (pronounced THAY-lees)
கிரேக்க நகரமான மிலேட்டசில் தேலீஸ் பிறந்தார். வடிவியலில் கருத்தியல் மற்றும் வரைதல் புரிதலுக்காக நன்கு அறியப்பட்டவர். ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தை முக்கோணத்தின் நீண்ட பக்கமாகக் கொண்டு அதற்குள் ஒரு முக்கோணத்தை வரைந்தால் நீண்ட பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள கோணம் எப்போதுமே செங்கோணமாகும் என்ற தேற்றத்தை நிறுவினார். பிரமிடுகளின் உயரம் மற்றும் கடற்கரைக்கும் கப்பலுக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் ஆகியகணக்குகளுக்கு வடிவியல் முறையில் தீர்வு கண்டறிந்தார். வடிவியலில் உய்த்தறி காரணத்தைப் பயன்படுத்தி தேலீஸ் தேற்றத்திற்கு நான்கு துணைத் தேற்றங்களை முதன்முதலில் பயன்படுத்தினார். இதற்காக முதன் முறையாக உண்மையான கணித அறிஞர் என்றும் கணித கண்டுபிடிப்புகளைக் கண்டறிந்த முதல் மனிதர் என இவர்பாராட்டப்பட்டார். கிரேக்க நாட்டின் ஏழு அறிவு ஜீவிகளில் அல்லது ஏழு துறவிகளில் ஒருவராக விளங்கினார். மேற்கத்திய பண்பாட்டின் முதல் தத்துவ மேதையாக மற்றவர்களால் அவர் மதிக்கப்பட்டார்.

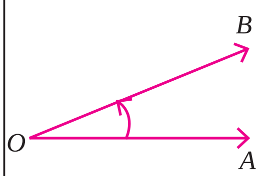
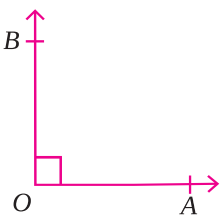
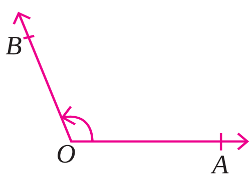
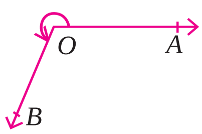
7.2 வடிவியல் அடிப்படைக் கருத்துகள்

நாம் முந்தைய வகுப்புகளில் படித்த சில முக்கியமான வடிவியலின் அடிப்படைக் கருத்துகளை இப்பகுதியில் நினைவு கூர்வோம்.

கருத்து	படம்	விளக்கம்
இணை கோடுகள்		ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளாமல் ஒரே தளத்தில் செல்லும் கோடுகளை இணைகோடுகள் என்கிறோம். இரு இணைகோடுகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு எப்பொழுதும் சமமாக இருக்கும்.
வெட்டும் கோடுகள்		இரண்டு கோடுகளுக்கு ஒரேயொரு பொதுவான புள்ளி இருந்தால் அவை வெட்டும்கோடுகள் எனப்படும். பொதுப்புள்ளிக்கு வெட்டிக்கொள்ளும் (வெட்டுப்புள்ளி) புள்ளி என்று பெயர். அருகில் உள்ளபடத்தில் கோடுகள் *AB* மற்றும் *CD* ஆகியவை *O* என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.
ஒருபுள்ளி வழிக்கோடுகள்		மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகள் ஒருபுள்ளி வழிச் சென்றால் அவை ஒருபுள்ளி வழிக்கோடுகள் எனப்படும். அருகில் உள்ள படத்தில் கோடுகள் l_1, l_2, l_3 ஆகியவை *O* என்ற புள்ளியின் வழியே செல்கின்றன. எனவே, அவை ஒருபுள்ளி வழிக்கோடுகள் எனப்படும்.
ஒருகோடமைப் புள்ளிகள்		மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்தால், அந்த புள்ளிகள் ஒருகோடமைப் புள்ளிகள் எனப்படும். அவ்வாறு இல்லையெனில், அவை ஒரு கோடமையாப்புள்ளிகள் எனப்படும்.

7.2.1 கோணங்களின் வகைகள்

கோணங்களை அவற்றின் கோண அளவுகளைப் பொறுத்து வகைப்படுத்தலாம்.

பெயர்	குறுங்கோணம் (Acute Angle)	செங்கோணம் (Right Angle)	விரிகோணம் (Obtuse Angle)	பின்வளை கோணம் (Reflex Angle)
வரைபடம்				
கோண அளவு	$\angle AOB < 90^\circ$	$\angle AOB = 90^\circ$	$90^\circ < \angle AOB < 180^\circ$	$180^\circ < \angle AOB < 360^\circ$

நிரப்புக் கோணங்கள் (*Complementary Angles*)

இரு கோண அளவுகளின் கூடுதல் 90° எனில், அக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\angle A = 52^\circ$ மற்றும் $\angle B = 38^\circ$ எனில், கோணம் $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

மிகைநிரப்புக் கோணங்கள் (*Supplementary Angles*)

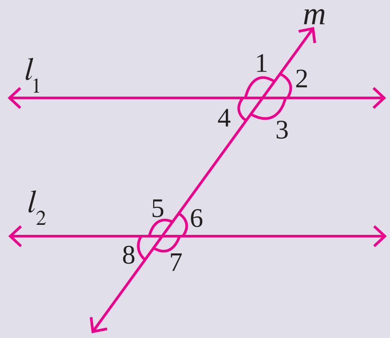
இரு கோணங்களின் கூடுதல் 180° எனில், அக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று மிகைநிரப்புக் கோணங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 112° மற்றும் 68° அளவு கொண்ட கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று மிகைநிரப்புக் கோணங்களாகும்.

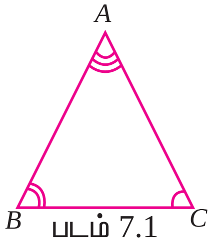
7.2.2 குறுக்குவெட்டி (*Transversal*)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகளை ஒரு நேர்க்கோடானது வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டினால் அதற்கு குறுக்குவெட்டி என்று பெயர்.

இரு இணை கோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டுவதால் ஏற்படும் கோணங்கள்

பெயர்	கோணம்	வரைபடம்
குத்தெதிர் கோணங்கள் சமம்	$\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 7$, $\angle 6 = \angle 8$	
ஒத்த கோணங்கள் சமம்	$\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$	
உள்ளெதிர் கோணங்கள் சமம்	$\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$	
வெளி எதிர் கோணங்கள் சமம்	$\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 8$	
உள் கோணங்கள் மிகை நிரப்புக் கோணங்கள்	$\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$; $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$	

7.2.3 முக்கோணங்கள் (*Triangles*)

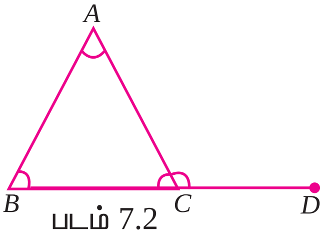


படம் 7.1

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் 180°.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (படம் 7.1.)

குறிப்புரை



படம் 7.2

(i) ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் நீட்டப்படுவதால் ஏற்படும் வெளிக்கோணம் அதன் உள்ளெதிர் கோணங்களின் கூடுதலுக்கு சமம். $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$

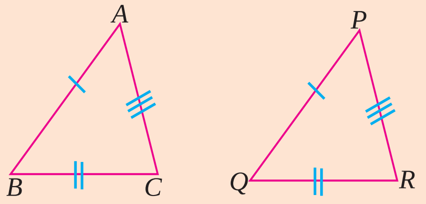
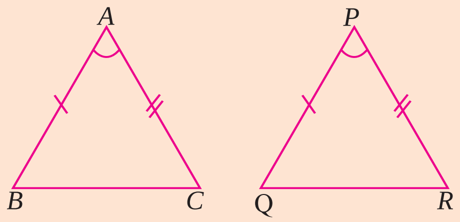
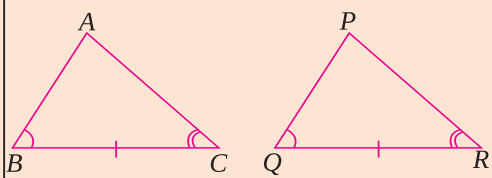
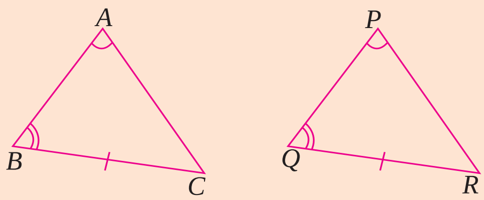
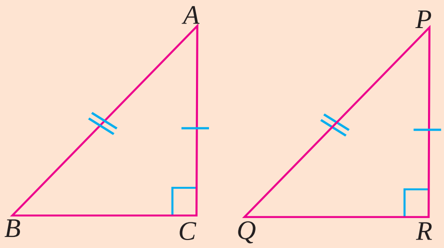
(ii) ஒரு முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணமானது உள்ளெதிர் கோணங்களை விட அதிகமாக இருக்கும்.

(iii) எந்தவொரு முக்கோணத்திலும் பெரிய பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ள கோணம் பெரியதாக இருக்கும்.

சர்வசம முக்கோணங்கள் (*Congruent Triangles*)

ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்து பக்கங்களும், கோணங்களும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒத்த பக்கங்களுக்கும், ஒத்த கோணங்களுக்கும் சமமானால் அம்முக்கோணங்கள் சர்வசம முக்கோணங்கள் எனப்படும்.

சர்வசமம் என்பதற்கு நாம் '≡' குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

	விளக்கம்	படம்
ப–ப–ப SSS	ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களுக்கு சமமெனில், அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும்.	 $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$
ப–கோ–ப SAS	ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களும் அவை உள்ளடக்கிய கோணமும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களுக்கும் அவை உள்ளடக்கிய கோணத்திற்கும் சமமெனில், அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும்.	 $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$
கோ–ப–கோ ASA	ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களும் அவற்றால் இணைந்த பக்கமும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களுக்கும் அவற்றால் இணைந்த பக்கத்திற்கும் சமமானால், அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும்.	 $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$
கோ–கோ–ப AAS	ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களும் அதன் ஏதாவது ஒரு பக்கமும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களுக்கும் ஒத்த பக்கத்திற்கும் சமமெனில், அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும்.	 $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$
செ–க–ப RHS	ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம், ஏதேனும் ஒரு பக்கம், மற்றொரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம், ஒரு பக்கம் ஆகியவற்றிற்கு முறையே சமமாக இருப்பின், அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும்.	 $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$

பயிற்சி 7.1

1. பின்வரும் கோணங்களின் நிரப்புக் கோணங்களைக் காண்க.

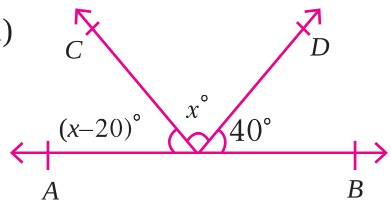
   (i) 63° (ii) 24° (iii) 48° (iv) 35° (v) 20°

2. பின்வரும் கோணங்களின் மிகைநிரப்புக் கோணங்களைக் காண்க.

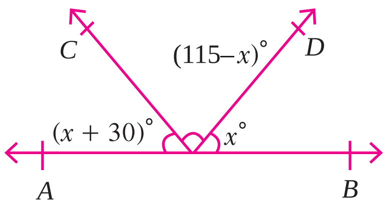
   (i) 58° (ii) 148° (iii) 120° (iv) 40° (v) 100°

3. பின்வரும் படங்களில் x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

   (i)



   (ii)



4. பின்வரும் கோண அளவுகளைக் காண்க.

   i) ஒரு கோணம் அதன் நிரப்புக் கோணத்தைப் போல இரு மடங்கு.

   ii) ஒரு கோணம் அதன் மிகை நிரப்புக் கோணத்தைப் போல நான்கு மடங்கு.

   iii) ஒரு கோணத்தின் மிகைநிரப்பானது அதன் நிரப்புக் கோணத்தைப் போல நான்கு மடங்கு.

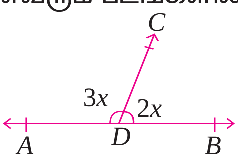
   iv) ஒரு கோணத்தின் நிரப்பானது அதன் மிகைநிரப்புக் கோணத்தில் ஆறில் ஒரு பங்கு.

   v) மிகை நிரப்புக் கோணங்கள் 4:5 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன.

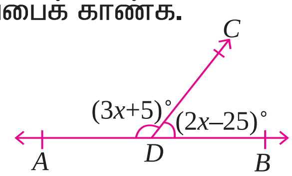
   vi) நிரப்புக் கோணங்கள் 3:2 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன.

5. பின்வரும் படங்களில் x, y-ன் மதிப்பைக் காண்க.

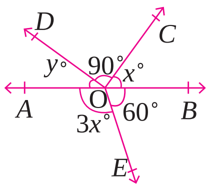
   (i)



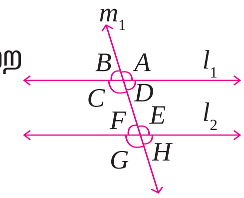
   (ii)



   (iii)

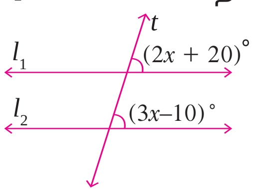


6. $l_1 \parallel l_2$ மற்றும் m_1 ஒரு குறுக்குவெட்டி என்க. $\angle F = 65^\circ$ எனில், மற்ற கோணஅளவுகளைக் காண்க.

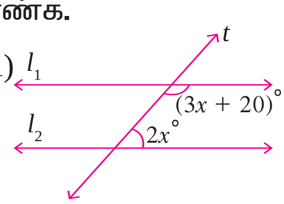


7. $l_1 \parallel l_2$ எனில் x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

   (i)



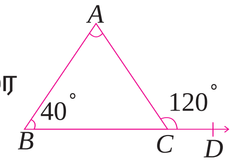
   (ii)



8. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் 1:2:3 என்ற விகிதத்தில் இருப்பின், அவற்றின் கோண அளவுகளைக் காண்க.

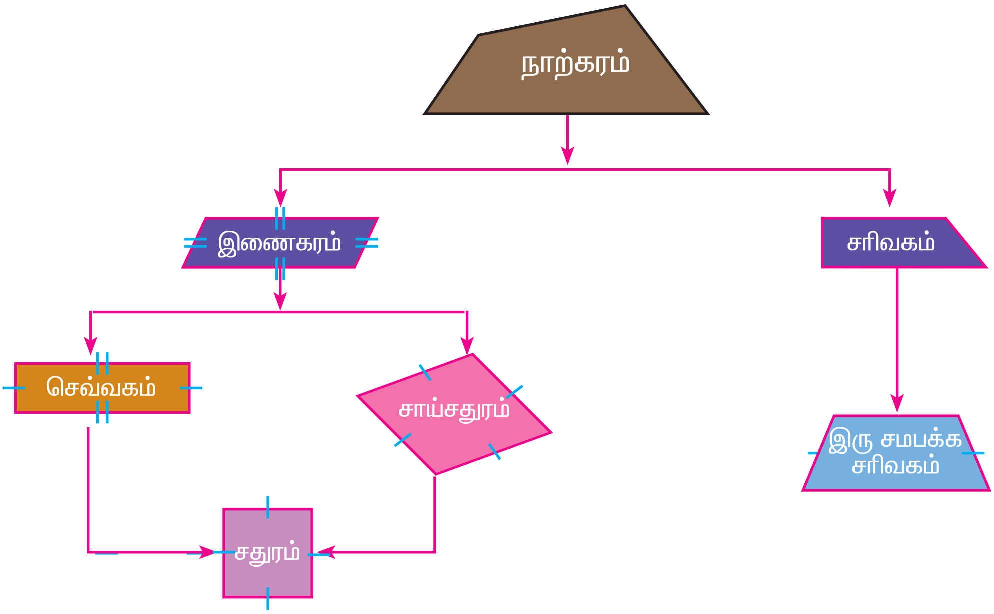
9. $\triangle ABC$-ல் $\angle A + \angle B = 70^\circ$ மற்றும் $\angle B + \angle C = 135^\circ$ எனில், அதன் கோண அளவுகளைக் காண்க.

10. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம் $\triangle ABC$-ல் பக்கம் BC ஆனது D வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது எனில், $\angle A$ மற்றும் $\angle C$ யைக் காண்க.



7.3 நாற்கரம் (*Quadrilateral*)

நான்கு பக்கங்கள் மற்றும் நான்கு முனைகளால் அடைபடும் உருவம் நாற்கரம் ஆகும். நாற்கரத்தின் நான்கு கோணங்களின் கூடுதல் 360° ஆகும்.



7.3.1 இணைகரம், சாய்சதுரம் மற்றும் சரிவகத்தின் பண்புகள்

இணைகரம்	பக்கம்	எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை மற்றும் சமம்
	கோணம்	எதிர்க் கோணங்கள் சமம் மற்றும் அடுத்துள்ள கோணங்கள் மிகைநிரப்பு
	மூலைவிட்டம்	மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்
சாய்சதுரம்	பக்கம்	அனைத்து பக்கங்களும் சமம் மற்றும் எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை
	கோணம்	எதிர் கோணங்கள் சமம், மற்றும் அடுத்துள்ள கோணங்கள் மிகைநிரப்பு.
	மூலைவிட்டம்	மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று மையக்குத்துக்கோடு.
சரிவகம்	பக்கம்	ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை
	கோணம்	இணையில்லா பக்கங்களின் முனைகளில் உள்ள கோணங்கள் மிகைநிரப்பு
	மூலைவிட்டம்	மூலைவிட்டங்கள் சமமாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை
இருசமபக்க சரிவகம்	பக்கம்	ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை, இணையில்லா பக்கங்களின் அளவுகள் சமம்
	கோணம்	இணைப் பக்கங்களின் முனைகளில் உள்ள கோணங்கள் சமம்
	மூலைவிட்டம்	மூலைவிட்டங்கள் சமம்

குறிப்பு

(i) செவ்வகம் என்பது சம கோண அளவுள்ள இணைகரம் ஆகும்.

(ii) சாய்சதுரம் என்பது சமபக்க இணைகரம் ஆகும்.

(iii) சதுரம் என்பது சமபக்க அளவுள்ள, சம கோண அளவுள்ள இணைகரம் ஆகும்.

(iv) சதுரம் என்பது ஒரு செவ்வகம், சாய்சதுரம் மற்றும் இணைகரம் ஆகும்.

7.4 இணைகரம் (*Parallelogram*)

எதிர்ப்பக்கங்கள் இணையாக உள்ள நாற்கரம் இணைகரம் ஆகும்.

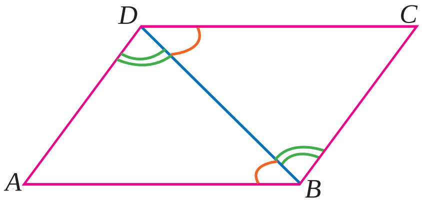
7.4.1 இணைகரத்தின் பண்புகள்

பண்பு 1 : ஒரு இணைகரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமம்.

தரவு : $ABCD$ என்பது ஒரு இணைகரம். எனவே, $AB \parallel DC$ மற்றும் $AD \parallel BC$

நிரூபிக்க : $AB = CD$ மற்றும் $AD = BC$

அமைப்பு : BD ஐ இணைக்க



படம் 7.3

நிரூபணம் :

ΔABD மற்றும் ΔBCD ஆகியவற்றில்.

(i) $\angle ABD = \angle BDC$ ($AB \parallel DC$ மற்றும் BD ஒரு குறுக்கு வெட்டி. எனவே, ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் சமம்.)

(ii) $\angle BDA = \angle DBC$ ($AD \parallel BC$ மற்றும் BD ஒரு குறுக்கு வெட்டி. எனவே, ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் சமம்.)

(iii) BD பொதுப் பக்கம்

$\therefore \Delta ABD \equiv \Delta BCD$ (கோ-ப-கோ பண்பின் படி)

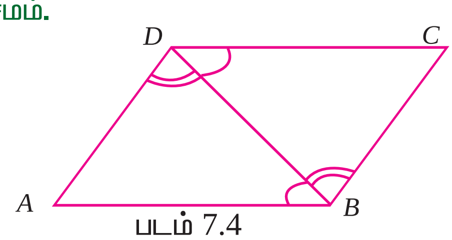
ஆகவே, $AB = DC$ மற்றும் $AD = BC$ (ஒத்த பக்கங்கள் சமம்)

பண்பு 1-ன் மறுதலை : ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமெனில், அந்த நாற்கரம் ஓர் இணைகரமாகும்.

பண்பு 2 : ஒரு இணைகரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமம்.

தரவு : $ABCD$ என்பது ஒரு இணைகரம். அதில் $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$

நிரூபிக்க : $\angle ABC = \angle ADC$ மற்றும் $\angle DAB = \angle BCD$



படம் 7.4

அமைப்பு : BD ஐ இணைக்க

நிரூபணம் :

(i) $\angle ABD = \angle BDC$ ($AB \parallel DC$ மற்றும் BD ஒரு குறுக்கு வெட்டி எனவே, ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் சமம்.)

(ii) $\angle DBC = \angle BDA$ ($AD \parallel BC$ மற்றும் BD ஒரு குறுக்கு வெட்டி. எனவே, ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் சமம்.)

(iii) $\angle ABD + \angle DBC = \angle BDC + \angle BDA$

$\therefore \angle ABC = \angle ADC$

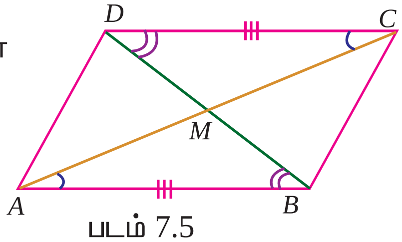
இதேபோன்று, $\angle BAD = \angle BCD$ ■

பண்பு 2-ன் மறுதலை: ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமமெனில், அந்த நாற்கரம் ஓர் இணைகரமாகும்.

பண்பு 3 : இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்.

தரவு : $ABCD$ என்பது ஒரு இணைகரம். அதில் $AB \parallel DC$ மற்றும் $AD \parallel BC$

நிரூபிக்க : M என்பது மூலைவிட்டம் AC மற்றும் BD-ன் மையப்புள்ளி .



படம் 7.5

நிரூபணம் :

ΔAMB மற்றும் ΔCMD ஆகியவற்றுள்

(i) $AB = DC$ இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமம்.

(ii) $\angle MAB = \angle MCD$ ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் ($\because AB \parallel DC$)

$\angle ABM = \angle CDM$ ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் ($\because AB \parallel DC$)

(iii) $\Delta AMB \equiv \Delta CMD$ (கோ-ப-கோ பண்பின் படி)

$\therefore AM = CM$ மற்றும் $BM = DM$

i.e., M என்பது AC மற்றும் BD-ன் மையப்புள்ளி

$\therefore$ இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும் ■

பண்பு 3-ன் மறுதலை: ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடும் எனில், அந்நாற்கரம் ஓர் இணைகரமாகும்.

குறிப்பு (i) இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் அவ்விணைகரத்தை சம பரப்பளவு கொண்ட இரு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கும்.

(ii) இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், அது சாய்சதுரம் ஆகும்.

(iii) ஒரே அடியின் மீதும், இரு இணை கோடுகளுக்கிடையேயும் அமையும் இணைகரங்கள் சமபரப்புடையவை.

எடுத்துக்காட்டு 7.1

ஒரு நாற்கரத்தில் மூன்று கோணங்களின் அளவுகள் $100^\circ, 84^\circ$ மற்றும் 76° எனில், நான்காவது கோணத்தின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு நான்காவது கோணத்தின் அளவு x° என்க.

நாற்கரத்தின் நான்கு கோணங்களின் கூடுதல் 360° ஆகும். எனவே,

$$\begin{aligned} 100^\circ+84^\circ+76^\circ+x^\circ &= 360^\circ \\ 260^\circ+x^\circ &= 360^\circ \\ \text{i.e.,} \quad x^\circ &= 100^\circ \end{aligned}$$

எனவே, நான்காவது கோணத்தின் அளவு 100° ஆகும்.

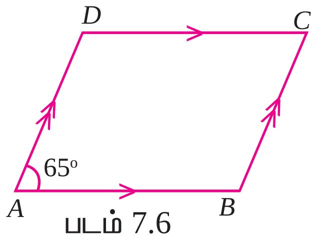
எடுத்துக்காட்டு 7.2

இணைகரம் $ABCD$-ல் $\angle A = 65^\circ$ எனில், $\angle B$, $\angle C$ மற்றும் $\angle D$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு $ABCD$ ஒரு இணைகரம் மற்றும் $\angle A = 65^\circ$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$AD \parallel BC$, AB ஐ குறுக்குவெட்டி என்க. எனவே,

$$\begin{aligned} \angle A+\angle B &= 180^\circ \\ 65^\circ+B &= 180^\circ \\ \angle B &= 180^\circ - 65^\circ \\ \angle B &= 115^\circ \end{aligned}$$



படம் 7.6

இணைகரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமம் என்பதால், நாம் பெறுவது

$$\angle C = \angle A = 65^\circ \text{ மற்றும் } \angle D = \angle B = 115^\circ$$

ஆகவே, $\angle B = 115^\circ$, $\angle C = 65^\circ$ மற்றும் $\angle D = 115^\circ$

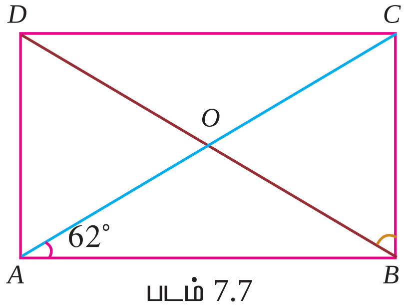
எடுத்துக்காட்டு 7.3

$ABCD$ என்ற செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டங்கள் AC மற்றும் BD, ஆகியவை O-வில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. மேலும் $\angle OAB = 62^\circ$ எனில், $\angle OBC$ ஐக் காண்க.

தீர்வு செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமம் மற்றும் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்.
எனவே, $OA = OB$ மற்றும் $\angle OBA = \angle OAB = 62^\circ$

மேலும் செவ்வகத்தின் ஒவ்வொரு கோண அளவும் 90° என்பதிலிருந்து

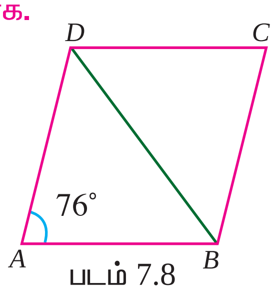
$$\angle ABC = 90^\circ$$
$$\angle ABO + \angle OBC = 90^\circ$$
$$62^\circ + \angle OBC = 90^\circ$$
$$\angle OBC = 90^\circ - 62^\circ$$
$$= 28^\circ$$



படம் 7.7

எடுத்துக்காட்டு 7.4

$ABCD$ என்ற சாய்சதுரத்தில் $\angle A = 76^\circ$ எனில், $\angle CDB$ ஐக் காண்க.



படம் 7.8

தீர்வு $\angle A = \angle C = 76^\circ$ (சாய்சதுரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள்)

$\angle CDB = x^\circ$ என்க.

$\triangle CDB$-ல், $CD = CB$

$\angle CDB = \angle CBD = x^\circ$

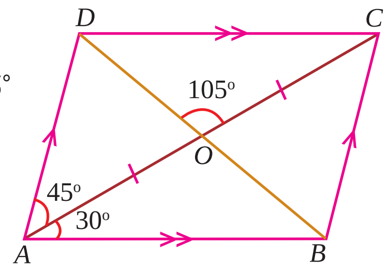
$\angle CDB + \angle CBD + \angle DCB = 180^\circ$ (முக்கோணத்தின் கோணங்கள்)

$$2x^\circ + 76^\circ = 180^\circ \implies 2x = 104^\circ$$
$$x^\circ = 52^\circ$$
$$\therefore \angle CDB = 52^\circ$$

பயிற்சி 7.2

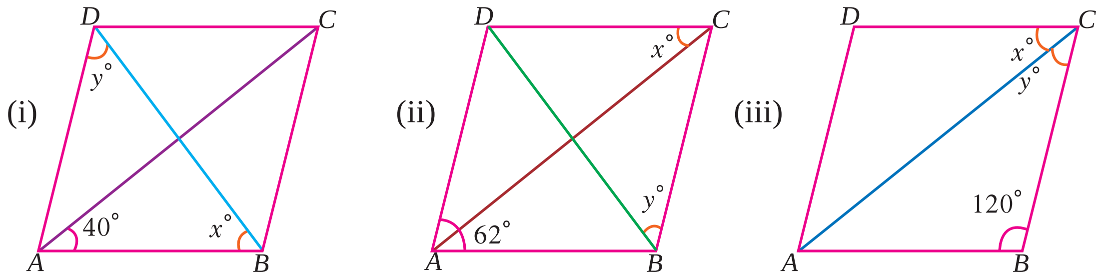
1. $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில் $\angle A, \angle B, \angle C$ மற்றும் $\angle D$ ஆகியன 2:3:4:6 என்ற விகிதத்தில் இருந்தால், அவற்றின் அளவுகளைக் காண்க.
2. இணைகரம் $ABCD$-ல் $\angle A = 108^\circ$ எனில், $\angle B, \angle C$ மற்றும் $\angle D$ ஐக் கணக்கிடுக.
3. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் $ABCD$ ஒரு இணைகரம். அதில் $\angle BAO = 30^\circ$, $\angle DAO = 45^\circ$ மற்றும் $\angle COD = 105^\circ$ எனில், பின்வரும் கோணங்களைக் காண்க.

   (i) $\angle ABO$ (ii) $\angle ODC$ (iii) $\angle ACB$ (iv) $\angle CBD$



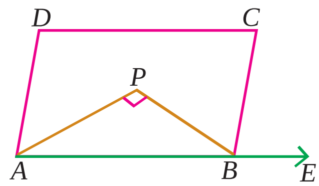
4. இணைகரத்தின் பெரிய கோண அளவானது சிறிய கோணத்தின் இருமடங்கில் 30° குறைவு எனில், அனைத்து கோண அளவுகளையும் காண்க.
5. இணைகரம் $ABCD$-ல் $AB = 9$ செ.மீ மற்றும் அதன் சுற்றளவு 30 செ.மீ எனில், இணைகரத்தின் பக்க அளவுகளைக் காண்க.
6. சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் 24 செ.மீ, 18 செ.மீ எனில், அதன் பக்க அளவுகளைக் காண்க.

7. பின்வரும் படங்களில் $ABCD$ என்பது ஒரு சாய்சதுரம். அதில் x மற்றும் y-ன் மதிப்பினைக் காண்க.



8. சாய்சதுரத்தின் பக்கஅளவு 10 செ.மீ மற்றும் ஒரு மூலைவிட்டத்தின் நீளம் 12 செ.மீ எனில், மற்றொரு மூலைவிட்டத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

9. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் $ABCD$ ஓர் இணைகரம். அதில் $\angle A$ மற்றும் $\angle B$-ன் கோண இருசமவெட்டிகள் P என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன எனில், $\angle APB = 90^\circ$ என நிரூபி.

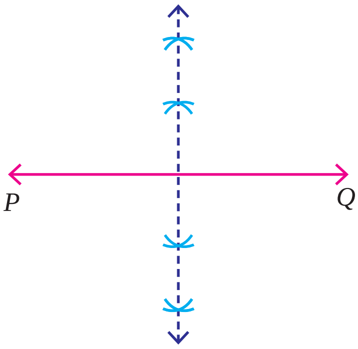


7.5 வட்டங்கள் (*Circles*)

நியமப்பாதை (*Locus*)

நியமப்பாதை என்பது சில வடிவியல் நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு நகரும் புள்ளியின் பாதையாகும்.

உதாரணமாக, இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை அப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் மையக்குத்துக் கோடாகும்.



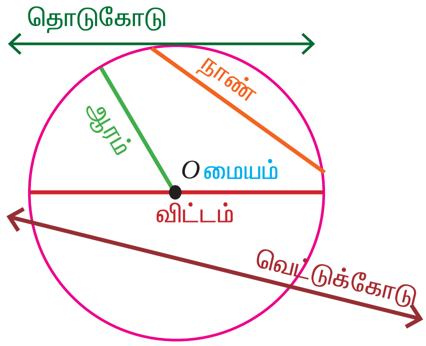
படம் 7.9

வட்டங்கள் (*Circles*)

நிலையான ஒரு புள்ளியிலிருந்து சம தொலைவில் நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டமாகும்.

நிலையான புள்ளி அதன் மையம் எனவும் மாறாத இடைத்தூரம் ஆரம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

வட்டத்தின் விளிம்பு அதன் சுற்றளவு எனப்படும்.



நாண் (*Chord*)

வட்டப்பரிதியின் மீதமைந்த இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு நாண் எனப்படும்.

விட்டம் (*Diameter*)

வட்டத்தின் மையத்தின் வழியாக செல்லும் நாண் விட்டம் எனப்படும்.

வட்டத்தின் மிகப்பெரிய நாண் விட்டம் ஆகும்.

வெட்டுக்கோடு (*Secant*)

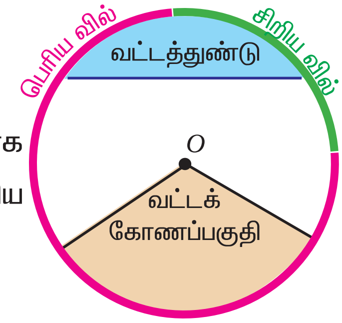
ஒரு வட்டத்தை இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டிச்செல்லும் கோடு வட்டத்தின் வெட்டுக்கோடு எனப்படும்.

தொடுகோடு (*Tangent*)

வட்டத்தை ஒரேயொரு புள்ளியில் மட்டும் தொட்டுச்செல்லும் கோடு வட்டத்தின் தொடுகோடு எனப்படும்.

தொடுகோடானது வட்டத்தை தொடும் புள்ளி, தொடுபுள்ளி எனப்படும்.

வட்டவில் (*Arc of a circle*)



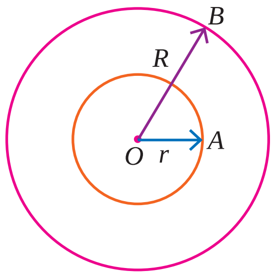
வட்டப்பரிதியின் ஒரு பகுதிக்கு வட்டவில் என்று பெயர்.

ஒரு வட்டப்பரிதியினை இரண்டு சமமற்ற பிரிவுகளாக பிரித்தால் சிறிய பிரிவு சிறிய வட்டவில் எனவும், பெரிய பிரிவு பெரிய வட்டவில் எனவும் அழைக்கப்படும்.

பொதுமைய வட்டங்கள் (*Concentric circles*)

ஒரே மையப்புள்ளியும் ஆனால் வெவ்வேறு ஆரங்களும் உடைய வட்டங்கள் பொதுமைய வட்டங்கள் எனப்படும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் உள்ள இரண்டு வட்டங்கள் O-வை மையமாகவும் வெவ்வேறு ஆரங்கள் r மற்றும் R உடைய பொதுமைய வட்டங்கள் ஆகும்.



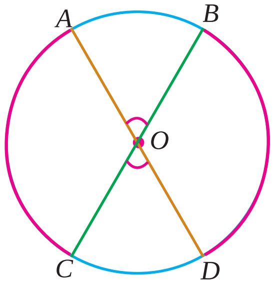
படம் 7.11

ஒருங்கிசைவு விற்கள் (*Congruent arcs*)

வட்டத்திலுள்ள இரண்டு விற்கள் $\overset{\frown}{AB}$ மற்றும் $\overset{\frown}{CD}$ ஆகியவை வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோண அளவுகள் சமமெனில், அவை ஒருங்கிசைவு விற்கள் ஆகும். இதை நாம்

$\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$ இவ்வாறு எழுதுவோம். ஆகவே,

$$\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD} \Longleftrightarrow m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD} \Longleftrightarrow \angle AOB = \angle COD$$



படம் 7.12

7.5.1 வட்ட நாண்களின் பண்புகள்

பண்பு

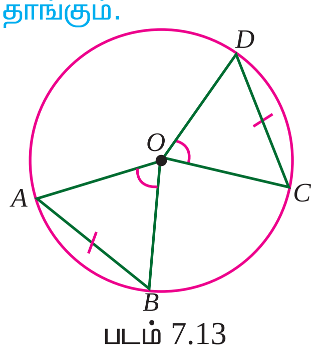
சமநீளமுள்ள நாண்கள் வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களைத் தாங்கும்.

அதாவது, படம் 7.13-ல் நாண் AB = நாண் $CD \Longrightarrow \angle AOB = \angle COD$

மறுதலை

நாண்களால் வட்ட மையத்தில் அடைபடும் கோணம் சமமெனில், நாண்களின் நீளங்கள் சமமாகும்.

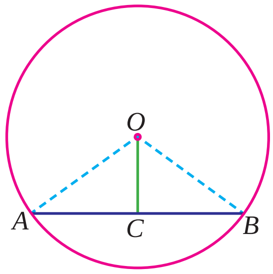
அதாவது, $\angle AOB = \angle COD \Longrightarrow$ நாண் AB = நாண் CD



படம் 7.13

தேற்றம் 1

வட்ட மையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து நாணை இரு சமக் கூறிடும்.



படம் 7.14

தரவு : O வை மையமாக உடைய வட்டத்தில், விட்டத்தைத் தவிர ஏதேனும் ஒரு நாண் AB மற்றும் $OC \perp AB$

நிரூபிக்க : $AC = BC$

அமைப்பு : OA மற்றும் OB-ஐ இணைக்க

நிரூபணம் :

ΔOAC மற்றும் ΔOBC-ல்

(i) $OA = OB$ (வட்டத்தின் ஆரங்கள்.)

(ii) OC பொதுப்பக்கம்

(iii) $\angle OCA = \angle OCB$ (ஒவ்வொன்றும் 90°, $OC \perp AB$-லிருந்து.)

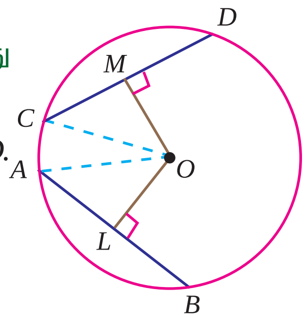
(iv) $\Delta OAC \equiv \Delta OBC$ (செ-க-ப சர்வசமத்தன்மை.)

$\therefore AC = BC$ ■

தேற்றம் 1-ன் மறுதலை : ஒரு வட்டத்தின் மையத்தையும், நாணின் மையப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு நாணிற்கு செங்குத்தாகும்.

தேற்றம் 2

ஒரு வட்டத்திலுள்ள சம நாண்கள் வட்ட மையத்திலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும்.



படம் 7.15

தரவு : ஒரு வட்டத்தின் மையம் O, ஆரம் r மேலும் நாண் AB = நாண் CD.

நிரூபிக்க : $OL = OM$

அமைப்பு : $OL \perp AB$ மற்றும் $OM \perp CD$ ஐ வரைக. OA மற்றும் OC ஐ இணைக்க.

நிரூபணம் :

(i) $AL = \frac{1}{2}AB$ மற்றும் $CM = \frac{1}{2}CD$ (வட்ட மையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து நாணை இருசமக்கூறிடும்.)

$AB = CD \Longrightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD \Longrightarrow AL = CM$

(ii) $OA = OC$ (ஆரங்கள்)

(iii) $\angle OMC = \angle OLA$ (ஒவ்வொன்றும் 90°)

(iv) $\Delta OLA \equiv \Delta OMC$ (செ-க-ப சர்வசமத்தன்மை.)

$\therefore OL = OM$

ஆகவே, நாண் AB மற்றும் CD ஆகியவை O-விலிருந்து சம தொலைவில் உள்ளன. ■

தேற்றம் 2-ன் மறுதலை : ஒரு வட்டத்தில் வட்ட மையத்திலிருந்து சமதூரத்தில் அமையும் நாண்கள் சமநீளமுள்ளவை ஆகும்.

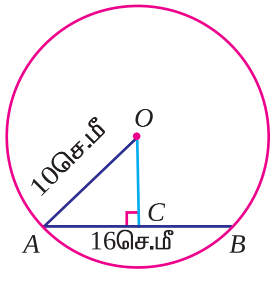
எடுத்துக்காட்டு 7.5

10 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தில் 16 செ.மீ நீளமுடைய நாண் வட்ட மையத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது?

தீர்வு நாண் AB-ன் நீளம் 16 செ.மீ

நாண் AB-ன் மையப்புள்ளி C.

வட்டத்தின் ஆரம் OA-ன் நீளம் 10 செ.மீ



படம் 7.16

$AB = 16$ செ.மீ

$AC = \frac{1}{2} \times 16 = 8$ செ.மீ

$OA = 10$ செ.மீ

செங்கோண முக்கோணம் OAC-ல்,

$$OC^2 = OA^2 - AC^2$$

$$= 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \text{ செ.மீ}$$

$\therefore OC = 6$ செ.மீ

ஆகவே, வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து நாண் 6 செ.மீ தொலைவில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 7.6

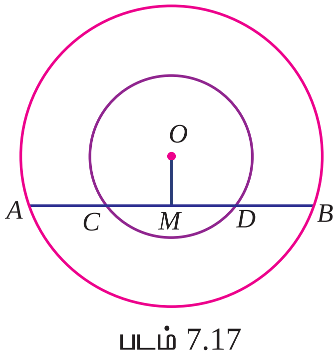
இரண்டு பொதுமைய வட்டங்களில் வெளிவட்டத்தில் வரையப்பட்ட நாண் AB யானது உள்வட்டத்தை C மற்றும் D-ல் வெட்டுகிறது எனில், $AC = BD$ என நிரூபி.

தீர்வு தரவு : வெளிவட்ட நாண் AB உள்வட்டத்தை C மற்றும் D-ல் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க : $AC = BD$

அமைப்பு : $OM \perp AB$ வரைக

நிரூபணம் :



படம் 7.17

$OM \perp AB$ (அமைப்பின் படி)

இதிலிருந்து $OM \perp CD$ ($ACDB$ ஒரு நேர்கோடு)

வெளிவட்டத்தில்,

$AM = BM$ (1) ($\because$ நாண் AB-யை OM இருசமக் கூறிடும்)

உள்வட்டத்தில்,

$CM = DM$ (2) ($\because$ நாண் CD-யை OM இருசமக் கூறிடும்)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து, நாம் பெறுவது

$$AM - CM = BM - DM$$

$$AC = BD$$

7.5.2 வட்டத்தினுள் அமைந்த கோணங்கள்

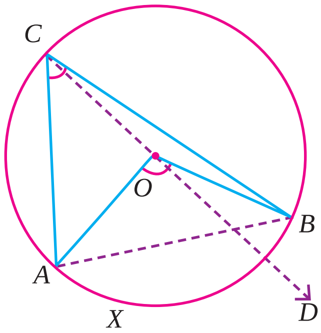
தேற்றம் 3

ஒரு வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் அந்த வில்லைத் தவிர்த்து வட்டத்தின் மீதிப்பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் போல் இரு மடங்காகும்.

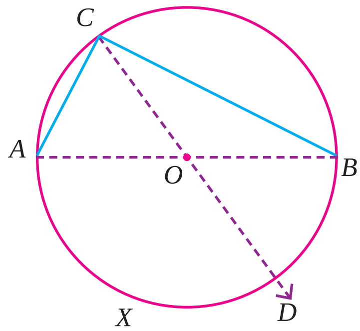
தரவு : O-வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் AXB என்பது ஒரு வில், $\widehat{AXB}$ என்ற வில் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $\angle AOB$. $\angle ACB$ என்பது $\widehat{AXB}$ என்ற வில்லை தவிர்த்து வட்டப் பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணம்.

நிரூபிக்க : $\angle AOB = 2\angle ACB$

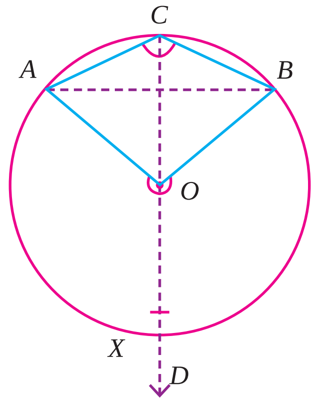
அமைப்பு : CO வை இணைத்து D வரை நீட்டிக்கவும்



படம் 7.18



படம் 7.19



படம் 7.20

நிரூபணம் :

(i)	$OA = OC$	(ஆரங்கள்)
(ii)	$\angle OCA = \angle OAC$	(சமபக்கத்திற்கு எதிரே உள்ள கோணங்கள் சமம்.)
(iii)	ΔAOC-ல்	
	$\angle AOD = \angle OCA + \angle OAC$	(முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணம் உள்ளெதிர் கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.)
(iv)	$\angle AOD = \angle OCA + \angle OCA$	($\angle OAC = \angle OCA$ எனப் பிரதியிட)
(v)	$\angle AOD = 2\angle OCA$	(கூடுதல்)
(vi)	இதேபோன்று ΔBOC-ல்,	
	$\angle BOD = 2\angle OCB$	
(vii)	$\angle AOD + \angle BOD = 2\angle OCA + 2\angle OCB$	
	$= 2(\angle OCA + \angle OCB)$	
(viii)	$\angle AOB = 2\angle ACB$	($\because \angle AOD + \angle BOD = \angle AOB$, $\angle OCA + \angle OCB = \angle ACB$)

குறிப்பு
(i) அரைவட்டத்தில் அமையும் கோணம் செங்கோணமாகும்.
(ii) ஒரே வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணங்கள் சமம்.

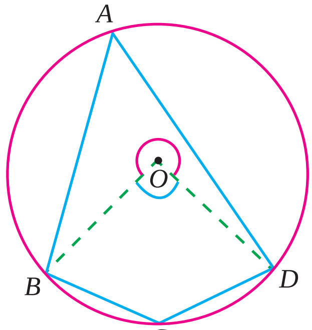
7.5.3 வட்ட நாற்கரம் *(Cyclic Quadrilateral)*

தேற்றம் 4

வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்க் கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும் (அல்லது) வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்க்கோணங்கள் மிகைநிரப்புக் கோணங்கள்.

தரவு : O-வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் $ABCD$ ஒரு நாற்கரம்.

நிரூபிக்க : $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$



படம் 7.21

அமைப்பு : OB மற்றும் OD-யை இணைக்க.

நிரூபணம் :

(i) $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$ (வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணமானது அவ்வில்லை தவிர்த்து வட்டப்பரிதியில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தை போல் இருமடங்கு.)

(ii) $\angle BCD = \frac{1}{2}$ (பின்வளை $\angle BOD$)

(iii) $\therefore \angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2}\angle BOD + \frac{1}{2}$ (பின்வளை $\angle BOD$) ((i) மற்றும் (ii)-ஐ கூட்ட)

i.e., $\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2}(\angle BOD +$ (பின்வளை $\angle BOD$))

i.e., $\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2}(360^\circ)$ (வட்ட மையத்தின் மொத்த கோணம் 360°)

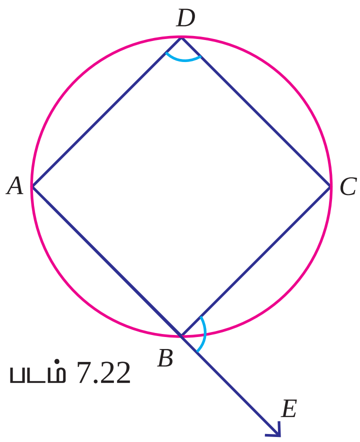
i.e., $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$

(iv) இதேபோன்று, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ■

தேற்றம் 4-ன் மறுதலை : நாற்கரத்தின் எதிர்க்கோணங்களின் கூடுதல் மிகைநிரப்புக் கோணங்கள் எனில், அந்த நாற்கரம் வட்ட நாற்கரம் ஆகும்.

தேற்றம் 5

வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டிப்பதால் ஏற்படும் வெளிக்கோணம் உள்ளெதிர் கோணத்திற்குச் சமம்



படம் 7.22

தரவு : வட்ட நாற்கரம் $ABCD$-ல், பக்கம் AB ஆனது E வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது.

நிரூபிக்க : $\angle CBE = \angle ADC$

நிரூபணம் :

(i) $\angle ABC + \angle CBE = 180^\circ$ (நேர்க்கோட்டுச் சோடி)

(ii) $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ (வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள்)

(i) மற்றும் (ii)-லிருந்து

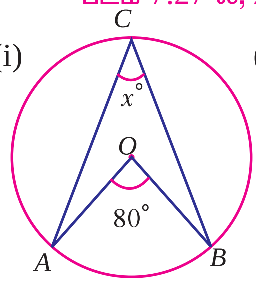
(iii) $\angle ABC + \angle CBE = \angle ABC + \angle ADC$

(iv) $\therefore \angle CBE = \angle ADC$ ■

எடுத்துக்காட்டு 7.7

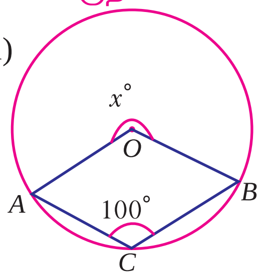
படம் 7.27-ல், x எனக் குறிப்பிட்ட கோணத்தின் மதிப்பைக் காண்க.

(i)



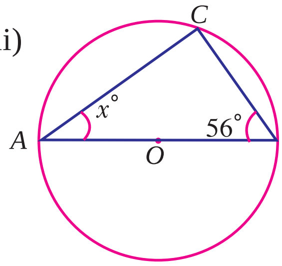
படம் 7.23

(ii)



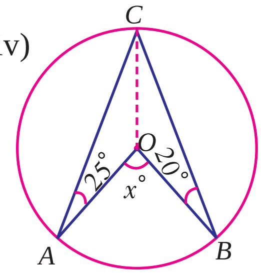
படம் 7.24

(iii)



படம் 7.25

(iv)



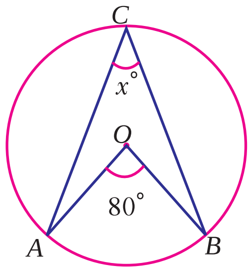
படம் 7.26

தீர்வு ஒரு வட்டவில் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம், அந்த வில்லைத் தவிர்த்து வட்டத்தின் மீதிப்பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் போல் இரு மடங்காகும் என நாம் அறிவோம்.

(i) $\angle AOB = 2\angle ACB$

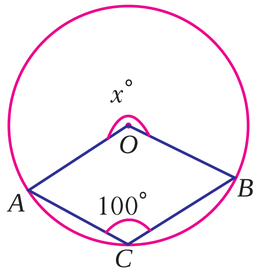
$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

$$x = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$$



(ii) பின்வளை $\angle AOB = 2\angle ACB$

$$x = 2 \times 100^\circ = 200^\circ$$



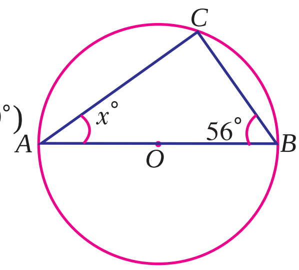
(iii) $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$

$$56^\circ + 90^\circ + \angle CAB = 180^\circ$$

($\because \angle BCA =$ அரை வட்டத்தில் அமையும் கோணம் $= 90^\circ$)

$$\angle CAB = 180^\circ - 146^\circ$$

$$x = 34^\circ$$



(iv) $OA = OB = OC$ (ஆரங்கள்)

$\angle OCA = \angle OAC = 25^\circ$

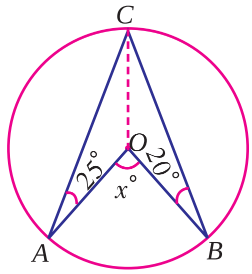
$\angle OBC = \angle OCB = 20^\circ$

$\angle ACB = \angle OCA + \angle OCB$

$= 25^\circ + 20^\circ = 45^\circ$

$\angle AOB = 2\angle ACB$

$x = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$



எடுத்துக்காட்டு 7.8

படம் 7.27-ல் , வட்டமையம் O, $\angle ADC = 120^\circ$ எனில், x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $ABCD$ ஒரு வட்ட நாற்கரம்.

$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

$\angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

மேலும், $\angle ACB = 90^\circ$ (அரை வட்டத்தில் அமைந்த கோணம்)

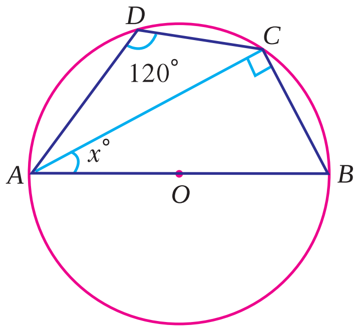
$\triangle ABC$-ல்,

$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$

$\angle BAC + 90^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

$\angle BAC = 180^\circ - 150^\circ$

$x = 30^\circ$



படம் 7.27

பயிற்சி 7.3

1. 15 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தில் 18 செ.மீ நீளமுள்ள நாண் வட்ட மையத்திலிருந்து எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது எனக் காண்க.

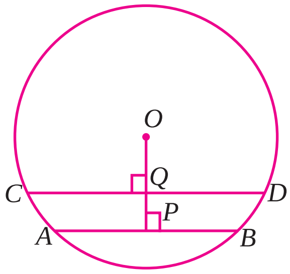
2. 17 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தில் 16 செ.மீ நீளமுள்ள நாண் வட்ட மையத்திலிருந்து எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது எனக் காண்க.

3. வட்ட மையத்திலிந்து 24 செ.மீ தொலைவில் உள்ள நாணின் நீளம் 20 செ.மீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.

4. 17 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 8 செ.மீ தொலைவில் உள்ள நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

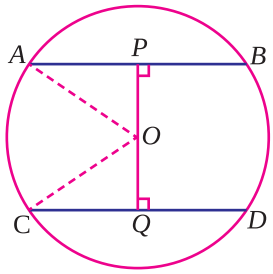
5. 25 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 15 செ.மீ தொலைவில் உள்ள நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

6. படத்தில், O-வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் இணையாக உள்ள நாண்கள் AB மற்றும் CD. வட்டத்தின் ஆரம் 5 செ.மீ அதில் $AB = 6$ செ.மீ, $CD = 8$ செ.மீ, $OP \perp AB$ மற்றும் $CD \perp OQ$ எனில், PQ-ன் நீளத்தைக் காண்க.

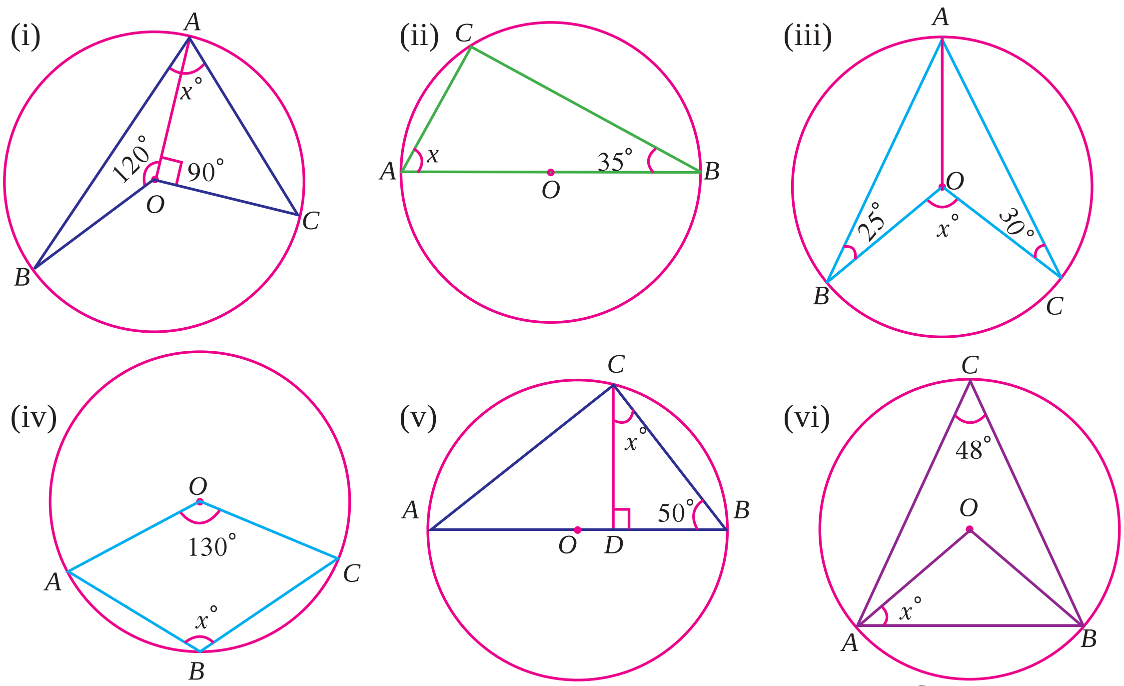


7. வட்ட மையத்தின் எதிரெதிரே (இருபுறமும்) அமைந்த இணையான நாண்களின் நீளங்கள் $AB = 10$ செ.மீ மற்றும் $CD = 24$ செ.மீ. நாண்களுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு 17 செ.மீ எனில், வட்டத்தின் ஆரத்தைக் காண்க.

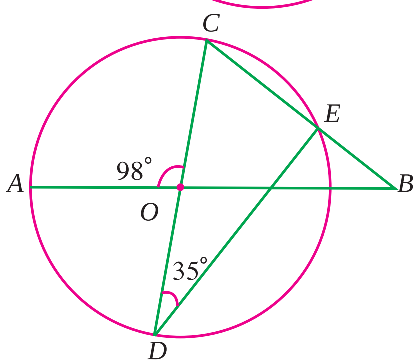
8. படத்தில் O-வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் இணையான நாண்கள் $AB = 8$ செ.மீ மற்றும் $CD = 6$ செ.மீ, வட்டத்தின் ஆரம் 5 செ.மீ, $OP \perp AB$ மற்றும் $OQ \perp CD$ எனில், PQ-ன் நீளத்தைக் காண்க.



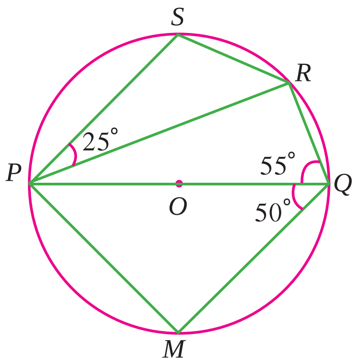
9. கீழ்க்கண்ட படங்களில் x-ன் மதிப்பைக் காண்க.



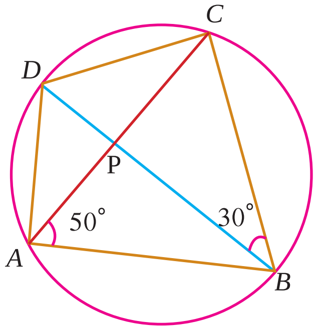
10. படத்தில் AB மற்றும் CD ஆகியவை வட்டமையம் O வழியே செல்லும் நேர்க்கோடுகள். $\angle AOC = 98^\circ$ மற்றும் $\angle CDE = 35^\circ$ எனில் (i) $\angle DCE$ (ii) $\angle ABC$ ஆகியவற்றைக் காண்க.



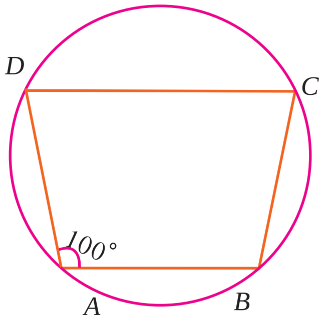
11. படத்தில் O-வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் PQ என்பது விட்டம். $\angle PQR = 55^\circ$, $\angle SPR = 25^\circ$ மற்றும் $\angle PQM = 50^\circ$ எனில், (i) $\angle QPR$, (ii) $\angle QPM$ மற்றும் (iii) $\angle PRS$ ஆகியவற்றைக் காண்க.



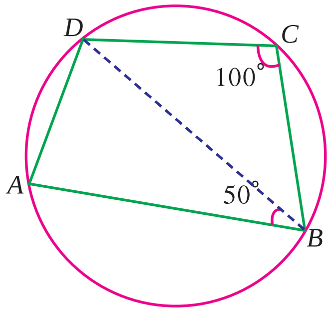
`12. படத்தில் $ABCD$ என்ற வட்ட நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் P என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. $\angle DBC = 30^\circ$ மற்றும் $\angle BAC = 50^\circ$ எனில், (i) $\angle BCD$ (ii) $\angle CAD$ ஆகியவற்றைக் காண்க.



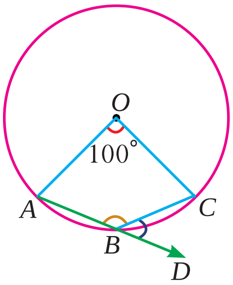
13. படத்தில் $ABCD$ என்ற வட்ட நாற்கரத்தில் $AB \parallel DC$. $\angle BAD = 100^\circ$ எனில், (i) $\angle BCD$ (ii) $\angle ADC$ (iii) $\angle ABC$ ஆகியவற்றைக் காண்க.



14. படத்தில் $ABCD$ என்ற வட்ட நாற்கரத்தில் $\angle BCD = 100^\circ$ மற்றும் $\angle ABD = 50^\circ$ எனில், $\angle ADB$-ன் மதிப்பைக் காண்க.



15. படத்தில் O-வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் $\angle AOC = 100^\circ$ மற்றும் அதன் ஒருபக்கம் AB ஆனது D வரை நீட்டப்படுகிறது எனில், (i) $\angle CBD$ (ii) $\angle ABC$ ஆகியவற்றைக் காண்க.



நினைவில் கொள்க

- ஒரு இணைகரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமம்.
- ஒரு இணைகரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமம்.
- இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்.
- செவ்வகம் என்பது சம கோண அளவுள்ள இணைகரம் ஆகும்.
- சாய்சதுரம் என்பது சமபக்க இணைகரம் ஆகும்.
- சதுரம் என்பது சமபக்க மற்றும் சமகோண அளவுள்ள இணைகரம் ஆகும்.
- இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் அவ்விணைகரத்தை சம பரப்பளவு கொண்ட இரு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கும்.
- இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒவ்வொன்றும் இணைகரத்தை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கும்.
- இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், அது சாய்சதுரம் ஆகும்.
- ஒரே அடியின் மீதும், இரு இணை கோடுகளுக்கிடையேயும் அமையும் இணைகரங்கள் சமபரப்புடையவை.
- சமநீளமுள்ள நாண்கள் வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களைத் தாங்கும்.
- நாண்களால் வட்ட மையத்தில் அடைபடும் கோணம் சமமெனில், நாண்களின் நீளங்கள் சமமாகும்.
- வட்ட மையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து நாணை இருசமக் கூறிடும்.
- ஒரு வட்டத்திலுள்ள சம நாண்கள் வட்ட மையத்திலிருந்து சம தூரத்தில் இருக்கும்.
- ஒரு வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் அந்த வில்லைத் தவிர்த்து வட்டத்தின் மீதிப்பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் போல் இரு மடங்காகும்.
- அரைவட்டத்தில் அமையும் கோணம் செங்கோணமாகும்.
- ஒரே வட்டத்துண்டிலுள்ள கோணங்கள் சமம்.
- வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்க் கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும் (அல்லது) வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்க்கோணங்கள் மிகைநிரப்புக் கோணங்கள்.
- வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டிப்பதால் ஏற்படும் வெளிக்கோணம் உள்ளெதிர் கோணத்திற்குச் சமம்

8 அளவியல்

The most beautiful plane figure is – the circle and the most beautiful solid figure – the sphere

- PYTHAGORAS

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- வட்ட கோணப்பகுதியின் வில்லின் நீளம், சுற்றளவு மற்றும் பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காணுதல்
- கன சதுரத்தின் புறப்பரப்பு மற்றும் கன அளவு காணுதல்
- கன செவ்வகத்தின் புறப்பரப்பு மற்றும் கன அளவு காணுதல்

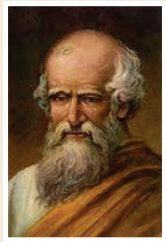
8.1 அறிமுகம்

முக்கோணங்கள், செவ்வகங்கள், சதுரங்கள், வட்டங்கள் மற்றும் கோளங்கள் போன்ற வடிவங்களை நம் அன்றாட வாழ்வில் காண்கிறோம். இவற்றில் சிலவற்றின் பண்புகளைப் பற்றி நாம் முன்பே அறிந்திருக்கிறோம்.

வடிவியல் வடிவங்களின் அளவுகளைப் பற்றிக் கூறும் கணிதத்தின் பகுதி அளவியல் எனப்படும். வாழ்க்கையின் பல்வேறு துறைகளில் வடிவியல் ஒரு முக்கியமான துறையாக கருதப்படுவதால் அளவியலும் மிக முக்கியமானதாகும்.

கட்டிடவியல் மற்றும் தச்சுவியல் ஆகியவற்றில் சுற்றளவு, பரப்பளவு மற்றும் கனஅளவு ஆகியவை முக்கிய பங்கு வகிக்கின்றன. உலகின் உண்மைச் சூழல்களில் பரப்பு மற்றும் கனஅளவு ஆகியன பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இன்றைய சூழலில் இருபரிமாண உருவங்களின் சுற்றளவு மற்றும் பரப்பளவு மேலும் முப்பரிமாண உருவங்களின் புறப்பரப்பு மற்றும் கனஅளவு ஆகியவற்றைக் கண்டறியப் பயன்படும் சூத்திரங்களை ஒவ்வொருவரும் கற்பது மிக அவசியம்.

இந்த அத்தியாயத்தில் வட்டகோணப் பகுதிகளின் வில்லின் நீளம் மற்றும் பரப்பு மேலும் கனச்சதுரம், கனச்செவ்வகம் ஆகியவற்றின் புறப்பரப்பு மற்றும் கனஅளவு ஆகியவற்றைப் பற்றி அறிவோம்.



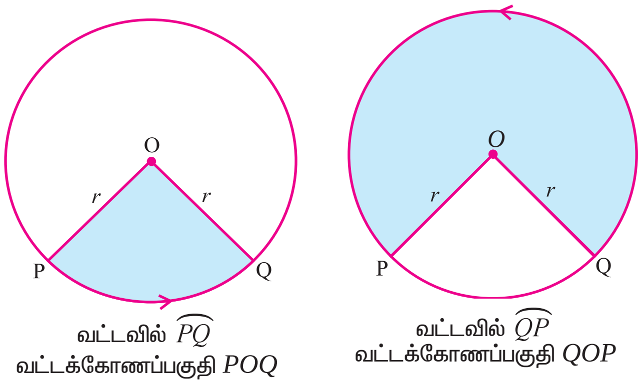
ஆர்க்கிமிடீஸ்

கி.மு. 287 - 212

மிகச் சிறந்த கணித அறிஞர்களில் ஒருவரான ஆர்க்கிமிடீஸ் *(Archimedes)* என்பவர் சிசிலித் தீவிலுள்ள கிரேக்க நகரான சிராக்கூஸைச் சார்ந்தவர். அவர் கி.மு. 287 இல் பிறந்தார். ஒரு வட்டத்தின் உள்ளே அமைந்த ஒழுங்கு பலகோணம் மற்றும் வெளியே அமைந்த ஒழுங்கு பலகோணத்தைப் பயன்படுத்தி π -ன் மதிப்பைக் காண செவ்விய முறையை ஆர்க்கிமிடீஸ் தொடங்கினார். கோளத்தின் பரப்பு மற்றும் கனஅளவு காணச் சரியான சூத்திரங்களைக் கண்டறிந்த பெருமை அவரையே சாரும். பரவளையப் பகுதி மற்றும் ‘ஆர்க்கிமிடீசின் சுருள்’ என்று அழைக்கப்படும். சுருளின் வட்டக்கோணப்பகுதி போன்ற பல பரப்புகளைக் கணக்கிட்டார். தன்னுடைய படைப்புகள் மூலம் கணித இயற்பியலுக்கு அடித்தளம் அமைத்தார்.

8.2 வட்டக்கோணப்பகுதி (*Sector*)

O-வை மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் மேல் உள்ள *P*, *Q* என்ற இரு புள்ளிகள், வட்டவில் (*Arc*) *PQ*, $\angle POQ$ மற்றும் வட்டக்கோணப்பகுதி *POQ* ஆகியவற்றை உருவாக்குகிறது. வட்டவில் *PQ* ஆனது $\overset{\frown}{PQ}$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. இந்த வட்டவில் P-ல் தொடங்கி கடிகாரம் சுற்றும் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் Q-வை நோக்கி செல்கிறது. வட்டவில் $\overset{\frown}{PQ}$, ஆரங்கள் *OP* மற்றும் *OQ* இவற்றால் அடைபடும் பகுதி, வட்டக்கோணப்பகுதி *POQ* ஆகும். படம் 8.1-ல் இருந்து $\overset{\frown}{PQ}$ மற்றும் $\overset{\frown}{QP}$ என்ற வட்டவிற்கள் வெவ்வேறானவை என்பதை காண்கிறோம்.



படம் 8.1

முக்கிய கருத்து	வட்டக்கோணப்பகுதி
ஒரு வட்டத்தின் இரண்டு ஆரங்கள் மற்றும் இந்த ஆரங்களால் வெட்டப்படும் வில் ஆகியவற்றால் அடைபடும் பகுதி வட்டக்கோணப்பகுதி (*Sector*) எனப்படும்.	

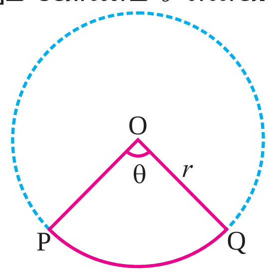
8.2.1 மையக்கோணம் அல்லது வட்டக்கோணம் (*Central Angle*)

முக்கிய கருத்து	மையக்கோணம்
ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதியின் வட்டவில், அவ்வட்டக்கோணப்பகுதி அமைந்துள்ள வட்டத்தின் மையத்தில் ஏற்படுத்தும் கோணம் மையக்கோணம் அல்லது வட்டக்கோணம் (*Central angle*) எனப்படும்.	

படம் 8.2-ல், $\overset{\frown}{PQ}$ என்ற வட்டவில் வட்டத்தின் மையத்தில் ஏற்படுத்தும் கோணம் θ என்க. எனவே, வட்டக்கோணப்பகுதி *POQ*-ன் மையக்கோணம் θ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

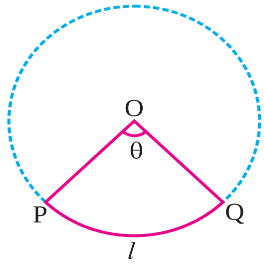
1. அரைவட்டம் என்பது மையக்கோணம் 180° கொண்ட ஒரு வட்டகோணப் பகுதியாகும்.
2. கால்வட்டம் என்பது மையக்கோணம் 90° கொண்ட ஒரு வட்டகோணப் பகுதியாகும்.



படம் 8.2

8.2.2 ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதியின் வில்லின் நீளம்

வட்டக்கோணப்பகுதி *POQ*-ல் வில்லின் நீளம் என்பது வட்டப் பரிதியின் மேல் *OP* மற்றும் *OQ* என்ற இரண்டு ஆரங்களால் வெட்டப்படும் பகுதியின் நீளமாகும். வட்டக்கோணப்பகுதியின் வில்லின் நீளம் *l* எனக் குறிக்கப்படும்.



படம் 8.3

எடுத்துக்காட்டாக,

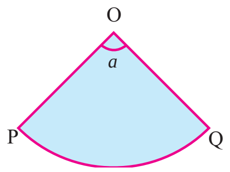
1. ஒரு வட்டத்தின் வில்லின் நீளம் என்பது அவ்வட்டத்தின் பரிதியின் நீளமாகும். அதாவது, $l=2\pi r$ அலகுகள். இங்கு r என்பது வட்டத்தின் ஆரமாகும்.
2. ஒரு அரை வட்டத்தின் வில்லின் நீளம் $l = 2\pi r \times \frac{180^\circ}{360^\circ} = \pi r$ அலகுகள். இங்கு வட்டத்தின் ஆரம் r, மையக்கோணம் 180°.
3. ஒரு கால் வட்டத்தின் வில்லின் நீளம் $l = 2\pi r \times \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r}{2}$ அலகுகள். இங்கு வட்டத்தின் ஆரம் r, மையக்கோணம் 90°.

முக்கிய கருத்து **வட்டக்கோணப்பகுதியின் வில்லின் நீளம்**

ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதியின் மையக்கோணம் θ மற்றும் ஆரம் r எனில், அதன் வில்லின் நீளம் $l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$ அலகுகளாகும்.

8.2.3 வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பளவு (*Area of a Sector*)

வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பளவு என்பது இரண்டு ஆரங்களுக்கும், அந்த ஆரங்களால் வட்டப் பரிதியில் வெட்டப்படும் வில்லுக்கும் இடைப்பட்ட பகுதியாகும்.



எடுத்துக்காட்டாக,

1. ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு πr^2 சதுர அலகுகள் ஆகும்.
2. ஒரு அரை வட்டத்தின் பரப்பளவு $\frac{\pi r^2}{2}$ சதுர அலகுகள்
3. ஒரு கால் வட்டத்தின் பரப்பளவு $\frac{\pi r^2}{4}$ சதுர அலகுகள்.

முக்கிய கருத்து **வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பளவு**

ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதியின் மையக்கோணம் θ மற்றும் ஆரம் r எனில், வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பளவு $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$ சதுர அலகுகளாகும்.

இப்போது, ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பளவை அதன் வில்லின் நீளம் l மற்றும் ஆரம் r மூலமாக எழுதும் முறையைக் காண்போம்.

$$\text{பரப்பளவு} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$
$$= \frac{\theta}{360^\circ} \times \frac{2\pi r}{2} \times r$$
$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r \right) \times r$$
$$= \frac{1}{2} \times lr$$

வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பளவு $= \frac{lr}{2}$ சதுர அலகுகள்.

8.2.4 வட்டக்கோணப்பகுதியின் சுற்றளவு (*Perimeter of a Sector*)

வட்டக்கோணப்பகுதியின் சுற்றளவு என்பது வட்டக்கோணப்பகுதியின் எல்லைகளின் நீளங்களின் கூடுதல் ஆகும். அதாவது வட்டக்கோணப்பகுதியின் சுற்றளவு $l + 2r$ அலகுகள் ஆகும்.

முக்கிய கருத்து — வட்டக்கோணப்பகுதியின் சுற்றளவு

வில்லின் நீளம் l, வட்டக்கோணப்பகுதியின் ஆரம் r எனில், அதன் சுற்றளவு $P = l + 2r$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டாக,

1. அரைவட்டத்தின் சுற்றளவு $(\pi + 2)r$ அலகுகள்
2. கால்வட்டத்தின் சுற்றளவு $\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)r$ அலகுகள்

குறிப்பு

1. வில்லின் நீளம் மற்றும் வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பு ஆகியன மையக்கோண அளவிற்கு நேர்விகிதத்தில் இருக்கும்.
2. π என்பது ஒரு விகிதமுறா எண், அதன் தோராய மதிப்பு $\frac{22}{7}$ அல்லது 3.14 என பயன்படுத்துகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.1

ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதியின் ஆரம் 42 செ.மீ மற்றும் அதன் மையக்கோணம் 60° எனில் அதன் வில்லின் நீளம், பரப்பளவு மற்றும் சுற்றளவைக் காண்க.

தீர்வு ஆரம் r = 42 செ.மீ, மையக்கோணம் $\theta = 60^\circ$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

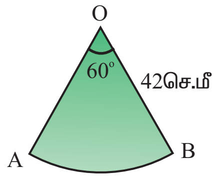
வில்லின் நீளம் $l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$

$= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 42 = 44$ செ.மீ

பரப்பளவு $= \frac{lr}{2} = \frac{44 \times 42}{2} = 924$ ச.செ.மீ

சுற்றளவு $= l + 2r$

$= 44 + 2(42) = 128$ செ.மீ.



எடுத்துக்காட்டு 8.2

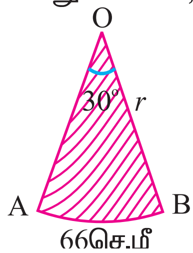
வில்லின் நீளம் 66 செ.மீ. மற்றும் மையக்கோணம் 30° கொண்ட வட்டக்கோணப்பகுதியின் ஆரம் காண்க.

தீர்வு மையக்கோணம் $\theta = 30^\circ$, வில்லின் நீளம் $l = 66$ செ.மீ. எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே,

$$\frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r = l$$

$$\frac{30^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times r = 66$$

$$\therefore r = 66 \times \frac{360^\circ}{30^\circ} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{22} = 126 \text{ செ.மீ.}$$



எடுத்துக்காட்டு 8.3

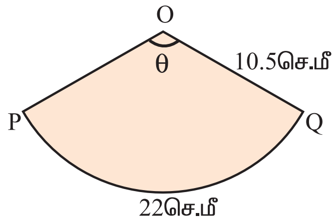
வில்லின் நீளம் 22 செ.மீ மற்றும் ஆரம் 10.5 செ.மீ கொண்ட வட்டக்கோணப்பகுதியின் மையக்கோணம் காண்க.

தீர்வு ஆரம் $r = 10.5$ செ.மீ, வில்லின் நீளம் $l = 22$ செ.மீ. எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே,

$$\frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r = l$$

$$\text{i. e., } \frac{\theta}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 10.5 = 22$$

$$\therefore \theta = 22 \times 360^\circ \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{10.5} = 120^\circ$$



எடுத்துக்காட்டு 8.4

ஒரு ஊசல் மையத்தில் கோணம் 30° ஏற்படுத்த 11 செ.மீ தொலைவு நகர்கிறது எனில், ஊசலின் நீளத்தைக் காண்க.

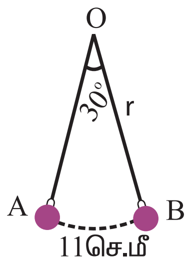
தீர்வு ஊசலின் அலைவு ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதி ஆகும். ஊசலின் நீளம் என்பது வட்டக்கோணப்பகுதியின் ஆரம் ஆகும்.

மையக்கோணம் $\theta = 30^\circ$, $l = 11$ செ.மீ. எனவே,

$$\frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r = l$$

$$\frac{30^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$

$$\therefore r = 11 \times \frac{360^\circ}{30^\circ} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{22} = 21 \text{ செ.மீ}$$



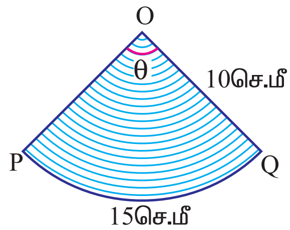
எடுத்துக்காட்டு 8.5

ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதியின் வில்லின் நீளம் 15 செ.மீ மற்றும் ஆரம் 10 செ.மீ எனில், அதன் சுற்றளவைக் காண்க.

தீர்வு $r = 10$ செ.மீ, $l = 15$ செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, எனவே,

வட்டக்கோணப்பகுதியின் சுற்றளவு$= l + 2r = 15 + 2(10)$

$= 15 + 20 = 35$ செ.மீ



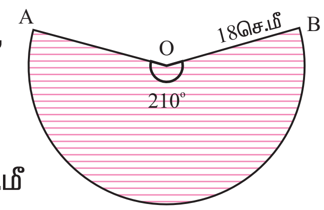
எடுத்துக்காட்டு 8.6

ஆரம் 18 செ.மீ மற்றும் மையக்கோணம் 210° எனக் கொண்ட வட்டக்கோணப்பகுதியின் சுற்றளவைக் காண்க.

தீர்வு $r = 18$ செ.மீ, $\theta = 210^\circ$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே,

$$l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$$

$$= \frac{210^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 18 = 66 \text{ செ.மீ}$$



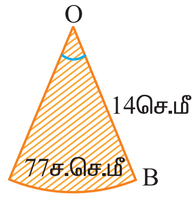
$\therefore$ வட்டக்கோணப்பகுதியின் சுற்றளவு $= l + 2r = 66 + 2(18) = 66 + 36 = 102$ செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு 8.7

ஆரம் 14 செ.மீ மற்றும் பரப்பளவு 77 ச.செ.மீ கொண்டுள்ள வட்டக்கோணப்பகுதியின் மையக்கோணத்தை காண்க.

தீர்வு r = 14 செ.மீ, பரப்பு = 77 ச.செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே,

வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பு $= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$



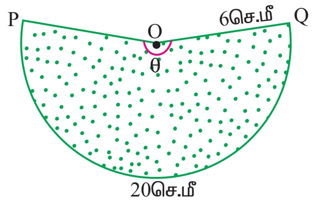
$$\frac{\theta}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 77$$

$$\therefore\ \theta = \frac{77 \times 360^\circ \times 7}{22 \times 14 \times 14} = 45^\circ$$

எடுத்துக்காட்டு 8.8

ஆரம் 6 செ.மீ, வில்லின் நீளம் 20 செ.மீ கொண்டுள்ள வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு r = 6 செ.மீ, l = 20 செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே,



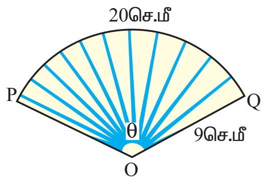
பரப்பு $= \frac{lr}{2}$ சதுர அலகுகள்

$= \frac{20 \times 6}{2}$ = 60 ச.செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு 8.9

சுற்றளவு 38 செ.மீ மற்றும் ஆரம் 9 செ.மீ எனக் கொண்ட வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு ஆரம் = 9 செ.மீ, சுற்றளவு = 38 செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, எனவே,



சுற்றளவு $= l + 2r = 38$

i.e., $l + 18 = 38$

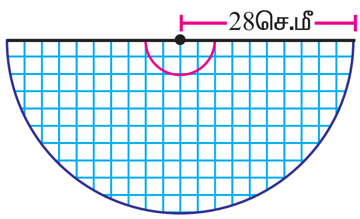
$l = 38 - 18 = 20$ செ.மீ

$\therefore$ பரப்பு $= \frac{lr}{2} = \frac{20 \times 9}{2}$ = 90 ச.செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு 8.10

ஆரம் 28 செ.மீ உடைய அரைவட்டத்தின் சுற்றளவு மற்றும் பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு ஆரம் 28 செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



அரைவட்டத்தின் சுற்றளவு $= (\pi + 2)\, r = (\frac{22}{7} + 2)\, 28 = 144$ செ.மீ

பரப்பளவு $= \frac{\pi r^2}{2} = \frac{22}{7} \times \frac{28 \times 28}{2}$ = 1232 ச.செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு 8.11

வில்லின் நீளம் 27.5 செ.மீ, பரப்பளவு 618.75 ச.செ.மீ கொண்ட வட்டக்கோணப்பகுதியின் ஆரம், மையக்கோணம் மற்றும் சுற்றளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு வில்லின் நீளம் $l = 27.5$ செ.மீ, பரப்பளவு $= 618.75$ ச.செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே,

$$\text{பரப்பளவு} = \frac{lr}{2} = 618.75 \text{ ச.செ.மீ}$$

$$\frac{27.5 \times r}{2} = 618.75$$

$$\therefore r = 45 \text{ செ.மீ}$$

எனவே, சுற்றளவு $l + 2r = 27.5 + 2(45) = 117.5$ செ.மீ

வில்லின் நீளம் $l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$

அதாவது, $\frac{\theta}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 45 = 27.5$

$$\therefore \theta = 35^\circ$$

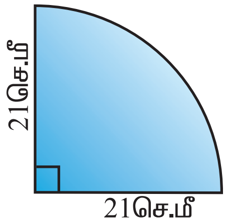
எடுத்துக்காட்டு 8.12

21 செ.மீ ஆரமுள்ள கால்வட்டப் பகுதியின் பரப்பளவு மற்றும் சுற்றளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு $r = 21$ செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் $\theta = 90^\circ$ எனவே,

$$\text{சுற்றளவு} = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)r = \left(\frac{22}{7 \times 2} + 2\right) \times 21 = 75 \text{ செ.மீ}$$

$$\text{பரப்பளவு} = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{22}{7 \times 4} \times 21 \times 21 = 346.5 \text{ ச.செ.மீ}$$



எடுத்துக்காட்டு 8.13

₹ 9,000 மாதச் சம்பளம் பெறும் ஒருவரின் செலவுகள் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

(i) உணவிற்காகச் செய்யப்பட்ட செலவு (ii) அவரின் சேமிப்பு

ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

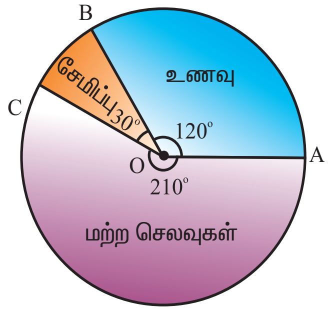
தீர்வு மாதச் சம்பளம் ₹ 9,000ஐ வட்டத்தின் மொத்தப் பரப்பு என்க.

i.e., $\pi r^2 = 9000$

(i) வட்ட வில் AOB-ன் பரப்பு $= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

$$= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 9000 = 3,000$$

உணவிற்காக செலவு செய்யப்பட்ட தொகை ₹ 3,000.



(ii) வட்ட வில் BOC-ன் பரப்பு $= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

$$= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times 9,000 = 750$$

சேமிப்பில் உள்ள தொகை ₹ 750.

எடுத்துக்காட்டு 8.14

3 செ.மீ ஆரமுள்ள மூன்று வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடும்போது அவற்றால் சூழப்படும் பகுதியின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு படத்திலிருந்து, ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம் மற்றும் வட்டக்கோணப்பகுதிகள் DAF, DBE மற்றும் ECF ஆகியவற்றின் பரப்புகள் சமம்.

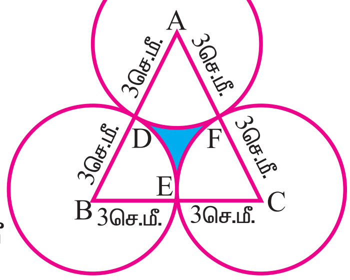
வட்டங்களால் சூழப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு = சமபக்க முக்கோணம் ABC-ன் பரப்பு

$- 3\times$(வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பு)

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - 3\times\frac{\theta}{360^\circ}\times\pi r^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times 6\times 6 - 3\times\frac{60^\circ}{360^\circ}\times\frac{22}{7}\times 3\times 3$$

$$= 9\sqrt{3} - \frac{99}{7} = 15.59 - 14.14 = 1.45 \text{ ச.செ.மீ}$$



$\therefore$ வட்டங்களால் சூழப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு = 1.45 ச.செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு 8.15

படத்தில் நிழலிடப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு காண் $[\pi = 3.14]$

தீர்வு வட்டக்கோணப்பகுதி COD மற்றும் AOB-ன் ஆரங்கள் முறையே R செ.மீ., r செ.மீ. என்க.

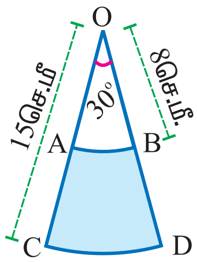
நிழலிடப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு = வட்டக்கோணப்பகுதி COD-ன் பரப்பு

$-$ வட்டக்கோணப்பகுதி AOB-ன் பரப்பு

$$= \frac{\theta}{360^\circ}\times\pi R^2 - \frac{\theta}{360^\circ}\times\pi r^2$$

$$= \frac{30^\circ}{360^\circ}\times 3.14\times 15\times 15 - \frac{30^\circ}{360^\circ}\times 3.14\times 8\times 8$$

$$= 58.875 - 16.747 = 42.128 \text{ ச.செ.மீ}$$



பயிற்சி 8.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுள்ள வட்டக்கோணப்பகுதியின் வில்லின் நீளம், பரப்பளவு மற்றும் சுற்றளவு காண்க.
   - (i) ஆரம் 21 செ.மீ, மையக்கோணம் 60° (ii) ஆரம் 4.9 செ.மீ, மையக்கோணம் 30°
   - (iii) ஆரம் 14 செ.மீ, மையக்கோணம் 45° (iv) ஆரம் 15 செ.மீ, மையக்கோணம் 63°
   - (v) ஆரம் 21 டெசி.மீ, மையக்கோணம் 240°
2. (i) வில்லின் நீளம் 88 செ.மீ மற்றும் ஆரம் 42 செ.மீ கொண்ட வட்டக்கோணப்பகுதியின் மையக்கோணம் காண்க.
   - (ii) வில்லின் நீளம் 22 செ.மீ மற்றும் ஆரம் 14 செ.மீ கொண்ட வட்டக்கோணப்பகுதியின் மையக்கோணம் காண்க.
   - (iii) வில்லின் நீளம் 44 செ.மீ மையக்கோணம் 70° கொண்ட வட்டக்கோணப்பகுதியின் ஆரத்தைக் காண்க.

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளுக்கு வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பளவு மற்றும் சுற்றளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

   (i) ஆரம் 10 செ.மீ, வில்லின் நீளம் 33 செ.மீ.

   (ii) ஆரம் 55 செ.மீ, வில்லின் நீளம் 80 செ.மீ.

   (iii) ஆரம் 12 செ.மீ, வில்லின் நீளம் 15.25 செ.மீ.

   (iv) ஆரம் 20 செ.மீ, வில்லின் நீளம் 25 செ.மீ.

4. (i) ஆரம் 14 செ.மீ மற்றும் பரப்பளவு 70 ச.செ.மீ கொண்ட வட்டக்கோணப்பகுதியின் வில்லின் நீளம் காண்க.

   (ii) பரப்பளவு 225 ச.செ.மீ மற்றும் வில்லின் நீளம் 15 செ.மீ கொண்ட வட்டக்கோணப்பகுதியின் ஆரம் காண்க.

   (iii) மையக்கோணம் 140° மற்றும் பரப்பளவு 44 ச.செ.மீ கொண்ட வட்டக்கோணப்பகுதியின் ஆரம் காண்க.

5. (i) ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதியின் சுற்றளவு 58 செ.மீ. அதன் விட்டம் 9 செ.மீ எனில், அதன் பரப்பு என்ன ?

   (ii) ஆரம் மற்றும் சுற்றளவு முறையே 20 செ.மீ மற்றும் 110 செ.மீ கொண்ட வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பைக் காண்க.

6. கீழே தரப்பட்ட அளவுகளில் இருந்து வட்டக்கோணப்பகுதியின் மையக்கோணம் காண்க.

   (i) பரப்பளவு 352 ச.செ.மீ, ஆரம் 12 செ.மீ

   (ii) பரப்பளவு 462 ச.செ.மீ, ஆரம் 21 செ.மீ

7. (i) ஆரம் 14 செ.மீ அளவுள்ள அரைவட்டத்தின் சுற்றளவு மற்றும் பரப்பளவைக் காண்க.

   (ii) 7 செ.மீ ஆரமுள்ள கால்வட்டத்தின் சுற்றளவு மற்றும் பரப்பளவைக் காண்க.

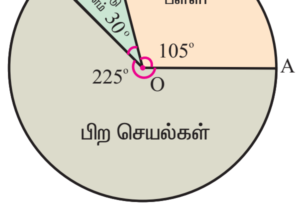
8. (i) வட்டக்கோணப்பகுதியின் சுற்றளவு மற்றும் ஆரம் முறையே 35 செ.மீ, 8 செ.மீ எனில், அதன் வில்லின் நீளத்தைக் காண்க.

   (ii) வட்டக்கோணப்பகுதியின் சுற்றளவு மற்றும் வில்லின் நீளம் முறையே 24 செ.மீ, 7 செ.மீ. எனில், அதன் ஆரத்தைக் காண்க.

9. ஒரு மாணவன் ஒரு நாளில் செலவழித்த நேரம் (மணிகளில்) படத்தில் தரப்பட்டுள்ளது. அவன்

   (i) பள்ளியில் (ii) விளையாட்டில்

   (iii) பிற செயல்களில் செலவிட்ட நேரத்தைக் கணக்கிடுக.



10. 2 செ.மீ விட்டமுள்ள மூன்று நாணயங்கள் ஒன்றை ஒன்று தொடுமாறு வைக்கப்பட்டால் அவற்றுள் அடைபடும் பகுதியின் பரப்பைக் காண்க.

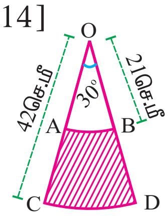
11. 21 மீ நீளமும் 24 மீ அகலமும் கொண்ட புல்வெளியின் நான்கு மூலைகளிலும் 7 மீ நீளமுள்ள கயிற்றால் நான்கு குதிரைகள் கட்டப்பட்டுள்ளன. எனில்,

    (i) குதிரைகள் மேயும் அதிகபட்ச பரப்பு

    (ii) குதிரைகள் மேயாத பகுதியின் பரப்பு ஆகியனவற்றைக் காண்க.

12. 24 செ.மீ நீளமுள்ள சதுர அட்டையிலிலிருந்து ஒரு மிகப் பெரிய வட்டக்கோணப்பகுதி வெட்டியெடுக்கப்பட்டால் மீதமுள்ள அட்டையின் பரப்பு காண்க. $[\pi = 3.14]$

13. படத்தில் நிழலிடப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு காண்க.



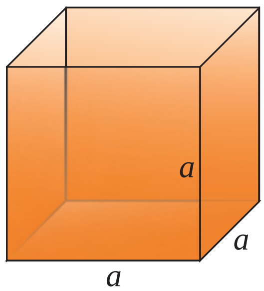
14. வட்டக்கோணப்பகுதியின் வில்லின் நீளம் மற்றும் பரப்பு முறையே 4.4 மீ, 9.24 ச.மீ எனில், அதன் ஆரம், மையக்கோணம் மற்றும் சுற்றளவைக் காண்க.

8.3 கனச்சதுரங்கள் (*Cubes*)

ஆறு சதுர பக்க அளவுகளால் அடைபட்ட பகுதி கனச்சதுரம் எனப் படித்துள்ளீர்கள் (உதாரணம்: பகடை). இங்கு அதன் புறப்பரப்பு (*Lateral Surface Area*) மற்றும் கனஅளவு (*Volume*) ஆகியவற்றைக் காணும் முறையைக் கற்போம்.

8.3.1 கனச்சதுரத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு (*Surface Area of a Cube*)

ஆறு பக்கங்களின் பரப்புளவுகளின் கூடுதல் கனச்சதுரத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு (*Total Surface Area*) எனப்படும்.



அருகில் உள்ள படத்தில், கனச்சதுரத்தின் பக்கம் a அலகு என்க. பக்கப்பரப்பு a^2 சதுர அலகுகள். எனவே, மொத்தப் பரப்பு $6a^2$ ச.அ. ஆகும்.

கனச்சதுரத்தில் மேற்பரப்பு மற்றும் அடிப்பரப்பைக் கணக்கில் கொள்ளாவிட்டால் நமக்கு பக்கப் பரப்பு கிடைக்கும். எனவே, பக்கப்பரப்பு $4a^2$ ச.அ ஆகும்.

முக்கிய கருத்து	புறப்பரப்பு
a அலகுகள் கொண்ட கனச்சதுரத்தின் (i) மொத்தப் பரப்பு = $6a^2$ ச.அ (ii) பக்கப்பரப்பு = $4a^2$ ச.அ.	

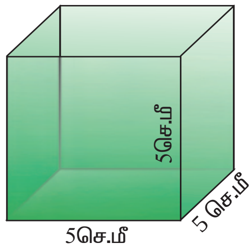
8.3.2 கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு (*Volume of a Cube*)

முக்கிய கருத்து	கன அளவு
a அலகுகள் கொண்ட கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு $V = a^3$ கனஅலகுகள்	

குறிப்பு கனஅளவு என்பதை கனச்சதுரத்தின் கொள்ளளவு என்றும் வரையறுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.16

5 செ.மீ பக்க அளவு கொண்ட கனச்சதுரத்தின் மொத்தப் பரப்பு, பக்கப்பரப்பு மற்றும் கனஅளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.



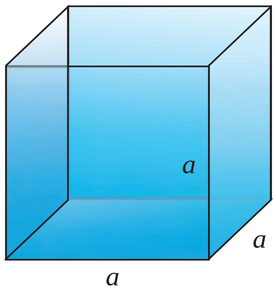
தீர்வு பக்கப் பரப்பு $= 4a^2 = 4(5^2) = 100$ செ.மீ

மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 6a^2 = 6(5^2) = 150$ ச.செ.மீ

கனஅளவு $= a^3 = 5^3 = 125$ க.செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு: 8.17

மொத்தப் புறப்பரப்பு 216 ச.செ.மீ கொண்ட கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவைக் காண்க.



தீர்வு கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு 'a' என்க.

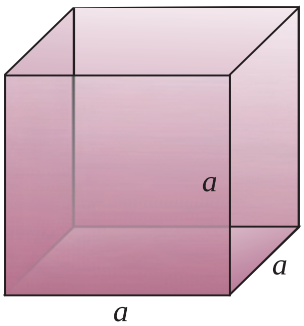
மொத்தப் புறப்பரப்பு = 216 ச.செ.மீ

i. e., $6a^2 = 216 \implies a^2 = \frac{216}{6} = 36$

$\therefore \quad a = \sqrt{36} = 6$ செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு 8.18

ஒரு கனச்சதுரத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 384 ச.செ.மீ எனில், அதன் கனஅளவைக் காண்க.



தீர்வு கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு 'a' என்க.

மொத்தப் புறப்பரப்பு = 384 ச.செ.மீ

$6a^2 = 384 \implies a^2 = \frac{384}{6} = 64$

$\therefore$ a $= \sqrt{64} = 8$ செ.மீ

கனஅளவு $= a^3 = 8^3 = 512$ க.செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு 8.19

ஒரு கனச்சதுர வடிவ நீர்த்தொட்டியின் கொள்ளளவு 27,000 லிட்டர் எனில், அதன் பக்க அளவைக் காண்க.

தீர்வு கனச்சதுர வடிவ நீர்த்தொட்டியின் பக்க அளவு 'a' என்க.

கனஅளவு = 27,000 லி.

$V = a^3 = \frac{27,000}{1,000}$ க.மீ = 27 க.மீ $\quad \therefore$ a = $\sqrt[3]{27}$ = 3 மீ

பயிற்சி 8.2

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பக்க அளவைக் கொண்ட கனச்சதுரத்தின் மொத்தப் பரப்பு, பக்கப்பரப்பு மற்றும் கனஅளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

   (i) 5.6 செ.மீ (ii) 6 டெசி.மீ (iii) 2.5 மீ (iv) 24 செ.மீ (v) 31 செ.மீ

2. (i) ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்கப்பரப்பு 900 ச.செ.மீ எனில், பக்க அளவைக் காண்க.

   (ii) ஒரு கனச்சதுரத்தின் மொத்தப் பரப்பு 1014 ச.செ.மீ எனில், பக்க அளவைக் காண்க.

   (iii) ஒரு கனச்சதுரத்தின் கன அளவு 125 க.டெசி.மீ எனில், பக்க அளவைக் காண்க.

3. ஒரு கனச்சதுர கொள்கலனின் பக்க அளவு 20 செ.மீ எனில், அதனை முழுவதும் நிரப்ப தேவையான சர்க்கரையின் அளவு யாது?

4. ஒரு கனச்சதுர வடிவ நீர்த்தேக்கத் தொட்டியின் கனஅளவு 64,000 லி. எனில், அதன் பக்க அளவைக் காண்க.

5. 3 செ.மீ, 4 செ.மீ, 5 செ.மீ பக்க அளவுடைய மூன்று கனச்சதுரங்கள் உருக்கப்பட்டு ஒரு பெரிய கனச்சதுரமாக மாற்றப்பட்டால் அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

6. 15 செ.மீ பக்க அளவுள்ள ஒரு கனச்சதுரம் உருவாக்க 3 செ.மீ பக்க அளவுள்ள கனச்சதுரங்கள் எத்தனை தேவை?

7. 40 செ.மீ பக்க அளவுள்ள ஒரு திறந்த கனச்சதுர பெட்டி அமைக்கத் தேவையான அட்டையின் பரப்பு காண்க. மேலும், அதன் கனஅளவையும் காண்க.

8. 2 மீ பக்க அளவுள்ள ஒரு கனச்சதுர கொள்கலன் முழுவதும் எண்ணெய் உள்ளது. 10 செ.மீ பக்க அளவுள்ள ஒரு கனச்சதுர குவளையின் எண்ணெய் விலை ₹ 50 எனில், எண்ணெயின் மொத்த விலையைக் காண்க?

9. 3.5 மீ பக்க அளவுள்ள ஒரு கனச்சதுர கொள்கலனின் உட்புறமும் வெளிப்புறமும் வர்ணம் பூசப்படுகிறது. வர்ணம் பூச ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ஆகும் செலவு ₹ 75 எனில், வர்ணம் பூச படவேண்டிய பரப்பையும் அதற்கு ஆகும் மொத்த செலவையும் காண்க.

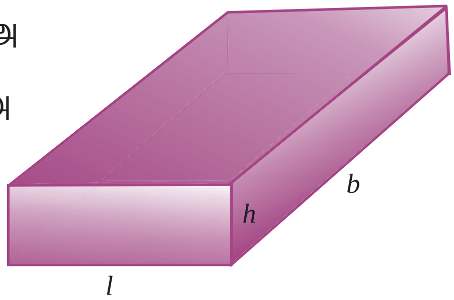
8.4 கனச்செவ்வகங்கள் (*Cuboids*)

ஒரு கனச்செவ்வகம் என்பது ஆறு செவ்வகப் பகுதியால் உள்ளடங்கிய முப்பரிமாண பகுதியாகும்.

உதாரணம் : செங்கற்கள், புத்தகங்கள், ...

8.4.1 கனச்செவ்வகத்தின் புறப்பரப்பு (*Surface Area of a Cuboid*)

ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே l, b மற்றும் h என்க. அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பு (Total Surface Area)



(i) முன் பின் பக்கங்களின் பரப்பு $lh + lh = 2lh$ ச.அ

(ii) இரு பக்க முகங்களின் பரப்பு $bh + bh = 2bh$ ச.அ

(iii) மேல், கீழ் பக்கங்களின் பரப்பு

$lb + lb = 2lb$ ச.அ இவற்றின் கூடுதல் ஆகும்.

கனச்செவ்வகத்தின் பக்கப்பரப்பு $= 2(l + b)h$ ச.அ

கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு (T.S.A) $= 2(lb + bh + lh)$ ச.அ

முக்கிய கருத்து — **கனச்செவ்வகத்தின் புறப்பரப்பு**

ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே l, b, h எனில்,

(i) பக்கப் பரப்பு $= 2(l + b)h$ ச.அ.

(ii) மொத்தப் பரப்பு $= 2(lb + bh + lh)$ ச.அ.

குறிப்பு பக்கப்பரப்பு என்பது அடிப்பக்கத்தின் சுற்றளவு மற்றும் உயரத்தின் பெருக்கற்பலனாகும்.

8.4.2 கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு (*Volume of a Cuboid*)

முக்கிய கருத்து — **கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு**

ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம், உயரம் முறையே l, b, h எனில், அதன் கனஅளவு,

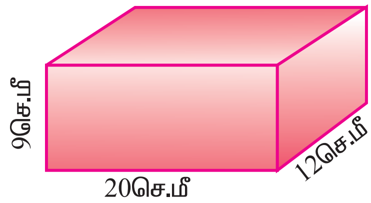
$V = l \times b \times h$ க. அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 8.20

ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே 20 செ.மீ, 12 செ.மீ மற்றும் 9 செ.மீ எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு $l = 20$ செ.மீ, $b = 12$ செ.மீ, $h = 9$ செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே,

$\therefore$ மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2\,(lb + bh + lh)$

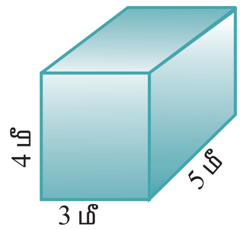


$$\text{T.S.A} = 2[(20\times12)+(12\times9)+(20\times9)]$$
$$= 2(240+108+180)$$
$$= 2\times528$$
$$= 1056 \text{ ச.செ.மீ}$$

எடுத்துக்காட்டு 8.21

3மீ $\times$ 5மீ $\times$ 4மீ அளவுள்ள கனச்செவ்வகத்தின் பக்கப் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு $l = 3$ மீ, $b = 5$ மீ, $h = 4$ மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே,



பக்கப்பரப்பு $= 2(l+\text{b})h$

$= 2\times(3+5)\times4$

$= 2\times8\times4$

$= 64$ ச.மீ

எடுத்துக்காட்டு 8.22

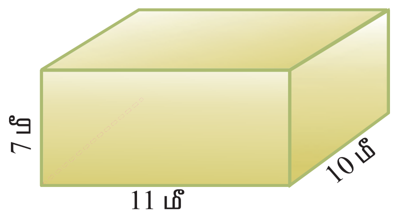
11 மீ, 10 மீ, 7 மீ அளவுள்ள கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவைக் காண்க.

தீர்வு $l = 11$ மீ, $b = 10$ மீ, $h = 7$ மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே,

கனஅளவு $= lbh$

$= 11\times10\times7$

$= 770$ க.மீ



எடுத்துக்காட்டு 8.23

கனஅளவு 216 க.செ.மீ அளவுள்ள இரு கனச்சதுரங்கள் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு இணைக்கப்படும்போது கிடைக்கும் கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு a என்க. $a^3 = 216$ க.செ.மீ

$\therefore$ a $= \sqrt[3]{216} = 6$ செ.மீ

இரு கனச்சதுரங்கள் இணைக்கப்பட்டு கனச்செவ்வகம் பெறப்படுகிறது. எனவே,

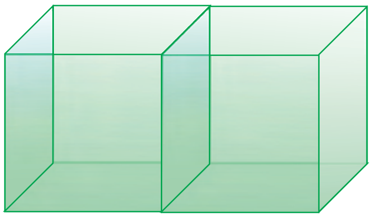
$\therefore l = 6 + 6 = 12$ செ.மீ, $b = 6$ செ.மீ, $h = 6$ செ.மீ.

$\therefore$ T.S.A $= 2\,(lb + bh + lh)$

$= 2\ [(12 \times 6) + (6 \times 6) + (12 \times 6)]$

$= 2\ [72 + 36 + 72]$

$= 2 \times 180 = 360$ ச.செ.மீ

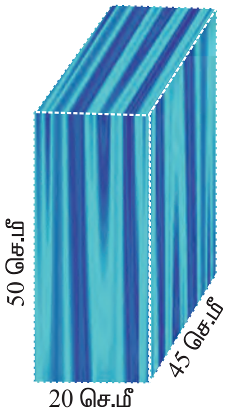


எடுத்துக்காட்டு 8.24

நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே 20 செ.மீ, 45 செ.மீ மற்றும் 50 செ.மீ அளவுடைய ஒரு C.P.U விற்கு உறை தைக்க ஜானி விரும்பினான். உறையின் விலை 1 சதுர மீட்டருக்கு ₹ 50 எனில், உறை தைக்க ஆகும் செலவைக் காண்க.

தீர்வு உறை ஒரு பக்கம் திறந்த கனச்செவ்வக வடிவில் இருக்கும்.

$l = 20$ செ.மீ $= 0.2$ மீ, $b = 45$ செ.மீ $= 0.45$ மீ, $h = 50$ செ.மீ $= 0.5$ மீ



$\therefore$ உறையின் பரப்பு = பக்க பரப்பு + மேல் பரப்பு

$= 2\ (l + b)\ h + lb$

$= 2\ (0.2 + 0.45)\ 0.5 + (0.2 \times 0.45)$

$= 2 \times 0.65 \times 0.5 + 0.09$

$= 0.65 + 0.09$

$= 0.74$ ச.மீ

1 சதுர மீட்டர் துணியின் விலை ₹ 50

$\therefore$ 0.74 சதுர மீட்டர் துணியின் விலை $50 \times 0.74 =$ ₹ 37.

எடுத்துக்காட்டு: 8.25

5மீ $\times$ 2மீ $\times$ 1மீ அளவுள்ள ஒரு குழி மணலால் நிரப்பப்படுகிறது. ஒரு கனமீட்டருக்கு மணல் நிரப்ப ஆகும் செலவு ₹ 270 எனில், மொத்த செலவைக் காண்க.

தீர்வு ஒரு குழி கனச்செவ்வக வடிவில் உள்ளது. அதன் அளவுகள் $l = 5$மீ, $b = 2$மீ, $h = 1$மீ

$\therefore$குழியின் கனஅளவு = கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவு

$= lbh$

$= 5 \times 2 \times 1$

$= 10$ க.மீ

1 கனமீட்டர் மணல் நிரப்ப ₹ 270 செலவாகிறது எனில், 10 கன மீட்டர் மணல் நிரப்ப ஆகும் செலவு $= 270 \times 10 =$ ₹ 2700

பயிற்சி 8.3

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கனச்செவ்வகத்தின் நீள, அகல, உயரங்களுக்கு பக்கப்பரப்பு, மொத்தப்பரப்பு மற்றும் கனஅளவு காண்க.

   (i) 5 செ.மீ, 2 செ.மீ, 11செ.மீ (ii) 15 டெசி.மீ,10 டெசி.மீ, 8 டெசி.மீ.

   (iii) 2 மீ, 3 மீ, 7 மீ (iv) 20 மீ, 12 மீ, 8 மீ

2. கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் கனஅளவு முறையே 35 செ.மீ, 15 செ.மீ, மற்றும் 14175 க.செ.மீ எனில், உயரத்தைக் காண்க.

3. 64 க.செ.மீ கன அளவுள்ள இரு கனச்சதுரங்கள் இணைக்கப்பட்டால் உண்டாகும் உருவத்தின் பக்கப்பரப்பு மற்றும் மொத்தப் பரப்பு காண்க.

4. நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் 35 செ.மீ, 30 செ.மீ. மற்றும் 55 செ.மீ அளவுடைய இரு ஒலிப் பெருக்கிகளுக்கு ராஜு உறை தைக்கத் திட்டமிட்டான். உறை தைக்க ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ஆகும் செலவு ₹ 75 எனில், மொத்த செலவைக் காண்க.

5. ஒரு கூடத்தின் அளவு 20மீ $\times$ 15மீ $\times$ 6மீ என உள்ளது. அக்கூடத்திற்கு மோகன் வர்ணம் அடிக்க விரும்பினான். 1 சதுர மீட்டருக்கு வர்ணம் பூச ஆகும் செலவு ₹ 78 எனில், மொத்த செலவைக் காண்க.

6. நீளம் 60 மீ, அகலம் 0.3 மீ, உயரம் 2 மீ உடைய சுவர் எழுப்ப 30செ.மீ $\times$ 15செ.மீ $\times$ 20செ.மீ அளவு கொண்ட செங்கற்கள் எத்தனை தேவை?

7. 10மீ$\times$45மீ$\times$6மீ அளவுள்ள ஒரு அறையின் தளம் மற்றும் சுவரை புதுப்பிக்க ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ஆகும் செலவு ₹ 48 எனில், மொத்த செலவைக் காண்க.

நினைவில் கொள்க

- ஒரு வட்டத்தின் இரண்டு ஆரங்கள் மற்றும் ஆரங்களால் வெட்டப்படும் வில் ஆகியவற்றால் அடைபடும் பகுதி வட்டக்கோணப்பகுதி எனப்படும்.
- ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதியின் வட்டவில், அவ்வட்டக்கோணப்பகுதி அமைந்துள்ள வட்டத்தின் மையத்தில் ஏற்படுத்தும் கோணம் மையக்கோணம் அல்லது வட்டக்கோணம் எனப்படும்.
- ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதியின் மையக்கோணம் θ மற்றும் ஆரம் r எனில், அதன் வில்லின் நீளம் $l=\frac{\theta}{360}\times 2\pi r$ அலகுகளாகும்.
- ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதியின் மையக்கோணம் θ மற்றும் ஆரம் r எனில், வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பளவு $\frac{\theta}{360}\times \pi r^2$ சதுர அலகுகளாகும்.
- l – வில்லின் நீளம், r – வட்டக்கோணப்பகுதியின் ஆரம் எனில், அதன் சுற்றளவு $P = l + 2r$ அலகுகள்.
- பக்கஅளவு a அலகுகள் கொண்ட கனச்சதுரத்தின்

  (i) மொத்தப் புறப்பரப்பு (T.S.A) = $6a^2$ ச.அ.

  (ii) பக்கப்பரப்பு = $4a^2$ ச.அ.
- பக்கஅளவு a அலகுகள் கொண்ட கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு,

  $V = a^3$ கன அலகுகள்
- ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே l, b, h எனில்,

  (i) பக்கப் பரப்பு = $2(l + b)h$ ச.அ

  (ii) மொத்தப் பரப்பு = $2(lb + bh + lh)$ ச.அ
- ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம், உயரம் முறையே l, b, h அலகுகள் எனில், அதன் கனஅளவு $V = l\times b\times h$ க.அ.

9 செய்முறை வடிவியல்

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- சுற்றுவட்டம் வரைதல்
- குத்துக்கோட்டு மையம் வரைதல்
- உள்வட்ட மையம் வரைதல்
- நடுக்கோட்டு மையம் வரைதல்

9.1 அறிமுகம்

புள்ளிகள், நேர்க்கோடுகள் மற்றும் பிற உருவங்களின் பண்புகளைப் பற்றி வடிவியலின் அடிப்படைக் கொள்கைகள் விவரிக்கின்றன. வடிவியலின் விதிகளைப் பயன்படுத்தி வடிவியல் உருவங்களை வரையும் முறையே செய்முறை வடிவியலாகும். வடிவியலில் “வரைதல்” என்பது உருவங்கள், கோணங்கள் அல்லது நேர்க்கோடுகளை துல்லியமாக வரைதலாகும். யூக்ளிடின் ‘Elements’ என்ற புத்தகத்தில் வடிவியலின் வரைபடங்களைப் பற்றித் தெளிவாகக் கூறப்பட்டுள்ளது. எனவே இவ்வரைபடங்கள் யூக்ளிடின் வரைபடங்கள் என அறியப்படுகின்றன. அடிக்கோல் மற்றும் காம்பஸை பயன்படுத்தி இவ்வரைபடங்கள் வரையப்படுகின்றன. காம்பஸ் சரிசம தூரத்தையும், அடிக்கோல் ஒன்றின் மீது ஒன்று அமைவதையும் உறுதிப்படுத்துகின்றன. அனைத்து வடிவியல் வரைபடங்களும் இவ்விரு கருத்துக்களின் அடிப்படையில் அமைகின்றன.

இரண்டாம் பாடப்பகுதியில் அடிக்கோல் மற்றும் காம்பஸை பயன்படுத்தி விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்களை குறிக்க இயலும் என்பதை கற்றோம். 1913-ல் இந்திய கணிதமேதை இராமனுஜன் $\sqrt[4]{\frac{355}{113}} = \pi$-ஐ குறிக்க ஒரு வடிவியல் முறையை அளித்தார். தற்போது துல்லியமான அளவுகளைக் கொண்டு வரையும் திறன்களைப் பயன்படுத்தி நேர்க்கோடுகளால் மலைக்குள்ளே செல்லும் சுரங்கப்பாதைகளை வரையமுடியும் என்பது மிகச்சிறப்பான அம்சமாகும். ஒரு செவ்விய சதுரத்தின் ஒவ்வொரு முனையிலிருந்தும் ஒரு குறிப்பிட்ட கோணத்தில் நூற்றுக்கணக்கான அடி உயரத்தில் எழும்பும் நேர்க்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் நிலைநிறுத்தப்படுகிறது. இவ்வாறு நான்கு முனைகளிலிருந்து எழும்பும் நேர்க்கோடுகள் மூலம் ஒரு பிரமிட் கட்டப்படுகிறது.

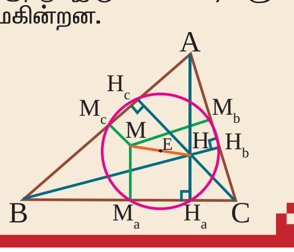
ஆய்லர்

1707 - 1783

18ஆம் நூற்றாண்டில் சுவிட்சர்லாந்து நாட்டு கணித அறிஞர் ஆய்லர் *(Euler)* வாழ்ந்தார். அவர் காலத்திற்கு முன்பும் பின்பும் அவரைப் போன்று யாரும் அறிவியல் ஆய்வுக்கட்டுரைகள் அதிகமாக எழுதியதில்லை. உலகைப் புரிந்து கொள்ள ஆய்லருக்கு கணிதம் ஒரு கருவியாக இருந்தது. ஒவ்வொரு கண்டுபிடிப்பின் மூலமும் இயற்கையை புரிந்து கொள்வதில் ஒரு அடி நெருங்குவதாக அவர் உணர்ந்தார்.

வடிவியல் முற்றுப்பெற்றத் துறை என எண்ணியபோது யூக்ளிடின் வடிவியலில் ஒரு புதிய தேற்றத்தை இவர் கண்டுபிடித்தார். ஆய்லரின் ஒன்பது புள்ளிகளடங்கிய வட்டத் தேற்றத்தை கீழே காண்போம்.

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று குத்துயரங்கள் H என்ற புள்ளியிலும் பக்கங்களின் செங்குத்து இருசம வெட்டிகள் M என்ற புள்ளியிலும் சந்திக்கின்றன எனில், HM என்ற நேர்க்கோட்டின் நடுப்புள்ளி E-ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மீது அனைத்து குத்துயரங்களும், செங்குத்து இருசம வெட்டிகளும் அமைகின்றன.



கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளுக்கு முக்கோணம் வரைவதைப் பற்றி நாம் எட்டாம் வகுப்பில் கற்றுள்ளோம்.

இப்பாடத்தில் நாம் நடுக்கோட்டு மையம், குத்துக்கோட்டு மையம், உள்வட்ட மையம் மற்றும் சுற்றுவட்ட மையம் ஆகியவற்றை வரையும் முறைப்பற்றி கற்போம்.

முதலில் கீழ்க்கண்டவற்றை வரையும் முறைப்பற்றி நினைவு கூர்வோம்.

9.2 முக்கோணம் சார்ந்த சிறப்பு கோட்டுத் துண்டுகள்

(i) கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டிற்கு மையக்குத்துக்கோடு வரைதல்

(ii) கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டிற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து செங்குத்துக்கோடு வரைதல்

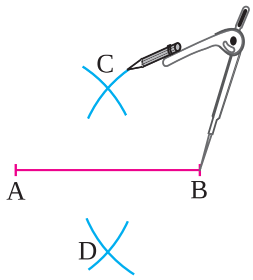
(iii) கொடுக்கப்பட்ட கோணத்திற்கு இருசமவெட்டி வரைதல்

(iv) கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டிற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியையும் அக்கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளியையும் இணைத்தல்

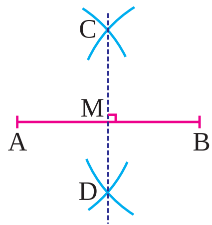
9.2.1 கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டிற்கு மையக்குத்துக்கோடு (Perpendicular Bisector) வரைதல்

படி 1 : கோட்டுத்துண்டு AB வரைக.

படி 2 : கோட்டுத்துண்டின் நீளத்தின் பாதியளவிற்கு மேல் அளவெடுத்து, கோட்டுத்துண்டின் இறுதிப்புள்ளிகள் A மற்றும் B ஆகியவற்றை மையமாகக் கொண்டு மேலும் கீழும் வட்டவிற்களை ஒன்றையொன்று வெட்டும்படி வரைந்து, வெட்டும் புள்ளிகளுக்கு C, D எனப் பெயரிடுக.



படி 3 : C மற்றும் D-ஐ இணைக்க AB-ன் மையக்குத்துக்கோடு கிடைக்கும்.

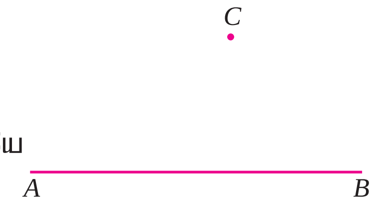


முக்கிய கருத்து — **மையக்குத்துக்கோடு**

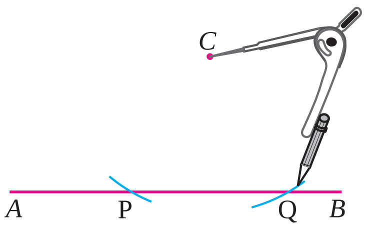
ஒரு கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளி வழியாக வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு அதன் மையக்குத்துக்கோடு *(Perpendicular Bisector)* எனப்படும்.

9.2.2 கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டிற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அக்கோட்டு துண்டிற்கு குத்துக்கோடு வரைதல்

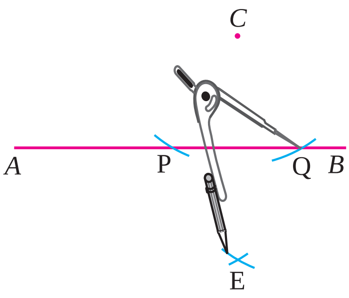
படி 1 : கோட்டுத்துண்டு AB வரைந்து அதற்கு வெளியே C என்ற புள்ளியை குறி.



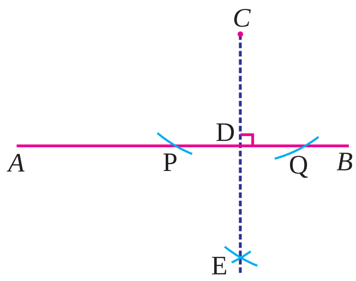
படி 2 : C ஐ மையமாக கொண்டு ஏதேனும் ஒரு அளவில் கோட்டுத்துண்டு AB-ல் வெட்டுமாறு இரு வட்டவிற்கள் வரைந்து அவற்றிற்கு P மற்றும் Q எனப் பெயரிடு.



படி 3 : P மற்றும் Q ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தில் பாதிக்கு மேல் அளவெடுத்து C என்ற புள்ளியின் எதிர்புறத்தில் P மற்றும் Q யிலிருந்து வட்டவில்களை வரைந்து வெட்டும் புள்ளிக்கு E என பெயரிடு.

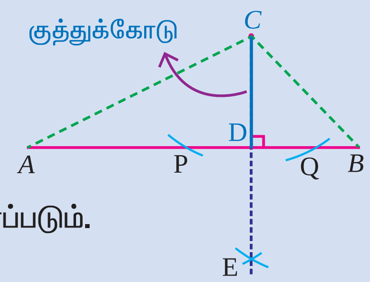


படி 4 : C மற்றும் E ஐ இணைக்கக் கிடைக்கும் கோடு தேவையான குத்துக்கோடு ஆகும்.



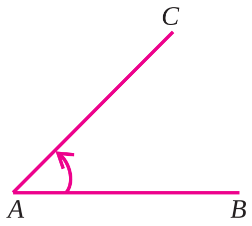
முக்கிய கருத்து **குத்துக்கோடு**

முக்கோணத்தின் ஒரு உச்சியிலிருந்து அதற்கு எதிரே உள்ள பக்கத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு குத்துக்கோடு *(Altitude)* எனப்படும்.

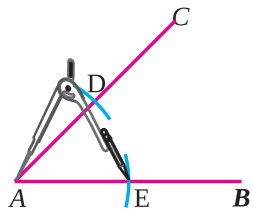


9.2.3 கோணத்தின் இருசமவெட்டி வரைதல் (*Angle Bisector*)

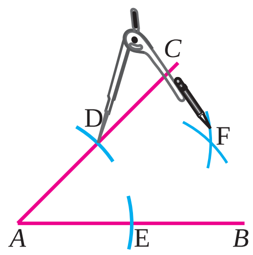
படி 1 : கொடுக்கப்பட்ட கோண அளவுக்கு ஏற்ப $\angle CAB$ ஐ வரைக.



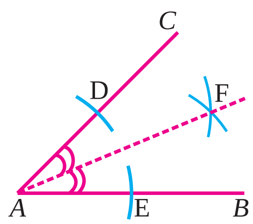
படி 2 : A ஐ மையமாகக் கொண்டு ஏதேனும் ஒரு அளவிற்கு ஆரம் எடுத்து AC மற்றும் AB ஐ D மற்றும் E யில் வெட்டுமாறு விற்களை வரைக.



படி 3 : D மற்றும் E ஐ முறையே மையமாகக் கொண்டு DE –ன் அளவில் பாதிக்குமேல் ஆரமாக எடுத்து விற்களை வரைந்து அவை வெட்டும் புள்ளிக்கு F எனப் பெயரிடுக.

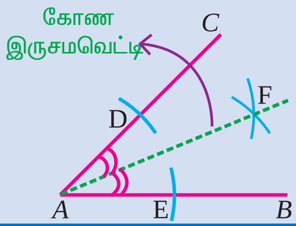


படி 4 : A மற்றும் F ஐ இணைக்கக் கிடைக்கும் AF ஆனது $\angle CAB$ -ன் கோண இரு சமவெட்டி ஆகும்.



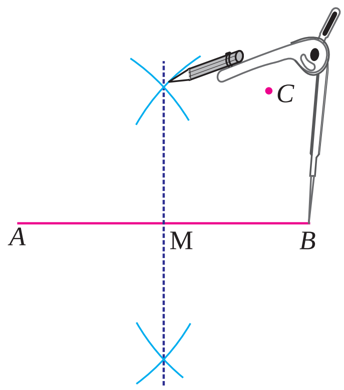
முக்கிய கருத்து — **கோண இருசமவெட்டி**

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோணத்தை இரு சமகோணங்களாகப் பிரிக்கும் கோடு அக்கோணத்தின் கோண இருசமவெட்டி (*Angle Bisector*) எனப்படும்.

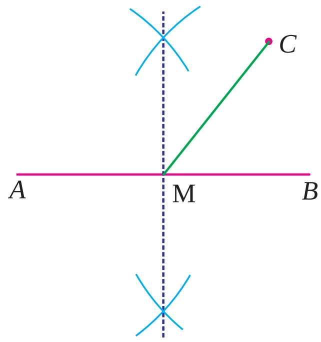


9.2.4 கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோட்டுத் துண்டின் மையப்புள்ளியை கோட்டுத்துண்டிற்கு வெளியே உள்ள புள்ளியுடன் இணைத்தல்

படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவிற்கு கோட்டுத்துண்டு AB வரைந்து, அதற்கு வெளியே C என்ற புள்ளியைக் குறி.



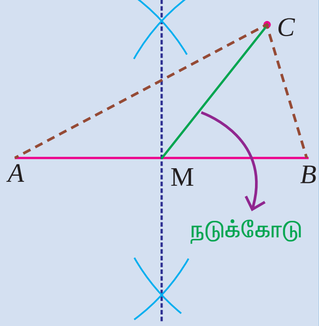
படி 2 : கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டிற்கு மையக்குத்துக் கோடு வரைந்து அது AB-யை வெட்டும் புள்ளிக்கு M எனப் பெயரிடுக.



படி 3 : C மற்றும் M ஐ இணைக்கவும்.

முக்கிய கருத்து — **நடுக்கோடு**

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு உச்சியை அதற்கு எதிரே உள்ள பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியுடன் இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு நடுக்கோடு (*Median*) எனப்படும்.



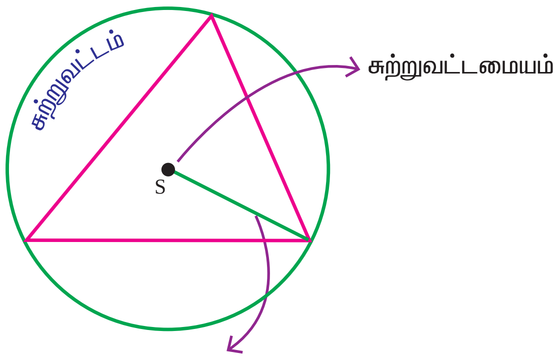
9.3 ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடுகள் (Points of Concurrency)

மையக்குத்துக்கோடு, குத்துக்கோடு, கோண இருசமவெட்டி மற்றும் நடுக்கோடு ஆகியவற்றை வரைவது பற்றி இது வரை கற்றோம். இப்போது நாம் சுற்றுவட்ட மையம், குத்துக்கோட்டு மையம், உள்வட்ட மையம், நடுக்கோட்டு மையம் போன்றவற்றை காணும் முறையைப் பற்றி அறிவோம்.

9.3.1 முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம் வரைதல்

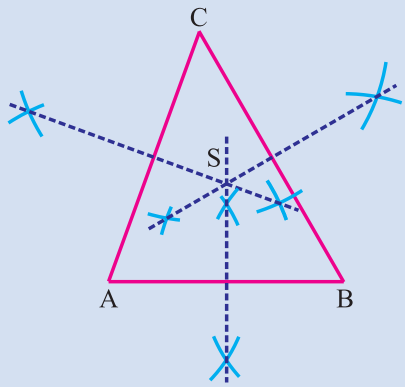
சுற்றுவட்டம் *(Circumcircle)*

முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிகளையும் தொட்டுச் செல்லுமாறு (உச்சிகளின் வழியே) வரையப்படும் வட்டம் சுற்றுவட்டம் எனப்படும்.



முக்கிய கருத்து **சுற்றுவட்டமையம்**

முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையக்குத்துக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம் *(Circumcentre)* எனப்படும். இதனை S என குறிப்போம்.

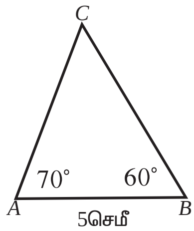


சுற்றுவட்ட ஆரம் *(Circumradius)*

சுற்றுவட்ட மையம் S-க்கும் முக்கோணத்தின் ஏதேனும் ஒரு உச்சிப்புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் சுற்றுவட்ட ஆரம் எனப்படும். அதாவது, சுற்றுவட்டத்தின் ஆரத்தை சுற்றுவட்ட ஆரம் என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 9.1

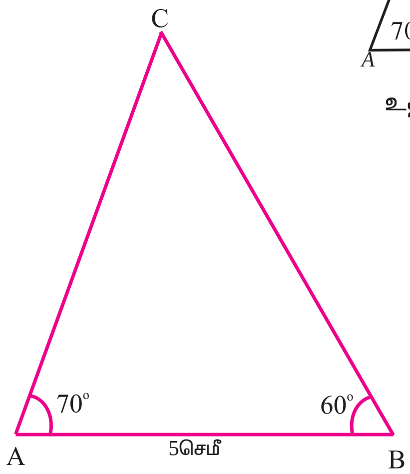
$AB = 5$ செமீ, $\angle A = 70^\circ$ மற்றும் $\angle B = 60^\circ$ அளவுள்ள ΔABC வரைக. அதன் சுற்று வட்டம் வரைந்து சுற்றுவட்ட ஆரம் காண்க.



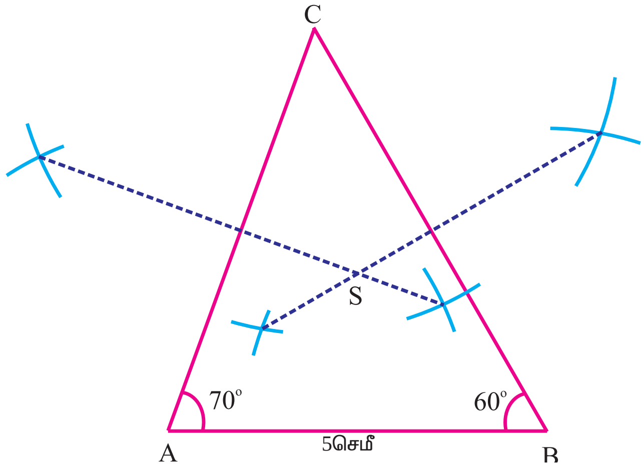
உதவிப் படம்

தீர்வு

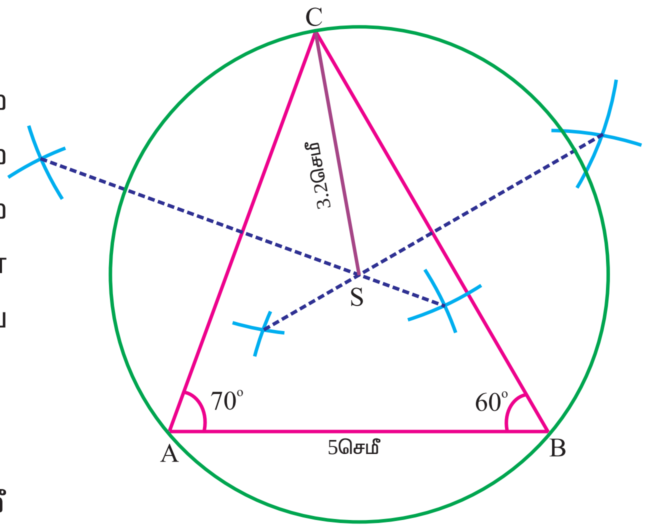
படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவிற்கு ΔABC வரைக.



படி 2 : ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்களுக்கு (AC மற்றும் BC) மையக்குத்துக் கோடுகள் வரைக. அவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி S என்பது சுற்றுவட்டமையம் ஆகும்.



படி 3 : S-ஐ மையமாகவும் $SA = SB = SC$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு சுற்றுவட்டம் வரைந்தால் அது உச்சிகள் A, B மற்றும் C வழியே செல்லும்.



சுற்று வட்ட ஆரம் = 3. 2செமீ

குறிப்புரை

1. குறுங்கோண முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் முக்கோணத்தின் உள்ளே அமையும்.
2. செங்கோண முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் கர்ணத்தின் மையப்புள்ளி ஆகும்.
3. விரிகோண முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் முக்கோணத்தின் வெளியே அமையும்.

பயிற்சி 9.1

1. $PQ = 5$ செமீ, $\angle P = 100^\circ$ மற்றும் $PR = 5$ செமீ அளவுள்ள ΔPQR வரைந்து அதன் சுற்றுவட்டம் வரைக.
2. சுற்றுவட்டம் வரைக:

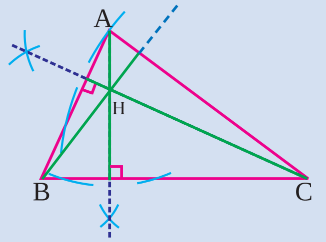
   (i) சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்க அளவு 6 செமீ.

   (ii) இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் சம பக்கங்களின் அளவு 5 செமீ.
3. $AB = 7$ செமீ, $BC = 8$ செமீ மற்றும் $\angle B = 60^\circ$ அளவுள்ள ΔABC வரைந்து சுற்றுவட்ட மையம் காண்க.
4. செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 4.5செமீ, 6செமீ மற்றும் 7.5செமீ ஆகும். அதன் சுற்றுவட்ட மையம் காண்க.

9.3.2 முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டுமையம் வரைதல்

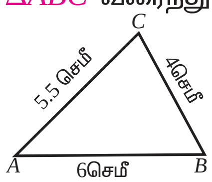
முக்கிய கருத்து **குத்துக்கோட்டு மையம்**

முக்கோணத்தின்குத்துக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி குத்துக்கோட்டுமையம் அல்லது செங்கோட்டு மையம் (*Orthocentre*) எனப்படும். இதை H என்று குறிப்போம்.



எடுத்துக்காட்டு 9.2

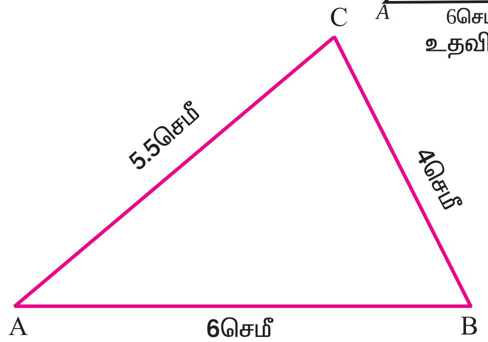
$AB = 6$ செமீ, $BC = 4$ செமீ மற்றும் $AC = 5.5$ செமீ ஆகிய அளவுகளுக்கு ΔABC வரைந்து குத்துக்கோட்டு மையம் வரைக.



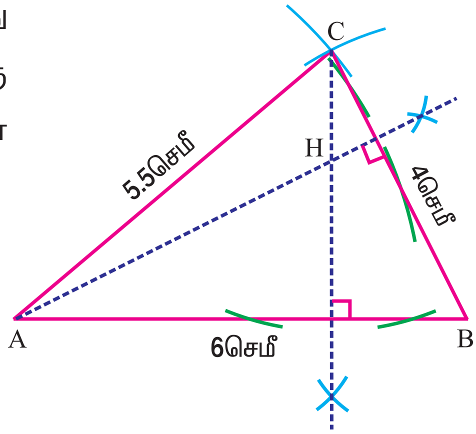
உதவிப் படம்

தீர்வு

படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளுக்கு ΔABC வரைக



படி 2 : ஏதேனும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து (A மற்றும் C) எதிரே உள்ள பக்கங்களுக்கு (முறையே BC மற்றும் AB) குத்துக்கோடுகள் வரைக.



இக்குத்துக்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி H, ΔABC-ன் குத்துக்கோட்டு மையம் ஆகும்.

குறிப்புரை

1. ஒரு முக்கோணத்திற்கு மூன்று குத்துக்கோடுகள் வரைய முடியும்.
2. குறுங்கோண முக்கோணத்தில் குத்துக்கோட்டு மையம் முக்கோணத்தின் உள்ளே அமையும்.
3. செங்கோண முக்கோணத்தில் குத்துக்கோட்டு மையம் செங்கோணத்தின் உச்சிப் புள்ளி.
4. விரிகோண முக்கோணத்தில் குத்துக்கோட்டு மையம் முக்கோணத்திற்கு வெளியே அமையும்.

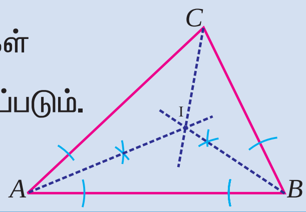
பயிற்சி 9.2

1. $AB = 8$ செ.மீ, $BC = 7$ செ.மீ மற்றும் $AC = 5$ செ.மீ என்ற அளவுள்ள ΔABC வரைந்து, அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.
2. $LM = 7$ செ.மீ, $\angle M = 130^\circ$ மற்றும் $MN = 6$ செ.மீ என்ற அளவுள்ள ΔLMN வரைந்து, அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.
3. 6 செ.மீ பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோணம் வரைந்து, அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.
4. $PQ = 4.5$ செ.மீ, $QR = 6$ செ.மீ மற்றும் $\angle Q = 90^\circ$ என்ற அளவுள்ள ΔPQR வரைந்து, அதன் குத்துக்கோட்டு மையத்தைக் குறி.
5. இருசமபக்க முக்கோணம் ABC-ல் சமபக்கங்களின் அளவு 6 செ.மீ, $AB = BC$ மற்றும் $\angle B = 80^\circ$ வரைந்து, அதன் குத்துக்கோட்டு மையத்தைக் குறி.

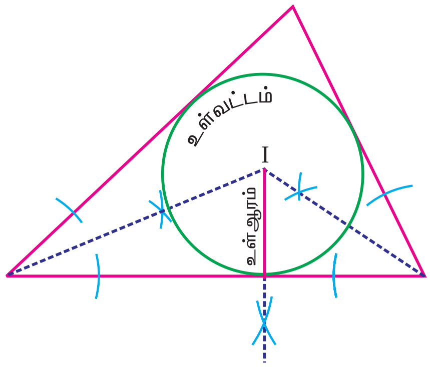
9.3.3 முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம் வரைதல்

முக்கிய கருத்து **உள்வட்ட மையம்**

முக்கோணத்தின் கோணங்களின் இருசமவெட்டிகள் சந்திக்கும் புள்ளி உள்வட்ட மையம் *(Incentre)* எனப்படும். அதனை I என்று குறிப்பிடுவோம்.



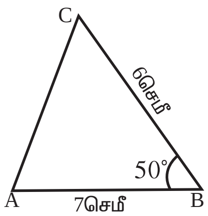
உள்வட்டம்: உள்வட்ட மையத்தை (I) மையமாக வைத்து முக்கோணத்தின் அனைத்து பக்கங்களையும் உட்புறமாகத் தொட்டுச் செல்லுமாறு வரையப்படும் வட்டம் உள்வட்டம் *(Incircle)* எனப்படும்.



உள் ஆரம்: உள்வட்ட மையத்திலிருந்து முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு உள்ள செங்குத்துத்தூரம் உள் ஆரம் *(Inradius)* எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.3

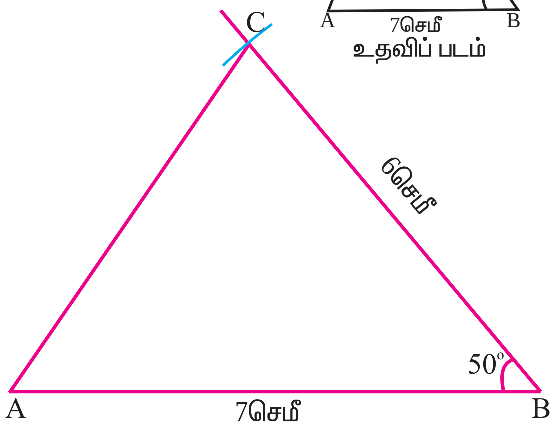
$AB = 7$ செ.மீ, $\angle B = 50^\circ$ மற்றும் $BC = 6$ செ.மீ அளவுள்ள ΔABC வரைந்து அதன் உள்வட்டம் வரைக. மேலும் உள் ஆரத்தை அளந்து எழுது.



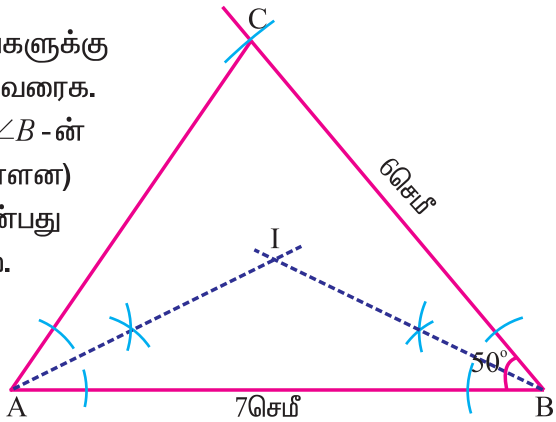
உதவிப் படம்

தீர்வு

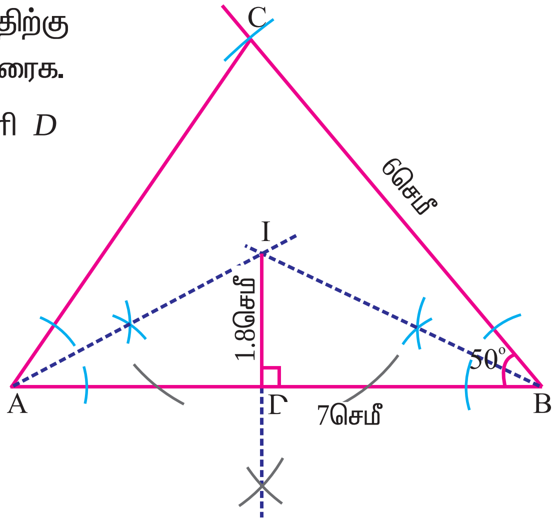
படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளுக்கு ΔABC வரைக.



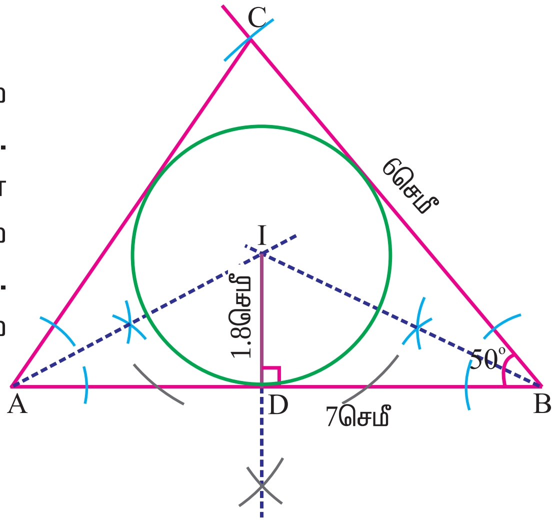
படி 2 : ஏதேனும் இரு கோணங்களுக்கு கோண இருசமவெட்டிகள் வரைக. (இங்கு $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ -ன் இருசமவெட்டிகள் வரையப்பட்டுள்ளன) அவை சந்திக்கும் புள்ளி I என்பது ΔABC -ன் உள்வட்ட மையம் ஆகும்.



படி 3 : I-ல் இருந்து ஏதேனும் ஒரு பக்கத்திற்கு (இங்கு AB) செங்குத்துக்கோடு வரைக. அக்கோடு AB ஐ சந்திக்கும் புள்ளி D ஆகும்.



படி 4 : I ஐ மையமாகவும் ID ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு வட்டம் வரைக. இவ்வட்டமானது முக்கோணத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களையும் உட்புறமாகத் தொட்டுச் செல்லும். இதுவே தேவையான உள்வட்டம் ஆகும்.



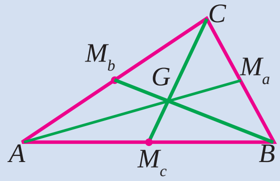
உள்வட்ட ஆரம் = 1.8 செ.மீ

குறிப்புரை எல்லா வகை முக்கோணங்களுக்கும் உள்வட்ட மையம் எப்போதும் முக்கோணத்தின் உள்ளே அமையும்.

பயிற்சி 9.3

1. $AB = 9$ செ.மீ, $BC = 7$ செ.மீ, மற்றும் $AC = 6$ செ.மீ அளவுள்ள ΔABC-க்கு உள்வட்டம் வரைக.
2. $AB = 6$ செ.மீ, $AC = 7$ செ.மீ மற்றும் $\angle A = 40^\circ$ அளவுள்ள ΔABC-க்கு உள்வட்டம் வரைந்து உள்வட்ட ஆரம் காண்க.
3. பக்க அளவு 6 செ.மீ உள்ள சமபக்க முக்கோணத்திற்கு உள்வட்டம் வரைக.
4. $AB = 6$ செ.மீ, $AC = 5$ செ.மீ மற்றும் $\angle A = 110^\circ$ அளவுள்ள ΔABC-க்கு உள்வட்டம் வரைந்து உள்வட்ட மையத்தைக் குறி.

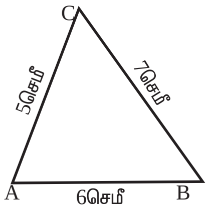
9.3.4 முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் வரைதல்

முக்கிய கருத்து	நடுக்கோட்டு மையம்
முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் *(Centroid)* எனப்படும். இதனை G என்று குறிப்பிடுவோம்.	

எடுத்துக்காட்டு 9.4

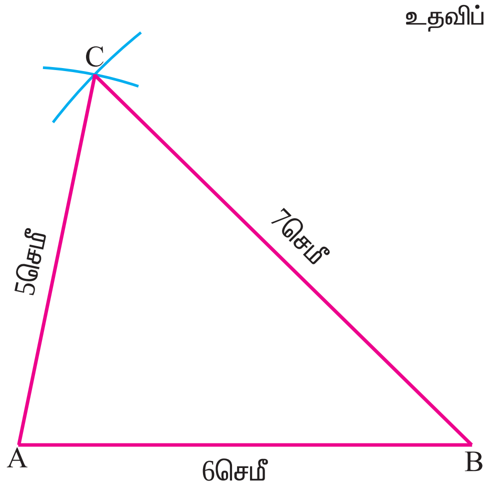
$AB = 6$ செ.மீ, $BC = 7$ செ.மீ மற்றும் $AC = 5$ செ.மீ ஆகிய அளவுகளுக்கு ΔABC வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையம் வரைக.

தீர்வு



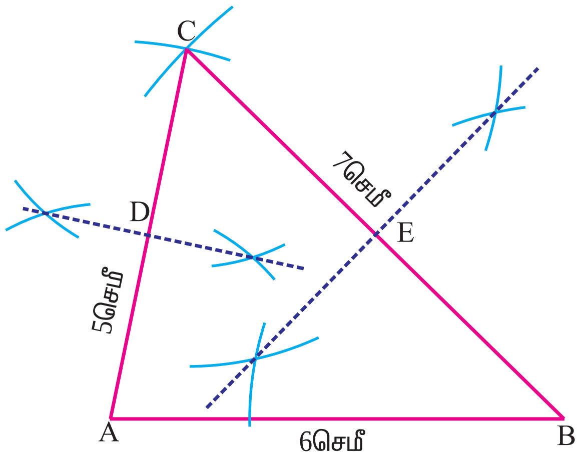
உதவிப் படம்

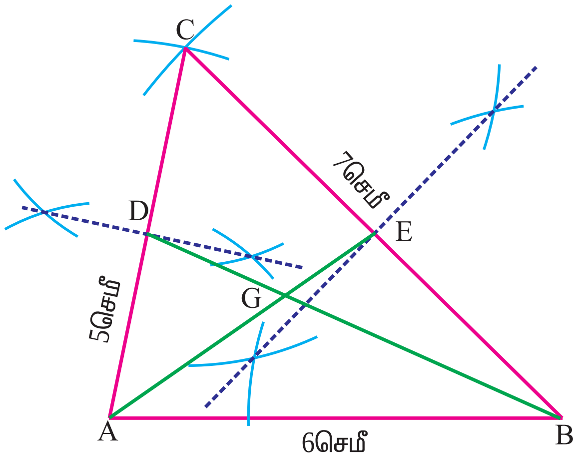
படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளுக்கு ΔABC வரைக.



படி 2 : ஏதேனும் இரு பக்கங்களுக்கு மையக்குத்துக்கோடுகள் வரைக.

(இங்கு AC மற்றும் BC-க்கு மையக்குத்துக்கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன)





படி 3 : அப்பக்கங்களின் மையப் புள்ளியை முறையே எதிர் உச்சியுடன் இணைக்கும் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி G என்க.

புள்ளி G ஆனது ΔABC-ன் நடுக்கோட்டு மையம் ஆகும்.

குறிப்புரை

(i) முக்கோணத்திற்கு மூன்று நடுக்கோடுகள் வரையலாம்.

(ii) நடுக்கோடுகளை நடுக்கோட்டு மையம் முனையிலிருந்து 2:1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

(iii) அனைத்து வகை முக்கோணங்களிலும் நடுக்கோட்டு மையம் முக்கோணத்தின் உள்பகுதியில் அமையும்.

பயிற்சி 9.4

1. $AB = 6$ செ.மீ, $BC = 5$ செ.மீ மற்றும் AC = 4 செ.மீ அளவுகளுக்கு ΔABC வரைந்து நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறி.

2. $LM = 5.5$ செ.மீ, $\angle M = 100^o$ $MN = 6.5$ செ.மீ அளவுள்ள முக்கோணம் வரைந்து நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறி.

3. பக்கஅளவு 7.5 செ.மீ, உள்ள சமபக்க முக்கோணம் வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் காண்க.

4. பக்கஅளவுகள் 3 செ.மீ, 4 செ.மீ மற்றும் 5 செ.மீ உள்ள செங்கோண முக்கோணம் வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் காண்க.

5. $PQ = 6$ செ.மீ, $\angle P = 110^o$ மற்றும் $QR = 8$ செ.மீ அளவுகளுக்கு ΔPQRன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறி.

10 வரைபடங்கள்

A mathematical theory can be regarded as perfect only if you are prepared to present its contents to the first man in the street

– D.HILBERT

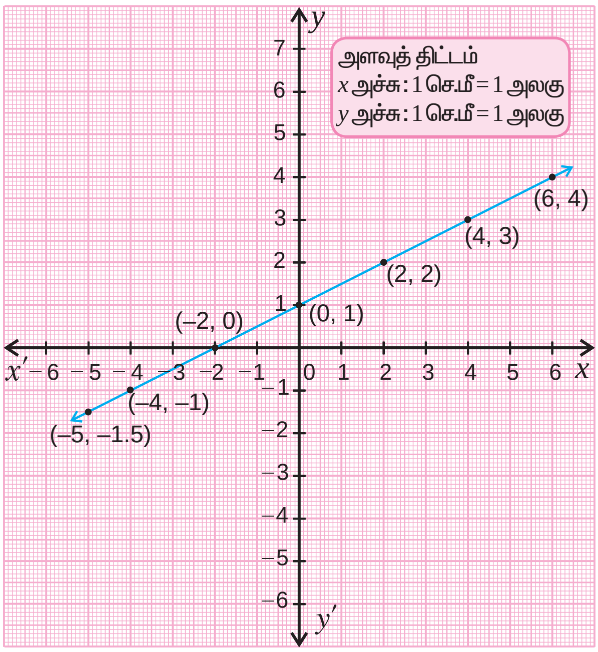
முக்கியக் குறிக்கோள்கள்

- வரைபடக் கருத்தினைப் புரிதல்
- நேரியச் சமன்பாட்டின் வரைபடம் வரைதல்
- இரு மாறிகளைக் கொண்ட நேரியச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல்

10.1 அறிமுகம்

வரைபடத்தின் அடிப்படைக் கருத்துக்களை இப்பாடப்பகுதி விளக்குகிறது. நாம் ஒவ்வொரு நாளும் செய்தித்தாள்கள், பத்திரிக்கைகள் மற்றும் புத்தகங்கள் போன்றவற்றில் வரைபடங்களைக் காண்கிறோம். வரைபடங்கள் பல்வேறு விவரமதிப்புகளை பட வடிவில் விளக்குகிறது. இதன் மூலம் விவரமதிப்புகளை விரைவாகவும், எளிதாகவும் மற்றும் தெளிவாகவும் புரிந்து கொள்ள முடிகிறது. இப்பாடப்பகுதியில் இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பினை வரைபடத்தில் குறிப்பிடவும், சமன்பாடுகளின் தீர்வினை வரைபடம் மூலம் பெறுவதையும் கற்போம்.

10.2 நேரிய வரைபடம் (*Linear Graph*)



$x - 2y = -2$ என்ற சமன்பாடு x, y என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒரு நேரியச் சமன்பாட்டிற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டாகும். $x_0 - 2y_0 = -2$ என்றவாறு உள்ள x_0, y_0 என்ற எண்களின் சோடி (x_0, y_0) ஆனது $x - 2y = -2$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு ஆகும். இவ்வாறு சோடியின் முதல் எண் x_0 மற்றும் இரண்டாவது எண் y_0-க்கு குறிப்பிட்ட மதிப்புகள் கொடுப்பதன் மூலம் சமன்பாட்டின் எல்லாத் தீர்வுகளையும் எளிதாக காணமுடியும். தளத்தில் உள்ள இரு அச்சுக்களை பொறுத்து அமையும் $x - 2y = -2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளான (x_0, y_0) ஆகிய புள்ளிகளின் தொகுப்பு $x - 2y = -2$ இன் வரைபடம் எனப்படும். பல்வேறு x_0 மற்றும் y_0 மதிப்புகளை $x - 2y = -2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாக கண்டு பெறப்படும் பல்வேறு சோடிகள் (x_0, y_0)-ஐ வரைபடத்தில் குறிப்பதன் மூலம் வரைபடத்தினை பற்றி நன்கு அறிந்து கொள்ளலாம். உதாரணமாக, மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள

படம் $(-5,-1.5)$, $(-4,-1)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 3)$ மற்றும் $(6, 4)$ ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்கும் வரைபடமாகும்.

இப்புள்ளிகள் $x - 2y = -2$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடாகும் என்பதை உணர்த்துகிறது.

இதிலிருந்து, இருமாறிகளில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடு எப்போதும் ஒரு நேர்க்கோட்டை குறிக்கும் என அறியலாம். $ax + by + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டை நேர்க்கோட்டின் பொதுவடிவமாக எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். இதில் a அல்லது b ஏதாவது ஒன்று பூச்சியமில்லாமல் இருக்கவேண்டும். வரைபடத்தாளில் நேர்க்கோட்டின் வரைபடம் எளிதாக வரைய நேர்க்கோட்டின் மற்றொரு எளிய அமைப்பான $y = mx + c$ யை பயன்படுத்துகிறோம். x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் $y = mx + c$ என்ற சமன்பாடானது y-ன் மதிப்பைக் கொடுப்பதால், நாம் (x, y) என்ற வரிசைப்படுத்தப்பட்ட சோடியைப் எளிதாகப் பெறுகிறோம்.

குறிப்பு

$ax + by + c = 0$ என்பது நேர்கோட்டின் பொது வடிவமாகும்

(i) $c = 0$ எனில் சமன்பாடு $ax + by = 0$ ஆகும். இக்கோடு ஆதி வழியே செல்லும்.

(ii) $a = 0$ எனில் சமன்பாடு $by + c = 0$ ஆகும். இக்கோடு x அச்சுக்கு இணையாக செல்லும்.

(iii) $b = 0$ எனில் சமன்பாடு $ax + c = 0$ ஆகும். இக்கோடு y அச்சுக்கு இணையாக செல்லும்.

10.2.1 நேரிய வரைபடம் வரையும் முறை

ஒரு சமன்பாட்டின் வரைபடத்தைக் காண x மற்றும் y-ன் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும். x-ன் மூன்று மதிப்புகளைக் கொண்டு இவற்றிற்கான y-ன் மதிப்புகளைக் காண்போம். ஒரு கோடு வரைய இரண்டு புள்ளிகளே போதுமானது, எனினும், மூன்று புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்வதன் மூலம் நமது வரைபடம் சரியானது என்பதை உறுதி செய்ய இயலும்.

படி 1: சமன்பாட்டைக் கொண்டு x மற்றும் y-ன் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்துக.
படி 2: வரைபடத்தாளில் x அச்சு மற்றும் y அச்சினை வரைக.
படி 3: அச்சுக்களின் மீது தேவையான அளவுத்திட்டத்தினைக் குறிக்கவும்.
படி 4: வரைபடத்தாளில் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.
படி 5: புள்ளிகளை இணைத்தும், நீட்டியும் கோட்டினை பெறவும்.

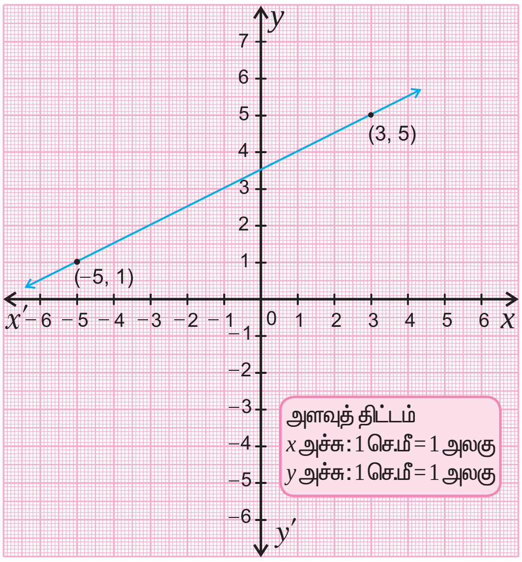
10.2.2 நேர்க்கோடு வரைதல்

எடுத்துக்காட்டு 10.1

$(3, 5)$ மற்றும் $(-5, 1)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டினை வரைக.

தீர்வு

1. 1 செ.மீ = 1 அலகு என்ற அளவுத்திட்டத்தில் x அச்சு மற்றும் y அச்சினை வரைக.
2. வரைபடத்தாளில் $(3, 5)$, $(-5, 1)$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு புள்ளிகளை குறிக்க.
3. புள்ளிகளை இணைத்து கோட்டுத்துண்டு வரைந்து அதனை இரண்டு புறமும் நீட்டவும்.
4. நாம் தேவையான நேரிய வரைபடத்தைப் பெறுகிறோம்.



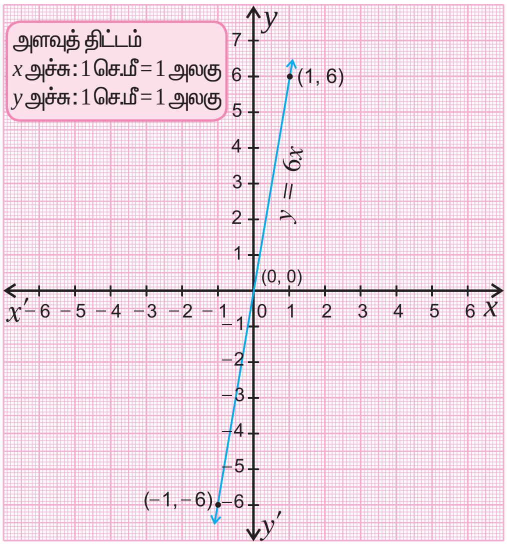
எடுத்துக்காட்டு 10.2

$y = 6x$-ன் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாட்டில் $x = -1, 0, 1$ என்ற மதிப்புகளைப் பிரதியிட கீழ்க்காணும் y-ன் மதிப்புகளை பெறலாம்.

$y = 6x$			
x	-1	0	1
y	-6	0	6

$(-1, -6)$, $(0, 0)$ மற்றும் $(1, 6)$ என்ற புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து அப்புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் நேர்க்கோட்டினை வரையவும். இதுவே தேவையான நேர்க்கோட்டு வரைபடமாகும்.



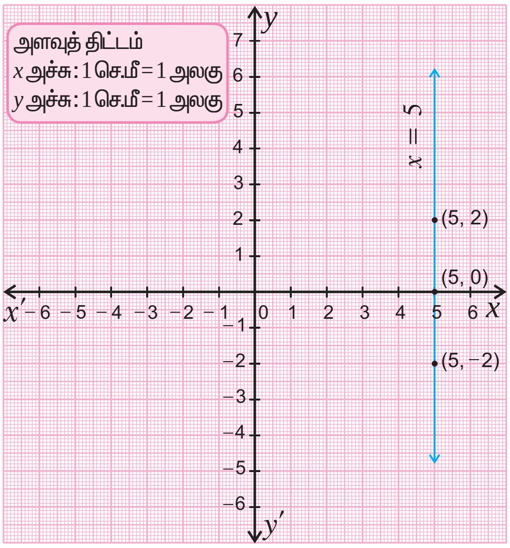
எடுத்துக்காட்டு 10.3

$x = 5$-ன் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு $x = 5$ என்ற கோடு y அச்சுக்கு இணையானது. இந்த கோட்டில் x ஒரு மாறிலி. மேலும், இக்கோட்டின் எந்த புள்ளியும் $(5, y)$ என்ற வடிவில் அமையும். எனவே $y = -2, 0, 2$ என எடுத்துக்கொள்ள நாம் $(5, -2)$, $(5, 0)$ மற்றும் $(5, 2)$ என்ற புள்ளிகளைப் பெறுகிறோம்.

$x = 5$			
x	5	5	5
y	-2	0	2

வரைபடத்தாளில், இப்புள்ளிகளைக் குறித்து அப்புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் நேர்க்கோட்டினை வரையவும். ஆகவே நாம் நமக்கு தேவையான நேரிய வரைபடத்தைப் பெறுகிறோம்.

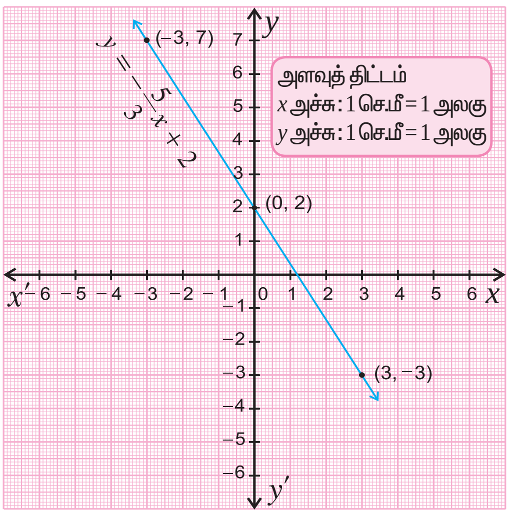


எடுத்துக்காட்டு 10.4

$y = -\frac{5}{3}x + 2$ என்ற நேர்க்கோட்டின் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாட்டில் $x = -3, 0, 3$ எனப் பிரதியிட, கீழ்க்கண்டவாறு y-ன் மதிப்புகளை நாம் காண்கிறோம்.

$y = -\frac{5}{3}x + 2$			
x	-3	0	3
$-\frac{5}{3}x$	5	0	-5
$y = -\frac{5}{3}x + 2$	7	2	-3

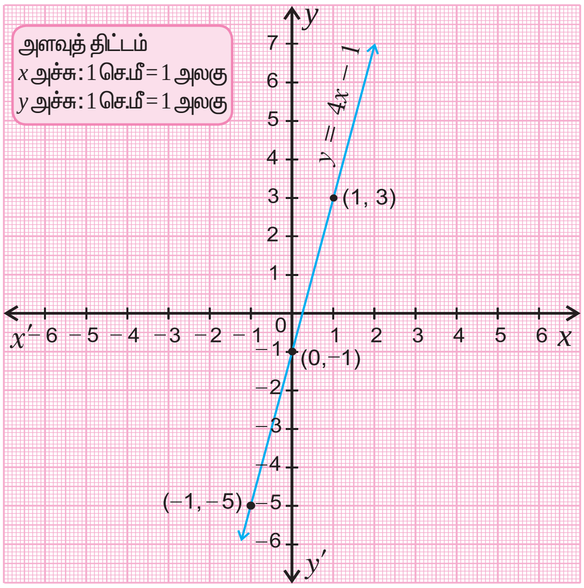


$(-3, 7), (0, 2)$ மற்றும் $(3, -3)$ என்ற புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து அப்புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் நேர்க்கோட்டினை வரையவும். இதுவே $y = -\frac{5}{3}x + 2$ என்ற சமன்பாட்டின் நேர்க்கோட்டு வரைபடமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.5

$y = 4x - 1$-ன் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாட்டில் $x = -1, 0, 1$ என பிரதியிட, கீழ்க்கண்டவாறு y-ன் மதிப்புகளை நாம் பெறுகிறோம்.



$y = 4x - 1$			
x	-1	0	1
$4x$	-4	0	4
$y = 4x-1$	-5	-1	3

$(-1, -5)$, $(0, -1)$ மற்றும் $(1, 3)$ என்ற புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து அப்புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் நேர்க்கோட்டினை வரையவும். நாம் இப்பொழுது தேவையான நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை பெறுகிறோம்.

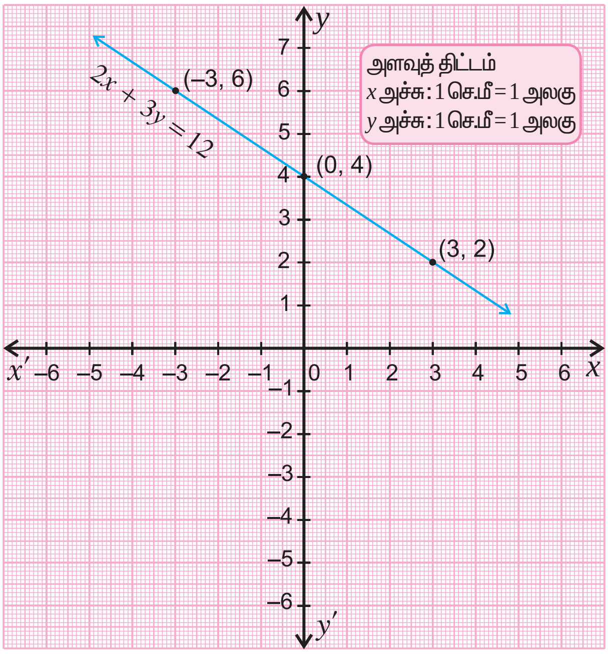
எடுத்துக்காட்டு 10.6

$2x + 3y = 12$-ன் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு முதலில் நாம் $2x + 3y = 12$ என்ற சமன்பாட்டை $y = mx + c$ என்ற வடிவில் எழுதுவோம்.

$2x + 3y = 12$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து $y = -\frac{2}{3}x + 4$ எனக்கிடைக்கிறது.

மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் $x = -3, 0, 3$ எனப் பிரதியிட, கீழ்க்கண்டவாறு y-ன் மதிப்புகளை நாம் பெறுகிறோம்.



$y = -\frac{2}{3}x + 4$			
x	-3	0	3
$-\frac{2}{3}x$	2	0	-2
$y=-\frac{2}{3}x + 4$	6	4	2

வரைபடத்தாளில் $(-3,6), (0,4)$ மற்றும் $(3,2)$ என்ற புள்ளிகளை குறித்து அப்புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் நேர்க்கோட்டினை வரையவும். நாம் இப்பொழுது தேவையான வரைபடத்தை பெறுகிறோம்.

பயிற்சி 10.1

1. பின்வரும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டு வரைபடம் வரைக.

(i) $(2, 3)$ மற்றும் $(-6, -5)$ (ii) $(-2, -4)$ மற்றும் $(-1, 6)$

(iii) $(5, -7)$ மற்றும் $(-1, 5)$ (iv) $(-3, 9)$ மற்றும் $(5, -6)$ (v) $(4, -5)$ மற்றும் $(6, 10)$

2. பின்வருவனவற்றிற்கு வரைபடம் வரைக.

(i) $y = 5$ (ii) $y = -6$ (iii) $x = 3$

(iv) $x = -5$ (v) $2x + 7 = 0$ (vi) $6 + 3y = 0$

3. பின்வருவனவற்றிற்கு வரைபடம் வரைக.

(i) $y = 4x$ (ii) $3x + y = 0$ (iii) $x = -2y$

(iv) $y - 3x = 0$ (v) $9y - 3x = 0$

4. பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்கு நேர்க்கோட்டு வரைபடம் வரைக.

(i) $y = 3x + 1$ (ii) $4y = 8x + 2$ (iii) $y - 4x + 3 = 0$

(iv) $x = 3y + 3$ (v) $x + 2y - 6 = 0$ (vi) $x - 2y + 1 = 0$

(vii) $3x + 2y = 12$

5. பின்வருவனவற்றில் m மற்றும் c-ன் மதிப்புகளைக் கொண்டு $y = mx + c$ என்ற சமன்பாட்டிற்கான வரைபடம் வரைக.

(i) $m = 2$ மற்றும் $c = 3$ (ii) $m = -2$ மற்றும் $c = -2$ (iii) $m = -4$ மற்றும் $c = 1$

(iv) $m = 3$ மற்றும் $c = -4$ (v) $m = \frac{1}{2}$ மற்றும் $c = 3$ (vi) $m = \frac{-2}{3}$ மற்றும் $c = 2$

10.3 வரைபடங்களின் பயன்பாடு (*Application of Graphs*)

இரு மாறிகளின் ஒரு நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு என்பது இரு மாறிகளாலான ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ஒரு படிச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஆகும். அத்தொகுப்பில் உள்ள எல்லா சமன்பாடுகளையும் நிறைவு செய்யும் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட சோடிகளின் கணம் அத்தொகுப்பின் தீர்வு ஆகும். இப்பாடப்பகுதியில் இரு மாறிகளாலான இரு நேரியச் சமன்பாடுகளின் தீர்வை வரைபடமுறையில் காண்பது பற்றி படிப்போம்.

இங்கே தீர்வானது மூன்று வகைகளில் நிகழலாம். அவை

(i) இரண்டு சமன்பாடுகளின் வரைபடமும் ஒன்றின் மீது ஒன்று அமைந்து ஒரே நேர்கோடாகலாம். இந்நிலையில் இச்சமன்பாடுகளுக்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

(ii) இரு சமன்பாடுகளின் வரைபடங்களும் ஒன்றையொன்று எங்கும் சந்திக்காமல் இணையாக இருக்கலாம். இணையானவை என்பதால் இதற்கு பொதுவான புள்ளிகள் கிடையாது. ஆகவே, இச்சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகள் கிடையாது.

(iii) இரு சமன்பாடுகளின் வரைபடங்களும் ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டும் வெட்டிக் கொள்ளலாம். ஆகவே, இச்சமன்பாடுகள் ஒரே ஒரு தீர்வை மட்டும் கொண்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 10.7

$x + 2y = 4;\ 2x + 4y = 8$ என்ற சமன்பாடுகளை வரைபடம் மூலம் தீர்க்க.

தீர்வு ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் மூன்று புள்ளிகளைக் காண, x-க்கு மூன்று மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டு அதற்குரிய y-ன் மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம். நாம் பெறும் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

கோடு 1: $x + 2y = 4$

$$2y = -x + 4 \implies y = -\frac{x}{2} + 2$$

மேற்காணும் சமன்பாட்டில் $x = -2, 0, 2$ எனப் பிரதியிட, நாம் அதற்குரிய y-ன் மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம்.

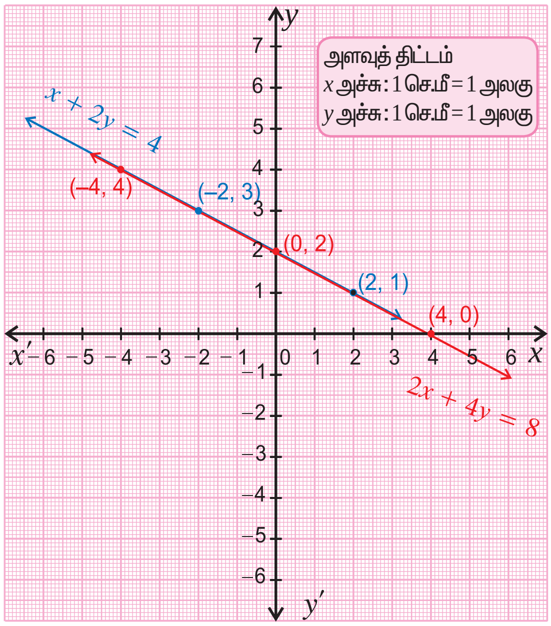
$y = -\frac{x}{2} + 2$			
x	-2	0	2
$-\frac{x}{2}$	1	0	-1
$y = -\frac{x}{2} + 2$	3	2	1

கோடு 2: $2x + 4y = 8$

$$4y = -2x + 8 \implies y = -\frac{x}{2} + 2$$

மேற்காணும் சமன்பாட்டில் $x = -4, 0, 4$ என பிரதியிட, நாம் பெறும் y மதிப்புகள் பின்வருமாறு

$y = -\frac{x}{2} + 2$			
x	-4	0	4
$-\frac{x}{2}$	2	0	-2
$y = -\frac{x}{2} + 2$	4	2	0



நாம் புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து நேர்கோடுகள் வரைவோம். இரண்டு கோடுகளும் ஒன்றன் மீது ஒன்று அமைவதைக் காணலாம். ஒரு கோட்டின் மீது உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியும் மற்றொரு கோட்டின் மீதும் அமையும். எனவே, இரு சமன்பாடுகளுக்கும் எண்ணற்ற பொதுவான புள்ளிகள் உண்டு. அதாவது, கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் தீர்வாகும். ஆகவே, சமன்பாடுகளுக்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 10.8

வரைபட முறையில் தீர்: $x - 3y = 6;\ x - 3y + 9 = 0$

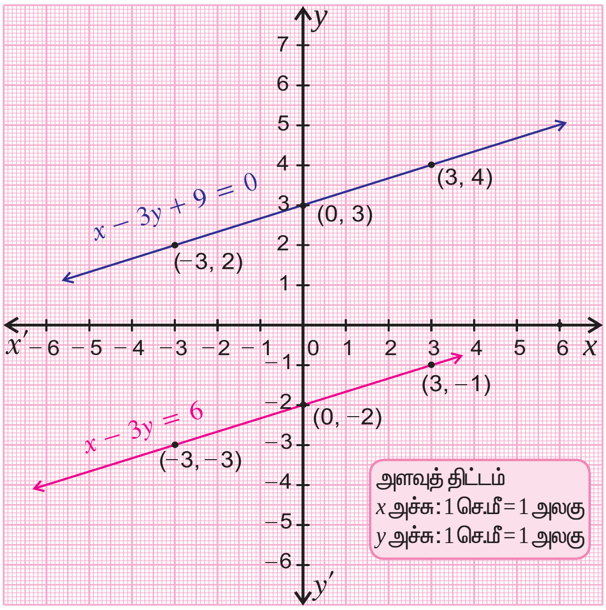
தீர்வு ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் மூன்று புள்ளிகளைக் காண, x-க்கு மூன்று மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டு அதற்குரிய y-ன் மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம். நாம் பெறும் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

கோடு 1: $x - 3y = 6$

$$3y = x - 6 \Longrightarrow y = \frac{x}{3} - 2$$

மேற்காணும் சமன்பாட்டில் $x = -3, 0, 3$ என பிரதியிட, நாம் பெறும் y-ன் மதிப்புகள் பின்வருமாறு

$y = \frac{x}{3} - 2$			
x	-3	0	3
$\frac{x}{3}$	-1	0	1
$y = \frac{x}{3} - 2$	-3	-2	-1



கோடு 2: $x - 3y + 9 = 0$

$$3y = x + 9$$

$$y = \frac{x}{3} + 3$$

மேற்காணும் சமன்பாட்டில் $x = -3, 0, 3$ என பிரதியிட, நாம் பெறும் y-ன் மதிப்புகள் பின்வருமாறு

$y = \frac{x}{3} + 3$			
x	-3	0	3
$\frac{x}{3}$	-1	0	1
$y = \frac{x}{3} + 3$	2	3	4

முதலில் $(-3, -3)$ $(0, -2)$ மற்றும் $(3, -1)$ என்ற புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து அப்புள்ளிகள் வழியாக நேர்க்கோடு வரைக. பின்பு $(-3, 2)$ $(0, 3)$ மற்றும் $(3, 4)$ என்ற புள்ளிகளை அதே வரைபடத்தாளில் குறித்து அப்புள்ளிகள் வழியாகவும் நேர்க்கோடு வரைக. இரண்டு கோடுகளும் இணையாக இருப்பதைக் காணலாம். இரண்டு கோடுகளுக்கும் பொதுவான புள்ளிகள் இல்லை. ஆகவே, இச்சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகள் ஏதும் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 10.9

$2x - y = 1; x + 2y = 8$ என்ற சமன்பாடுகளை வரைபடமுறையில் தீர்க்க.

தீர்வு ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் மூன்று புள்ளிகளைக் காண, x-க்கு மூன்று மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டு அதற்குரிய y-ன் மதிப்புகளைப் பெறுவோம். நாம் பெறும் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

கோடு 1: $2x - y = 1$

$$y = 2x - 1$$

மேற்காணும் சமன்பாட்டில் $x = -1, 0, 1$ எனப் பிரதியிட, நாம் பெறும் y-ன் மதிப்புகள்

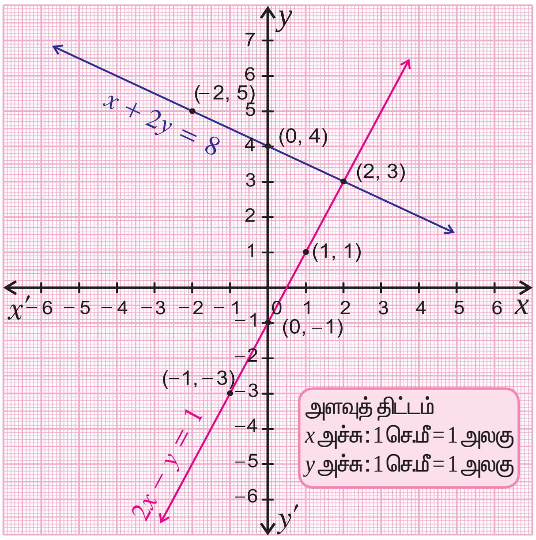
$y = 2x - 1$			
x	-1	0	1
$2x$	-2	0	2
$y = 2x - 1$	-3	-1	1

கோடு 2: $x + 2y = 8$

$$2y = -x + 8 \implies y = -\frac{x}{2} + 4$$

மேற்காணும் சமன்பாட்டில் $x = -2, 0, 2$ எனப் பிரதியிட, நாம் பெறும் y-ன் மதிப்புகள்

$y = -\frac{x}{2} + 4$			
x	-2	0	2
$-\frac{x}{2}$	1	0	-1
$y = -\frac{x}{2} + 4$	5	4	3



முதலில் $(-1, -3)$, $(0, -1)$ மற்றும் $(1, 1)$ என்ற புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து அப்புள்ளிகள் வழியாக நேர்கோடு வரைக. பின்பு $(-2, 5)$, $(0, 4)$ மற்றும் $(2, 3)$ என்ற புள்ளிகளை அதே வரைபடத்தாளில் குறித்து அப்புள்ளிகள் வழியாகவும் நேர்க்கோடு வரைக. இரண்டு கோடுகளும் $(2, 3)$ என்ற ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டும் வெட்டிக்கொள்வதைக் காணலாம். ஆகவே, இச்சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு. அத்தீர்வு $x=2$, $y=3$. அதாவது, தீர்வு $(2, 3)$.

பயிற்சி 10.2

பின்வரும் சமன்பாடுகளை வரைபட முறையில் தீர்.

1. $3x - y = 0;\ x - 2 = 0$
2. $2x + y = 4;\ 4x + 2y = 8$
3. $2x = y + 1;\ x + 2y - 8 = 0$
4. $x + y = 5;\ x - y = 1$
5. $x - 2y = 6;\ x - 2y = -6$
6. $4x - y - 5 = 0;\ x + y - 5 = 0$
7. $3x + 2y = 4;\ 9x + 6y - 12 = 0$
8. $y = 2x + 1;\ y + 3x - 6 = 0$
9. $y - 2x + 2 = 0;\ y = 4x - 4$
10. $x - y = 0;\ y + 3 = 0$
11. $2x - 4 = 0;\ 4x + y + 4 = 0$
12. $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1;\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 2$

11 புள்ளியியல்

"Statistical thinking today is as necessary for efficient citizenship as the ability to read and write"

Herbert. G. Wells

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- நிகழ்வெண் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம் வரைதல்
- மையப்போக்கு அளவைகளான கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடித்தல்

11.1 அறிமுகம்

புள்ளியியல் என்பது விவரங்களை சேகரித்து, பாகுபடுத்திப் பட்டியலிட்டு, ஆய்வு செய்து பின் அவ்விவரங்களுக்கு விளக்கம் காண்பதன் மூலம் பிரச்சனைகளுக்கு முடிவு காண்பதற்கு உதவுகின்றது. முதல்நிலை புள்ளிவிவரங்கள் மற்றும் இரண்டாம்நிலை புள்ளிவிவரங்கள் எவ்வாறு சேகரிக்கப்படுகின்றன என்பது பற்றி நாம் முந்தைய வகுப்புகளில் படித்துள்ளோம். அவ்வாறு பெறப்பட்ட புள்ளிவிவரங்கள் அதிகமான விவரங்களை கொண்டதாக இருப்பின், அந்த விவரங்களை ஆய்வு செய்து விளக்கம் காண்பதற்கு முன்பாக பகுத்து, பட்டியலிட வேண்டும்.

ஒரு சில ஆய்வுகளின் போது, பாகுபடுத்தி பட்டியலிடுவதன் மூலமாகவே, அந்த புள்ளி விவரங்கள் பற்றிய தெளிவான விளக்கமும் அதன் முக்கியத்துவமும் தெரியவரும். இவ்வகையில் அளிக்கப்படும் புள்ளிவிவரங்கள் ஒரு சராசரி மனிதனுக்கு ஆர்வம் ஊட்டுவதாகவும், புரியும்படியாகவும் இருத்தல் வேண்டும். எனவே, அப்புள்ளிவிவரங்கள் முழுமையாக ஏற்றுக்கொள்ளும் வகையிலும் மேலும் ஆர்வத்தை தூண்டும் வகையிலும் உள்ளதாக அமைய, அதனை ஒரு விளக்கப் படம் மூலமாகவோ அல்லது ஒரு வரைபடம் மூலமாகவோ அளிப்பது சிறந்தது.

11.2 நிகழ்வெண் பரவலின் வரைபட வடிவம்

"ஒரு படம் ஆயிரம் வார்த்தைகளுக்கு சமம்" என்பதற்கிணங்க புள்ளியியல் வல்லுனர்கள், புள்ளிவிவரங்களைத் தெளிவாக விவரிக்க வரைபடங்களையும் அதன் நுணுக்கங்களையும் நன்கு பயன்படுத்தினார்கள். குறிப்பாக நிகழ்வெண் பரவலாகவோ அல்லது சதவீத பரவலாகவோ தொகுக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களை விவரிக்க நிகழ்வெண் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம் ஆகியன பயன்படுத்தபடுகின்றன.

நிகழ்வெண் பரவல் என்பது பிரிவுகள் மற்றும் நிகழ்வெண்களைப் பயன்படுத்தி, வகைப்படுத்தப்படாத புள்ளிவிவரங்களைப் பகுத்து பட்டியலிடுதல் ஆகும். ஒரு நிகழ்வெண் பரவலை பின் வரும் நான்கு வழிகளில் வரைபடம் மூலம் குறிப்பிடலாம்.

(i) நிகழ்வெண் செவ்வகம் (Histogram)

(ii) நிகழ்வெண் பலகோணம் (Frequency Polygon)

(iii) நிகழ்வெண் வளைகோடு (Smoothened frequency curve)

(iv) குவிவு நிகழ்வெண் கோடுகள். (Ogive or Cumulative frequency curve)

இந்த அத்தியாயத்தில் முதல் இரண்டு வகை வரைபடங்களைப் பற்றி பார்ப்போம். மற்ற இரண்டும் மேல் வகுப்புகளில் அறிந்து கொள்வோம்.

11.2.1 நிகழ்வெண் செவ்வகம் (Histogram)

நிகழ்வெண் பரவலை விவரிக்க பயன்படும் பலவிதமான வரைபட முறைகளில் அதிகம் பேசப்படுவதும் பலராலும் பயன்படுத்தப்படுவதும் நிகழ்வெண் செவ்வகம் ஆகும். நிகழ்வெண் செவ்வகம் என்பது ஒரு தொடர்நிகழ்வெண் பரவலை இரு பரிமாண வரைபடமாக மாற்றிக் காட்டுவதாகும். நிகழ்வெண் செவ்வகத்தில், நிகழ்வெண் பரவலின் பிரிவு இடைவெளிகளை அகலமாகவும் அப்பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களை நீளமாகவும் கொண்டு செவ்வகங்கள் வரையப்படுகின்றன. இச்செவ்வகங்களின் பரப்பு அந்தந்த நிகழ்வெண்களுக்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்.

சமமான பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்டு நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரைய செய்ய வேண்டியன:

1. பிரிவுகளை x-அச்சிலும், நிகழ்வெண்களை y-அச்சிலும் குறிக்க வேண்டும்.
2. இரு அச்சுகளிலும் அலகுகள் ஒன்றாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை.
3. பிரிவுகள் விலக்கும் பிரிவுகளாக (Exclusive Intervals) இருத்தல் அவசியம். பிரிவுகள் உள்ளடக்கும் பிரிவுகளாக (Inclusive Intervals) இருந்தால் விலக்கும் பிரிவுகளாக மாற்றப்பட வேண்டும்.
4. பிரிவு இடைவெளிகளை அகலமாகவும், அப்பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களை நீளமாகவும் கொண்டு செவ்வகங்கள் வரையவேண்டும். இவ்வாறு ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மேலும் ஒரு செவ்வகம் அமைக்கவேண்டும்.

குறிப்புரை

நிகழ்வெண் செவ்வகமானது பட்டை விளக்கபடங்களை போன்று இருக்கும். எனினும்,நிகழ்வெண் செவ்வகம்,நிகழ்வெண் பரவலின் பிரிவு இடைவெளியையும் அதன் நிகழ்வெண்களையும் பயன்படுத்தி வரையப்படுகின்றன. ஆனால், பட்டை விளக்கபடங்களில், புள்ளி விவரங்களின் வகைகளையும், அந்தந்த வகைக்கான நிகழ்வெண்களையும் பயன்படுத்தி வரையப்படுகின்றன. தொடர்புள்ளி விவரங்களுக்கு மட்டுமே நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரைய முடியும்.

11.2.2 நிகழ்வெண் பலகோணம் (Frequency Polygon)

நிகழ்வெண் பலகோணத்தில் ஒவ்வொரு பிரிவின் நடுப்புள்ளியும், அப்பிரிவில் உள்ள புள்ளிவிவரங்களுக்கு பதிலாகப் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. பிரிவுகளின் நடுப்புள்ளிகளை x-அச்சிலும் நிகழ்வெண்களை y-அச்சிலும் எடுத்துக்கொண்டு, அதன்மூலம் குறிக்கப்படும் புள்ளிகளை இணைப்பதன் மூலம் நிகழ்வெண் பலகோணம் பெறப்படுகின்றது. நிகழ்வெண் பலகோணத்தின் இரண்டு கடைக்கோடுகள் பிரிவு இடைவெளியில் பாதி அளவு தூரத்தில், கடைப்புள்ளிகளுக்கு (Extreme points) வெளிப்புறம் x-அச்சினை தொடுமாறு அமைக்கப்பட வேண்டும்.

நிகழ்வெண் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம் இரண்டும் வரையப்பட வேண்டுமெனில், முதலில் நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரைந்து கொள்ளவேண்டும். பின்பு செவ்வகங்களின் மேற்பகுதிகளின் நடுப்புள்ளிகளை இணைப்பதன் மூலம் நிகழ்வெண் பலகோணத்தை வரைய முடியும்.

குறிப்புரை

நிகழ்வெண் பலகோணம் வரைய, நிகழ்வெண் செவ்வகம் ஒரு வழிகாட்டியாக முதலில் வரையப்படுகின்றது.

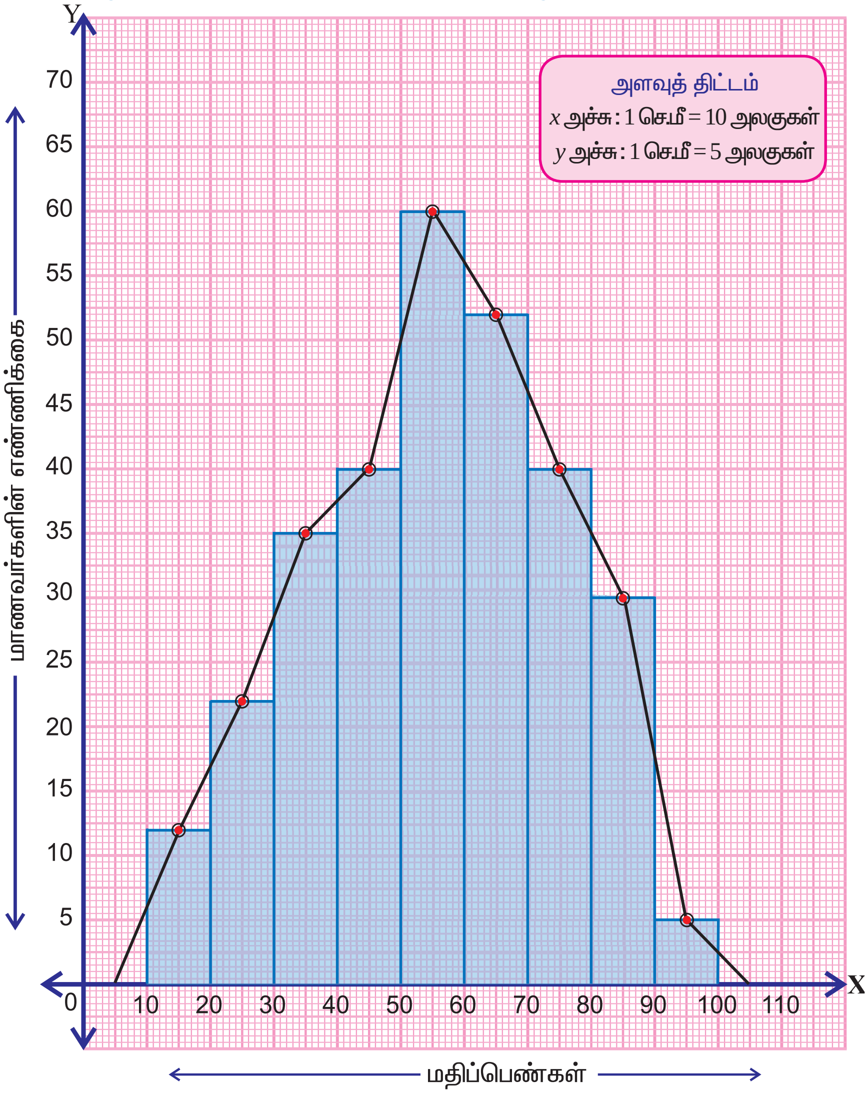
எடுத்துக்காட்டு 11.1

பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கான நிகழ்வெண் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம் வரைக.

மதிப்பெண்கள்	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	12	22	35	40	60	52	40	30	5

தீர்வு முதலில் நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரையப்பட்டு பின்பு, அடுத்தடுத்த செவ்வகங்களின் மேற்பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைப்பதால் நிகழ்வெண் பலகோணம் பெறப்படுகின்றது.

நிகழ்வெண் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம்



மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், பிரிவுகள் விலக்கும் பிரிவுகளாக உள்ளன. தற்போது உள்ளடக்கும் பிரிவுகளைக் கொண்ட ஓர் எடுத்துக்காட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 11.2

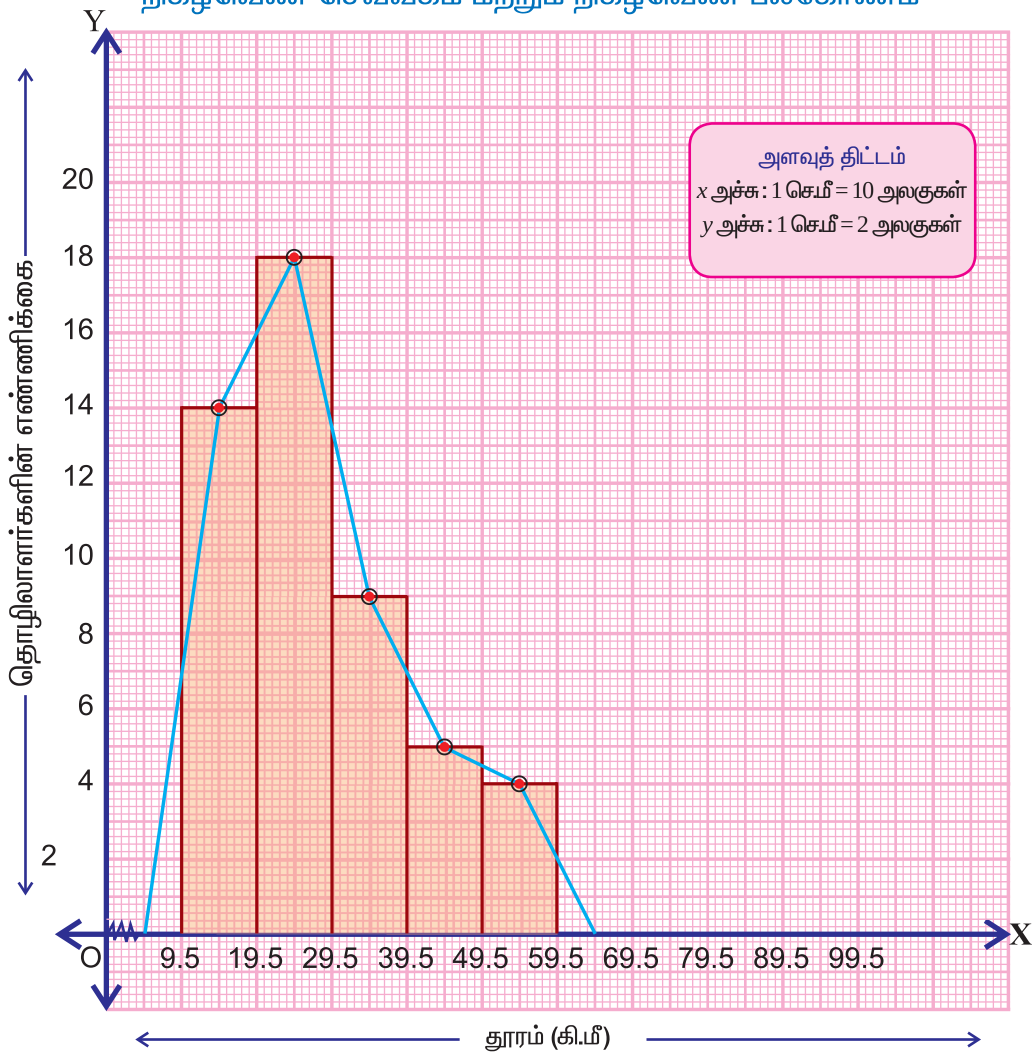
ஒரு சிறிய தொழிற்கூடத்தில் வேலை செய்யும் 50 தொழிலாளர்களிடம், அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் வேலைக்காக எத்தனை கிலோ மீட்டர் தொலைவு வந்து செல்கிறார்கள் என்ற கணக்கெடுப்பு நடத்தப்பட்டதில் கீழ்கண்ட விவரங்கள் பெறப்பட்டன. இவ்விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வெண் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம் அமைக்கவும்.

தூரம் (கி.மீ)	50-59	40-49	30-39	20-29	10-19
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	4	5	9	18	14

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பட்டியலின் பிரிவுகள் உள்ளடக்கும் பிரிவுகளாகவும், தொடர்ச்சியாக அமையாமலும் உள்ளன. அதனால், அப்பிரிவுகள் விலக்கும் பிரிவுகளாக மாற்றப்பட்டு, ஏறுவரிசையில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

தூரம் (கி. மீ)	9.5-19.5	19.5-29.5	29.5-39.5	39.5-49.5	49.5-59.5
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	14	18	9	5	4

நிகழ்வெண் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம்



குறிப்பு

(i) பிரிவுகள் தொடர் இடைவெளிகளாக மாற்றப்பட்டு பின்பு நிகழ்வெண் செவ்வகம் அமைக்கவேண்டும்.

(ii) x-அச்சில் அளவுகள் ஆதிப்புள்ளியில் இருந்து தொடங்காவிடில், ஆதிப்புள்ளிக்கு அருகில் குறுக்குக் கோடுகளால் (Zig-zag Curve) குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

11.2.3 மாறுபட்ட பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட நிகழ்வெண் பரவலின் நிகழ்வெண் செவ்வகம்

கீழ்க்காணும் நிகழ்வெண் பரவலை எடுத்துக் கொள்வோம்:

நேரம் (வினாடிகள்)	40-60	60-70	70-80	80-85	85-90	90-120
நிகழ்வெண்	100	60	90	70	60	90

இங்கு, பெரிய நிகழ்வெண்ணை பெற்றுள்ளதால் பிரிவு இடைவெளி 40-60 அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது போல் தோன்றுகிறது. ஆனால், நிகழ்வெண் 100-க்கான பிரிவுஇடைவெளியின் அளவு 20 ஆகும். அதே சமயம் பிரிவுஇடைவெளி 80-85 க்கான நிகழ்வெண் 70 ஆக இருந்தாலும் அதன் அளவு 5 வினாடிகள் மட்டுமே. எனவே, நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரையும் முன்பு ஒவ்வொரு பிரிவுஇடைவெளியின் அளவையும் (நீளத்தையும்) கணக்கில் கொள்ள வேண்டும். அவ்வாறு இல்லையெனில் அந்நிகழ்வெண் செவ்வகம், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை சரியான முறையில் விவரிப்பதாக அமையாது. இதனை சரிசெய்ய, பிரிவுஇடைவெளிகள் மற்றும் அதன் நிகழ்வெண்களைப் பொறுத்து, செவ்வகங்களின் நீளங்கள் மாற்றியமைக்கப்பட வேண்டும்.

செவ்வகத்தின் மாற்றியமைக்கப்பட்ட நீளங்கள் நிகழ்வெண் அடர்த்தியை காண்பதன் மூலம் கணக்கிடப்படுகின்றது.

நிகழ்வெண் அடர்த்தி : நிகழ்வெண்களை அதன் பிரிவுஇடைவெளியின் அளவைக் கொண்டு வகுக்கும் போது நிகழ்வெண் அடர்த்தி கிடைக்கின்றது.

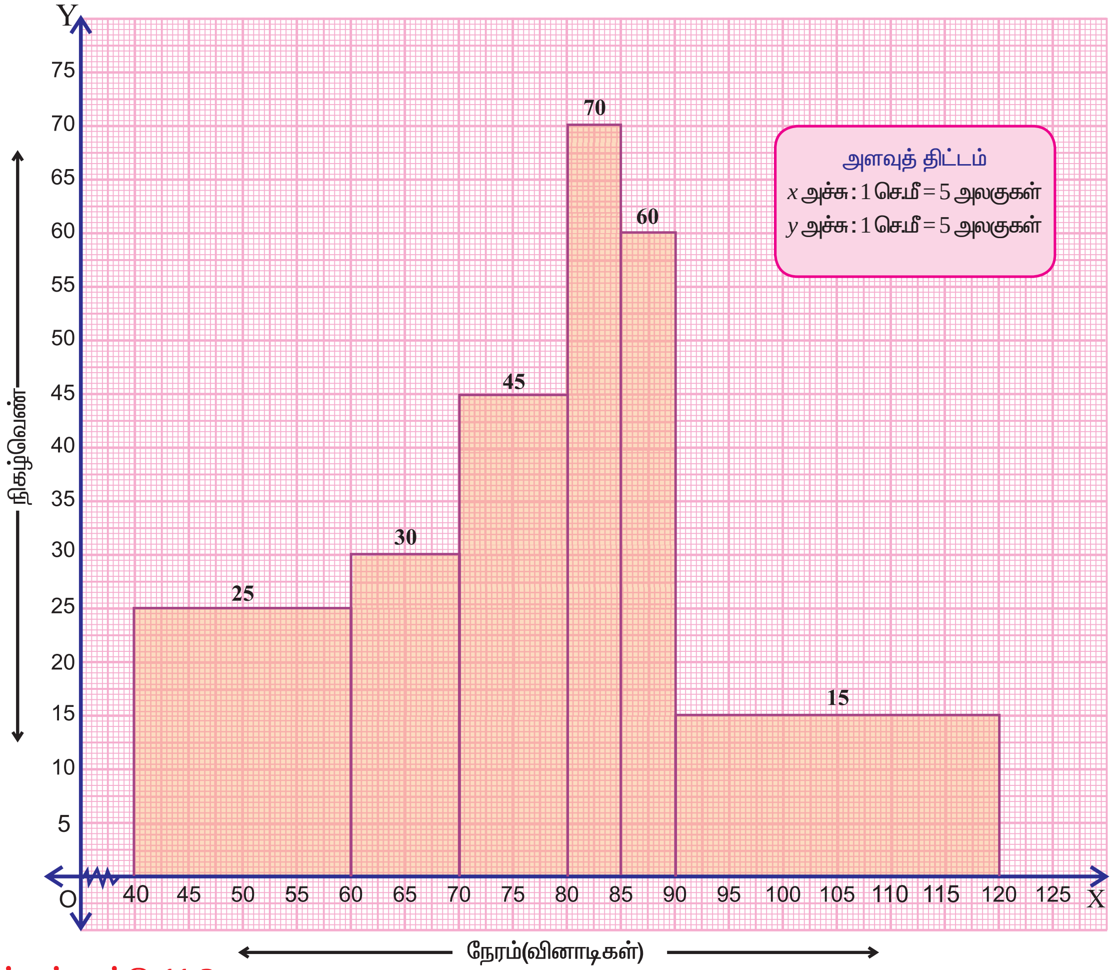
முக்கிய கருத்து

நிகழ்வெண் அடர்த்தி = நிகழ்வெண் $\div$ பிரிவுஇடைவெளியின் அளவு

கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலில், C என்பது மிகச்சிறிய பிரிவு இடைவெளியின் நீளம் எனக்கொண்டால், செவ்வகத்தின் மாற்றியமைக்கப்பட்ட நீளம் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடப்படும்.

$$\text{மாற்றியமைக்கப்பட்ட நீளம்} = \frac{\text{நிகழ்வெண்}}{\text{அதன் பிரிவு இடைவெளியின் அளவு}} \times C$$

நேரம் (வினாடிகள்)	40-60	60-70	70-80	80-85	85-90	90-120
நிகழ்வெண்	100	60	90	70	60	90
பிரிவு இடைவெளியின் அளவு	20	10	10	5	5	30
செவ்வகத்தின் நீளம்	$\frac{100}{20}\times 5 = 25$	$\frac{60}{10}\times 5 = 30$	$\frac{90}{10}\times 5 = 45$	$\frac{70}{5}\times 5 = 70$	$\frac{60}{5}\times 5 = 60$	$\frac{90}{30}\times 5 = 15$



எடுத்துக்காட்டு 11.3

பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கான நிகழ்வெண் செவ்வகத்தை வரையவும்.

மதிப்பெண்	0-10	10-20	20-40	40-50	50-60	60-70	70-90	90-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	6	14	16	14	8	16	5

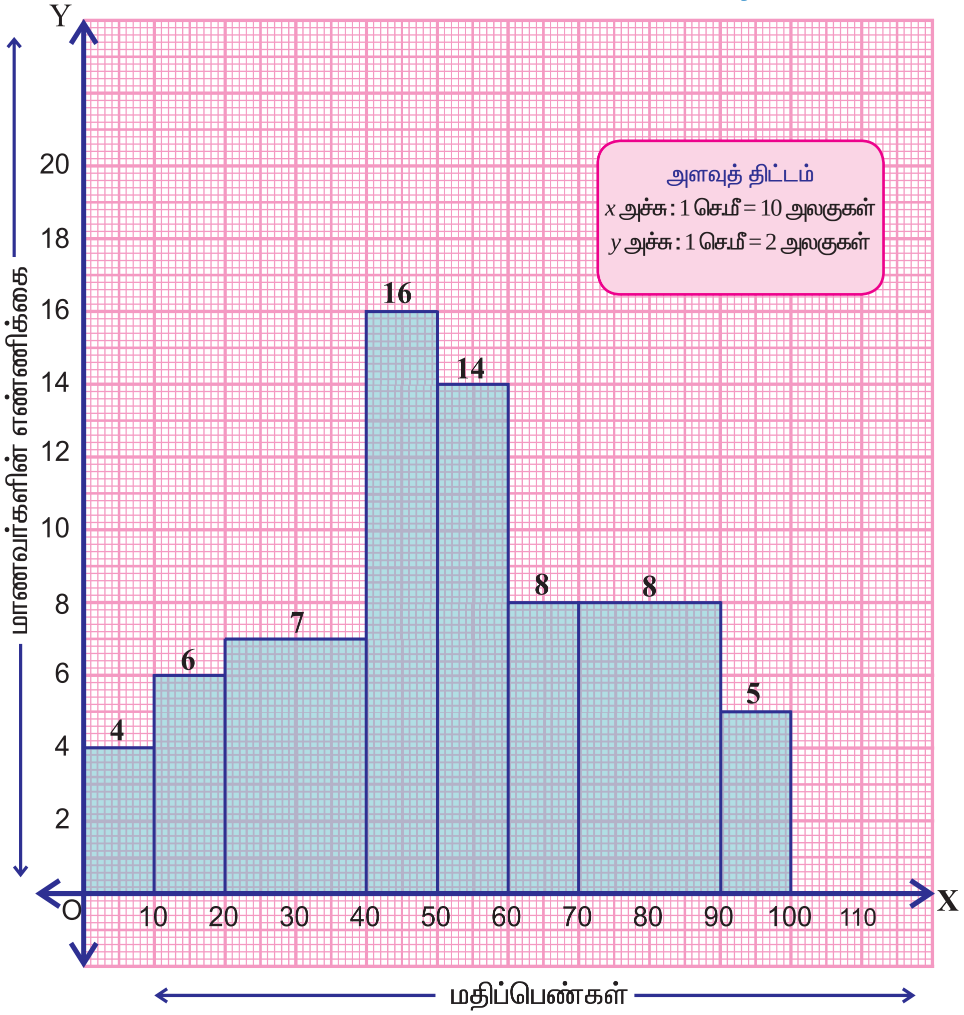
தீர்வு இப்புள்ளி விவரத்தின் மிகச்சிறிய பிரிவு இடைவெளியின் நீளம் 10. மாறுபட்ட பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட இப்புள்ளி விவரத்திற்கு நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரைய செவ்வகத்தின் நீளங்கள் மாற்றியமைக்கப்பட வேண்டும்.

$$\text{நிகழ்வெண் அடர்த்தி} = \frac{\text{நிகழ்வெண்}}{\text{நிகழ்வெண்ணின் பிரிவு இடைவெளியின் நீளம்}}.$$

செவ்வகத்தின் நீளம் = நிகழ்வெண் அடர்த்தி $\times 10$

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-40	40-50	50-60	60-70	70-90	90-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	6	14	16	14	8	16	5
பிரிவு இடை–வெளியின் நீளம்	10	10	20	10	10	10	20	10
செவ்வகத்தின் நீளம்	$\frac{4}{10}\times 10 = 4$	$\frac{6}{10}\times 10 = 6$	$\frac{14}{20}\times 10 = 7$	$\frac{16}{10}\times 10 = 16$	$\frac{14}{10}\times 10 = 14$	$\frac{8}{10}\times 10 = 8$	$\frac{16}{20}\times 10 = 8$	$\frac{5}{10}\times 10 = 5$

மாறுபட்ட பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட நிகழ்வெண் செவ்வகம்



பயிற்சி 11.1

1. பின்வரும் பரவலுக்கு நிகழ்வெண் செவ்வகத்தை வரைக.

பிரிவுகள்	0-10	10-30	30-45	45-50	50-60
நிகழ்வெண்	8	28	18	6	10

2. ஒரு தொழிற்சாலையில் பணிபுரியும் தொழிலாளர்களின் மாதச்சம்பளம் பற்றிய கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரைக.

மாதச் சம்பளம் (₹)	2000 - 2200	2200 - 2400	2400 - 2800	2800 - 3000	3000 - 3200	3200 - 3600
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	25	30	50	60	15	10

3. பின்வரும் பரவலில் 48 பொருட்களின் அடர்த்தி கிராமில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இப்புள்ளி விவரங்களை விளக்குவதற்கு ஒரு நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரையவும்.

அடர்த்தி (கிராம்)	10-19	20-24	25-34	35-49	50-54
பொருட்களின் எண்ணிக்கை	6	4	12	18	8

4. பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரைக.

பிரிவு இடைவெளி	10-14	14-20	20-32	32-52	52-80
நிகழ்வெண்	5	6	9	25	21

5. ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் மருத்துவமனையில் சிகிச்சை பெற்ற 360 நோயாளிகளின் வயது (வருடங்களில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வயது (வருடங்களில்)	10-20	20-30	30-50	50-60	60-70
நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	80	50	80	120	30

மேற்கண்ட புள்ளி விவரத்திற்கான நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரைக.

மையப்போக்கு அளவைகள் (Measures of Central Tendency)

புள்ளியியல் ஆய்வின் முக்கிய நோக்கங்களில் ஒன்று கொடுக்கப்பட்ட மொத்த விவரத்தின் தன்மைகள் மற்றும் சிறப்பியல்புகளை ஒரு குறிப்பிட்ட தனி எண்ணால் குறிப்பதாகும். அத்தகைய எண் அப்புள்ளி விவரத்தின் மைய மதிப்பு அளவு அல்லது மையப்போக்கு அளவு என்று அழைக்கப்படுகின்றது. கூட்டு சராசரி, இடைநிலைஅளவு, முகடு ஆகியன பொதுவாக அதிகமாகப் பயன்படும் மையப்போக்கு அளவைகள் ஆகும்

11.3 சராசரி (Mean)

11.3.1 கூட்டுச் சராசரி – வகைப்படுத்தப்படாத புள்ளி விவரம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையை மொத்த மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்க கிடைக்கும் எண் அந்த மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean) ஆகும். கூட்டுச் சராசரி $\overline{x}$ என குறிக்கப்படும்.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \text{ அல்லது } \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ அல்லது } \overline{x} = \frac{\sum x}{n}$$

குறிப்புரை $\overline{x} = \frac{\sum x}{n} \implies n\overline{x} = \sum x$ அதாவது,

மொத்த மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $\times$ சராசரி = மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

சராசரி 4 அடி ஆழம் உள்ள ஆற்றை நீச்சல் தெரியாத 5 அடி உயரம் உள்ள மனிதன் கடந்து எதிர் கரைக்கு செல்ல முடியுமா?

நினைவுக்கூர்ந்து விடையளி

எடுத்துக்காட்டு 11.4

ஒரு மாணவன் முழு ஆண்டுத் தேர்வில் 5 பாடங்களில் எடுத்த மதிப்பெண்கள் 72, 73, 75, 82, 74 எனில், சராசரி மதிப்பெண் காண்க.

தீர்வு ஐந்து பாடங்களில் வாங்கிய மதிப்பெண்கள் 72, 73, 75, 82, 74. இங்கு $n = 5$

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{72+73+75+82+74}{5} = \frac{376}{5} = 75.2$$

எனவே, சராசரி $= 75.2$

எடுத்துக்காட்டு 11.5

5 எண்களின் சராசரி 32. அவ்வெண்களில் ஒன்றை நீக்கும்போது, சராசரியில் 4 குறைந்தால் நீக்கப்பட்ட எண்ணை காணவும்.

தீர்வு

5 எண்களின் சராசரி $= 32.$

5 எண்களின் கூட்டுத்தொகை $= 32 \times 5 = 160$ $\qquad (\because n\overline{x} = \sum x)$

4 எண்களின் சராசரி $= 32 - 4 = 28$

4 எண்களின் கூட்டுத்தொகை $= 28 \times 4 = 112$

தவிர்க்கப்பட்ட எண் = (5 எண்களின் கூட்டுத் தொகை) − (4 எண்களின் கூட்டுத் தொகை)

$= 160 - 112 = 48$

11.3.2 சராசரி – வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவல்

$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ ஆகிய உறுப்புகளின் நிகழ்வெண்கள் முறையே $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$ எனில், சராசரி

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

மேற்கண்ட சூத்திரம் $\overline{x} = \dfrac{\sum fx}{\sum f}$ என்றும் எழுதப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.6

பின்வரும் புள்ளி விவரத்திற்கான சராசரியைக் காண்க.

x	5	10	15	20	25
f	3	10	25	7	5

தீர்வு

x	f	fx
5	3	15
10	10	100
15	25	375
20	7	140
25	5	125
	$\sum f = 50$	$\sum fx = 755$

சராசரி $= \dfrac{\sum fx}{\sum f} = \dfrac{755}{50} = 15.1$

சராசரி $= 15.1$

11.3.3 சராசரி – வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல்

பின்வரும் நிகழ்வெண் பட்டியலை எடுத்துக்கொள்வோம்.

பிரிவு இடைவெளி (மதிப்பெண்கள்)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
நிகழ்வெண் (மாணவர்களின் எண்ணிக்கை)	3	4	3	7	8

பட்டியலின் முதல் பிரிவிலிருந்து 3 மாணவர்கள் 10 மதிப்பெண்களுக்கு குறைவாக பெற்றிருப்பதாகத் தெரிகின்றது. ஆனால் அது அம்மூவரும் தனித்தனியாக வாங்கிய மதிப்பெண்களைக் பற்றி ஏதும் குறிப்பிடப்படவில்லை. தற்போது ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் பிரதிநிதியாக ஒரு மதிப்பு தேவைப்படுகின்றது. பிரிவு 0-10 க்கான அந்த மதிப்பு 5 எனக் கொள்வோம். இது அந்த பிரிவின் மையப்புள்ளியாகும். அதாவது, ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியில் உள்ள உறுப்புகளும் அப்பிரிவின் மையப்புள்ளிக்கு அருகில் உள்ளதாக எடுத்துக்கொள்வோம். இதன்படி ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளி, அப்பிரிவில் உள்ள உறுப்புக்களின் பிரதிநிதியாக ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகின்றது.

மையப்புள்ளி $= \dfrac{UCL + LCL}{2}$. இங்கு UCL என்பது பிரிவின் மேல் எல்லை (Upper Class Limit) LCL என்பது பிரிவின் கீழ் எல்லை (Lower Class Limit)ஆகும்.

பிரிவின் மையப்புள்ளியை x என்று குறித்து, மேற்கூறிய சூத்திரத்தின் மூலம் x கணக்கிடப்படுகின்றது. தற்போது

$\bar{x} = \dfrac{\sum fx}{\sum f}$ ஐ பயன்படுத்தி கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் சராசரியைக் காணலாம்.

தொகுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் சராசரியைக் கீழ்க்காணும் முறைகளில் ஏதேனும் ஒரு முறையைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம்:

(i) நேரடி முறை

(ii) ஊகச் சராசரி முறை

(iii) படிவிலக்க முறை

நேரடி முறை (Direct method)

நேரடி முறையைப் பயன்படுத்தும் போது, சராசரி காண்பதற்கான சூத்திரம் $\bar{x} = \dfrac{\sum fx}{\sum f}$,

இங்கு x என்பது பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளி மற்றும் f என்பது அந்த பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண் ஆகும்.

நேரடி முறையில் சராசரி காண்பதற்கான படிகள் :

(i) ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளியைக் கண்டுபிடித்து அதை x எனக் குறிக்க.

(ii) இம்மையப்புள்ளிகளை அதற்குரிய பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண்ணோடு பெருக்கி, அப்பெருக்கல் பலனின் கூடுதல் $\sum fx$ ஐக் காணவும்.

(iii) எல்லா நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் $\sum f$ ஐக் காணவும். $\sum fx$ ஐ $\sum f$ ஆல் வகுக்க, சராசரி கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.7

கீழ்க்காணும் விவரத்திற்கு நேரடி முறை மூலம் சராசரியைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	10	25	30	20	10

தீர்வு

மதிப்பெண்கள்	மையப்புள்ளி (x)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f)	fx
0-10	5	5	25
10-20	15	10	150
20-30	25	25	625
30-40	35	30	1050
40-50	45	20	900
50-60	55	10	550
		$\sum f = 100$	$\sum fx = 3300$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{3300}{100} = 33$$

எனவே, சராசரி = 33

ஊகச் சராசரி முறை (Assumed mean method)

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தின் ஊகச் சராசரி A எனில், “விலக்கம்” $d = x - A$ என்பது ஊகச் சராசரி A-ல் இருந்து பிரிவின் மையப்புள்ளி x-ன் விலக்கமாகும். ஊகச் சராசரி முறையில், சராசரி காண்பதற்கான சூத்திரம்

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}.$$

ஊகச் சராசரி முறையில் சராசரி காண்பதற்கான படிகள் :

(i) ஊகச் சராசரியை A என்போம்.

(ii) ஒவ்வொரு பிரிவின் மையப்புள்ளி x-ஐக் காண்க.

(iii) ஒவ்வொரு x-க்கும் விலக்கம் $d = x - A$ ஐக் காண்க.

(iv) விலக்கத்தினை அந்தந்த பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண்ணோடு பெருக்கி, பின்பு fd-ன் கூடுதல் $\sum fd$ ஐக் காண்க.

(v) $\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$ என்ற சூத்திரத்தின் வாயிலாய் சராசரியைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 11.8

எடுத்துக்காட்டு 11.7-ல் உள்ள விவரத்திற்கு, ஊகச் சராசரி முறையில், சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு ஊகச் சராசரி A = 35 என்க.

மதிப்பெண்கள்	மையப்புள்ளி(x)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f)	$d = x - 35$	fd
0-10	5	5	–30	–150
10-20	15	10	–20	–200
20-30	25	25	–10	–250
30-40	35	30	0	0
40-50	45	20	10	200
50-60	55	10	20	200
		$\sum f = 100$		$\sum fd = -200$

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$$

$$= 35 + \left(\frac{-200}{100}\right) = 35 - 2 = 33$$

படிவிலக்க முறை (Step deviation method)

புள்ளி விவரத்தின் பிரிவு இடைவெளிகளின் நீளம் சமமாக இருந்தால், படிவிலக்க முறையில் சராசரி காண்பது எளிது. இம்முறையில், கணக்கிடுவதை எளிமைப் படுத்துவதற்காக, விலக்கம் $d = x - A$ ஐ இடைவெளியின் நீளம் c ஆல் வகுக்கப்படுகின்றது. பிறகு,

$\overline{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f} \times c$ என்ற சூத்திரத்தின் மூலம் சராசரி காணப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 11.7-ல் உள்ள புள்ளிவிவரத்திற்கு, படிவிலக்க முறையில் சராசரியைக் காணவும்.

தீர்வு

ஊகச் சராசரி $A = 35$ என்க. இங்கு இடைவெளி நீளம் $c = 10$.

மதிப்பெண்கள்	மையப்புள்ளி (x)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை(f)	$d = \frac{x - 35}{10}$	fd
0-10	5	5	–3	–15
10-20	15	10	–2	–20
20-30	25	25	–1	–25
30-40	35	30	0	0
40-50	45	20	1	20
50-60	55	10	2	20
		$\sum f = 100$		$\sum fd = -20$

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f} \times c \quad = 35 - \left(\frac{20}{100} \times 10\right) = 35 - 2 = 33$$

$\therefore$ சராசரி $= 33$

11.3.4 சராசரியின் பண்புகள்

பண்பு 1

சராசரியிலிருந்து, அனைத்து உறுப்புகளின் விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் ஆகும்.

அதாவது, புள்ளிவிவரத்தின் உறுப்புகள் $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ எனில், $(x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + \ldots + (x_n - \overline{x}) = 0$

உதாரணமாக, 6, 8, 9, 14, 13 என்ற விவரத்தின் சராசரி 10. 10-லிருந்து ஒவ்வொரு விவரத்தின் விலங்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$(6-10) + (8-10) + (9-10) + (14-10) + (13-10)$$

$$= -4 + (-2) + (-1) + 4 + 3 = -7 + 7 = 0$$

எனவே, சராசரியிலிருந்து, அனைத்து உறுப்புகளின் விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் என அறியப்படுகின்றது.

பண்பு 2

ஒரு புள்ளிவிவரத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணுடனும், ஒரு குறிப்பிட்ட மாறாத எண் k ஐ அதிகரிப்பதனால் கிடைக்கும் புதிய புள்ளிவிவரத்தின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பும் அதே மாறிலி k அளவு அதிகரிக்கும்.

அதாவது, $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ என்ற எண்களின் சராசரி $\overline{x}$ எனில், $x_1 + k, x_2 + k, x_3 + k, \ldots, x_n + k$ என்ற எண்களின் சராசரி $\overline{x} + k$ ஆகும்.

உதாரணமாக, x_1, x_2, x_3, x_4 மற்றும் x_5 என்ற எண்களின் சராசரி 20 என்க.

$$\text{எனவே, } \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 20$$

ஒவ்வொரு எண்ணோடும் 5 ஐக் கூட்டினால் கிடைக்கும் புதிய எண்கள்

$x_1 + 5, x_2 + 5, x_3 + 5, x_4 + 5$ மற்றும் $x_5 + 5$ ஆகும்.

இதன் சராசரி

$$\frac{x_1 + 5 + x_2 + 5 + x_3 + 5 + x_4 + 5 + x_5 + 5}{5}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 25}{5}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} + \frac{25}{5} = 20 + 5$$

புதிய விவரத்தின் சராசரி பழைய விவரத்தின் சராசரியை விட 5 அதிகரித்துள்ளதைக் காண்கிறோம்.

பண்பு 3

ஒரு புள்ளிவிவரத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணிலிருந்தும், ஒரு குறிப்பிட்ட மாறாத எண் k ஐக் குறைப்பதனால் கிடைக்கும் புதிய புள்ளிவிவரத்தின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பும் அதே மாறிலி k அளவு குறையும். அதாவது,

$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ என்ற எண்களின் சராசரி $\overline{x}$ எனில்,

$x_1 - k, x_2 - k, x_3 - k, x_4 - k, \ldots, x_n - k$ ஆகிய எண்களின் சராசரி $\overline{x} - k$ ஆகும்.

உதாரணமாக, x_1, x_2, x_3, x_4 மற்றும் x_5 ஆகிய எண்களின் சராசரி $\overline{x}$ எனில்,

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

ஒவ்வொரு எண்ணிலிருந்தும் 5-ஐ கழித்தால், கிடைக்கும் புதிய எண்கள்

$$x_1 - 5, x_2 - 5, x_3 - 5, x_4 - 5, x_5 - 5.$$

$$\text{புதிய சராசரி} = \frac{x_1 - 5 + x_2 - 5 + x_3 - 5 + x_4 - 5 + x_5 - 5}{5}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} - \frac{25}{5}$$

$$= 20 - 5$$

புதிய விவரத்தின் சராசரி பழைய விவரத்தின் சராசரியை விட 5 குறைந்துள்ளதைக் காண்கிறோம்.

பண்பு 4

ஒரு புள்ளிவிவரத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணுடனும், ஒரு குறிப்பிட்ட மாறாத எண் $k, (k \neq 0)$ ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் புதிய புள்ளிவிவரத்தின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பும் அதே மாறிலி k ஆல் பெருக்கிக் கிடைக்கிறது. அதாவது,

$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ ஆகிய எண்களின் சராசரி $\overline{x}$ எனில், $kx_1, kx_2, kx_3, \ldots, kx_n$ ஆகிய எண்களின் சராசரி $k\overline{x}$ ஆகும்.

உதாரணம், x_1, x_2, x_3, x_4 மற்றும் x_5 ஆகிய எண்களின் சராசரி 20 எனில்,

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 20$$

ஒவ்வொரு எண்ணையும் 5-ஆல் பெருக்கினால், கிடைக்கும் எண்கள் $5x_1, 5x_2, 5x_3, 5x_4, 5x_5$.

$$\text{புதிய சராசரி} = \frac{5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 5x_5}{5}$$

$$= \frac{5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)}{5} = 5\,(20)$$

புதிய விவரத்தின் சராசரி பழைய விவரத்தின் சராசரியை 5 ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கிறது.

பண்பு 5

ஒரு புள்ளிவிவரத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணுடனும், ஒரு குறிப்பிட்ட மாறாத எண் $k, (k \neq 0)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் புதிய புள்ளிவிவரத்தின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பும் அதே மாறிலி k ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கிறது. அதாவது,

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_n$ ஆகிய எண்களின் சராசரி $\overline{x}$ எனில், $\frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k}, \frac{x_3}{k}, \ldots, \frac{x_n}{k}$ ஆகிய எண்களின் சராசரி $\frac{\overline{x}}{k}$ ஆகும்.

உதாரணமாக, x_1, x_2, x_3, x_4 மற்றும் x_5 ஆகிய எண்களின் சராசரி 20 எனில்,

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 20$$

ஒவ்வொரு எண்ணையும் 5 ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் எண்கள் $y_1 = \frac{x_1}{5}$, $y_2 = \frac{x_2}{5}$, $y_3 = \frac{x_3}{5}$, $y_4 = \frac{x_4}{5}$ மற்றும் $y_5 = \frac{x_5}{5}$.

$$\text{புதிய சராசரி } \overline{y} = \frac{\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{5} + \frac{x_4}{5} + \frac{x_5}{5}}{5}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}\right) = \frac{1}{5}(20)$$

$$= \frac{1}{5}\,(\overline{x})$$

புதிய விவரத்தின் சராசரி பழைய விவரத்தின் சராசரியை 5 ஆல் வகுக்க கிடைத்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு **11.9**

100 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் சராசரி 40 என்று கணக்கிடப்பட்டது. பின்பு, 53 என்ற மதிப்பெண் 83 என்று தவறுதலாக எடுக்கப்பட்டது தெரியவந்தது. சரியான மதிப்பெண்களைக் கொண்டு சரியான சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $n = 100$, சராசரி மதிப்பெண் $\overline{x} = 40$.

$$\text{தவறான } \sum x = \overline{x} \times n = 40 \times 100 = 4000$$

சரியான $\sum x$ = தவறான $\sum x$ − தவறான மதிப்பெண் + சரியான மதிப்பெண்.

$$= 4000 - 83 + 53 = 3970$$

$$\text{சரியான சராசரி } \overline{x} = \frac{\text{சரியான } \sum x}{n}$$

$$= \frac{3970}{100} = 39.7$$

எனவே $\overline{x}$-ன் சராசரி மதிப்பு 39.7 ஆகும்.

பயிற்சி **11.2**

1. ஒரு கடைக்காரர் தொடர்ந்து 6 நாட்களில் விற்ற பைகளின் எண்ணிக்கை கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. விற்கப்பட்ட பைகளின் சராசரி எண்ணிக்கையைக் காண்க.

நாட்கள்	திங்கள்	செவ்வாய்	புதன்	வியாழன்	வெள்ளி	சனி
பைகளின் எண்ணிக்கை	55	32	30	25	10	20

2. ஒரு பகுதியில் உள்ள 10 குடும்பங்களில் உள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை 2, 4, 3, 4, 1, 6, 4, 5, x, 5 ஆகும். குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையின் சராசரி 4 எனில், x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. 20 எண்களின் சராசரி **59** என்க. ஒவ்வொரு எண்ணுடனும் 3 ஐக் கூட்டினால், கிடைக்கும் எண்களின் சராசரி என்ன?

4. 15 எண்களின் சராசரி 44 என்க. ஒவ்வொரு எண்ணிலிருந்து 7 ஐக் கழித்தால், கிடைக்கும் எண்களின் சராசரி என்ன?

5. 12 எண்களின் சராசரி 48 என்க. ஒவ்வொரு எண்ணையும் 4 ஆல் பெருக்கினால், கிடைக்கும் எண்களின் சராசரி என்ன?

6. 16 எண்களின் சராசரி 54 என்க. ஒவ்வொரு எண்ணையும் 9 ஆல் வகுத்தால், கிடைக்கும் எண்களின் சராசரி என்ன?

7. 6 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவின் சராசரி எடை 48 கிலோ ஆகும். அவற்றில் 5 மாணவர்களின் எடை 50 கிலோ, 45 கிலோ, 50 கிலோ, 42 கிலோ மற்றும் 40 கிலோ எனில், ஆறாவது மாணவனின் எடையைக் காண்க.

8. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள 40 மாணவர்களின் எடை பற்றிய புள்ளிவிவரத்திற்கு, ஊகச் சராசரி வழிமுறையில், சராசரி எடையைக் கணக்கிடவும்.

எடை (கிலோகிராம்)	50	52	53	55	57
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	10	15	5	6	4

9. 75 எண்களைக் கொண்ட ஒரு தொகுதியின் சராசரி 27 என கணக்கிடப்பட்டது. பின்பு, 53 என்ற எண் தவறுதலாக 43 என்று படிக்கப்பட்டது கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. அத்தொகுதியின் சரியான சராசரியைக் காணவும்.

10. 100 எண்களின் சராசரி 40 என்று காணப்பட்டது. கணக்கிடும் நேரத்தில் 3 மற்றும் 72 என்ற இரு விவரங்கள் 30 மற்றும் 27 என தவறுதலாக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது தெரியவந்தது எனில், சரியான சராசரியைக் காண்க.

11. ஒரு மாதத்தில் மருத்துவமனைக்கு வந்து சென்ற நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை பற்றிய புள்ளிவிவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு நாளில் மருத்துவமனைக்கு வந்த நோயாளிகளின் சராசரி எண்ணிக்கையைக் காண்க.

நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
நாட்களின் எண்ணிக்கை	2	6	9	7	4	2

12. படிவிலக்க வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்கான சராசரியைக் காண்க.

மதிப்பெண்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	8	15	22	20	10	5

13. கீழ்க்கண்ட புள்ளிவிவரம், நோயாளிகளைப் பற்றிய ஓர் கணக்கெடுப்பில் இருந்து பெறப்பட்டது. இதன் சராசரியைக் காண்க.

வயது (ஆண்டுகள்)	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	1	0	1	10	13

14. ஆண்டு இறுதித் தேர்வில் **40** மாணவர்கள் வாங்கிய மொத்த மதிப்பெண்கள் பற்றிய விவரம் கீழே தரப்பட்டடுள்ளது.

மதிப்பெண்கள்	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400 - 450	450 - 500
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	2	3	12	10	4	6	3

படிவிலக்க வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி மேற்கண்ட புள்ளிவிவரத்தின் சராசரியைக் காண்க.

15. கீழ்க்காணும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடவும்.

பிரிவு இடைவெளி	0 - 19	20 - 39	40 - 59	60 - 79	80 - 99
நிகழ்வெண்	3	4	15	14	4

11.4 இடைநிலை அளவு (Median)

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரத்தின் உறுப்புகளை ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதும் போது, வரிசையில் நடுநிலையாக அமைந்து இருக்கும் உறுப்பின் மதிப்பைப் புள்ளிவிவரத்தின் இடைநிலை அளவு என்போம்.

11.4.1 இடைநிலை அளவு – வகைப்படுத்தப்படாத புள்ளி விவரம்

இடைநிலை அளவு காண்பதற்கான படிகள் :

(i) கொடுக்கப்பட்ட n எண்களை ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதவும்.

(ii) n-ஒரு ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருந்தால், $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு இடைநிலை அளவாகும்.

(iii) n-ஒரு இரட்டைப்படை எண்ணாக இருந்தால் இடையில் உள்ள இரண்டு உறுப்புக்களின் சராசரி இடைநிலை அளவாகும். அதாவது,

இடைநிலை அளவு = $\left(\frac{n}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு மற்றும் $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் சராசரி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.10

கீழ்க்காணும் எண்களின் இடைநிலை அளவு காண்க

(i) 24, 22, 23, 14, 15, 7, 21 (ii) 17, 15, 9, 13, 21, 32, 42, 7, 12, 10.

தீர்வு

(i) கொடுக்கப்பட்ட எண்களை ஏறு வரிசையில் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்.

7, 14, 15, 21, 22, 23, 24

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = 7$

இடைநிலை அளவு $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு (*n* ஒரு ஒற்றைப்படை எண்)

$= \left(\frac{7+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= 4$ ஆவது உறுப்பு $= 21$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட எண்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு ஏறு வரிசையில் அமைப்போம்.

7, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 21, 32, 42.

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = 10$ (*n* ஒரு இரட்டைப்படை எண்)

$\left(\frac{n}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு மற்றும் $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் சராசரியே இடைநிலை அளவாகும்.

$\left(\frac{n}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு $= \left(\frac{10}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= 5$ ஆவது உறுப்பு

$= 13$

$\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ஆவது உறுப்பு $= \left(\frac{10}{2}+1\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= 6$ ஆவது உறுப்பு

$= 15.$

எனவே, இடைநிலை அளவு $= \frac{13+15}{2} = 14$

11.4.2 இடைநிலை அளவு – வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவல்

இடைநிலை அளவு காண்பதற்கான படிகள் :

(i) கொடுக்கப்பட்ட *n* எண்களை ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதவும்.

(ii) குவிவு நிகழ்வெண் பரவலைக் கணக்கிடவும்.

(iii) *n* ஒரு ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருந்தால், $\frac{n+1}{2}$ ஆவது உறுப்பே இடைநிலை அளவாகும்.

(iv) *n* ஒரு இரட்டைப்படை எண்ணாக இருந்தால் இடைநிலை அளவு

$$= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{வது உறுப்பு} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{வது உறுப்பு}}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 11.11

கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்திற்கான இடைநிலை அளவுக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	20	9	25	50	40	80
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	6	4	16	7	8	2

தீர்வு முதலில் மதிப்பெண்களை ஏறுவரிசையில் எழுதுவோம்.

மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண் f	குவிவு நிகழ்வெண் cf
9	4	4
20	6	10
25	16	26
40	8	34
50	7	41
80	2	43
	n = 43	

நிகழ்வெண்களின் மொத்தம் n = 43(ஒரு ஒற்றைப் படை எண்)

இடைநிலை அளவு $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= \left(\frac{43+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

= 22 ஆவது உறுப்பு.

பட்டியலில் கண்டுள்ளபடி, 11-ல் இருந்து 26 வரை உள்ள உறுப்புகள் 25 ஆகும் .

எனவே, 22-வது உறுப்பு 25 ஆகும்.

$\therefore$ இடைநிலை அளவு = 25.

எடுத்துக்காட்டு 11.12

கீழ்காணும் பரவலின் இடைநிலை அளவுக் காண்க.

மதிப்பு	1	2	3	4	5	6
நிகழ்வெண்	1	3	2	4	8	2

தீர்வு

மதிப்பு	நிகழ்வெண் f	குவிவு நிகழ்வெண் cf
1	1	1
2	3	4
3	2	6
4	4	10
5	8	18
6	2	20
	n = 20	

n = 20 (இரட்டை படை எண்)

n ஒரு இரட்டைப்படை எண்ணாக இருந்தால் இடைநிலை அளவு

$$= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{வது உறுப்பு} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{வது உறுப்பு}}{2}$$

$$= \frac{10\text{ஆவது உறுப்பு} + 11\text{ஆவது உறுப்பு}}{2}$$

$\therefore$ இடைநிலை அளவு $= \dfrac{4+5}{2} = \dfrac{9}{2} = 4.5$

11.4.3 இடைநிலை அளவு – வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல்

வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலை அளவின் கணக்கீடு கீழ்க்காணும் படிகளைக் கொண்டது.

(i) குவிவு நிகழ்வெண்களைக் கணக்கிடவும்.

(ii) N என்பது நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் எனில், $\dfrac{N}{2}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க

(iii) குவிவு நிகழ்வெண் $\dfrac{N}{2}$ ஐ உறுப்பாகக் கொண்டிருக்கும் பிரிவு இடைவெளி, இடைநிலை அளவு பிரிவு என்று அழைக்கப்படும்.

(iv) இடைநிலை அளவு $= l + \dfrac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$ என்ற சூத்திரத்தை பயன்படுத்திக் காணலாம்.

l = இடைநிலை அளவு பிரிவின் கீழ்எல்லை f = இடைநிலை அளவு பிரிவின் நிகழ்வெண்

c = இடைநிலை அளவு பிரிவின் நீளம் N = நிகழ்வெண்களின் கூடுதல்

m = இடைநிலை அளவு பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண்ணுக்கு உடனடியான முந்தைய குவிவு நிகழ்வெண்

எடுத்துக்காட்டு 11.13

கீழ்க்காணும் பரவலின் இடைநிலை அளவு காண்.

சம்பளம் (₹100-ல்)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
தொழிலாளர்கள் எண்ணிக்கை	22	38	46	35	20

தீர்வு

சம்பளம்	நிகழ்வெண் f	குவிவு நிகழ்வெண் cf
0-10	22	22
10-20	38	60
20-30	46	106
30-40	35	141
40-50	20	161
	N = 161	

$\dfrac{N}{2} = \dfrac{161}{2} = 80.5$ எனவே இடைநிலை அளவு பிரிவு 20-30.

இடைநிலை அளவு பிரிவின் கீழ்எல்லை l = 20

இடைநிலை அளவு பிரிவின் நிகழ்வெண் f = 46

இடைநிலை அளவு பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண்ணுக்கு உடனடியான முந்தைய குவிவு நிகழ்வெண் $m = 60$. இடைநிலை அளவு பிரிவின் நீளம் $c = 10$

$$\text{இடைநிலை அளவு} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 20 + \frac{80.5 - 60}{46} \times 10 = 20 + \frac{10}{46} \times 20.5$$

$$= 20 + \frac{205}{46} = 20 + 4.46 = 24.46$$

$\therefore$ இடைநிலை அளவு $= 24.46$

எடுத்துக்காட்டு 11.14

கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்தின் இடைநிலை அளவைக் காண்க.

மதிப்பெண்	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40
நிகழ்வெண்	7	10	13	26	9	5

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பட்டியலில், பிரிவுகள் உள்ளடக்கும் பிரிவுகளாக உள்ளமையால் அவை விலக்கும் பிரிவுகளாக பின்வருமாறு மாற்றி எழுதுவோம்.

மதிப்பெண்	நிகழ்வெண் f	குவிவு நிகழ்வெண் cf
10.5- 15.5	7	7
15.5-20.5	10	17
20.5-25.5	13	30
25.5-30.5	26	56
30.5-35.5	9	65
35.5-40.5	5	70
	N = 70	

$$N = 70, \quad \frac{N}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

இடைநிலை அளவு பிரிவு 25.5-30.5

இடைநிலை அளவு பிரிவின் கீழ் எல்லை $l = 25.5$

இடைநிலை அளவு பிரிவின் நிகழ்வெண் $f = 26$

இடைநிலை அளவு பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண்ணுக்கு முந்தைய குவிவு நிகழ்வெண் $m = 30$

இடைநிலை அளவு பிரிவின் நீளம் $c = 30.5 - 25.5 = 5$

$$\text{இடைநிலை அளவு} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 25.5 + \frac{35 - 30}{26} \times 5 = 25.5 + \frac{25}{26} = 26.46$$

பயிற்சி 11.3

1. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்தின் இடைநிலை அளவைக் காண்க
   (i) 18,12,51,32,106,92,58
   (ii) 28,7,15,3,14,18,46,59,1,2,9,21

2. கீழ்க்காணும் நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலை அளவைக் காண்க.

மதிப்பு	12	13	15	19	22	23
நிகழ்வெண்	4	2	4	4	1	5

3. கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்திற்கான இடைநிலை அளவைக் காண்க.

உயரம் (அடி)	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
மரங்களின் எண்ணிக்கை	4	3	10	8	5

4. கீழ்க்காணும் நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலை அளவைக் காண்க.

வயது	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
நபர்களின் எண்ணிக்கை	4	6	10	11	12	6	1

5. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்தின் இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடவும்.

பிரிவு இடைவெளி	1 - 5	6 - 10	11 - 15	16 - 20	21 - 25	26 - 30	31 - 35
நிகழ்வெண்	1	18	25	26	7	2	1

6. கீழ்க்காணும் பட்டியலில் ஒரு தொழிற்சாலையின் 800 தொழிலாளர்களின் சராசரி வாரச் சம்பளத்தின் பரவல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இப்புள்ளிவிவரத்தின் இடைநிலை அளவைக் காண்க.

சம்பளம் (100 ரூபாயில்)	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	50	70	100	180	150	120	70	60

11.5 முகடு (Mode)

ஒரு பரவலின் எந்த உறுப்பின் அருகில் மிக அதிக உறுப்புகள் அமைகிறதோ அந்த உறுப்பின் மதிப்பு முகடு என்று அழைக்கப்படும்.

11.5.1 முகடு – வகைப்படுத்தப்படாத புள்ளி விவரம்

செப்பனிடப்படாத புள்ளி விவரத்தின் உறுப்புகளை ஒரு வரிசையில் அமைத்து ஒவ்வொரு உறுப்பும் எத்தனை முறை இடம் பெற்றுள்ளது என்று கணக்கிடுவதன் மூலம், அப்புள்ளி விவரத்தின் முகடை எளிதாக அடைய முடியும். அதிக முறை இடம் பெற்றுள்ள உறுப்பின் மதிப்பே முகடு ஆகும்.

உதாரணத்திற்கு, 20,25,21,15,14,15 என்ற உறுப்புகளை கொண்ட புள்ளி விவரத்தை எடுத்துக் கொண்டால் 15 இருமுறை இடம் பெற்றுள்ளது. மற்ற அனைத்தும் ஒரு முறையே இடம் பெற்றுள்ளது. எனவே, முகடு = 15.

குறிப்புரை முகடு எண்ணாலான புள்ளிவிவரத்திற்கு மட்டுமல்லாது தரம் சார்ந்த புள்ளிவிவரத்தை அளப்பதற்கும் பயன்படும். ஒரு அச்சகம் 5 அச்சுகள் வெளியிட்டதில், அவை மிகத் தெளிவு, தெளிவு, தெளிவு மற்றும் தெளிவற்றது என்று தரம் பிரிக்கப்பட்டால், இந்த விவரத்தின் முகடு, "தெளிவு" என அறியப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு **11.15**

கணிதத் திறமையை சோதிக்கும் தேர்வில் 10 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 75,72,59,62, 72,75,71,70,70,70 ஆகும். இப்புள்ளி விவரத்தின் முகடு காண்க.

தீர்வு 10 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் முறையே 75, 72, 59, 62, 72, 75, 71, 70, 70, 70 இவ்விவரத்தில் 70 மூன்று முறை இடம் பெற்று, மற்றவை இரண்டு அல்லது ஒருமுறை இடம் பெற்றிருப்பதால், முகடு 70 ஆகும்.

குறிப்பு ஒரே ஒரு முகடு உள்ள பரவலை ஒற்றை முகடு பரவல் என்று அழைக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு **11.16**

482,485,483,485,487,487,489 என்ற தொகுப்பின் முகடு காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பில், இரண்டு எண்கள் **485** மற்றும் **487** இருமுறை இடம் பெற்று, இரண்டு எண்களும் தொகுப்பின் முகடுகள் ஆகின்றன. இவ்வாறு இரண்டு முகடுகள் உள்ள பரவல் இரட்டை முகட்டுப் பரவல் என்று அழைக்கப்படும் .

குறிப்பு
(i) இரண்டு முகடுகள் உள்ள பரவல் இரட்டை முகட்டுப் பரவல் என்று அழைக்கப்படும்.
(ii) மூன்று முகடுகள் உள்ள பரவல் மும்முகட்டுப் பரவல் என்று அழைக்கப்படும்.
(iii) மூன்று முகடுகளுக்கு மேல் உள்ள பரவல் பன்முகட்டுப் பரவல் என்று அழைக்கப்படும்.

11.5.2 முகடு – வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவல்

வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவலில் மிகப்பெரிய நிகழ்வெண்ணை பெற்றுள்ள உறுப்பின் மதிப்பு முகடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு **11.17**

கீழ்க்காணும் பரவலில் சென்னையைச் சார்ந்த ஒரு காலணி கடையில் ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் 100 சோடி காலணிகள் விற்பனை செய்ததற்கான விவரம் தரப்பட்டு உள்ளது. இப்புள்ளி விவரத்தின் முகடு காண்க.

காலணியின் அளவு (அங்குலம்)	4	5	6	7	8	9	10
சோடிகளின் எண்ணிக்கை	2	5	3	23	39	27	1

தீர்வு மிகப்பெரிய நிகழ்வெண்ணை கொண்ட உறுப்பு முகடு ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தில், மிகப்பெரிய நிகழ்வெண் 39-ஐ பெற்றிருக்கும் காலணியின் அளவு 8. எனவே முகடு 8 ஆகும்.

11.5.3 முகடு – வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல்

வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலில், உறுப்புகளின் சரியான மதிப்பு தெரியாது என்பதால் முகட்டின் சரியான மதிப்பை காண்பது மிகக் கடினமானது. எனினும், பிரிவு இடைவெளிகளின் நீளம் சமமானதாக உள்ள போது முகட்டின் தோராய மதிப்பை கீழ்வரும் சூத்திரத்தின் மூலம் காணலாம்.

$$\text{முகடு} = l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c,$$

இதில், மிகப்பெரிய நிகழ்வெண்ணை பெற்றுள்ள பிரிவை முகடு பிரிவு என்று அழைப்போம்

l = முகடு பிரிவின் கீழ் எல்லை

f = முகடு பிரிவின் நிகழ்வெண்

c = முகடு பிரிவு இடைவெளியின் நீளம்

f_1 = முகடு பிரிவின் நிகழ்வெண்ணுக்கு முந்தைய நிகழ்வெண்.

f_2 = முகடு பிரிவின் நிகழ்வெண்ணுக்கு பிந்தைய நிகழ்வெண்.

எடுத்துக்காட்டு 11.18

கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்திற்கு முகடு காண்க.

மதிப்பு	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
நிகழ்வெண்	4	8	18	30	20	10	5	2

தீர்வு

மதிப்பெண்	நிகழ்வெண் f
10-15	4
15-20	8
20-25	18
25-30	30
30-35	20
35-40	10
40-45	5
45-50	2

மிகப்பெரிய நிகழ்வெண் 30-ஐ பிரிவு 25-30 பெற்றிருப்பதால், இது முகடு பிரிவு ஆகும்.

முகடு பிரிவின் கீழ் எல்லை $l = 25$

முகடு பிரிவின் நிகழ்வெண் $f = 30$

முகடு பிரிவின் நிகழ்வெண்ணுக்கு முந்தைய நிகழ்வெண் $f_1 = 18$ மற்றும் பிந்தைய நிகழ்வெண் $f_2 = 20$

முகடு பிரிவு இடைவெளியின் நீளம் $c = 5$

$$\text{முகடு} = l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$$

$$= 25 + \left(\frac{30 - 18}{60 - 18 - 20}\right) \times 5 = 25 + \frac{12 \times 5}{22}$$

$$= 25 + \frac{60}{22} = 25 + 2.73 = 27.73$$

எனவே, முகடு $= 27.73$

பயிற்சி 11.4

1. ஒரு வகுப்பில் 15 மாணவர்கள் வாங்கிய மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 42,45,47, 49,52,65,65,71,71,72,75,82,72,47,72. இவ்விவரத்தின் முகடு காண்க.

2. கீழ்வரும் புள்ளிவிவரத்திற்கு முகடு காண்க.

காலணிகளின் அளவுகள்	4	5	6	7	8	9	10
விற்ற சோடிகளின் எண்ணிக்கை	15	17	13	21	18	16	11

3. ஒரு மாதத்தில், ஒரு மருத்துவமனைக்குச் சிகிச்சைக்கு வந்த 150 நோயாளிகளின் வயது பற்றிய விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விவரத்திற்கான முகடு காண்க.

வயது (வருடங்களில்)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	12	14	36	50	20	18

4. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்தின் முகடு காண்க.

எடை (கிராம்)	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	4	3	18	20	14	8	3

5. ஒரு சாரணர் முகாமில் இருந்த குழந்தைகளின் வயது விவரம் கீழே தரப்பட்டு உள்ளது. 13, 13, 14, 15, 13, 15, 14, 15, 13, 15- வருடங்கள். கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தின் சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு காண்க.

6. ஒரு பள்ளித் தோட்டத்தில் உள்ள மரங்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் அம்மரங்களின் உள்ள கிளைகளின் எண்ணிக்கை பற்றிய விவரம் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது.

கிளைகளின் எண்ணிக்கை	2	3	4	5	6
மரங்களின் எண்ணிக்கை	14	21	28	20	17

மேற்கண்ட விவரத்திற்கு சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு ஆகியவற்றை காண்க..

7. ஒரு வருட காலத்தில், ஒரு நகரத்தில் ஒருவித வியாதியால் பாதிக்கப்பட்டது பற்றி பதிவு செய்தவர்களின் வயது பற்றிய விவரம் கிழே தரப்பட்டு உள்ளது.

வயது (வருடங்களில்)	5 - 14	15 - 24	25 - 34	35 - 44	45 - 54	55 - 64
பாதிக்கப்பட்டோர் எண்ணிக்கை	6	11	12	10	7	4

மேற்கண்ட புள்ளி விவரத்தின் சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு காண்க.

8. ஒரு தேர்வில் **20** மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கு சராசரி, முகடு மற்றும் இடைநிலை அளவுக் காண்க.

மதிப்பெண்	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	1	4	5	8	2

செயல்முறைப் பயிற்சி

1. 10,20,30,40 மற்றும் 50 ஆகியவற்றின் சராசரி காண்க.
    * ஒவ்வொரு எண்ணோடும் 10 ஐக் கூட்டி, வரும் எண்களின் சராசரி காண்க.
    * ஒவ்வொரு எண்ணிலிருந்தும் 10 ஐக் கழித்து வரும் எண்களின் சராசரி காண்க.
    * ஒவ்வொரு எண்ணையும்10 ஆல் பெருக்கி, வரும் எண்களின் சராசரி காண்க.
    * ஒவ்வொரு எண்ணையும் 10 ஆல் வகுத்து, வரும் எண்களின் சராசரி காண்க.
    * ஒவ்வொரு செயல் முறைக்கும் பொதுவான தீர்வு எழுதி அதனை சராசரியின் தன்மைகளோடு ஒப்பிடுக.
2. நீங்கள் சொந்தமாக உதாரணம் கொடுக்கவும்.
    (i) சராசரியை விட இடைநிலை அளவு ஏற்கத்தக்கது.
    (ii) இடைநிலை அளவை விட முகடு ஏற்கத்தக்கது.
    (iii) முகடை விட இடைநிலை அளவு ஏற்கத்தக்கது.

நினைவில் கொள்க

வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்தின் சராசரிக்கான சூத்திரம் :

- நேர்வழிமுறை $\overline{x} = \dfrac{\sum fx}{\sum f}$
- உத்தேச சராசரி வழிமுறை
  $\overline{x} = A + \dfrac{\sum fd}{\sum f}$
- படிவிலகல் வழிமுறை $\overline{x} = A + \dfrac{\sum fd}{\sum f} \times C$
- ஒரு பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண், அந்த பிரிவின் நிகழ்வெண்ணோடு, அதற்கு முந்தைய பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களைக் கூட்டுவதால் கிடைக்கப் பெறுவது.
- வகைப்படுத்தப்பட்ட புள்ளி விவரத்தின் இடைநிலை அளவு காணும் சூத்திரம்
  இடைநிலை அளவு $= l + \dfrac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$
- வகைப்படுத்தப்பட்ட புள்ளி விவரத்தின் முகடு காணும் சூத்திரம்
  முகடு $= l + \left(\dfrac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$

12 நிகழ்தகவு

All business proceeds on beliefs, or judgments of probabilities, and not on certainty

- CHARLES ELIOT

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- திரும்பத் திரும்ப வரும் சோதனைகள் மற்றும் ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவு ஆகியவற்றைப் புரிந்து கொள்ளுதல்
- பட்டறிவு நிகழ்தகவினைப் புரிந்து கொள்ளுதல்

ரிச்சர்டு ஃபான் மைசஸ்
(R. Von Mises)
(1883-1953)

நிகழ்தகவுக்கு அனுபவம் அல்லது புள்ளியியல் அணுகுமுறையை ஆர்.எப். ஃபிஷர் மற்றும் ஆர். ஃபான்மைசஸ் ஆகியோர் விரிவாக்கினர். ஆர். ஃபான்மைசஸ் என்பவரால் கூறுவெளியின் கருத்து அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. அளவுக் கொள்கையை அடிப்படையாக கொண்டு நிகழ்தகவின் கணிதக் கருத்தியலை உண்டாக்க இக்கருத்து ஏதுவாக அமைந்தது. சென்ற நூற்றாண்டில் பற்பல படைப்பாளிகளின் தூண்டுதலால் இந்த அணுகுமுறை சிறிது சிறிதாக வெளிப்பட்டது. இதன் நவீன விரிவாக்கத்தினைக் குறிக்கும் அடிகோள் வழிமுறை கோல்மோகோரோவ் என்பவரால் அளிக்கப்பட்டது.

12.1 அறிமுகம்

ஒவ்வொருவரும் அதிகாலை முதல் அந்திசாயும் வரை சில செயல்களிலாவது நிகழக் கூடிய சாத்தியக்கூறுகளுக்கான வாய்ப்புகளை வைத்து முடிவெடுக்கின்றோம். உதாரணமாக, நான் இன்று வேலைக்குச் செல்லும் போது குடை கொண்டு செல்ல வேண்டுமா? எனது செல்லிடப்பேசியின் மின்கலன் சக்தி இன்று இரவு வரை நீடித்திருக்குமா? மற்றும் நான் புதிதாக அறிமுகப்படுத்தப்பட்ட மடிக்கணினி வாங்க வேண்டுமா?

நிகழ்தகவு என்பது மாறுபடக்கூடிய எல்லா செயல்களிலும் ஒரு முடிவெடுக்க நமக்கு ஒரு வழிமுறையை அளிக்கின்றது. நிகழ்தகவு என்ற கருத்து யூகத்தின் அடிப்படையிலான சூதாட்டத்திலிருந்து தோன்றியிருந்தாலும் கூட, அதனுடைய பயன்பாடுகள் இயற்பியல், வணிகவியல், உயிரியல், மருத்துவம், ஆயுட்காப்பீடு, முதலீட்டுத்துறை, வானிலை முன்னறிவிப்பு மற்றும் பல்வேறு வளரும் துறைகளில் அதிகமாக பயன்படுத்தப்பட்டு வருகிறது.

பின்வரும் வாக்கியங்களை கவனிப்போம்:

- எதிர்வரும் பொதுத்தேர்வில் குழலிசை அநேகமாக முதல் மதிப்பெண் பெறுவாள்.
- ஒருவேளை தமிழிசை இன்று தொடர்வண்டியைப் பிடிப்பாள்.
- அத்தியாவசியப் பொருட்களின் விலை மாற்றமில்லாமல் இருக்கக்கூடும்.
- இன்றைய டென்னிஸ் போட்டியில் லீலா வெற்றி பெற வாய்ப்பு உள்ளது.

அநேகமாக, ஒருவேளை, இருக்கக்கூடும், வாய்ப்பு போன்ற சொற்கள் உறுதிப்பாடற்றத் தன்மையையே உணர்த்துகின்றன. உறுதித்தன்மை அல்லது உறுதிப்பாடற்றத் தன்மையை அளவிட சரியான அளவுகோல் ஏதும் இல்லை. ஆனாலும் ஒரு செயல் நிகழ்வதற்கான சாத்தியக்கூறுகளை யூகங்களின் அடிப்படையில் உறுதிப்பாடற்றத் தன்மையினை கணித வடிவில் அளவிடலாம். இவ்வாறு அளவிடும் எண் மதிப்பை நிகழ்தகவு என்கிறோம். அனுபவங்கள் மற்றும் மாற்றங்களின் அடிப்படையில் முடிவெடுப்பதற்கு நிகழ்தகவு ஒரு சிறந்த பயனுள்ள முறையாகும். எனவே, நிகழ்தகவு என்பது ஒரே ஒரு எண் மதிப்பாக இல்லாத போதும் அது மிகவும் பயனுள்ளதாகும்.

12.2 அடிப்படைக் கருத்துகள் மற்றும் வரையறைகள்

நிகழ்தகவு கருத்தியலை தொடங்குவதற்கு முன் நமக்குத் தேவையான சில அடிப்படைக் கருத்துக்களை வரையறை செய்வோம்.

- சோதனை(Experiment)
- சமவாய்ப்புச் சோதனை(Random Experiment)
- முயற்சி (Trial)
- கூறுவெளி (Sample space)
- கூறுபுள்ளி (Sample point)
- நிகழ்ச்சி (Event)

முக்கிய கருத்து	சோதனை
நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட விளைவுகளை உருவாக்கும் ஒரு செயல் சோதனை எனப்படும்.	

சோதனைகளை பின்வரும் இரு பரந்த முறைகளில் வகைப்படுத்தலாம்.

சோதனை

உறுதியான சோதனை

வாய்ப்புச் சோதனை

1. உறுதியான சோதனை (அ) தீர்மானமான சோதனை (*Deterministic experiment*) **:**

ஒத்த நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில் முடிவுகளை முன்னரே அறியக்கூடியச் சோதனை தீர்மானமான சோதனை (அ) உறுதியான சோதனை எனப்படும்.

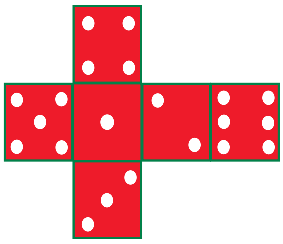
எடுத்துக்காட்டாக, நீரை கொதிக்க வைக்கும் போது அது ஆவியாக மாறுதல், குளிர்சாதனப் பெட்டியில் நீரை வைக்கும் போது அது பனிக்கட்டியாக உறைதல் மற்றும் இருபுறமும் தலையையுடைய ஒரு மாறுபட்ட நாணயத்தை சுண்டும் போது தலை கிடைப்பது போன்ற சோதனைகளில் முடிவுகளை நாம் முன்னரே அறிய முடியும். எனவே இவையனைத்தும் உறுதியான (அ) தீர்மானமான சோதனைகள் ஆகும்.

2. சமவாய்ப்புச் சோதனை (*Random experiment*) **:** ஒரு சோதனையில் நிகழக்கூடிய அனைத்து விளைவுகளும் முன்னரே தெரிந்திருந்தாலும் அவற்றில் எந்த விளைவு நிகழப்போகிறது என்பதை முன்னரே சரியாகச் சொல்ல முடியாது எனில், அச்சோதனை சமவாய்ப்புச் சோதனை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, பின்வரும் சோதனைகளைக் கருதுவோம்:

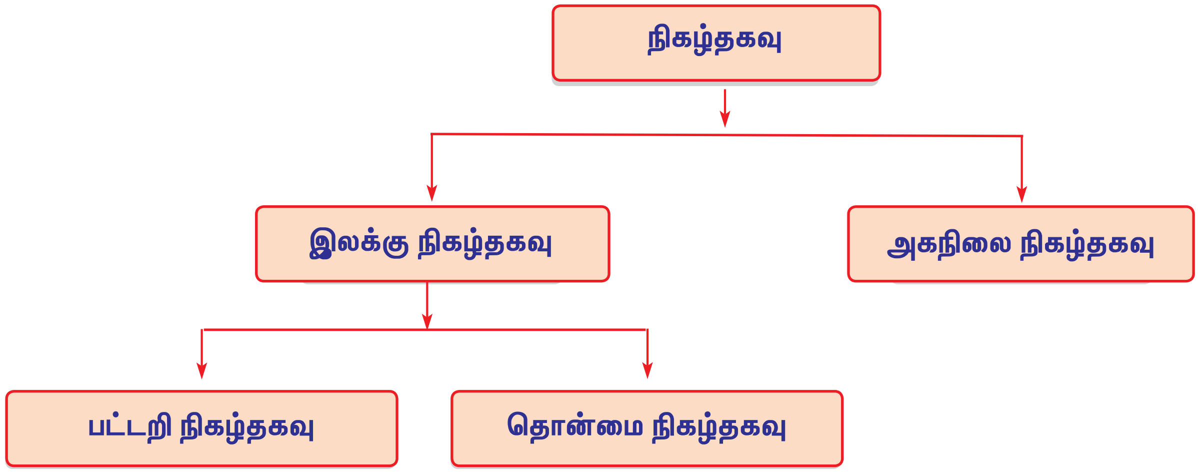
(i) ஒரு நாணயத்தை சுண்டுதல்

(ii) ஒரு பகடையை உருட்டுதல்.



இச்சோதனைகள் சமவாய்ப்புச் சோதனைகள் ஆகும். ஏனெனில், இவற்றில் நிகழப்போகும் விளைவினை முன்னரே அறிய இயலாது.

முக்கிய கருத்து		
முயற்சி (Trial)	ஒன்று அல்லது பல விளைவுகளை உருவாக்கும் ஒரு செயல் முயற்சி எனப்படும்.	உதாரணமாக, நாணயத்தை “சுண்டுதல்” பகடையை “உருட்டுதல்” ஆகியவை முயற்சிகள் ஆகும்.
கூறுவெளி (Sample Space)	சம வாய்ப்புச் சோதனையின் எல்லா விளைவுகளின் கணம் கூறுவெளி எனப்படும். இதனை S எனக் குறிப்பிடலாம்.	உதாரணமாக, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் போது கூறுவெளி S = { தலை, பூ } ஒரு பகடையை உருட்டும் போது கூறுவெளி $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
கூறுபுள்ளி (Sample Point)	சோதனையின் ஒவ்வொரு விளைவும் கூறுபுள்ளி எனப்படும்.	ஒரு நாணயத்தை சுண்டும் போது தலை, பூ ஆகியவை கூறுபுள்ளிகளாகும் . ஒரு பகடையை உருட்டும் போது 1, 2, 3, 4, 5 மற்றும் 6 ஆகியவை கூறுபுள்ளிகளாகும்.
நிகழ்ச்சி (Event)	கூறுவெளியின் எந்த ஒரு உட்கணமும் நிகழ்ச்சி எனப்படும்.	உதாரணமாக, ஒரு பகடையை உருட்டும் போது கிடைக்கும் சாதகமான நிகழ்ச்சிகளில் சில $\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 3, 5, 6\}$.



12.3 நிகழ்தகவு

நிகழ்தகவின் பல்வேறு கருத்துக்களிலிருந்து, நிகழ்தகவினை மூன்று வகைகளாக பிரிக்கலாம்:

(1) அகநிலை நிகழ்தகவு *(Subjective probability)*

(2) தொன்மை நிகழ்தகவு *(Classical probability)*

(3) பட்டறி நிகழ்தகவு *(Empirical probability)*

12.3.1 அகநிலை நிகழ்தகவு

உறுதிப்பாடற்றத் தன்மையை பற்றிய ஒருவருடைய நம்பிக்கையின் வலிமையை அகநிலை நிகழ்தகவு வெளிப்படுத்துகிறது. நாம் எதிர்பார்க்கும் விளைவுகளுக்கு நேரடியான சான்றுகள் மிகக் குறைந்த அளவே உள்ள அல்லது முழுமையாக இல்லாத தருணங்களில் மறைமுகமான சான்றுகளையோ, அறிவின்பால்பட்ட யூகத்திலோ, உள்ளுணர்வு மூலமோ மற்றும் அகநிலை காரணிகள் மூலமோ நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடலாம்.

12.3.2 தொன்மை நிகழ்தகவு

தொன்மை நிகழ்தகவு எனும் கருத்து வாய்ப்பு விளையாட்டுகளிலிருந்து பெறப்பட்டது. சோதனையின் விளைவுகள் அனைத்தும் சமவாய்ப்பைப் பெற்றிருக்கும் போது இது பொருந்துகிறது. ஒத்த சமவாய்ப்புள்ள n நிகழ்வுகளில் ஒரு நிகழ்வு நிகழ சாதகமான s வாய்ப்புகள் இருப்பின் அந்நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $\frac{s}{n}$ எனக் கொடுக்கப்படுகிறது.

12.3.3 பட்டறி நிகழ்தகவு

நேரடியான அனுபவங்கள் மூலம் விளைவுகளின் நிகழ்தகவினைக் காண்பது பட்டறி நிகழ்தகவு ஆகும்

12.4 நிகழ்தகவு – ஓர் அனுபவ முறை (பட்டறி முறை)

இத்தலைப்பில் நாம் பட்டறி நிகழ்தகவினைப் பற்றி மட்டுமே விவாதிக்கப்போகிறோம். மற்ற இரு நிகழ்தகவுகளைப் பற்றி மேல் வகுப்புகளில் படிப்போம். பட்டறி அல்லது சோதனை அல்லது ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவு என்பது நேரடியான அனுபவங்கள்

மூலம் விளைவுகளின் நிகழ்தகவினைக் காண்பது ஆகும். பட்டறிவு நிகழ்தகவினை, சோதனைகளை பலமுறை செய்து அதன் முடிவுகளைக் கண்டறியலாம். பட்டறி நிகழ்தகவு என்பது ஒரு விளைவுச் சோதனையின் முடிவுகளின் அடிப்படையில் அறிவியல் பூர்வமாக மிகவும் சரியாக யூகிப்பது ஆகும்.

உதாரணமாக, ஒரு குறிப்பிட்ட நிறுவனத்தின் சலவைக்கட்டியினை மக்கள் விரும்பும் முடிவை அறிய தொன்மை நிகழ்தகவினைப் பயன்படுத்த இயலாது. ஏனெனில், இச்சோதனையின் முடிவுகள் சமவாய்ப்பைப் பெற்றிருக்கவில்லை. இம்மாதிரியான சோதனையில் நிகழ்தகவினை அறிய, நாம் ஒரு கணக்கெடுப்பு நடத்த வேண்டும். இதனை சோதனையின் புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரித்தல் எனலாம். அதிகமான விவரங்களைச் சேகரிக்கும் போது நாம் மிகச் சிறந்த மதிப்பீடுகளைப் பெறலாம்.

முக்கிய கருத்து **பட்டறி நிகழ்தகவு**

m என்பது E என்ற நிகழ்ச்சியின் சாதகமான முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை என்றும் n என்பது மொத்த முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை என்றும் கொண்டால், E-ன் பட்டறி நிகழ்தகவு என்பதை பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம். இதனை $P(E)$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

$$P(E) = \frac{\text{நிகழ்வு ஏற்பட்ட முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{முயற்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

(அல்லது)

$$P(E) = \frac{\text{கண்டறிந்த சாதகமான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{கண்டறிந்த மொத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

எனவே, $P(E) = \frac{m}{n}$

இங்கு $0 \leq m \leq n \implies 0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$, ஆகவே $0 \leq P(E) \leq 1$.

$$\boxed{0 \leq P(E) \leq 1}$$

அதாவது, ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு எப்பொழுதும் 0 விலிருந்து 1 முடிய உள்ள ஏதேனும் ஒரு எண் ஆகும்.

ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான உறுதித்தன்மையை அறிய நிகழ்தகவு பெரிதும் பயன்படுகிறது. நிகழ்தகவு 1 எனில், அந்நிகழ்வு உறுதியாக நிகழும் எனவும், நிகழ்தகவு 0.9 எனில், நிகழ்ச்சி பெரும்பாலும் நிகழும் எனவும், நிகழ்தகவு 0.5 எனில், நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கும் நிகழாமல் போவதற்கும் வாய்ப்புண்டு எனவும், நிகழ்தகவு 0 எனில், நிகழ்ச்சி உறுதியாக நிகழாது எனவும் அறியலாம்.

குறிப்புரை

மேற்காணும் விளக்கத்திலிருந்து நாம் அறிவது

(i) $P(E) = 1$ எனில், E என்பது உறுதியான நிகழ்ச்சி

(ii) $P(E) = 0$ எனில், E என்பது நடைபெற இயலாத நிகழ்ச்சி.

ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(E)$ எனில், அந்நிகழ்ச்சி நடைபெறாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை $P(E')$ அல்லது $P(\overline{E})$ என எழுதலாம்.

$P(E) + P(E') = 1$ என நமக்குத் தெரியும். எனவே, $P(E') = 1 - P(E)$

$$\boxed{P(E') = 1 - P(E)}$$

நாம் சில நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடும் போது கணக்கீடுகளை மட்டும் மனதில் கொள்ளக்கூடாது. நம்முடைய நோக்கம் நிகழ்தகவின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகளையும், விதிகளையும், கொள்கைகளையும் அறிந்து கொள்வதாக இருக்க வேண்டும்.

உதாரணம் :

ஒரு நாணயத்தை பலமுறை சுண்டும்போது, எத்தனை முறை தலை மற்றும் பூ விழுகின்றன என்பதற்கும், மொத்த சுண்டுதல்களுக்குமான விகிதங்கள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

சுண்டுதலின் எண்ணிக்கை (n)	கிடைத்த தலைகளின் (H) எண்ணிக்கை (m_1)	$P(H) = \frac{m_1}{n}$	கிடைத்த பூக்களின் (T) எண்ணிக்கை (m_2)	$P(T) = \frac{m_2}{n}$
50	29	$\frac{29}{50}$	21	$\frac{21}{50}$
60	34	$\frac{34}{60}$	26	$\frac{26}{60}$
70	41	$\frac{41}{70}$	29	$\frac{29}{70}$
80	44	$\frac{44}{80}$	36	$\frac{36}{80}$
90	48	$\frac{48}{90}$	42	$\frac{42}{90}$
100	52	$\frac{52}{100}$	48	$\frac{48}{100}$

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து நாம் சுண்டுதலின் எண்ணிக்கையை அதிகரிக்க அதிகரிக்க தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவும், பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவும் ஒன்றையொன்று நெருங்கி வருவதைக் காணலாம்.

செயல் (1): ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுதல்

ஒவ்வொரு மாணவனையும் ஒரு நாணயத்தை 10 முறை சுண்டச்செய்து, எத்தனை முறை தலை கிடைக்கிறது என்பதையும், எத்தனை முறை பூ கிடைக்கிறது என்பதையும் கவனித்து கீழே உள்ள அட்டவணையில் உள்ளவாறு குறிக்கச் சொல்லலாம்.

விளைவு	நேர்க்கோட்டுக் குறிகள்	10 சுண்டுதலில் விழுந்த தலைகள்/ பூக்களின் எண்ணிக்கை
தலை		
பூ		

இதே போல ஒரு நாணயத்தை 20, 30, 40, 50 முறை சுண்டச்செய்து மேற்கூறிய முறையிலேயே அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும். பின்வரும் பின்னங்களின் மதிப்புகளை எழுதுக.

$$\frac{\text{தலை கிடைத்த சுண்டுதலின் எண்ணிக்கை}}{\text{சுண்டுதலின் மொத்த எண்ணிக்கை}} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{\text{பூ கிடைத்த சுண்டுதலின் எண்ணிக்கை}}{\text{சுண்டுதலின் மொத்த எண்ணிக்கை}} = \frac{\square}{\square}$$

செயல் (2): ஒரு பகடையை உருட்டுதல்

ஒரு பகடையை 20 முறை உருட்டி அதன் ஆறு விளைவுகளுக்கும் நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுக.

விளைவு	நேர்க்கோட்டுக் குறிகள்	20 முறை உருட்டும் போது கிடைக்கும் விளைவுகளின் எண்ணிக்கை	**கிடைத்த தொடர்புடைய விளைவுகளின் எண்ணிக்கை / பகடை உருட்டுதலின் மொத்த எண்ணிக்கை**
1			
2			
3			
4			
5			
6			

இச்சோதனையை 50, 100 முறை செய்து அவற்றின் முடிவுகளை இம்முறையிலேயே அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

செயல் (3): இரு நாணயங்களைச் சுண்டுதல்

இரு நாணயங்களை சேர்ந்தாற்போல் 10 முறை சுண்டி அதன் நிகழ்வுகளைக் கவனித்து பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்துக.

விளைவு	நேர்க் கோட்டுக் குறிகள்	10 முறை சுண்டும் போது கிடைக்கும் விளைவுகள்	**கிடைத்த தொடர்புடைய விளைவுகளின் எண்ணிக்கை / இரு நாணயங்கள் சுண்டுதலின் மொத்த எண்ணிக்கை**
இரண்டு தலைகள்			
ஒரு தலை மற்றும் ஒரு பூ			
தலை தவிர்த்து			

செயல் (1)-ல் ஒவ்வொரு முறையும் ஒரு நாணயத்தை சுண்டுவதை முயற்சி என்கிறோம். இதைப் போலவே செயல் (2)-ல் ஒவ்வொரு முறையும் பகடையை உருட்டுதலை முயற்சி என்றும், செயல் (3)-ல் இரு நாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டுதலையும் முயற்சி என்றும் அழைக்கிறோம்.

செயல் (1)-ல் ஒரு குறிப்பிட்ட சுண்டுதல் நிகழ்ச்சியில் தலை கிடைப்பதை விளைவு என்கிறோம், அதைப் போலவே பூ கிடைப்பதையும் அந்நிகழ்ச்சியின் மற்றொரு விளைவு என்கிறோம்.

செயல் (2)-ல் 5 என்ற குறிப்பிட்ட எண் கிடைப்பது என்பதை ஒரு விளைவு என்கிறோம்.

$$\frac{\text{தலை கிடைத்த சுண்டுதலின் எண்ணிக்கை}}{\text{சுண்டுதலின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$ -ன் மதிப்பை பட்டறி நிகழ்தகவு அல்லது சோதனை நிகழ்தகவு என்கிறோம் .

எடுத்துக்காட்டு 12.1

ஒரு உற்பத்தியாளர் உற்பத்தியான செல்லிடப்பேசிகளிலிருந்து (Cellphone) 1000 செல்லிடப்பேசிகளை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்து சோதித்துப் பார்த்ததில் 25 செல்லிடப்பேசிகள் குறைபாடுடையன என்று கண்டுபிடிக்கப்பட்டது எனில், சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் ஒரு செல்லிடப்பேசி குறைபாடுடையதாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன.

தீர்வு சோதனை செய்த செல்லிடப்பேசிகளின் எண்ணிக்கை = 1000 அதாவது, $n = 1000$

E என்பது குறைபாடுள்ள செல்லிடைப்பேசிகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$n(E) = 25$ அதாவது, $m = 25$

$$P(E) = \frac{\text{குறைபாடுகளுடைய செல்லிடப்பேசிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{சோதனை செய்த செல்லிடப்பேசிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{m}{n} = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40}$$

எடுத்துக்காட்டு 12.2

T20 மட்டைப்பந்து போட்டியில் (cricket) ராசு 50 பந்துகளை எதிர்கொண்டு 10 முறை ஆறு ஓட்டங்களை எடுத்தார். அவர் எதிர்கொண்ட பந்துகளில் ஒரு பந்தை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அதில் அவர் ஆறு ஓட்டங்கள் எடுக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு ராசு எதிர்கொண்ட மொத்த பந்துகளின் எண்ணிக்கை = 50. அதாவது, $n = 50$

E என்பது ராசு ஆறு ஓட்டங்கள் எடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சி எனில்,

E' என்பது ராசு ஆறு ஓட்டங்கள் எடுக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி ஆகும்.

$n(E) = 10$ அதாவது, $m=10$

$$P(E) = \frac{\text{ராசு அடித்த ஆறு ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{எதிர்கொண்ட பந்துகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{m}{n} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

P (ராசு ஆறு ஓட்டங்கள் எடுக்காமல் இருப்பதற்கான) $= P(E') = 1 - P(E)$

$$= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

எடுத்துக்காட்டு 12.3

மட்டைப்பந்து குழுவை தேர்ந்தெடுக்கும் தேர்வுக்குழு, வீரர்களை தேர்வு செய்ய வீரர்களின் முந்தைய போட்டிகளில் 40 ஓட்டங்களுக்கு மேல் எத்தனை போட்டிகளில் எடுத்தனர் என்பதை தகுதியாகக் கொண்டு தேர்வு செய்தனர். குமார் மற்றும் கிருபா ஆகிய இரு வீரர்களின் திறன் கடந்த 30 போட்டிகளில் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வீரர்களின் பெயர்	40-க்கு மேற்பட்ட ஓட்டங்கள் எடுத்த போட்டிகளின் எண்ணிக்கை
குமார்	20
கிருபா	12

இவ்வீரர்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு உற்றுநோக்கிய போட்டிகளின் எண்ணிக்கை = 30 அதாவது, n = 30

E_1 என்பது குமார் 40 ஓட்டங்களுக்கு மேல் எடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க,

$n(E_1) = 20$ அதாவது, $m_1 = 20$

E_2 என்பது கிருபா 40 ஓட்டங்களுக்கு மேல் எடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க,

$n(E_2) = 12$ அதாவது, $m_2 = 12$

$$P(E_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{20}{30}$$

$$P(E_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{12}{30}$$

குமார் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

கிருபா தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

எடுத்துக்காட்டு 12.4

ஒரு இருவழிச் சாலையில் குறிப்பிட்ட ஒரு நாளில் ஒரு காவலர் வாகனங்களின் வேகத்தை சோதனை செய்தார். அவர் சோதனை செய்த 160 வாகனங்களின் வேகங்களின் நிகழ்வெண் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வேகம்(கி.மீ/மணி)	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70 ம் அதற்கு மேலும்
வாகனங்களின் எண்ணிக்கை	14	23	28	35	52	8

ஒரு வாகனத்தை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அதன் வேகம்

(i) 69 கி.மீ/மணி- ஐ விட அதிகமாக (ii) 20 கி.மீ/மணியிலிருந்து 39 கி.மீ/மணி வரை

(iii) 60 கி.மீ/மணி-க்கும் குறைவாக (iv) 40 கி.மீ/மணியிலிருந்து 69 கி.மீ/மணி வரை

இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

(i) நிகழ்ச்சி E_1 என்பது வாகனத்தின் வேகம் 69 கி.மீ/மணி-ஐ விட அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$n(E_1) = 8$ அதாவது, $m_1 = 8$

சோதனை செய்த மொத்த வாகனங்கள் = 160. அதாவது, $n = 160$

$$P(E_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{8}{160} = \frac{1}{20}$$

(ii) நிகழ்ச்சி E_2 என்பது வாகனத்தின் வேகம் 20 கி.மீ/மணியிலிருந்து 39 கி.மீ/மணி வரை இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க

$n(E_2) = 14+23 = 37$ அதாவது, $m_2 = 37$

$$P(E_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{37}{160}$$

(iii) நிகழ்ச்சி E_3 என்பது வாகனத்தின் வேகம் மணிக்கு 60 கி.மீ ஐவிடக் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$n(E_3) = 14+23+28+35 = 100$ அதாவது, $m_3 = 100$

$$P(E_3) = \frac{m_3}{n} = \frac{100}{160} = \frac{5}{8}$$

(iv) நிகழ்ச்சி E_4 என்பது வாகனத்தின் வேகம் 40 கி.மீ/மணியிலிருந்து 69 கி.மீ/மணி வரை இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$n(E_4) = 28+35+52 = 115$ அதாவது, $m_4 = 115$

$$P(E_4) = \frac{m_4}{n} = \frac{115}{160} = \frac{23}{32}$$

எடுத்துக்காட்டு 12.5

ஒரு ஆராய்ச்சியாளர் மாணவர்களின் கணித திறமைக்கும், புள்ளியியல் ஆர்வத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் கண்டறிய விரும்பினார். சோதனைக்காக 200 மாணவர்களை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்து அவர்களிடம் கணிதத் திறமை மற்றும் புள்ளியியல் ஆர்வம் ஆகியவற்றை குறைவு, சராசரி, அதிகம் எனக் குறிப்பிடுமாறு கூறி சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரப் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

		கணிதத்தில் திறமை		
		குறைவு	சராசரி	அதிகம்
புள்ளியியலில் ஆர்வம்	குறைவு	60	15	15
	சராசரி	15	45	10
	அதிகம்	5	10	25

ஒரு மாணவரை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அவர்

(i) கணிதத்தில் அதிக திறமை

(ii) புள்ளியியலில் சராசரி ஆர்வம்

(iii) புள்ளியியலில் அதிக ஆர்வம்

(iv) கணிதத்தில் அதிக திறமை மற்றும் புள்ளியியலில் அதிக ஆர்வம் மற்றும்

(v) கணிதத்தில் சராசரி திறமை மற்றும் புள்ளியியலில் குறைந்த ஆர்வம்,

உடையவராக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 80+70+50=200 அதாவது, $n = 200$

(i) நிகழ்ச்சி E_1 என்பது கணிதத்தில் அதிக திறமை உடையோர் என்க.

$$n(E_1) = 15+10+25= 50 \qquad \text{அதாவது, } m_1 = 50$$

$$P(E_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$$

(ii) நிகழ்ச்சி E_2 என்பது புள்ளியியலில் சராசரி ஆர்வம் உடையோர் என்க.

$$n(E_2) = 15+45+10 = 70 \qquad \text{அதாவது, } m_2 = 70$$

$$P(E_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{70}{200} = \frac{7}{20}$$

(iii) நிகழ்ச்சி E_3 என்பது புள்ளியியலில் அதிக ஆர்வம் உடையோர் என்க.

$$n(E_3) = 5+10+25 = 40 \qquad \text{அதாவது, } m_3 = 40$$

$$P(E_3) = \frac{m_3}{n} = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$$

(iv) நிகழ்ச்சி E_4 என்பது கணிதத்தில் அதிக திறமை மற்றும் புள்ளியியலில் அதிக ஆர்வம் உடையோர் என்க.

$$n(E_4) = 25 \qquad \text{அதாவது, } m_4 = 25$$

$$P(E_4) = \frac{m_4}{n} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$$

(v) நிகழ்ச்சி E_5 என்பது கணிதத்தில் சராசரி திறமை மற்றும் புள்ளியியலில் குறைந்த ஆர்வம் உடையோர் என்க.

$$n(E_5) = 15 \qquad \text{அதாவது, } m_5 = 15$$

$$P(E_5) = \frac{m_5}{n} = \frac{15}{200} = \frac{3}{40}$$

எடுத்துக்காட்டு 12.6

ஒரு மருத்துவமனை பதிவேட்டில் மகப்பேற்றிற்காக மகளிர் தங்கியிருந்த நாட்களின் விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தங்கியிருந்த நாட்களின் எண்ணிக்கை	3	4	5	6	6 நாட்களை விட அதிகம்
மகளிர் எண்ணிக்கை	15	32	56	19	5

எவரேனும் ஒருவரை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்தெடுக்கும் போது அவர்

(i) சரியாக 5 நாட்கள் (ii) 6 நாட்களுக்கும் குறைவாக

(iii) அதிக பட்சம் 4 நாட்கள் (iv) குறைந்தபட்சம் 5 நாட்கள்

தங்கியிருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு மகப்பேற்றிற்காக மருத்துவமனையில் தங்கியிருந்தவர்களின் எண்ணிக்கை $= 127$

அதாவது, $n = 127$

(i) E_1 என்பது சரியாக 5 நாட்கள் தங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$n(E_1) = 56$ அதாவது, $m_1 = 56$

$$P(E_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{56}{127}$$

(ii) E_2 என்பது 6 நாட்களுக்கும் குறைவாக தங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$n(E_2) = 15 + 32 + 56 = 103$ அதாவது, $m_2 = 103$

$$P(E_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{103}{127}$$

(iii) E_3 என்பது அதிக பட்சம் 4 நாட்கள் தங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. (3 மற்றும் 4 நாட்கள் மட்டும்)

$n(E_3) = 15 + 32 = 47$ அதாவது, $m_3 = 47$

$$P(E_3) = \frac{m_3}{n} = \frac{47}{127}$$

(iv) E_4 என்பது குறைந்தபட்சம் 5 நாட்கள் தங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.(5,6 மற்றும் 7 நாட்கள் மட்டும்)

$n(E_4) = 56 + 19 + 5 = 80$ அதாவது, $m_4 = 80$

$$P(E_4) = \frac{m_4}{n} = \frac{80}{127}$$

பயிற்சி 12.1

1. கீழ்கண்டவற்றுள் எவை நிகழ்தகவின் மதிப்பாக இருக்க முடியாது.

   i) 1/3 ii) – 1/5 iii) 0.80 iv) – 0.78 v) 0
   vi) 1.45 vii) 1 viii) 33% ix) 112%

2. வரையறு: i) சோதனை ii) உறுதியான சோதனை iii) சமவாய்ப்புச் சோதனை iv) கூறுவெளி v) நிகழ்ச்சி vi) முயற்சி

3. வரையறு : பட்டறி நிகழ்தகவு

4. சங்கீத் என்பவர் கடந்த 20 கூடைப்பந்து போட்டிகளில் இலக்கை நோக்கி தடையின்றி எறியும் வாய்ப்புகளில் 65 முறை இலக்கை நோக்கி எறிந்தார் மற்றும் 35 முறை தவறவிட்டார் எனில், அவர் எறிந்த பந்துகளில் ஒரு பந்தை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்தால் அப்பந்து இலக்கை அடைவதற்கான சோதனை நிகழ்தகவு என்ன?

5. வானிலை ஆராய்ச்சி மையத்தில் கடந்த 300 நாட்களில் பதிவுசெய்யப்பட்டு வெளியிடப்பட்ட வானிலை அறிக்கைகளில் 195 முறை சரியாக இருந்தது. கொடுக்கப்பட்ட நாளில் வெளியிடப்பட்ட வானிலை அறிக்கை (i) சரியாக (ii) தவறாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

6. ஒரு புதிய ஊட்டச்சத்து பானத்தின் சுவையைப் பற்றி கௌரி, 25 மாணவர்களிடம் கருத்துகளைக் கேட்டறிந்தார். கிடைத்த பதில்கள் பின்வருமாறு

பதில்கள்	விரும்புவோர்	விரும்பாதோர்	முடிவெடுக்காதோர்
மொத்த நபர்கள்	15	8	2

ஒரு மாணவரை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்தெடுக்கும் போது அவர் சுவையை

(i) விரும்புபவராக (ii) விரும்பாதவராக (iii) முடிவெடுக்காதவராக

இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

7. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 50 நபர்களில் 21 பேர் “O” வகை இரத்தமும் ,22 பேர் “A” வகை இரத்தமும், 5 பேர் “B” வகை இரத்தமும், 2 பேர் “AB” வகை இரத்தமும், உடையவராக இருந்தனர்.

ஒருவரை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்தெடுக்கும் போது அவர்

(i) “O” வகை இரத்தம் உடையவராக (ii) “B” வகை இரத்தம் இல்லாதவராக

(iii) “A” வகை இரத்தம் உடையவராக (iv) “AB” வகை இரத்தம் இல்லாதவராக.

இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

8. ஒரு பகடையை 500 முறை உருட்டிய போது கிடைத்த விளைவுகள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

விளைவுகள்	1	2	3	4	5	6
நிகழ்வெண்கள்	80	75	90	75	85	95

ஒரு விளைவு

(i) 4 ஐ விடக் குறைவாக (ii) 2 ஐ விடக் குறைவாக (iii) 2 ஐ விட அதிகமாக

(iv) 6 ஆக (v) 6 ஆக இல்லாமல்.

இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

9. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 2000 குடும்பங்களில் இரு குழந்தைகள் வரை உள்ள குடும்பங்களின் விவரம் பின்வருமாறு

ஒரு குடும்பத்தில் உள்ள பெண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	2	1	0
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	624	900	476

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு குடும்பத்தில்

(i) 2 பெண் குழந்தைகள் (ii) ஒரு பெண் குழந்தை (iii) பெண் குழந்தை இல்லாமல்

இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

10. 500 சிறு குழல் விளக்குகளின் வாழ்நாள் விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

வாழ்நாள்(மாதங்களில்)	9	10	11	12	13	14	14 ஐ விட அதிகம்
விளக்குகளின் எண்ணிக்கை	26	71	82	102	89	77	53

ஒரு சிறுகுழல் விளக்கு தேர்ந்தெடுக்கும் போது, கீழ்க்காணும் வாழ்நாள் பயன்பாட்டிற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

(i) 12 மாதங்களுக்குக் குறைவாக (ii) 14 மாதங்களுக்கு அதிகமாக

(iii) அதிகபட்சம் 12 மாதங்கள் (iv) குறைந்தபட்சம் 13 மாதங்கள்

11. பரபரப்பான ஒரு நாளில் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில், மகிழ்வுந்தில் அமர்ந்திருந்தோரின் எண்ணிக்கை பதிவு செய்யப்பட்டது. 60 மகிழ்வுந்துகளில் சென்ற நபர்களின் எண்ணிக்கை கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

மகிழ்வுந்தில் அமர்ந்திருந்தோரின் எண்ணிக்கை	1	2	3	4	5
மகிழ்வுந்துகளின் எண்ணிக்கை	22	16	12	6	4

குறிப்பிட்ட கால இடைவெளிக்குப் பிறகு இவ்விடத்தை ஒரு மகிழ்வுந்தானது கடந்து சென்றால், அதில் அமர்ந்திருக்கும் நபர்களின் எண்ணிக்கை.

(i) 2 மட்டும் (ii) 3-ஐ விடக் குறைவாக

(iii) 2-ஐ விடக் குறைவாக (iv) குறைந்தபட்சம் 4 ஆக

இருக்க நிகழ்தகவினைக் காண்க.

12. இன்சுவை என்ற மாணவி கணிதத்தில் நடத்தப்பட்ட அலகுத் தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு

அலகுத் தேர்வு	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
பெற்ற மதிப்பெண்கள் (%)	89	93	98	99	98	97	96	90	98	99

இவ்விவரங்களைக் கொண்டு அலகுத்தேர்வில்

(i) 95% க்கும் அதிகமாக (ii) 95% க்கு குறைவாக (iii) 98% க்கும் அதிகமாக மதிப்பெண் பெற நிகழ்தகவினைக் காண்க.

13. கீழ்க்கண்ட அட்டவணையானது ஒரு குடியிருப்பில் தங்கியுள்ளோரின் நிலையைக் காட்டுகிறது

வகை / பாலினம்	கல்லூரி மாணவர்	பணியாளர்
ஆண்	5	3
பெண்	4	8

குடியிருப்போர் ஒருவரை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அவர்

(i) பெண்ணாக இருக்க (ii) கல்லூரி மாணவராக இருக்க
(iii) கல்லூரி மாணவியாக இருக்க (iv) ஆண் பணியாளராக
இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

14. ஒரு குறிப்பிட்ட புதிய அல்லது பயன்படுத்தப்பட்ட மகிழுந்துகளை வாங்கிய 1000 நுகர்வோரின் களப்பணி விவரங்கள் கீழ்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

திருப்தி நிலை / வகை	திருப்தியடைந்தவர்	திருப்தியடையாதவர்
புதியது	300	100
பயன்படுத்தியது	450	150

ஒரு நுகர்வோர் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் போது, அவர்

(i) புதிய மகிழுந்து வாங்கியவராக இருக்க

(ii) திருப்தியடைந்தவராக இருக்க

(iii) பயன்படுத்தப்பட்ட மகிழுந்து வாங்கி ஆனால் திருப்தியடையாதவராக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

15. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 1,000 நபர்களிடம் அவர்கள் ஒரு வருடத்திற்கு பிறகு செல்லிடப்பேசிகளை வாங்க திட்டமிட்டிருக்கிறார்களா என்பதைப் பற்றி விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டது. ஒரு வருடம் சென்ற பிறகு அதே நபர்களிடம் மீண்டும் அவர்கள் செல்லிடப்பேசி வாங்கிய விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டு அதன் விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

	வாங்கியோர்	வாங்காதோர்
வாங்க திட்டமிட்டோர்	200	50
வாங்க திட்டமிடாதோர்	100	650

ஒரு நபரை தேர்ந்தெடுக்கும் போது அவர்
(i) செல்லிடப்பேசி வாங்க திட்டமிட்டு இருந்தவராக
(ii) செல்லிடப்பேசி வாங்க திட்டமிட்டிருந்து ஆனால் வாங்காதவராக
(iii) வாங்க திட்டமிடாமல் ஆனால் வாங்கியவராக

இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

16. மக்கள் குடியிருக்கும் இடத்திற்கும் வாகனம் வைத்திருப்பதற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை அறிய ஒரு கணக்கெடுப்பு நடத்தப்பட்டது. அதில் மகிழுந்து உரிமையாளர்களில் 200 பேர் மிகப்பெரிய நகரங்களிலிருந்தும், 150 பேர் புறநகரங்களிலிருந்தும், 150 பேர் கிராமப்புறங்களிலிருந்தும் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டது.

பகுதியின் வகை / வெளிநாட்டு மகிழுந்து	பெருநகர்	புறநகர்	கிராமம்
உரிமை உள்ளவர்	90	60	25
உரிமை அல்லாதவர்	110	90	125

தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒருவர்

(i) வெளிநாட்டு மகிழுந்து உரிமையாளராக இருக்க

(ii) புறநகரில் வசிக்கும் வெளிநாட்டு மகிழுந்து உரிமையாளராக இருக்க

(iii) பெருநகரத்தில் வசித்து வெளிநாட்டு மகிழுந்து உரிமையாளராக இல்லாமல் இருக்க

(iv) பெருநகரத்தில் உள்ள வெளிநாட்டு மகிழுந்து உரிமையாளராக இருக்க

(v) கிராமபுறத்தில் வசிப்பவராக இல்லாமலும் வெளிநாட்டு மகிழுந்து உரிமையாளராக இல்லாமலும் இருப்பவராக

இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

17. ஒரு அரசு மேல்நிலைப் பள்ளியில் பணிபுரியும் 100 ஆசிரியர்களின் கல்வித் தகுதிகள் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

கல்வி நிலை / வயது	ஆய்வியல் நிறைஞர் (M.Phil)	முதுகலைப் பட்டம் வரை	இளங்கலைப் பட்டம் மட்டும்
30-க்கு கீழ்	5	10	10
30 - 40 வரை	15	20	15
40-ற்கு மேல்	5	5	15

ஒரு ஆசிரியரை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அவர்

(i) முதுகலைப் பட்டம் வரை பெற்றவராக இருக்க

(ii) 30 வயதிற்கு குறைவானவரும் ஆய்வியல் நிறைஞர் பட்டம் பெற்றவராகவும் இருக்க

(iii) 40 வயதிற்கு மேற்பட்டவராகவும் இளங்கலைப் பட்டம் பெற்றவராகவும் இருக்க

(iv) 30 வயது முதல் 40 வயதிற்குட்பட்டவராகவும் முதுகலைப் பட்டம் பெற்றவராகவும் இருக்க

(v) 40 வயதிற்கு மேற்பட்டவராகவும் ஆய்வியல் நிறைஞர் (M.Phil) பட்டம் பெற்றவராகவும் இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

18. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 1,000 நபர்களின் வயது மற்றும் அவர்களுக்கு மிகவும் பிடித்தமான விளையாட்டு பற்றிய விவரங்கள் பின்வருமாறு

விளையாட்டு / வயது	கையுந்து பந்து (Volleyball)	கூடைப்பந்து (Basket ball)	வளைகோல் ஆட்டம் (Hockey)	கால்பந்து (Football)
20 க்கு கீழ்	26	47	41	36
20 - 29	38	84	80	48
30 - 39	72	68	38	22
40 - 49	96	48	30	26
50 மற்றும் அதற்கு மேல்	134	44	18	4

அவர்களில் ஒரு நபர் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அவர்

(i) கையுந்து பந்து ஆட்டம் விரும்புபவராக

(ii) 20 முதல் 29 வயதிற்கு உட்பட்டவராக

(iii) கூடைப்பந்து விரும்புபவராகவும் 20 முதல் 29 வயதிற்குட்பட்டவராகவும்

(iv) வளைகோல் பந்தாட்டத்தை விரும்பாதவராக

(v) அதிகபட்சம் 49 வயதுடையவராகவும் கால்பந்தாட்டம் மிகவும் பிடித்தமாக இல்லாமல்

இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

19. முகில் என்பவர் ஒரு குறிப்பிட்ட ஞாயிற்றுக்கிழமையில், வாகனங்களால் ஏற்படும் காற்று மாசுபாடு பற்றிய அவருடைய அறிவியல் செயல்திட்டத்திற்காக காலை 7 மணி முதல் மாலை 7 வரை தேசிய நெடுஞ்சாலை எண் 45-ல் உள்ள சுங்கச்சாவடியை கடந்து செல்லும் வாகனங்களை உற்றுநோக்கினார். அப்போது கடந்து சென்ற வாகனங்களின் விவரம் கீழே அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

கால இடைவெளி / வாகனங்கள்	காலை 7 மணி முதல் 11 வரை	காலை 11 மணி முதல் பிற்பகல் 3 வரை	பிற்பகல் 3 மணி முதல் மாலை 7 வரை
பேருந்து	300	120	400
மகிழுந்து	200	130	250
இரு சக்கர வாகனங்கள்	500	250	350

வாகனம் ஒன்றை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அவ்வாகனம்

(i) முற்பகல் 7 மணி முதல் 11 மணி வரை செல்லும் பேருந்தாக இருக்க

(ii) முற்பகல் 11 மணி முதல் பிற்பகல்7 மணி வரை செல்லும் மகிழுந்தாக இருக்க

(iii) முற்பகல் 7 மணி முதல் பிற்பகல் 3 மணி வரை செல்லும் பேருந்தாக இருக்க

(iv) முற்பகல் 7 மணி முதல் பிற்பகல் 7 மணி வரை செல்லும் மகிழுந்தாக இருக்க

(v) முற்பகல் 7 மணி முதல் பிற்பகல்7 மணி வரை செல்லும் வாகனங்களில் இருசக்கர வாகனமாக இல்லாமல் இருக்க,

நிகழ்தகவு என்ன?

நினைவில் கொள்க

- உறுதியற்ற தன்மை (அ) நிகழ்தகவை எண் அளவில் அளக்க இயலும்.
- நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட விளைவுகளை உருவாக்கும் ஒரு செயல் சோதனை எனப்படும்.
- ஒத்த நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில் முடிவுகள் முன்னரே அறியக்கூடிய சோதனை தீர்மானமான சோதனை (அ) உறுதியான சோதனை எனப்படும்.
- சாதகமான விளைவுகள் முன்னரே தெரிந்தாலும், நமக்குத் தேவையான முடிவை உறுதியாக சொல்ல இயலாத சோதனை வாய்ப்புச் சோதனை ஆகும்.
- ஒன்று அல்லது பல விளைவுகளை உருவாக்கும் செயல் முயற்சி எனப்படும்.
- வாய்ப்புச் சோதனையின் எல்லா விளைவுகளும் சேர்ந்து உருவான கணம் கூறுவெளி எனப்படும். இதனை S எனக் குறிப்பிடலாம்.
- சோதனையின் ஒவ்வொரு விளைவும் கூறுபுள்ளி எனப்படும்.
- கூறுவெளியின் ஏதேனும் ஒரு உட்கணம் நிகழ்ச்சி எனப்படும்.
- நிகழ்தகவினை மூன்று வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்:

  (1) அகநிலை நிகழ்தகவு (2) தொன்மை நிகழ்தகவு

  (3) பட்டறி நிகழ்தகவு
- E-ன் பட்டறிவு நிகழ்தகவு $P(E)$-ஐ பின்வருமாறு கிடைக்கப்பெறலாம்.

$$P(E) = \frac{\text{நிகழ்வு ஏற்பட்ட முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{முயற்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

(அல்லது)

$$P(E) = \frac{\text{கண்டறிந்த சாதகமான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{கண்டறிந்த மொத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

(அல்லது)

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

- $0 \le P(E) \le 1$
- $P(E') = 1 - P(E)$ இங்கு E' என்பது E-ன் நிரப்பி நிகழ்ச்சி ஆகும்.

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு

1. கணவியல்

1. $A = \{5,\{5,6\},7\}$ எனில், பின்வருவனவற்றில் எது சரியானது?

   (A) $\{5,6\} \in A$ (B) $\{5\} \in A$ (C) $\{7\} \in A$ (D) $\{6\} \in A$

2. $X = \{a,\{b,c\},d\}$ எனில், பின்வருவனவற்றில் எது X-ன் உட்கணமாகும்?

   (A) $\{a,b\}$ (B) $\{b,c\}$ (C) $\{c,d\}$ (D) $\{a,d\}$

3. பின்வரும் கூற்றுகளில் எது சரியானது?

   (i) எந்த ஒரு கணம் A-க்கும், A என்பது A-ன் தகு உட்கணம் ஆகும்.

   (ii) எந்த ஒரு கணம் A-க்கும், $\varnothing$ என்பது A-ன் தகு உட்கணம் ஆகும்.

   (iii) எந்த ஒரு கணம் A-க்கும் A என்பது A-ன் உட்கணம் ஆகும்.

   (A) (i) மற்றும் (ii) (B) (ii) மற்றும் (iii) (C) (i) மற்றும் (iii) (D) (i)(ii) மற்றும் (iii)

4. A என்ற முடிவுறு கணம் m உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளது எனில், A-ன் வெற்றற்ற தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை.

   (A) 2^m (B) $2^m - 1$ (C) 2^{m-1} (D) $2(2^{m-1} - 1)$

5. $\{10, 11, 12\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை

   (A) 3 (B) 8 (C) 6 (D) 7

6. பின்வருவனவற்றில் எது சரியானது?

   (A) $\{x : x^2 = -1, x \in \mathbb{Z}\} = \varnothing$ (B) $\varnothing = 0$

   (C) $\varnothing = \{0\}$ (D) $\varnothing = \{\varnothing\}$

7. பின்வருவனவற்றில் எது சரியல்ல?

   (A) முடிவுறு கணத்தில் ஒவ்வொரு உட்கணமும் முடிவுற்றது.

   (B) $P = \{x : x - 8 = -8\}$ என்பது ஒருறுப்புக் கணமாகும்.

   (C) ஒவ்வொரு கணமும் தகு உட்கணத்தைப் பெற்றிருக்கும்

   (D) ஒவ்வொரு வெற்றற்ற கணமும் குறைந்தபட்சம் இரண்டு உட்கணங்கள் $\varnothing$ மற்றும் அதே கணத்தைப் பெற்றிருக்கும்.

8. பின்வருவனவற்றில் எது சரியானது?

   (A) $\varnothing \subseteq \{a,b\}$ (B) $\varnothing \in \{a,b\}$ (C) $\{a\} \in \{a,b\}$ (D) $a \subseteq \{a,b\}$

9. பின்வருவனவற்றில் எது முடிவுறு கணமாகும்?

(A) $\{x : x \in \mathbb{Z}, x < 5\}$ (B) $\{x : x \in \mathbb{W}, x \geq 5\}$

(C) $\{x : x \in \mathbb{N}, x > 10\}$ (D) $\{x : x$ ஒரு இரட்டைப் பகாஎண்$\}$

10. $A = \{5,6,7,8\}$ எனில், பின்வருவனவற்றில் எது சரியல்ல?

(A) $\varnothing \subseteq A$ (B) $A \subseteq A$ (C) $\{7,8,9\} \subseteq A$ (D) $\{5\} \subset A$

11. $A = \{3,4,5,6\}$ மற்றும் $B = \{1,2,5,6\}$ எனில், $A \cup B =$

(A) $\{1,2,3,4,5,6\}$ (B) $\{1,2,3,4,6\}$ (C) $\{1,2,5,6\}$ (D) $\{3,4,5,6\}$

12. $\{x : x \in \mathbb{Z}, x^2 = 1\}$ என்ற கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

13. $n(X) = m,\ n(Y) = n$ மற்றும் $n(X \cap Y) = p$ எனில், $n(X \cup Y) =$

(A) $m + n + p$ (B) $m + n - p$ (C) $m - p$ (D) $m - n + p$

14. $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ மற்றும் $A = \{2,5,6,9,10\}$ எனில், A' என்பது

(A) $\{2,5,6,9,10\}$ (B) $\varnothing$ (C) $\{1,3,5,10\}$ (D) $\{1,3,4,7,8\}$

15. $A \subseteq B$ எனில், $A - B$ என்பது

(A) B (B) A (C) $\varnothing$ (D) $B - A$

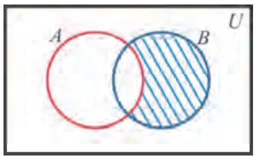
16. A என்பது B-ன் தகு உட்கணம் எனில், $A \cap B =$

(A) A (B) B (C) $\varnothing$ (D) $A \cup B$

17. A என்பது B-ன் தகு உட்கணம் எனில், $A \cup B$

(A) A (B) $\varnothing$ (C) B (D) $A \cap B$

18. அருகில் உள்ள படத்தில் நிழலிட்டப் பகுதி குறிப்பது

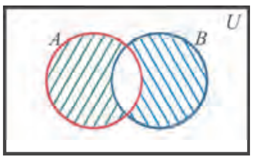


(A) $A - B$ (B) A' (C) B' (D) $B - A$

19. $A = \{a,b,c\},\ B = \{e,f,g\}$ எனில், $A \cap B =$

(A) $\varnothing$ (B) A (C) B (D) $A \cup B$

20. அருகில் உள்ள படத்தில் நிழலிட்டப் பகுதி குறிப்பது



(A) $A - B$ (B) $B - A$ (C) $A \triangle B$ (D) A'

2. மெய்யெண் தொகுப்பு

21. முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையுள்ள தசம விரிவினைப் பெற்றுள்ள எண்

(A) ஒரு முழு (B) ஒரு விகிதமுறு எண்

(C) ஒரு விகிதமுறா எண் (D) ஒரு முழு எண்

22. முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவினைப் பெற்றுள்ள எண்

(A) ஒரு விகிதமுறு எண் (B) ஒரு இயல் எண்

(C) ஒரு விகிதமுறா எண் (D) ஒரு முழு.

23. $-\frac{3}{4}$ -ன் தசம வடிவம்

(A) – 0.75 (B) – 0.50 (C) – 0.25 (D) – 0.125

24. $0.\overline{3}$-ன் $\frac{p}{q}$ வடிவம்

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

25. பின்வருவனவற்றுள் எது உண்மையல்ல?

(A) ஒவ்வொரு இயல் எண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்

(B) ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்

(C) ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்

(D) ஒவ்வொரு முழுவும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும் .

26. பின்வருவனவற்றில் எது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றுள்ளது?

(A) $\frac{5}{32}$ (B) $\frac{7}{9}$ (C) $\frac{8}{15}$ (D) $\frac{1}{12}$

27. பின்வருவனவற்றில் எது விகிதமுறா எண்ணாகும்?

(A) π (B) $\sqrt{9}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

28. பின்வருவனவற்றுள் எவை விகிதமுறா எண்கள்?

(i) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (ii) $\sqrt{4+\sqrt{25}}$ (iii) $\sqrt[3]{5+\sqrt{7}}$ (iv) $\sqrt{8-\sqrt[3]{8}}$

(A) (ii),(iii) மற்றும் (iv) (B) (i),(ii) மற்றும் (iv)

(C) (i),(ii) மற்றும் (iii) (D) (i),(iii) மற்றும் (iv)

29. பின்வருவனவற்றுள் எது விகிதமுறா மூலம் அல்ல?

(A) $\sqrt[3]{8}$ (B) $\sqrt[3]{30}$ (C) $\sqrt[5]{4}$ (D) $\sqrt[8]{3}$

30. $\sqrt{50}$ -ன் எளிய வடிவம்

(A) $5\sqrt{10}$ (B) $5\sqrt{2}$ (C) $10\sqrt{5}$ (D) $25\sqrt{2}$

31. $\sqrt[4]{11}$ என்பதற்குச் சமமானது

(A) $\sqrt[8]{11^2}$ (B) $\sqrt[8]{11^4}$ (C) $\sqrt[8]{11^8}$ (D) $\sqrt[8]{11^6}$

32. $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ என்பதற்குச் சமமானது

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) 2

33. $\dfrac{5}{\sqrt[3]{3}}$ -ன் பகுதியை விகிதப்படுத்தும் காரணி

(A) $\sqrt[3]{6}$ (B) $\sqrt[3]{3}$ (C) $\sqrt[3]{9}$ (D) $\sqrt[3]{27}$

34. பின்வருவனவற்றுள் எது உண்மையல்ல?

(A) $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

(B) $\sqrt{17}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

(C) $0.101100111000111 10\cdots$ ஒரு விகிதமுறா எண்

(D) $\sqrt[4]{16}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

35. $\sqrt[8]{12}$ என்ற விகிதமுறா மூலத்தின் வரிசை மற்றும் அடிமானம் முறையே

(A) 8,12 (B) 12,8 (C) 16,12 (D) 12,16

36. அடிமானம் 9 மற்றும் வரிசை 3 கொண்ட விகிதமுறா மூலம்

(A) $\sqrt[9]{3}$ (B) $\sqrt[3]{27}$ (C) $\sqrt[3]{9}$ (D) $\sqrt[3]{81}$

37. $5\sqrt[3]{3}$ குறிக்கும் முழுமையான விகிதமுறா மூலம்

(A) $\sqrt[3]{15}$ (B) $\sqrt[3]{375}$ (C) $\sqrt[3]{75}$ (D) $\sqrt[3]{45}$

38. பின்வருவனவற்றுள் எது உண்மையல்ல?

(A) $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

(B) a ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் $\sqrt{b}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனில், $a\sqrt{b}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

(C) ஒவ்வொரு விகிதமுறா மூலமும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

(D) ஒரு மிகை முழுவின் வர்க்கமூலம் எப்போதும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

39. பின்வருவனவற்றுள் எது உண்மையல்ல?

(A) x என்பது ஒரு முழு வர்க்கம் இல்லையெனில், $\sqrt{x}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்

(B) $\sqrt[m]{x^n}$ -ன் அடுக்குக் குறி வடிவம் $x^{\frac{n}{m}}$

(C) $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$ -ன் மூலக்குறியீட்டு வடிவம் $\sqrt[mn]{x}$

(D) ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்

40. $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$ என்பதற்குச் சமமானது

(A) 1 (B) 3 (C) 23 (D) 21

3. மெய்யெண்கள் மீதான அறிவியல் குறியீடுகள் மற்றும் மடக்கைகள்

41. 923.4 -ன் அறிவியல் குறியீடு

(A) 9.234×10^{-2} (B) 9.234×10^{2} (C) 9.234×10^{3} (D) 9.234×10^{-3}

42. 0.00036 -ன் அறிவியல் குறியீடு

(A) 3.6×10^{-3} (B) 3.6×10^{3} (C) 3.6×10^{-4} (D) 3.6×10^{4}

43. 2.57×10^{3} -ன் தசம வடிவம்

(A) 257 (B) 2570 (C) 25700 (D) 257000

44. 3.506×10^{-2} -ன் தசம வடிவம்

(A) 0.03506 (B) 0.003506 (C) 35.06 (D) 350.6

45. $5^2 = 25$ -ன் மடக்கை வடிவம்

(A) $\log_5 2 = 25$ (B) $\log_2 5 = 25$ (C) $\log_5 25 = 2$ (D) $\log_{25} 5 = 2$

46. $\log_2 16 = 4$ -ன் அடுக்குக் குறி வடிவம்

(A) $2^4 = 16$ (B) $4^2 = 16$ (C) $2^{16} = 4$ (D) $4^{16} = 2$

47. $\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{4}{3}\right)$ -ன் மதிப்பு

(A) – 2 (B) 1 (C) 2 (D) –1

48. $\log_{49} 7$ -ன் மதிப்பு

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) 1

49. $\log_{\frac{1}{2}} 4$ -ன் மதிப்பு

(A) – 2 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

50. $\log_{10} 8 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 =$

(A) $\log_{10} 9$ (B) $\log_{10} 36$ (C) 1 (D) –1

4. இயற்கணிதம்

51. $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையில் x^2 மற்றும் x-ன் கெழுக்கள் முறையே

(A) 2,3 (B) –3,–2 (C) –2,–3 (D) 2,–3

52. $4x^2 - 7x^3 + 6x + 1$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் படி

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 0

53. $3x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவை என்பது ஒரு

(A) நேரியப் பல்லுறுப்புக்கோவை (B) இருபடிப் பல்லுறுப்புக்கோவை

(C) முப்படிப் பல்லுறுப்புக்கோவை (D) மாறிலி பல்லுறுப்புக்கோவை

54. $4x^2 + 2x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவை என்பது ஒரு

(A) நேரியப் பல்லுறுப்புக்கோவை (B) இருபடிப் பல்லுறுப்புக்கோவை

(C) முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை (D) மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை

55. $2x - 5$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியம்

(A) $\frac{5}{2}$ (B) $-\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $-\frac{2}{5}$

56. $3x - 1 = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலம்

(A) $x = -\frac{1}{3}$ (B) $x = \frac{1}{3}$ (C) $x = 1$ (D) $x = 3$

57. $x^2 + 2x = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

(A) $x = 0, 2$ (B) $x = 1, 2$ (C) $x = 1, -2$ (D) $x = 0, -2$

58. $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையை $(ax + b)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி

(A) $p\left(\frac{b}{a}\right)$ (B) $p\left(-\frac{b}{a}\right)$ (C) $p\left(\frac{a}{b}\right)$ (D) $p\left(-\frac{a}{b}\right)$

59. $x^3 - ax^2 + 2x - a$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையை $(x - a)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி

(A) a^3 (B) a^2 (C) a (D) $-a$

60. $(ax - b)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி எனில்,

(A) $p(b) = 0$ (B) $p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ (C) $p(a) = 0$ (D) $p\left(\frac{b}{a}\right) = 0$

61. $x^2 - 3x - 10$-ன் காரணிகளில் ஒன்று

(A) $x - 2$ (B) $x + 5$ (C) $x - 5$ (D) $x - 3$

62. $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$-ன் காரணிகளில் ஒன்று

(A) $x - 1$ (B) $x + 1$ (C) $x - 2$ (D) $x + 2$

63. $(x+2)(x-1)$-ன் விரிவு

(A) x^2-x-2 (B) x^2+x+2 (C) x^2+x-2 (D) x^2-x+2

64. $(x+1)(x-2)(x+3)$-ன் விரிவு

(A) x^3+2x^2-5x-6 (B) x^3-2x^2+5x-6

(C) x^3+2x^2+5x-6 (D) x^3+2x^2+5x+6

65. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ என்பதற்கு சமமானது

(A) x^3+y^3 (B) x^2+y^2 (C) x^2-y^2 (D) x^3-y^3

66. x^2+2x-8-ன் காரணிகள்

(A) $(x+4)(x-2)$ (B) $(x-4)(x+2)$ (C) $(x+4)(x+2)$ (D) $(x-4)(x-2)$

67. $x^2-6x-16$-ன் காரணிகளில் ஒன்று $(x+2)$ எனில், மற்றொரு காரணி

(A) $x+5$ (B) $x-5$ (C) $x+8$ (D) $x-8$

68. ax^2-5x+c-ன் காரணிகள் $(2x+1)$ மற்றும் $(x-3)$ எனில், a மற்றும் c-ன் மதிப்புகள் முறையே

(A) 2,3 (B) –2,3 (C) 2,–3 (D) 1,–3

69. $x+y=10$ மற்றும் $x-y=2$ எனில், x-ன் மதிப்பு

(A) 4 (B) –6 (C) –4 (D) 6

70. $2-x<5$-ன் தீர்வு

(A) $x>-3$ (B) $x<-3$ (C) $x>3$ (D) $x<3$

5. ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்

71. (–2,7) என்ற புள்ளி அமையும் கால்பகுதி

(A) I (B) II (C) III (D) IV

72. $(x,0)$, $x<0$ என்ற புள்ளி எங்கு அமையும்

(A) OX (B) OY (C) OX' (D) OY'

73. A(a,b) என்ற புள்ளி எம்மதிப்பிற்கு மூன்றாவது கால் பகுதியில் அமையும்

A) $a>0, b<0$ (B) $a<0, b<0$ C) $a>0, b>0$ D) $a<0, b>0$

74. (1,0), (0,1), (–1,0) மற்றும் (0,–1) என்ற புள்ளிகளால் அமையும் சதுரத்தின் மூலைவிட்டம்

A) 2 B) 4 C) $\sqrt{2}$ D) 8

75. $A(-5,0)$, $B(5,0)$ மற்றும் $C(0,6)$ என்ற புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணம்.

A) இரு சமபக்க முக்கோணம் B) செங்கோண முக்கோணம்

C) அசமபக்க முக்கோணம் D) சமபக்க முக்கோணம்

76. (0,8) மற்றும் (0,–2) ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

A) 6 B) 100 C) 36 D) 10

77. (4,1), (–2,1), (7,1) மற்றும் (10,1) என்ற புள்ளிகள்

(A) x அச்சின் மேல் உள்ளது (B) x அச்சுக்கு இணையான கோட்டின் மேல் உள்ளது

(C) y அச்சுக்கு இணையான கோட்டின் மேல் உள்ளது (D) y அச்சின் மேல் உள்ளது

78. (a, b) மற்றும் $(-a, -b)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

(A) 2a (B) 2b (C) 2a + 2b (D) $2\sqrt{a^2+b^2}$

79. (–4, 0) மற்றும் (4,0) என்ற புள்ளிகளுக்கு சமதொலைவில் உள்ள புள்ளி (p,q) எனில், p மற்றும் q-க்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு

(A) p = 0 (B) q = 0 (C) p + q = 0 (D) p + q = 8

80. y-அச்சின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளியின் y ஆயத்தொலைவு –5 எனில், அப்புள்ளி

(A) (0, –5) (B) (–5, 0) (C) (5, 0) (D) (0, 5)

6. முக்கோணவியல்

81. $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ$-க்கு சமமான மதிப்பு

(A) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$ (B) $\tan^2 45^\circ + \cot^2 45^\circ$

(C) $\sec^2 90^\circ$ (D) 0

82. $x = \dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$ எனில், x-ன் மதிப்பு

(A) $\tan 45^\circ$ (B) $\tan 30^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\tan 90^\circ$

83. $\sec^2 45^\circ - \tan^2 45^\circ$ -க்கு சமமானது

(A) $\sin^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ$ (B) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ$

(C) $\sec^2 60^\circ - \tan^2 60^\circ$ (D) 0

84. $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ$ -க்கு சமமானது

(A) $\tan 30^\circ$ (B) $\cos 60^\circ$ (C) $\sin 60^\circ$ (D) $\cot 60^\circ$

85. $\operatorname{cosec}^2 60^\circ - 1$ -க்கு சமமானது

(A) $\cos^2 60^\circ$ (B) $\cot^2 60^\circ$ (C) $\sec^2 60^\circ$ (D) $\tan^2 60^\circ$

86. $\cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ$ -க்கு சமமானது

(A) $\cos 90^\circ$ (B) $\operatorname{cosec} 90^\circ$ (C) $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ$ (D) $\tan 90^\circ$

87. $\dfrac{\sin 27^\circ}{\cos 63^\circ}$ -ன் மதிப்பு

(A) 0 (B) 1 (C) $\tan 27^\circ$ (D) $\cot 63^\circ$

88. $\cos x = \sin 43^\circ$ எனில் x-ன் மதிப்பு

(A) 57° (B) 43° (C) 47° (D) 90°

89. $\sec 29^\circ - \operatorname{cosec} 61^\circ$ -ன் மதிப்பு

(A) 1 (B) 0 (C) $\sec 60^\circ$ (D) $\operatorname{cosec} 29^\circ$

90. $3x \operatorname{cosec} 36^\circ = \sec 54^\circ$ எனில், x-ன் மதிப்பு

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

91. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ$-க்கு சமமானது

(A) $\sec 90^\circ$ (B) $\tan 90^\circ$ (C) $\cos 60^\circ$ (D) $\sin 90^\circ$

92. $\cos A \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ எனில், கோணம் A-ன் அளவு

(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°

93. $\tan 26^\circ \cot 64^\circ$ -ன் மதிப்பு

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) 0 (D) 1

94. $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ$ -ன் மதிப்பு

(A) 0 (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

95. $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$ -ன் மதிப்பு

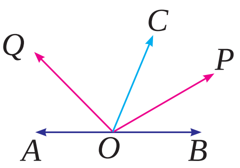
(A) $\cos 60^\circ$ (B) $\sin 60^\circ$ (C) 0 (D) 1

7. வடிவியல்

96. ஒரு கோணம் அதன் மிகை நிரப்புக் கோணத்தின் அளவில் மூன்றில் ஒரு பங்கு எனில் அந்த கோணத்தின் அளவு

(A) 40° (B) 50° (C) 45° (D) 55°

97. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் $\angle BOC$ –ன் இரு சமவெட்டி OP மற்றும் $\angle AOC$-ன் இரு சமவெட்டி OQ எனில், $\angle POQ$–ன் மதிப்பு



(A) 90° (B) 120°
(C) 60° (D) 100°

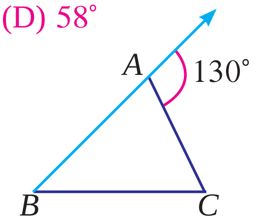
98. ஒரு கோணத்தின் நிரப்புக் கோணமானது அக்கோணத்தை விட 60° அதிகம் எனில், அக்கோணத்தின் அளவு

(A) 25° (B) 30° (C) 15° (D) 35°

99. ஒரு கோணத்தினுடைய நிரப்புக்கோணத்தின் ஆறுமடங்கானது அதன் மிகை நிரப்புக் கோணத்தின் இரு மடங்கை விட 12° குறைவு எனில், அக்கோணத்தின் அளவு

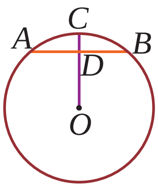
(A) 48° (B) 96° (C) 24° (D) 58°

100. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் $\angle B:\angle C = 2:3$ எனில், $\angle B$-ன் மதிப்பு



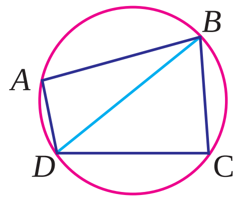
(A) 120° (B) 52°
(C) 78° (D) 130°

101. O வை மையமாக உடைய வட்டத்தில், நாண் AB-ன் மையப்புள்ளி D. CD-ன் நீளம் 2 செ.மீ மற்றும் நாணின் நீளம் 12 செ.மீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம்



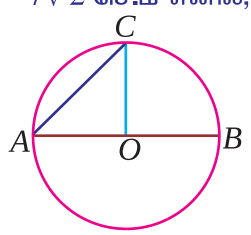
(A) 10 செ.மீ (B) 12செ.மீ
(C) 15 செ.மீ (D) 18செ.மீ

102. வட்டநாற்கரம் $ABCD$-ல் $\angle ADB + \angle DAB = 120^\circ$ மற்றும் $\angle ABC + \angle BDA = 145^\circ$ எனில், $\angle CDB$-ன் மதிப்பு



(A) 75° (B) 115°
(C) 35° (D) 45°

103. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் AB என்பது வட்டத்தின் விட்டம். OC என்பது வட்ட மையம் O-வின் வழியே வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோடு ஆகும். $AC = 7\sqrt{2}$ செ.மீ எனில், வட்டத்தின் பரப்பு (ச.செ.மீ-ல்)



(A) 24.5 (B) 49
(C) 98 (D) 154

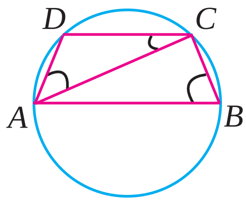
104. இணைகரம் $ABCD$-ல் AB-ன் மையப்புள்ளி E மற்றும் $\angle BCD$-ன் கோண இரு சமவெட்டி CE எனில் $\angle DEC$-ன் அளவு

(A) 60° (B) 90° (C) 100° (D) 120°

105. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் வட்டத்தின் விட்டம் AB மற்றும் $\angle CAD = 30^\circ$, $\angle CBA = 70^\circ$ என்றவாறு வட்டப்பரிதியின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் C, D எனில், $\angle ACD$-ன் அளவு

(A) 40° (B) 50°

(C) 30° (D) 90°



106. அரைவட்டத்தில் அமையும் கோணம்

(A) விரிகோணம் (B) செங்கோணம் (C) குறுங்கோணம் (D) நிரப்புக்கோணம்

107. சிறிய வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணம்

(A) குறுங்கோணம் (B) விரிகோணம்

(C) செங்கோணம் (D) பின்வளைக்கோணம்

108. வட்டநாற்கரம் $ABCD$-ல் $\angle A = 5x, \angle C = 4x$ எனில், x-ன் அளவு

(A) 12° (B) 20° (C) 48° (D) 36°

109. பெரிய வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணம்

(A) குறுங்கோணம் (B) விரிகோணம்

(C) செங்கோணம் (D) பின்வளைக்கோணம்

110. வட்டநாற்கரத்தின் ஒரு கோணம் 70° எனில், அக்கோணத்தின் எதிர்க்கோணம்

(A) 20° (B) 110° (C) 140° (D) 160°

8. அளவியல்

111. வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் 90° அதன் ஆரம் 7 செ.மீ எனில், வட்ட வில்லின் நீளம்

(A) 22 செ.மீ (B) 44 செ.மீ (C) 11 செ.மீ (D) 33 செ.மீ

112. வட்டக்கோணப்பகுதியின் ஆரம் மற்றும் வில்லின் நீளம் முறையே 17 செ.மீ, 27 செ.மீ எனில், அதன் சுற்றளவு

(A) 16 செ.மீ (B) 61 செ.மீ (C) 32 செ.மீ (D) 80 செ.மீ

113. வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் 90° எனில், வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பு

(A) $2\pi r^2$ (B) $4\pi r^2$ (C) $\frac{\pi r^2}{4}$ (D) $\frac{\pi r^2}{2}$

114. வட்டக்கோணப் பகுதியின் ஆரம் 12 செ.மீ மற்றும் வில்லின் நீளம் 21 செ.மீ எனில், அதன் பரப்பு

(A) 126 ச.செ.மீ (B) 252 ச.செ.மீ (C) 33 ச.செ.மீ (D) 45 ச.செ.மீ

115. வட்டக்கோணப்பகுதியின் ஆரம் 4 செ.மீ மையத்தில் தாங்கும் கோணம் 60° எனில், அதன் பரப்பு

(A) $\frac{2\pi}{3}$ ச.செ.மீ (B) $\frac{4\pi}{3}$ ச.செ.மீ (C) $\frac{8\pi}{3}$ ச.செ.மீ (D) $\frac{16\pi}{3}$ ச.செ.மீ

116. வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பு 60 ச.செ.மீ மற்றும் வில்லின் நீளம் 20 செ.மீ எனில், வட்டத்தின் விட்டம்

(A) 6 செ.மீ (B) 12 செ.மீ (C) 24 செ.மீ (D) 36 செ.மீ

117. வட்டக்கோணப்பகுதியின் சுற்றளவு 37 செ.மீ அதன் ஆரம் 7 செ.மீ எனில், வில்லின் நீளம்

(A) 23 செ.மீ (B) 5.29 செ.மீ (C) 32 செ.மீ (D) 259 செ.மீ

118. ஆறு சமசதுரங்களை முகங்களாகக் கொண்ட உருவம்

(A) கனசதுரம் (B) கனச் செவ்வகம் (C) சதுரம் (D) செவ்வகம்

119. ஒரு பொருளால் புறவெளியில் அடைபடும் பகுதியானது அதன்

(A) பரப்பு (B) நீளம் (C) கனஅளவு (D) மொத்தப்பரப்பு

120. 1 டெசி.மீ பக்க அளவுள்ள ஒரு கனச்சதுரத்தின் புறப்பரப்பு

(A) 16 ச.டெசி.மீ (B) 4 ச.டெசி.மீ (C) 2 ச.டெசி.மீ (D) 1 ச.டெசி.மீ

11. புள்ளியியல்

121. முதல் 10 இயல் எண்களின் சராசரி

(A) 25 (B) 55 (C) 5.5 (D) 2.5

122. –5 முதல் 5 முடிய உள்ள முழுக்களின் கூட்டுச்சராசரி

(A) 3 (B) 0 (C) 25 (D) 10

123. $x, x+2, x+4, x+6, x+8$ என்பவற்றின் கூட்டுச்சராசரி 20 எனில், x-ன் மதிப்பு

(A) 32 (B) 16 (C) 8 (D) 4

124. 5, 5, 5, 5, 5, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 என்ற விவரங்களின் முகடு

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

125. 14, 12, 10, 9, 11 என்ற விவரங்களின் இடைநிலை அளவு

(A) 11 (B) 10 (C) 9.5 (D) 10.5

126. 2, 7, 4, 8, 9, 1 என்ற விவரங்களின் இடைநிலை அளவு

(A) 4 (B) 6 (C) 5.5 (D) 7

127. முதல் 5 முழு எண்களின் சராசரி

(A) 2 (B) 2.5 (C) 3 (D) 0

128. 10 எண்களின் கூட்டுச்சராசரி –7. ஒவ்வொரு எண்ணுடனும் 5 ஐக் கூட்டினால் கிடைக்கும் புதிய கூட்டுச்சராசரி

(A) –2 (B) 12 (C) –7 (D) 17

129. 24-ன் காரணிகளின் கூட்டுச்சராசரி

(A) 8.5 (B) 5.67 (C) 7 (D) 7.5

130. 5 எண்களின் கூட்டுச்சராசரி 20. அவற்றிலிருந்து ஒரு எண்ணை நீக்கினால் அவற்றின் கூட்டுச்சராசரி 15 எனில், நீக்கப்பட்ட எண்

(A) 5 (B) 40 (C) 20 (D) 10

12. நிகழ்தகவு

131. உறுதியான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

132. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவாகும்

(A) $\frac{7}{4}$ (B) -1 (C) $-\frac{2}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

133. இயலா நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) -1

134. ஒரு நிகழ்ச்சி x-ன் நிகழ்தகவு எப்போதும்

(A) $0 < x < 1$ (B) $0 \le x < 1$ (C) $0 \le x \le 1$ (D) $1 < x < 2$

135. $P(E') =$

(A) $1 - P(E)$ (B) $P(E) - 1$ (C) 1 (D) 0

விடைகள்

பயிற்சி 1.1

1. (i) கணம் அல்ல (ii) கணம் (iii) கணம் அல்ல (iv) கணம் (v) கணம்

2. (i) $0 \in A$ (ii) $6 \notin A$ (iii) $3 \in A$ (iv) $4 \in A$ (v) $7 \notin A$

3. (i) $\{x : x$ ஒரு மிகை இரட்டைப்படை எண்$\}$ (ii) $\{x : x$ ஒரு முழுஎண் மற்றும் $x < 20\}$

(iii) $\{x : x$ ஒரு மிகைமுழு மற்றும் 3ன் மடங்கு$\}$

(iv) $\{x : x$ ஒரு ஒற்றை இயல்எண் மற்றும் $x < 15\}$

(v) $\{x : x$ என்பது 'TAMILNADU' என்ற சொல்லில் உள்ள ஒரு எழுத்து$\}$

4. (i) $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (ii) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (iii) $C = \{2, 3\}$

(iv) $X = \{2, 4, 8, 16, 32\}$ (v) $M = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$

(vi) $P = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

5. (i) A = ஆங்கில உயிரெழுத்துக்களின் கணம்

(ii) B = 11ஐ விடக் குறைவாகவோ அல்லது சமமாகவோ உள்ள ஒற்றை இயல் எண்களின் கணம்

(iii) C = 26 ஐ விடக் குறைவாக உள்ள முழு வர்க்கஎண்களின் கணம்.

(iv) P = ‘SET THEORY’ என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களின் கணம்

(v) Q = 10-க்கும் 20-க்கும் இடைப்பட்ட உள்ள பகாஎண்களின் கணம்

6. (i) 4 (ii) 21 (iii) 1 (iv) 0 (v) 9 **7.** (i) முடிவிலாகணம் (ii) முடிவுறுகணம்

(iii) முடிவிலாகணம் (iv) முடிவிலாகணம் (v) முடிவுறுகணம்

8. (i) சமானகணங்கள் (ii) சமானகணங்கள் அல்ல (iii) சமானகணங்கள்

9. (i) சமகணங்கள் (ii) சமகணங்கள் அல்ல (iii) சமகணங்கள்

(iv) சமகணங்கள் அல்ல **10.** $B = D$ மற்றும் $E = G$

11. இல்லை, $\varnothing$-ல் உறுப்புகள் ஏதும் இல்லை. ஆனால், $\{\varnothing\}$ ஒரு உறுப்பைக் கொண்டுள்ளது.

12. ஒவ்வொன்றும் மற்றவற்றிலிருந்து மாறுபட்டது.

0 ஒரு முழு. இது ஒரு கணமல்ல
$\varnothing$-ன் உறுப்புகள் ஏதும் இல்லை
$\{0\}$ ஒரு உறுப்பைப் பெற்றுள்ளது, i.e., 0.
$\{\varnothing\}$ ஒரு உறுப்பைப் பெற்றுள்ளது, i.e., வெற்றுக்கணம்

13. (i) $\nsubseteq$ (ii) $\subseteq$ (iii) $\subseteq$ (iv) $\nsubseteq$

14. (i) X என்பது Y-ன் உட்கணமல்ல (ii) Y என்பது X-ன் உட்கணம்

15. A என்பது B-ன் உட்கணமல்ல

16. (i) $P(A) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\}$ (ii) $P(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

(iii) $P(A) = \{ \varnothing, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,7\}, \{6,8\}, \{7,8\}, \{5,6,7\}, \{5,6,8\}, \{5,7,8\}, \{6,7,8\}, \{5,6,7,8\}\}$ (iv) $P(A) = \{\phi\}$

17. (i) 64, 63 (ii) 128, 127 (iii) 2, 1 **18.** (i) 1 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 10 **19.** A என்பது வெற்றுக்கணம்

20. (i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$,

$C = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$

(ii) $n(A) = 10$, $n(B) = 10$, $n(C) = 11$ (iii) a) F b) T c) T d) T

பயிற்சி 1.2

1. (i) $A \cup B = \{-3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{0, 2, 4\}$ (ii) $A \cup B = \{2, 4, 6, 8\}$, $A \cap B = \phi$

(iii) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $A \cap B = \{2, 3, 5\}$

(iv) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{3, 4, 5, 6\}$

2. (i) $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 10, 12, 15, 18, 20, 25, 30\}$ (ii) $A \cap B = \{10, 15, 25\}$

3. (i) $X \cup Y = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, $X \cap Y = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

4. $\{7\}$ **5.** (ii) X மற்றும் Y வெட்டாக்கணங்கள்

6. (i) $A' = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ (ii) A என்பது அனைத்து பகா எண்களின் கணம் மற்றும் 1

7. (i) $A \cup B = \{a, b, c, d, f, g\}$ (ii) $(A \cup B)' = \{e, h\}$ (iii) $A \cap B = \{b, d\}$

(iv) $(A \cap B)' = \{a, c, e, f, g, h\}$ **8.** (i) $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (ii) $B' = \{1, 4, 6, 7, 8\}$

(iii) $A' \cup B' = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10\}$ (iv) $A' \cap B' = \{4, 6, 8\}$

9. (i) $M - N = \{3, 9\}$ (ii) $N - M = \{15, 17\}$ (iii) $N' - M = \{18\}$ (iv) $M' - N = \{18\}$

(v) $M \cap (M - N) = \{3, 9\}$ (vi) $N \cup (N - M) = \{7, 11, 15, 17\}$ (vii) $n(M - N) = 2$

10. (i) $A - B = \{3, 6, 9, 15, 18\}$ (ii) $B - C = \{16, 20\}$ (iii) $C - D = \{2, 4, 6, 8, 12\}$

(iv) $D - A = \{5, 10, 20, 25\}$ (v) $n(A - C) = 4$

11. (i) $U = \{1, 2, 3 \cdots 49\}$, $A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$

$B = \{16, 30, 44\}$ (ii) $A \cup B = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 44, 48\}$

$A \cap B = \{16, 44\}$, $n(A \cup B) = 13$, $n(A \cap B) = 2$

12. (i) $X \triangle Y = \{a, b, d, e, f, k\}$ (ii) $P \triangle Q = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$

(iii) $A \triangle B = \{-4, -2, -1, 5\}$

13. (i) $U = \{1,2,3,4,7,9,10,11\}$, $E = \{1,2,4,7\}$, $F = \{4,7,9,11\}$

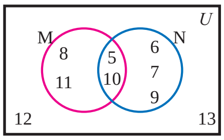
$E \cup F = \{1,2,4,7,9,11\}$, $E \cap F = \{4,7\}$

(ii) $n(\cup) = 8$, $n(E \cup F) = 6$, $n(E \cap F) = 2$

14. (i) $U = \{1,2,3,4,5,6,8,9,10\}$, $G = \{1,2,4,8\}$, $H = \{2,6,8,10\}$

(ii) $G' = \{3,5,6,9,10\}$, $H' = \{1,3,4,5,9\}$, $G' \cap H' = \{3,5,9\}$, $n(G \cup H)' = 3$, $n(G \cap H)' = 7$

பயிற்சி 1.3

1. 

2. $n(A \cap B) = 15$ 3. 16, 29 4. $n(B) = 27$

5. $n(A \cap B) = 6$, $n(\cup) = 43$ 6. $n(A \cup B) = 22$ 7. 150 8. 1400

9. (i) 180 (ii) 150 (iii) 450 10. 35 11. 12 12. 12 13. 47 14. ஆம், சரி

15. (i) $x = 8$ (ii) $n(A \cup B) = 88$ 16. (i) 35 (ii) 25 (iii) 20 17. 16%

பயிற்சி 2.1

1. (i) சரி (ii) தவறு (iii) சரி (iv) தவறு (v) தவறு (vi) தவறு

2. ஆம், ஏனெனில் $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{-1} = \cdots$ 3. $-\frac{4}{7}, -\frac{3}{7}$

பயிற்சி 2.2

1. (i) 0.42, முடிவுறு தசமபின்னம் (ii) $8.\overline{285714}$, முடிவுறா மற்றும் சுழல்தன்மையுள்ளது

(iii) $0.2\overline{36}$, முடிவுறா மற்றும் சுழல்தன்மையுள்ளது (iv) 0.918, முடிவுறு தசமபின்னம்

(v) $0.\overline{09}$, முடிவுறா மற்றும் சுழல்தன்மையுள்ளது

(vi) $-0.\overline{230769}$, முடிவுறா மற்றும் சுழல்தன்மையுள்ளது

(vii) $6.\overline{3}$, முடிவுறா மற்றும் சுழல்தன்மையுள்ளது (viii) -0.21875, முடிவுறு தசமபின்னம்

2. (i) முடிவுறு தசமபின்னம் (ii) முடிவுறா தசமபின்னம் (iii) முடிவுறு தசமபின்னம்

(iv) முடிவுறா தசமபின்னம்

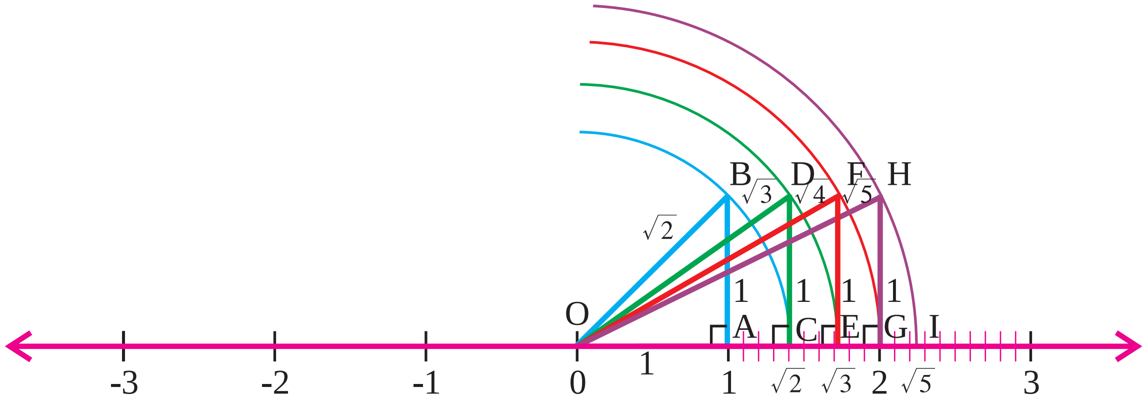
3. (i) $\frac{2}{11}$ (ii) $\frac{427}{999}$ (iii) $\frac{1}{9999}$ (iv) $\frac{16}{11}$ (v) $\frac{22}{3}$ (vi) $\frac{206}{495}$ 4. $0.\overline{076923}$, 6

5. $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$, $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$, $\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}$,

$\frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$, $\frac{6}{7} = 0.\overline{857142}$

பயிற்சி 2.3

1.



2. $1.83205\cdots$, $1.93205\cdots$, $2.03205\cdots$

3. $3.10110011100011110\cdots$, $3.2022002220002222\cdots$

4. $0.1510100110001110\cdots$, $0.1530300330003330\cdots$

5. $0.58088008880\cdots$, $0.59099009990\cdots$

6. $1.83205\cdots$, $1.93205\cdots$

7. ஒரு விகிதமுறு எண்: 1.102, ஒரு விகிதமுறா எண்: $1.9199119991119\cdots$

8. 0.13, 0.20 [குறிப்பு: வினா எண் 2 முதல் 8 வரை உள்ளவற்றிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு]

பயிற்சி 2.5

1. (i) விகிதமுறா மூலம் (ii) விகிதமுறா மூலம் (iii) விகிதமுறா மூலம் அல்ல (iv) விகிதமுறா மூலம் (v) விகிதமுறா மூலம் அல்ல

2. (i) $20+10\sqrt{5}+2\sqrt{3}+\sqrt{15}$ (ii) $8+2\sqrt{15}$ (iii) 11 (iv) 61

3. (i) $71\sqrt{3}$ (ii) $16\sqrt[3]{2}$ (iii) $-37\sqrt{2}$ (iv) $3\sqrt[3]{5}$ **4.** (i) $3\sqrt[3]{4}$ (ii) $7\sqrt{2}$ (iii) $8\sqrt{3}$ (iv) $5\sqrt[3]{5}$

5. (i) $\sqrt{180}$ (ii) $\sqrt[3]{500}$ (iii) $\sqrt[4]{405}$ (iv) $\sqrt{\frac{9}{2}}$ **6.** (i) $3\sqrt{10}$ (ii) $2\sqrt[3]{7}$ (iii) $2\sqrt[4]{6}$ (iv) $\sqrt[6]{45}$ (v) $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ (vi) $\sqrt[8]{32}$ **7.** (i) $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}$ (iii) $\sqrt[4]{10}>\sqrt{3}$

8. (i) இறங்கு வரிசை : $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[4]{5}$, ஏறு வரிசை : $\sqrt[4]{5},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt{3}$

(ii) இறங்கு வரிசை : $\sqrt[3]{4},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[3]{2}$, ஏறு வரிசை : $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[3]{4}$

(iii) இறங்கு வரிசை : $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[6]{3},\ \sqrt[9]{4}$, ஏறு வரிசை : $\sqrt[9]{4},\ \sqrt[6]{3},\ \sqrt[3]{2}$

பயிற்சி 2.6

1. (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{7}$ (iii) $\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt[3]{25}$ (v) $5+4\sqrt{3}$ (vi) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (vii) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ (viii) $2-\sqrt{3}$ **2.** (i) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ (ii) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (iv) $\frac{2\sqrt{77}}{11}$ (v) $\sqrt[3]{15}$

3. (i) $\frac{11-\sqrt{3}}{118}$ (ii) $\frac{3-\sqrt{5}}{12}$ (iii) $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{2}$ (iv) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (v) $\frac{17\sqrt{3}-21}{71}$

4. (i) 0.707 (ii) 3.464 (iii) 1.887 (iv) 0.655 (v) 0.102 (vi) 4.441

(vii) 3.732 (viii) 0.185 **5.** $a=\frac{31}{19},\ b=\frac{10}{19}$ **6.** $a=7,\ b=4$

7. $a=3,\ b=0$ **8.** $a=0,\ b=\frac{16}{11}$ **9.** 14 **10.** 4

பயிற்சி 2.7

1. 3, 1 **2.** 0, 5 **3.** 9, 0

பயிற்சி 3.1

1. (i) 7.493×10^{11} (ii) 1.3×10^{7} (iii) 1.05003×10^{5} (iv) 5.436×10^{14}
(v) 9.6×10^{-3} (vi) 1.3307×10^{-6} (vii) 2.2×10^{-9} (viii) 9.0×10^{-13}

2. (i) 0.00000325 (ii) 0.0004134 (iii) 41340 (iv) 18600000
(v) 9870000000 (vi) 0.000000001432

3. (i) 6.4×10^{13} (ii) 3.375×10^{1} (iii) 2.56×10^{3} (iv) 6.9984×10^{-28} (v) 3.993×10^{2}

பயிற்சி 3.2

1. (i) சரி (ii) தவறு (iii) தவறு (iv) தவறு (v) சரி (vi) தவறு

2. (i) $\log_2 16=4$ (ii) $\log_3 243=5$ (iii) $\log_{10}0.1=-1$ (iv) $\log_8\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{2}{3}$
(v) $\log_{25}5=\frac{1}{2}$ (vi) $\log_{12}\left(\frac{1}{144}\right)=-2$

3. (i) $6^3=216$ (ii) $9^{\frac{1}{2}}=3$ (iii) $5^0=1$ (iv) $(\sqrt{3})^4=9$ (v) $(64)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$ (vi) $(.5)^{-3}=8$

4. (i) -4 (ii) 3 (iii) 5 (iv) -3 (v) -4 (vi) 5

5. (i) $x=\sqrt{2}$ (ii) $x=\frac{1}{125}$ (iii) $y=\frac{1}{9}$ (iv) $x=\sqrt{5}$ (v) $x=10$ (vi) $x=-\frac{4}{3}$

6. (i) $\log_{10}9$ (ii) $\log_{25}\left(\frac{7}{2}\right)$ (iii) 2 (iv) 2 (v) $\log_{10}\left(\frac{72}{25}\right)$ (vi) 1

7. (i) $x=-2$ (ii) $x=2$ (iii) $x=2$ (iv) $x=4$ (v) $x=3$ (vi) $x=5$ (vii) $x=5$

(viii) $x=7$ **8.** (i) $y+z$ (ii) $3x$ (iii) $x+y+z$ (iv) $3(y-z)$ (v) $x-y+z$ (vi) $y-x$

பயிற்சி 3.3

1. (i) 9.243×10^{1} (ii) 9.243×10^{-1} (iii) 9.243×10^{3} (iv) 9.243×10^{5} (v) 9.243×10^{-3}
(vi) 9.243×10^{-2} **2.** (i) 3 (ii) 1 (iii) –3 (iv) –2 (v) –1 (vi) 0

3. (i) 4.3756 (ii) 1.3756 (iii) 0.3756 (iv) $\bar{1}.3756$ (v) 7.3756 (vi) $\bar{5}.3756$

4. (i) 1.3649 (ii) 0.9694 (iii) 2.5179 (iv) $\bar{3}.1348$ (v) $\bar{1}.9946$ (vi) 3.8180

5. (i) 1180 (ii) 57.41 (iii) 0.2413 (iv) 0.004015 (v) 1.876 (vi) 0.01513

6. (i) 30550 (ii) 21.82 (iii) 0.05309 (iv) 3.497 (v) 328100000 (vi) 8.249
(vii) 2.122 (viii) 1.666 (ix) 0.08366 (x) 0.5948 (xi) 1.888 (xii) 1.772

பயிற்சி 4.1

1. (i) ஒரு மாறி பல்லுறுப்புக்கோவை (ii) ஒரு மாறி பல்லுறுப்புக்கோவை
(iii) ஒரு மாறி பல்லுறுப்புக்கோவை
(iv) x-ன் அடுக்கு முழுஎண் அல்ல. எனவே, ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை அல்ல.
(v) t-ன் அடுக்கு முழுஎண் அல்ல. எனவே, ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை அல்ல.
(vi) மூன்று மாறிகளில் அமைந்த பல்லுறுப்புக்கோவை

2. (i) $-4, 3$ (ii) $0, \sqrt{3}$ (iii) $\sqrt{2}, 4$ (iv) $\frac{1}{3}, 1$ **3.** (i) 2 (ii) 1 (iii) 3 (iv) 0

4. (i) இருபடிப் பல்லுறுப்புக்கோவை (ii) முப்படிப் பல்லுறுப்புக்கோவை
(iii) ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக்கோவை (iv) இருபடிப் பல்லுறுப்புக்கோவை
(v) முப்படிப் பல்லுறுப்புக்கோவை (vi) ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக்கோவை

5. $ax^{27} + b,\ \ cx^{49},\ \ lx^{36} + mx^{35} + nx^2$

பயிற்சி 4.2

1. (i) $x = \frac{1}{4}$ (ii) $x = -\frac{5}{3}$ (iii) $x = 0$ (iv) $x = -9$

2. (i) $x = 3$ (ii) $x = \frac{6}{5}$ (iii) $x = -\frac{1}{11}$ (iv) $x = 0$

3. (i) $x = 2,\ x = 3$ மூலங்கள் (ii) $x = -1$ மூலம் , $x = 2$ மூலம் அல்ல
(iii) $x = 1,\ x = -2,\ x = 3$ மூலங்கள்
(iv) $x = -1,\ x = 2$ மூலங்கள் , $x = 3$ மூலம் அல்ல

பயிற்சி 4.3

1. (i) 10 (ii) –8 (iii) 20 (iv) –145 (v) –2 (vi) 26 (vii) $-3a$

2. $a = 5$ **3.** $m = 13$ **4.** $m = 3$ **5.** $m = 5$, மீதி 15.

பயிற்சி 4.4

1. (i) காரணி (ii) காரணி (iii) காரணி அல்ல (iv) காரணி அல்ல

2. காரணி அல்ல **4.** காரணி **5.** $p = 10$

பயிற்சி 4.5

1. (i) $25x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 20xy + 12yz + 30zx$ (ii) $4a^2 + 9b^2 + c^2 + 12ab - 6bc - 4ca$
(iii) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 4xy + 16yz - 8zx$ (iv) $p^2 + 4q^2 + r^2 - 4pq - 4qr + 2rp$

2. (i) $x^3 + 12x^2 + 39x + 28$ (ii) $p^3 + 4p^2 - 20p - 48$ (iii) $x^3 + x^2 - 17x + 15$
(iv) $x^3 - 7ax^2 + 14a^2x - 8a^3$ (v) $27x^3 + 72x^2 + 51x + 10$ (vi) $8x^3 - 36x^2 - 2x + 105$

3. (i) 19, 111, 189 (ii) –7, 2, 40 (iii) 60, 142, 105 (iv) –100, –5, 6 **4.** –10, –3, 10

5. (i) $27a^3 + 135a^2b + 225ab^2 + 125b^3$ (ii) $64x^3 - 144x^2y + 108xy^2 - 27y^3$

(iii) $8y^3 - 36y + \frac{54}{y} - \frac{27}{y^3}$ **6.** (i) 970299 (ii) 1030301 (iii) 941192 (iv) 1061208

(v) 1006012008 **7.** 793 **8.** –288 **9.** 52 **10.** 36

11. (i) $8x^3 + y^3 + 64z^3 - 24xyz$ (ii) $x^3 - 27y^3 - 125z^3 - 45xyz$ **12.** (i) –486 (ii) 2880

பயிற்சி 4.6

1. (i) $a^2(2a - 3b + 2c)$ (ii) $16x(1 + 4xy)$ (iii) $5x^3(2 - 5xy)$

(iv) $(y - z)(x + a)$ (v) $(p + q)(p + r)$

2. (i) $(x + 1)^2$ (ii) $(3x - 4y)^2$ (iii) $(b + 2)(b - 2)$ (iv) $(1 + 6x)(1 - 6x)$

3. (i) $(p + q + r)^2$ (ii) $(a - 2b - 6)^2$ (iii) $(3x - y + 1)^2$

(iv) $(2a - b + 3c)^2$ (v) $(5x - 2y - 3z)^2$

4. (i) $(3x + 4y)(9x^2 - 12xy + 16y^2)$ (ii) $(m + 2)(m^2 - 2m + 4)$

(iii) $(a + 5)(a^2 - 5a + 25)$ (iv) $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

(v) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

பயிற்சி 4.7

1. (i) $(x + 1)(x + 14)$ (ii) $(x + 3)(x + 10)$ (iii) $(y + 3)(y + 4)$

(iv) $(x - 2)(x - 12)$ (v) $(y - 6)(y - 10)$ (vi) $(t - 8)(t - 9)$

(vii) $(x - 1)(x + 15)$ (viii) $(x - 2)(x + 11)$ (ix) $(y - 4)(y + 9)$

(x) $(x + 9)(x - 11)$ (xi) $(m + 8)(m - 18)$ (xii) $(y + 4)(y - 5)$

2. (i) $(3x + 1)(x + 6)$ (ii) $(5x + 2)(x + 4)$ (iii) $(x + 2)(2x + 5)$

(iv) $(14x + 3)(x + 2)$ (v) $(5y - 4)(y - 5)$ (vi) $(9y - 7)(y - 1)$

(vii) $(3x - 1)(2x - 1)$ (viii) $(3x - 4)(x - 2)$ (ix) $(3x - 1)(x + 2)$

(x) $(2a - 3)(a + 10)$ (xi) $(x + 1)(11 - 6x)$ (xii) $(8x - 3)(x + 4)$

(xiii) $(x + 2)(2x - 7)$ (xiv) $(9x + 4)(2x - 1)$ (xv) $(1 - x)(3x + 10)$

3. (i) $(a + b + 2)(a + b + 7)$ (ii) $(p - q + 2)(p - q - 9)$

4. (i) $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$ (ii) $(x + 1)(x - 1)(x - 3)$

(iii) $(x + 1)(x + 2)(x - 2)$ (vi) $(x + 1)(x - 1)(x + 5)$

பயிற்சி 4.8

1. (i) $x = 1, y = 3$ (ii) $x = 2, y = -3$ (iii) $x = 3, y = 2$ (iv) $x = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{2}$

(v) $x = \frac{1}{2}, y = 1$ **2.** 16, 8 **3.** 27 **4.** 50, 22

5. (i) $x > 4$ (ii) $x < 3.5$ (iii) $x \leq -2.5$ (iv) $x \geq -2$

பயிற்சி 5.1

1. (i) தவறு (ii) சரி (iii) சரி (iv) தவறு (v) சரி (vi) தவறு (vii) சரி (viii) சரி (ix) தவறு (x) சரி **2.** (i) I (ii) III (iii) x அச்சின் மீது (iv) III (v) y அச்சின் மீது (vi) y அச்சின் மீது (vii) IV (viii) ஆதி (ix) I (x) II **3.** (i) –7 (ii) 3 (iii) 8 (iv) –5

4. (i) 5 (ii) 9 (iii) 8 (iv) –4 **5.** y அச்சுக்கு இணை **6.** x அச்சுக்கு இணை **7.** y அச்சு

8. *ABCD* ஒரு சதுரம் **9.** (0,4) **11.** (4,3)

பயிற்சி 5.2

1. (i) $\sqrt{202}$ (ii) $4\sqrt{5}$ (iii) $\sqrt{29}$ (iv) $2\sqrt{2}$ (v) $5\sqrt{2}$ (vi) 1 (vii) 5 (viii) 15 (ix) 18 (x) $\sqrt{74}$ **10.** 7, –5 **13.** –10, –2 **14.** (i) 24 (ii) $10 + 4\sqrt{10}$

15. (0,–7) **16.** $4\sqrt{5}$ **18.** (4,–3) **19.** 30

20. வரைய இயலாது, நேர்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள்

21. (8,–15) (–8,–15) (–8,15)(8, 15) **24.** 11, 7 **25.** 20

பயிற்சி 6.1

1. (i) $\sin\theta = \frac{6}{10}$, $\cos\theta = \frac{8}{10}$, $\tan\theta = \frac{6}{8}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{10}{6}$, $\sec\theta = \frac{10}{8}$, $\cot\theta = \frac{8}{6}$

(ii) $\sin\theta = \frac{7}{25}$, $\cos\theta = \frac{24}{25}$, $\tan\theta = \frac{7}{24}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{25}{7}$, $\sec\theta = \frac{25}{24}$, $\cot\theta = \frac{24}{7}$

(iii) $\sin\theta = \frac{35}{37}$, $\cos\theta = \frac{12}{37}$, $\tan\theta = \frac{35}{12}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{37}{35}$, $\sec\theta = \frac{37}{12}$, $\cot\theta = \frac{12}{35}$

(iv) $\sin\theta = \frac{9}{41}$, $\cos\theta = \frac{40}{41}$, $\tan\theta = \frac{9}{40}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{41}{9}$, $\sec\theta = \frac{41}{40}$, $\cot\theta = \frac{40}{9}$

2. (i) $\cos A = \frac{12}{15}$, $\tan A = \frac{9}{12}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{15}{9}$, $\sec A = \frac{15}{12}$, $\cot A = \frac{12}{9}$

(ii) $\sin A = \frac{8}{17}$, $\tan A = \frac{8}{15}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{17}{8}$, $\sec A = \frac{17}{15}$, $\cot A = \frac{15}{8}$

(iii) $\sin P = \frac{5}{13}$, $\cos P = \frac{12}{13}$, $\operatorname{cosec} P = \frac{13}{5}$, $\sec P = \frac{13}{12}$, $\cot P = \frac{12}{5}$

(iv) $\sin\theta = \frac{15}{17}$, $\cos\theta = \frac{8}{17}$, $\tan\theta = \frac{15}{8}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{17}{15}$, $\cot\theta = \frac{8}{15}$

(v) $\sin\theta = \frac{60}{61}$, $\cos\theta = \frac{11}{61}$, $\tan\theta = \frac{60}{11}$, $\sec\theta = \frac{61}{11}$, $\cot\theta = \frac{11}{60}$

(vi) $\cos\theta = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y}$, $\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{y}{x}$,

$\sec\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$

3. (i) 45° (ii) 0° (iii) 60° (iv) 30°

4. $\sin A = \frac{24}{26}$, $\cos A = \frac{10}{26}$, $\tan A = \frac{24}{10}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{26}{24}$, $\sec A = \frac{26}{10}$, $\cot A = \frac{10}{24}$

$\sin C = \frac{10}{26}$, $\cos C = \frac{24}{26}$, $\tan C = \frac{10}{24}$, $\operatorname{cosec} C = \frac{26}{10}$, $\sec C = \frac{26}{24}$, $\cot C = \frac{24}{10}$

5. $\frac{17}{19}$ **6.** 1 **7.** $\frac{-63}{4}$ **8.** 1 **9.** $\frac{225}{64}$ **10.** (i) 1 (ii) 0

13. (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (iv) $\frac{25}{144}$ (v) 7 (vi) $\frac{4}{3}$ (vii) 9 (viii) 2

பயிற்சி 6.2

1. (i) 1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) 1 (v) 1 (vi) 1

2. (i) 0 (ii) 2 (iii) 0 (iv) 6 (v) 1 (vi) 9 (vii) 0 (viii) $\frac{3}{2}$ (ix) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. (i) 60° (ii) 41° (iii) 55° (iv) 55° (v) 47° (vi) 60°

பயிற்சி 6.3

1. (i) 0.4384 (ii) 0.3090 (iii) 0.7002 (iv) 0.9670 (v) 0.2113 (vi) 0.9760

(vii) 0.7623 (viii) 0.1841 (ix) 2.7475 (x) 1.1778 **2.** (i) $44^\circ 30'$ (ii) $14^\circ 54'$

(iii) $20^\circ 12'$ (iv) $76^\circ 30'$ (v) $89^\circ 6'$ **3.** (i) 1.2698 (ii) 1.3579 (iii) 1.0042

(iv) 4.4996 (v) 4.8098 **4.** 99.4134 ச.செ.மீ **5.** 14.6278 ச.செ.மீ

6. 109.376 ச.செ.மீ **7.** 67.0389 ச.செ.மீ **8.** 13.8568 மீ **9.** 60°

10. 8.09 செ.மீ **11.** 3.1056 செ.மீ **12.** 20.784 செ.மீ

பயிற்சி 7.1

1. (i) 27° (ii) 66° (iii) 42° (iv) 55° (v) 70° **2.** (i) 122° (ii) 32° (iii) 60° (iv) 140

(v) 80° **3.** (i) 80° (ii) 35° **4.** (i) 30° (ii) 36° (iii) 60° (iv) 72° (v) $80^\circ, 100^\circ$

(vi) $54^\circ, 36^\circ$ **5.** (i) 36° (ii) 40° (iii) $40^\circ, 50^\circ$

6. (i) $\angle A = \angle C = \angle E = \angle G = 115^\circ$, $\angle B = \angle D = \angle H = 65^\circ$ **7.** (i) 30° (ii) 32°

8. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ **9.** $45^\circ, 25^\circ, 110^\circ$ **10.** $80^\circ, 60^\circ$

பயிற்சி 7.2

1. $48^\circ, 72^\circ, 96^\circ, 144^\circ$ **2.** $72^\circ, 108^\circ, 72^\circ$ **3.** (i) 45° (ii) 45° (iii) 45° (iv) 60°

4. $70^\circ, 110^\circ, 70^\circ, 110^\circ$ **5.** $l = 9, b = 6$ **6.** 15

7. (i) $50^\circ, 50^\circ$ (ii) $31^\circ, 59^\circ$ (iii) $30^\circ, 30^\circ$ **8.** 16

பயிற்சி 7.3

1. 12 செ.மீ **2.** 15 செ.மீ **3.** 26 செ.மீ **4.** 30 செ.மீ **5.** 40 செ.மீ **6.** 1 செ.மீ **7.** 13 செ.மீ
8. 7 செ.மீ **9.** (i) 75° (ii) 55° (iii) 110° (iv) 115° (v) 40° (vi) 42°

10. (i) 55°, (ii) 43° **11.** (i) 35° (ii) 40° (iii) 30° **12.** (i) 100° (ii) 30°

13. (i) 80° (ii) 80° (iii) 100 **14.** 50° **15.** (i) 50° (ii) 130°

பயிற்சி 8.1

1. (i) 22 செ.மீ, 231 ச.செ.மீ, 64 செ.மீ (ii) 2.57 செ.மீ, 6.3 ச.செ.மீ, 12.37 செ.மீ

(iii) 11 செ.மீ, 77 ச.செ.மீ, 39 செ.மீ

(iv) 16.5 செ.மீ, 123.75 ச.செ.மீ, 46.5 செ.மீ (v) 88 டெசி.மீ, 924 ச.டெசி.மீ,130 டெசி.மீ

2. (i) 120° (ii) 90° (iii) 36 செ.மீ

3. (i) 165 ச.செ.மீ, 53 செ.மீ (ii) 2200 ச.செ.மீ, 190 செ.மீ (iii) 91.5 ச.செ.மீ, 39.25 செ.மீ
(iv) 250 ச.செ.மீ, 65 செ.மீ **4.** (i) 10 செ.மீ (ii) 30 செ.மீ (iii) 6 செ.மீ

5. (i) 110.25 ச.செ.மீ (ii) 700 ச.செ.மீ **6.** (i) 280° (ii) 120°

7. (i) 72 செ.மீ, 308 ச.செ.மீ (ii) 25 செ.மீ, 38.5 ச.செ.மீ **8.** (i) 19 செ.மீ (ii) 8.5 செ.மீ

9. (i) 7 மணிநேரம் (ii) 2 மணிநேரம் (iii) 15 மணிநேரம் **10.** 0.16 ச.செ.மீ

11. (i) 154 ச.மீ (ii) 350 ச.மீ **12.** 123.84 ச.செ.மீ **13.** 346.5 ச.செ.மீ **14.** 4.2 மீ, 60°,12.8 மீ

பயிற்சி 8.2

1. (i) 125.44 ச.செ.மீ, 188.16 ச.செ.மீ, 175.62 க.செ.மீ

(ii) 144 ச.டெசி.மீ, 216 ச.டெசி.மீ, 216 க.டெசி.மீ

(iii) 25 ச.மீ, 37.5 ச.மீ, 15.625 க.மீ

(iv) 2304 ச.செ.மீ, 3456 ச.செ.மீ, 13824 க.செ.மீ

(v) 3844 ச.செ.மீ, 5766 ச.செ.மீ, 29791 க.செ.மீ

2. (i) 15 செ.மீ (ii) 13 செ.மீ (iii) 5 டெசி.மீ

3. 8000 க.செ.மீ **4.** 4 மீ **5.** 216 ச.செ.மீ **6.** 125 கனச்சதுரங்கள்

7. 8000 ச.செ.மீ, 64000 க.செ.மீ **8.** ₹ 4,00,000 **9.** 147 ச.மீ, ₹ 11,025

பயிற்சி 8.3

1. (i) 154 ச.செ.மீ, 174 ச.செ.மீ, 110 க.செ.மீ

(ii) 400 ச.டெசி.மீ, 700 ச.டெசி.மீ, 1200 க.டெசி.மீ

(iii) 70 ச.மீ, 82 ச.மீ, 42 க.மீ (iv) 512 ச.மீ, 992 ச.மீ, 1920 க.மீ

2. 27 செ.மீ **3.** 96 ச.செ.மீ, 160 ச.செ.மீ **4.** ₹ 123 **5.** 720 ச.மீ, ₹ 56,160

6. 4000 செங்கற்கள் **7.** ₹ 53,280

பயிற்சி 10.2

1. (2, 6) **2.** எண்ணற்ற தீர்வுகள் **3.** (2, 3) **4.** (3, 2) **5.** தீர்வு இல்லை

6. (2, 3) **7.** எண்ணற்ற தீர்வுகள் **8.** (1, 3) **9.** (1, 0) **11.** (–3, –3)

11. (2, –12) **12.** தீர்வு இல்லை

பயிற்சி 11.1

1. 4, 7, 6, 6, 5 **2.** 25, 30, 25, 60, 15, 5 **3.** 3, 4, 6, 6, 8 **4.** 5, 4, 3, 5, 3 **5.** 80, 50, 40, 120, 30

பயிற்சி 11.2

1. 28.67 **2.** 6 **3.** 62 **4.** 37 **5.** 192 **6.** 6 **7.** 61கி.கி **8.** 52.58 **9.** 27.13

10. 40.18 **11.** 28.67 **12.** 28 **13.** 48.1 **14.** 326.25 **15.** 55.5

பயிற்சி 11.3

1. (i) 51 (ii) 14.5 **2.** 17 **3.** 19 **4.** 34.05 **5.** 14.7 **6.** 40

பயிற்சி 11.4

1. 72 **2.** 7 **3.** 43.18 **4.** 41.75

வினா எண்	சராசரி	இடைநிலை அளவு	முகடு
5.	14	14	13,15
6.	4.05	4	4
7.	32.1	31.2	27.8
8.	28	30	33.3

பயிற்சி 12.1

1. (ii) $\frac{-1}{5}$ (iv) -0.78 (vi) 1.45 (ix) 112% **4.** $\frac{13}{20}$ **5.** (i) $\frac{13}{20}$ (ii) $\frac{7}{20}$

6. (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{8}{25}$ (iii) $\frac{2}{25}$ **7.** (i) $\frac{21}{50}$ (ii) $\frac{9}{10}$ (iii) $\frac{11}{25}$ (iv) $\frac{24}{25}$

8. (i) $\frac{49}{100}$ (ii) $\frac{4}{25}$ (iii) $\frac{69}{100}$ (iv) $\frac{19}{100}$ (v) $\frac{81}{100}$ **9.** (i) $\frac{39}{125}$ (ii) $\frac{9}{20}$ (iii) $\frac{119}{500}$

10. (i) $\frac{179}{500}$ (ii) $\frac{53}{500}$ (iii) $\frac{281}{500}$ (iv) $\frac{219}{500}$ **11.** (i) $\frac{4}{15}$ (ii) $\frac{19}{30}$ (iii) $\frac{11}{30}$ (iv) $\frac{1}{6}$

12. (i) $\frac{7}{10}$ (ii) $\frac{3}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$ **13.** (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{9}{20}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{3}{20}$

14. (i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{3}{20}$ **15.** (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{1}{20}$ (iii) $\frac{1}{10}$

16. (i) $\frac{7}{20}$ (ii) $\frac{3}{25}$ (iii) $\frac{11}{50}$ (iv) $\frac{9}{50}$ (v) $\frac{3}{4}$

17. (i) $\frac{7}{20}$ (ii) $\frac{1}{20}$ (iii) $\frac{3}{20}$ (iv) $\frac{1}{5}$ (v) $\frac{1}{20}$

18. (i) $\frac{183}{500}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{21}{250}$ (iv) $\frac{793}{1000}$ (v) $\frac{33}{250}$

19. (i) $\frac{3}{25}$ (ii) $\frac{19}{125}$ (iii) $\frac{21}{125}$ (iv) $\frac{29}{125}$ (v) $\frac{14}{25}$

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு

1	A	28	D	55	A	82	C	109	A
2	D	29	A	56	B	83	C	110	B
3	B	30	B	57	D	84	C	111	C
4	D	31	A	58	B	85	B	112	B
5	B	32	B	59	C	86	A	113	C
6	A	33	C	60	D	87	B	114	A
7	C	34	D	61	C	88	C	115	C
8	A	35	A	62	A	89	B	116	B
9	D	36	C	63	C	90	C	117	A
10	C	37	B	64	A	91	D	118	A
11	A	38	D	65	D	92	B	119	C
12	B	39	D	66	A	93	D	120	B
13	B	40	A	67	D	94	A	121	C
14	D	41	B	68	C	95	A	122	B
15	C	42	C	69	D	96	C	123	B
16	A	43	B	70	A	97	A	124	D
17	C	44	A	71	B	98	C	125	A
18	D	45	C	72	C	99	A	126	C
19	A	46	A	73	B	100	B	127	A
20	C	47	D	74	A	101	A	128	A
21	B	48	B	75	A	102	C	129	D
22	C	49	A	76	D	103	D	130	B
23	A	50	C	77	B	104	B	131	A
24	C	51	B	78	D	105	A	132	D
25	B	52	C	79	A	106	B	133	B
26	A	53	A	80	A	107	B	134	C
27	A	54	B	81	A	108	B	135	A

LOGARITHM TABLE

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531	0.0569	0.0607	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899	0.0934	0.0969	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2430	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.1	0.7076	0.7084	0.7093	0.7101	0.7110	0.7118	0.7126	0.7135	0.7143	0.7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.2	0.7160	0.7168	0.7177	0.7185	0.7193	0.7202	0.7210	0.7218	0.7226	0.7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5.4	0.7324	0.7332	0.7340	0.7348	0.7356	0.7364	0.7372	0.7380	0.7388	0.7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

LOGARITHM TABLE

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	0.7404	0.7412	0.7419	0.7427	0.7435	0.7443	0.7451	0.7459	0.7466	0.7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.6	0.7482	0.7490	0.7497	0.7505	0.7513	0.7520	0.7528	0.7536	0.7543	0.7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.7	0.7559	0.7566	0.7574	0.7582	0.7589	0.7597	0.7604	0.7612	0.7619	0.7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.8	0.7634	0.7642	0.7649	0.7657	0.7664	0.7672	0.7679	0.7686	0.7694	0.7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5.9	0.7709	0.7716	0.7723	0.7731	0.7738	0.7745	0.7752	0.7760	0.7767	0.7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
6.0	0.7782	0.7789	0.7796	0.7803	0.7810	0.7818	0.7825	0.7832	0.7839	0.7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.1	0.7853	0.7860	0.7868	0.7875	0.7882	0.7889	0.7896	0.7903	0.7910	0.7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.2	0.7924	0.7931	0.7938	0.7945	0.7952	0.7959	0.7966	0.7973	0.7980	0.7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
6.3	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.4	0.8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8089	0.8096	0.8102	0.8109	0.8116	0.8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.5	0.8129	0.8136	0.8142	0.8149	0.8156	0.8162	0.8169	0.8176	0.8182	0.8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.6	0.8195	0.8202	0.8209	0.8215	0.8222	0.8228	0.8235	0.8241	0.8248	0.8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.7	0.8261	0.8267	0.8274	0.8280	0.8287	0.8293	0.8299	0.8306	0.8312	0.8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.8	0.8325	0.8331	0.8338	0.8344	0.8351	0.8357	0.8363	0.8370	0.8376	0.8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.9	0.8388	0.8395	0.8401	0.8407	0.8414	0.8420	0.8426	0.8432	0.8439	0.8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.0	0.8451	0.8457	0.8463	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488	0.8494	0.8500	0.8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.1	0.8513	0.8519	0.8525	0.8531	0.8537	0.8543	0.8549	0.8555	0.8561	0.8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.2	0.8573	0.8579	0.8585	0.8591	0.8597	0.8603	0.8609	0.8615	0.8621	0.8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.3	0.8633	0.8639	0.8645	0.8651	0.8657	0.8663	0.8669	0.8675	0.8681	0.8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.4	0.8692	0.8698	0.8704	0.8710	0.8716	0.8722	0.8727	0.8733	0.8739	0.8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.5	0.8751	0.8756	0.8762	0.8768	0.8774	0.8779	0.8785	0.8791	0.8797	0.8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.7	0.8865	0.8871	0.8876	0.8882	0.8887	0.8893	0.8899	0.8904	0.8910	0.8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.8	0.8921	0.8927	0.8932	0.8938	0.8943	0.8949	0.8954	0.8960	0.8965	0.8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.9	0.8976	0.8982	0.8987	0.8993	0.8998	0.9004	0.9009	0.9015	0.9020	0.9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.0	0.9031	0.9036	0.9042	0.9047	0.9053	0.9058	0.9063	0.9069	0.9074	0.9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.1	0.9085	0.9090	0.9096	0.9101	0.9106	0.9112	0.9117	0.9122	0.9128	0.9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.2	0.9138	0.9143	0.9149	0.9154	0.9159	0.9165	0.9170	0.9175	0.9180	0.9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.3	0.9191	0.9196	0.9201	0.9206	0.9212	0.9217	0.9222	0.9227	0.9232	0.9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.4	0.9243	0.9248	0.9253	0.9258	0.9263	0.9269	0.9274	0.9279	0.9284	0.9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.5	0.9294	0.9299	0.9304	0.9309	0.9315	0.9320	0.9325	0.9330	0.9335	0.9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.6	0.9345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.7	0.9395	0.9400	0.9405	0.9410	0.9415	0.9420	0.9425	0.9430	0.9435	0.9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.9	0.9494	0.9499	0.9504	0.9509	0.9513	0.9518	0.9523	0.9528	0.9533	0.9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.0	0.9542	0.9547	0.9552	0.9557	0.9562	0.9566	0.9571	0.9576	0.9581	0.9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.1	0.9590	0.9595	0.9600	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9624	0.9628	0.9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.2	0.9638	0.9643	0.9647	0.9652	0.9657	0.9661	0.9666	0.9671	0.9675	0.9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.3	0.9685	0.9689	0.9694	0.9699	0.9703	0.9708	0.9713	0.9717	0.9722	0.9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.4	0.9731	0.9736	0.9741	0.9745	0.9750	0.9754	0.9759	0.9763	0.9768	0.9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.7	0.9868	0.9872	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	0.9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.9	0.9956	0.9961	0.9965	0.9969	0.9974	0.9978	0.9983	0.9987	0.9991	0.9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

ANTI LOGARITHM TABLE

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	1.000	1.002	1.005	1.007	1.009	1.012	1.014	1.016	1.019	1.021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.01	1.023	1.026	1.028	1.030	1.033	1.035	1.038	1.040	1.042	1.045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.02	1.047	1.050	1.052	1.054	1.057	1.059	1.062	1.064	1.067	1.069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.03	1.072	1.074	1.076	1.079	1.081	1.084	1.086	1.089	1.091	1.094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.04	1.096	1.099	1.102	1.104	1.107	1.109	1.112	1.114	1.117	1.119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.05	1.122	1.125	1.127	1.130	1.132	1.135	1.138	1.140	1.143	1.146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.06	1.148	1.151	1.153	1.156	1.159	1.161	1.164	1.167	1.169	1.172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.07	1.175	1.178	1.180	1.183	1.186	1.189	1.191	1.194	1.197	1.199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.08	1.202	1.205	1.208	1.211	1.213	1.216	1.219	1.222	1.225	1.227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.09	1.230	1.233	1.236	1.239	1.242	1.245	1.247	1.250	1.253	1.256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.10	1.259	1.262	1.265	1.268	1.271	1.274	1.276	1.279	1.282	1.285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.11	1.288	1.291	1.294	1.297	1.300	1.303	1.306	1.309	1.312	1.315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.12	1.318	1.321	1.324	1.327	1.330	1.334	1.337	1.340	1.343	1.346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.13	1.349	1.352	1.355	1.358	1.361	1.365	1.368	1.371	1.374	1.377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.14	1.380	1.384	1.387	1.390	1.393	1.396	1.400	1.403	1.406	1.409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.15	1.413	1.416	1.419	1.422	1.426	1.429	1.432	1.435	1.439	1.442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.16	1.445	1.449	1.452	1.455	1.459	1.462	1.466	1.469	1.472	1.476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.17	1.479	1.483	1.486	1.489	1.493	1.496	1.500	1.503	1.507	1.510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.18	1.514	1.517	1.521	1.524	1.528	1.531	1.535	1.538	1.542	1.545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.19	1.549	1.552	1.556	1.560	1.563	1.567	1.570	1.574	1.578	1.581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.20	1.585	1.589	1.592	1.596	1.600	1.603	1.607	1.611	1.614	1.618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.21	1.622	1.626	1.629	1.633	1.637	1.641	1.644	1.648	1.652	1.656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
0.22	1.660	1.663	1.667	1.671	1.675	1.679	1.683	1.687	1.690	1.694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
0.23	1.698	1.702	1.706	1.710	1.714	1.718	1.722	1.726	1.730	1.734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.24	1.738	1.742	1.746	1.750	1.754	1.758	1.762	1.766	1.770	1.774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.25	1.778	1.782	1.786	1.791	1.795	1.799	1.803	1.807	1.811	1.816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.26	1.820	1.824	1.828	1.832	1.837	1.841	1.845	1.849	1.854	1.858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.27	1.862	1.866	1.871	1.875	1.879	1.884	1.888	1.892	1.897	1.901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.28	1.905	1.910	1.914	1.919	1.923	1.928	1.932	1.936	1.941	1.945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.29	1.950	1.954	1.959	1.963	1.968	1.972	1.977	1.982	1.986	1.991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.30	1.995	2.000	2.004	2.009	2.014	2.018	2.023	2.028	2.032	2.037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.31	2.042	2.046	2.051	2.056	2.061	2.065	2.070	2.075	2.080	2.084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.32	2.089	2.094	2.099	2.104	2.109	2.113	2.118	2.123	2.128	2.133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.33	2.138	2.143	2.148	2.153	2.158	2.163	2.168	2.173	2.178	2.183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.34	2.188	2.193	2.198	2.203	2.208	2.213	2.218	2.223	2.228	2.234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.35	2.239	2.244	2.249	2.254	2.259	2.265	2.270	2.275	2.280	2.286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.36	2.291	2.296	2.301	2.307	2.312	2.317	2.323	2.328	2.333	2.339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.37	2.344	2.350	2.355	2.360	2.366	2.371	2.377	2.382	2.388	2.393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.38	2.399	2.404	2.410	2.415	2.421	2.427	2.432	2.438	2.443	2.449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.39	2.455	2.460	2.466	2.472	2.477	2.483	2.489	2.495	2.500	2.506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
0.40	2.512	2.518	2.523	2.529	2.535	2.541	2.547	2.553	2.559	2.564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0.41	2.570	2.576	2.582	2.588	2.594	2.600	2.606	2.612	2.618	2.624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0.42	2.630	2.636	2.642	2.649	2.655	2.661	2.667	2.673	2.679	2.685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
0.43	2.692	2.698	2.704	2.710	2.716	2.723	2.729	2.735	2.742	2.748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.44	2.754	2.761	2.767	2.773	2.780	2.786	2.793	2.799	2.805	2.812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.45	2.818	2.825	2.831	2.838	2.844	2.851	2.858	2.864	2.871	2.877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.46	2.884	2.891	2.897	2.904	2.911	2.917	2.924	2.931	2.938	2.944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.47	2.951	2.958	2.965	2.972	2.979	2.985	2.992	2.999	3.006	3.013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.48	3.020	3.027	3.034	3.041	3.048	3.055	3.062	3.069	3.076	3.083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
0.49	3.090	3.097	3.105	3.112	3.119	3.126	3.133	3.141	3.148	3.155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

ANTI LOGARITHM TABLE

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.50	3.162	3.170	3.177	3.184	3.192	3.199	3.206	3.214	3.221	3.228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
0.51	3.236	3.243	3.251	3.258	3.266	3.273	3.281	3.289	3.296	3.304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.52	3.311	3.319	3.327	3.334	3.342	3.350	3.357	3.365	3.373	3.381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.53	3.388	3.396	3.404	3.412	3.420	3.428	3.436	3.443	3.451	3.459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.54	3.467	3.475	3.483	3.491	3.499	3.508	3.516	3.524	3.532	3.540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.55	3.548	3.556	3.565	3.573	3.581	3.589	3.597	3.606	3.614	3.622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
0.56	3.631	3.639	3.648	3.656	3.664	3.673	3.681	3.690	3.698	3.707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.57	3.715	3.724	3.733	3.741	3.750	3.758	3.767	3.776	3.784	3.793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.58	3.802	3.811	3.819	3.828	3.837	3.846	3.855	3.864	3.873	3.882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
0.59	3.890	3.899	3.908	3.917	3.926	3.936	3.945	3.954	3.963	3.972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
0.60	3.981	3.990	3.999	4.009	4.018	4.027	4.036	4.046	4.055	4.064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
0.61	4.074	4.083	4.093	4.102	4.111	4.121	4.130	4.140	4.150	4.159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.62	4.169	4.178	4.188	4.198	4.207	4.217	4.227	4.236	4.246	4.256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.63	4.266	4.276	4.285	4.295	4.305	4.315	4.325	4.335	4.345	4.355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.64	4.365	4.375	4.385	4.395	4.406	4.416	4.426	4.436	4.446	4.457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.65	4.467	4.477	4.487	4.498	4.508	4.519	4.529	4.539	4.550	4.560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.66	4.571	4.581	4.592	4.603	4.613	4.624	4.634	4.645	4.656	4.667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
0.67	4.677	4.688	4.699	4.710	4.721	4.732	4.742	4.753	4.764	4.775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
0.68	4.786	4.797	4.808	4.819	4.831	4.842	4.853	4.864	4.875	4.887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
0.69	4.898	4.909	4.920	4.932	4.943	4.955	4.966	4.977	4.989	5.000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
0.70	5.012	5.023	5.035	5.047	5.058	5.070	5.082	5.093	5.105	5.117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
0.71	5.129	5.140	5.152	5.164	5.176	5.188	5.200	5.212	5.224	5.236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
0.72	5.248	5.260	5.272	5.284	5.297	5.309	5.321	5.333	5.346	5.358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
0.73	5.370	5.383	5.395	5.408	5.420	5.433	5.445	5.458	5.470	5.483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
0.74	5.495	5.508	5.521	5.534	5.546	5.559	5.572	5.585	5.598	5.610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
0.75	5.623	5.636	5.649	5.662	5.675	5.689	5.702	5.715	5.728	5.741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
0.76	5.754	5.768	5.781	5.794	5.808	5.821	5.834	5.848	5.861	5.875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
0.77	5.888	5.902	5.916	5.929	5.943	5.957	5.970	5.984	5.998	6.012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
0.78	6.026	6.039	6.053	6.067	6.081	6.095	6.109	6.124	6.138	6.152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
0.79	6.166	6.180	6.194	6.209	6.223	6.237	6.252	6.266	6.281	6.295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
0.80	6.310	6.324	6.339	6.353	6.368	6.383	6.397	6.412	6.427	6.442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
0.81	6.457	6.471	6.486	6.501	6.516	6.531	6.546	6.561	6.577	6.592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.82	6.607	6.622	6.637	6.653	6.668	6.683	6.699	6.714	6.730	6.745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.83	6.761	6.776	6.792	6.808	6.823	6.839	6.855	6.871	6.887	6.902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
0.84	6.918	6.934	6.950	6.966	6.982	6.998	7.015	7.031	7.047	7.063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
0.85	7.079	7.096	7.112	7.129	7.145	7.161	7.178	7.194	7.211	7.228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.86	7.244	7.261	7.278	7.295	7.311	7.328	7.345	7.362	7.379	7.396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.87	7.413	7.430	7.447	7.464	7.482	7.499	7.516	7.534	7.551	7.568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
0.88	7.586	7.603	7.621	7.638	7.656	7.674	7.691	7.709	7.727	7.745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
0.89	7.762	7.780	7.798	7.816	7.834	7.852	7.870	7.889	7.907	7.925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
0.90	7.943	7.962	7.980	7.998	8.017	8.035	8.054	8.072	8.091	8.110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
0.91	8.128	8.147	8.166	8.185	8.204	8.222	8.241	8.260	8.279	8.299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
0.92	8.318	8.337	8.356	8.375	8.395	8.414	8.433	8.453	8.472	8.492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
0.93	8.511	8.531	8.551	8.570	8.590	8.610	8.630	8.650	8.670	8.690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.94	8.710	8.730	8.750	8.770	8.790	8.810	8.831	8.851	8.872	8.892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.95	8.913	8.933	8.954	8.974	8.995	9.016	9.036	9.057	9.078	9.099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
0.96	9.120	9.141	9.162	9.183	9.204	9.226	9.247	9.268	9.290	9.311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
0.97	9.333	9.354	9.376	9.397	9.419	9.441	9.462	9.484	9.506	9.528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
0.98	9.550	9.572	9.594	9.616	9.638	9.661	9.683	9.705	9.727	9.750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
0.99	9.772	9.795	9.817	9.840	9.863	9.886	9.908	9.931	9.954	9.977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

NATURAL SINES

Degree	0´	6´	12´	18´	24´	30´	36´	42´	48´	54´	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0366	0.0384	0.0401	0.0419	0.0436	0.0454	0.0471	0.0488	0.0506	3	6	9	12	15
3	0.0523	0.0541	0.0558	0.0576	0.0593	0.0610	0.0628	0.0645	0.0663	0.0680	3	6	9	12	15
4	0.0698	0.0715	0.0732	0.0750	0.0767	0.0785	0.0802	0.0819	0.0837	0.0854	3	6	9	12	15
5	0.0872	0.0889	0.0906	0.0924	0.0941	0.0958	0.0976	0.0993	0.1011	0.1028	3	6	9	12	14
6	0.1045	0.1063	0.1080	0.1097	0.1115	0.1132	0.1149	0.1167	0.1184	0.1201	3	6	9	12	14
7	0.1219	0.1236	0.1253	0.1271	0.1288	0.1305	0.1323	0.1340	0.1357	0.1374	3	6	9	12	14
8	0.1392	0.1409	0.1426	0.1444	0.1461	0.1478	0.1495	0.1513	0.1530	0.1547	3	6	9	12	14
9	0.1564	0.1582	0.1599	0.1616	0.1633	0.1650	0.1668	0.1685	0.1702	0.1719	3	6	9	12	14
10	0.1736	0.1754	0.1771	0.1788	0.1805	0.1822	0.1840	0.1857	0.1874	0.1891	3	6	9	12	14
11	0.1908	0.1925	0.1942	0.1959	0.1977	0.1994	0.2011	0.2028	0.2045	0.2062	3	6	9	11	14
12	0.2079	0.2096	0.2113	0.2130	0.2147	0.2164	0.2181	0.2198	0.2215	0.2233	3	6	9	11	14
13	0.2250	0.2267	0.2284	0.2300	0.2317	0.2334	0.2351	0.2368	0.2385	0.2402	3	6	8	11	14
14	0.2419	0.2436	0.2453	0.2470	0.2487	0.2504	0.2521	0.2538	0.2554	0.2571	3	6	8	11	14
15	0.2588	0.2605	0.2622	0.2639	0.2656	0.2672	0.2689	0.2706	0.2723	0.2740	3	6	8	11	14
16	0.2756	0.2773	0.2790	0.2807	0.2823	0.2840	0.2857	0.2874	0.2890	0.2907	3	6	8	11	14
17	0.2924	0.2940	0.2957	0.2974	0.2990	0.3007	0.3024	0.3040	0.3057	0.3074	3	6	8	11	14
18	0.3090	0.3107	0.3123	0.3140	0.3156	0.3173	0.3190	0.3206	0.3223	0.3239	3	6	8	11	14
19	0.3256	0.3272	0.3289	0.3305	0.3322	0.3338	0.3355	0.3371	0.3387	0.3404	3	5	8	11	14
20	0.3420	0.3437	0.3453	0.3469	0.3486	0.3502	0.3518	0.3535	0.3551	0.3567	3	5	8	11	14
21	0.3584	0.3600	0.3616	0.3633	0.3649	0.3665	0.3681	0.3697	0.3714	0.3730	3	5	8	11	14
22	0.3746	0.3762	0.3778	0.3795	0.3811	0.3827	0.3843	0.3859	0.3875	0.3891	3	5	8	11	14
23	0.3907	0.3923	0.3939	0.3955	0.3971	0.3987	0.4003	0.4019	0.4035	0.4051	3	5	8	11	14
24	0.4067	0.4083	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4163	0.4179	0.4195	0.4210	3	5	8	11	13
25	0.4226	0.4242	0.4258	0.4274	0.4289	0.4305	0.4321	0.4337	0.4352	0.4368	3	5	8	11	13
26	0.4384	0.4399	0.4415	0.4431	0.4446	0.4462	0.4478	0.4493	0.4509	0.4524	3	5	8	10	13
27	0.4540	0.4555	0.4571	0.4586	0.4602	0.4617	0.4633	0.4648	0.4664	0.4679	3	5	8	10	13
28	0.4695	0.4710	0.4726	0.4741	0.4756	0.4772	0.4787	0.4802	0.4818	0.4833	3	5	8	10	13
29	0.4848	0.4863	0.4879	0.4894	0.4909	0.4924	0.4939	0.4955	0.4970	0.4985	3	5	8	10	13
30	0.5000	0.5015	0.5030	0.5045	0.5060	0.5075	0.5090	0.5105	0.5120	0.5135	3	5	8	10	13
31	0.5150	0.5165	0.5180	0.5195	0.5210	0.5225	0.5240	0.5255	0.5270	0.5284	2	5	7	10	12
32	0.5299	0.5314	0.5329	0.5344	0.5358	0.5373	0.5388	0.5402	0.5417	0.5432	2	5	7	10	12
33	0.5446	0.5461	0.5476	0.5490	0.5505	0.5519	0.5534	0.5548	0.5563	0.5577	2	5	7	10	12
34	0.5592	0.5606	0.5621	0.5635	0.5650	0.5664	0.5678	0.5693	0.5707	0.5721	2	5	7	10	12
35	0.5736	0.5750	0.5764	0.5779	0.5793	0.5807	0.5821	0.5835	0.5850	0.5864	2	5	7	10	12
36	0.5878	0.5892	0.5906	0.5920	0.5934	0.5948	0.5962	0.5976	0.5990	0.6004	2	5	7	9	12
37	0.6018	0.6032	0.6046	0.6060	0.6074	0.6088	0.6101	0.6115	0.6129	0.6143	2	5	7	9	12
38	0.6157	0.6170	0.6184	0.6198	0.6211	0.6225	0.6239	0.6252	0.6266	0.6280	2	5	7	9	11
39	0.6293	0.6307	0.6320	0.6334	0.6347	0.6361	0.6374	0.6388	0.6401	0.6414	2	4	7	9	11
40	0.6428	0.6441	0.6455	0.6468	0.6481	0.6494	0.6508	0.6521	0.6534	0.6547	2	4	7	9	11
41	0.6561	0.6574	0.6587	0.6600	0.6613	0.6626	0.6639	0.6652	0.6665	0.6678	2	4	7	9	11
42	0.6691	0.6704	0.6717	0.6730	0.6743	0.6756	0.6769	0.6782	0.6794	0.6807	2	4	6	9	11
43	0.6820	0.6833	0.6845	0.6858	0.6871	0.6884	0.6896	0.6909	0.6921	0.6934	2	4	6	8	11
44	0.6947	0.6959	0.6972	0.6984	0.6997	0.7009	0.7022	0.7034	0.7046	0.7059	2	4	6	8	10

NATURAL SINES

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7083	0.7096	0.7108	0.7120	0.7133	0.7145	0.7157	0.7169	0.7181	2	4	6	8	10
46	0.7193	0.7206	0.7218	0.7230	0.7242	0.7254	0.7266	0.7278	0.7290	0.7302	2	4	6	8	10
47	0.7314	0.7325	0.7337	0.7349	0.7361	0.7373	0.7385	0.7396	0.7408	0.7420	2	4	6	8	10
48	0.7431	0.7443	0.7455	0.7466	0.7478	0.7490	0.7501	0.7513	0.7524	0.7536	2	4	6	8	10
49	0.7547	0.7559	0.7570	0.7581	0.7593	0.7604	0.7615	0.7627	0.7638	0.7649	2	4	6	8	9
50	0.7660	0.7672	0.7683	0.7694	0.7705	0.7716	0.7727	0.7738	0.7749	0.7760	2	4	6	7	9
51	0.7771	0.7782	0.7793	0.7804	0.7815	0.7826	0.7837	0.7848	0.7859	0.7869	2	4	5	7	9
52	0.7880	0.7891	0.7902	0.7912	0.7923	0.7934	0.7944	0.7955	0.7965	0.7976	2	4	5	7	9
53	0.7986	0.7997	0.8007	0.8018	0.8028	0.8039	0.8049	0.8059	0.8070	0.8080	2	3	5	7	9
54	0.8090	0.8100	0.8111	0.8121	0.8131	0.8141	0.8151	0.8161	0.8171	0.8181	2	3	5	7	8
55	0.8192	0.8202	0.8211	0.8221	0.8231	0.8241	0.8251	0.8261	0.8271	0.8281	2	3	5	7	8
56	0.8290	0.8300	0.8310	0.8320	0.8329	0.8339	0.8348	0.8358	0.8368	0.8377	2	3	5	6	8
57	0.8387	0.8396	0.8406	0.8415	0.8425	0.8434	0.8443	0.8453	0.8462	0.8471	2	3	5	6	8
58	0.8480	0.8490	0.8499	0.8508	0.8517	0.8526	0.8536	0.8545	0.8554	0.8563	2	3	5	6	8
59	0.8572	0.8581	0.8590	0.8599	0.8607	0.8616	0.8625	0.8634	0.8643	0.8652	1	3	4	6	7
60	0.8660	0.8669	0.8678	0.8686	0.8695	0.8704	0.8712	0.8721	0.8729	0.8738	1	3	4	6	7
61	0.8746	0.8755	0.8763	0.8771	0.8780	0.8788	0.8796	0.8805	0.8813	0.8821	1	3	4	6	7
62	0.8829	0.8838	0.8846	0.8854	0.8862	0.8870	0.8878	0.8886	0.8894	0.8902	1	3	4	5	7
63	0.8910	0.8918	0.8926	0.8934	0.8942	0.8949	0.8957	0.8965	0.8973	0.8980	1	3	4	5	6
64	0.8988	0.8996	0.9003	0.9011	0.9018	0.9026	0.9033	0.9041	0.9048	0.9056	1	3	4	5	6
65	0.9063	0.9070	0.9078	0.9085	0.9092	0.9100	0.9107	0.9114	0.9121	0.9128	1	2	4	5	6
66	0.9135	0.9143	0.9150	0.9157	0.9164	0.9171	0.9178	0.9184	0.9191	0.9198	1	2	3	5	6
67	0.9205	0.9212	0.9219	0.9225	0.9232	0.9239	0.9245	0.9252	0.9259	0.9265	1	2	3	4	6
68	0.9272	0.9278	0.9285	0.9291	0.9298	0.9304	0.9311	0.9317	0.9323	0.9330	1	2	3	4	5
69	0.9336	0.9342	0.9348	0.9354	0.9361	0.9367	0.9373	0.9379	0.9385	0.9391	1	2	3	4	5
70	0.9397	0.9403	0.9409	0.9415	0.9421	0.9426	0.9432	0.9438	0.9444	0.9449	1	2	3	4	5
71	0.9455	0.9461	0.9466	0.9472	0.9478	0.9483	0.9489	0.9494	0.9500	0.9505	1	2	3	4	5
72	0.9511	0.9516	0.9521	0.9527	0.9532	0.9537	0.9542	0.9548	0.9553	0.9558	1	2	3	3	4
73	0.9563	0.9568	0.9573	0.9578	0.9583	0.9588	0.9593	0.9598	0.9603	0.9608	1	2	2	3	4
74	0.9613	0.9617	0.9622	0.9627	0.9632	0.9636	0.9641	0.9646	0.9650	0.9655	1	2	2	3	4
75	0.9659	0.9664	0.9668	0.9673	0.9677	0.9681	0.9686	0.9690	0.9694	0.9699	1	1	2	3	4
76	0.9703	0.9707	0.9711	0.9715	0.9720	0.9724	0.9728	0.9732	0.9736	0.9740	1	1	2	3	3
77	0.9744	0.9748	0.9751	0.9755	0.9759	0.9763	0.9767	0.9770	0.9774	0.9778	1	1	2	3	3
78	0.9781	0.9785	0.9789	0.9792	0.9796	0.9799	0.9803	0.9806	0.9810	0.9813	1	1	2	2	3
79	0.9816	0.9820	0.9823	0.9826	0.9829	0.9833	0.9836	0.9839	0.9842	0.9845	1	1	2	2	3
80	0.9848	0.9851	0.9854	0.9857	0.9860	0.9863	0.9866	0.9869	0.9871	0.9874	0	1	1	2	2
81	0.9877	0.9880	0.9882	0.9885	0.9888	0.9890	0.9893	0.9895	0.9898	0.9900	0	1	1	2	2
82	0.9903	0.9905	0.9907	0.9910	0.9912	0.9914	0.9917	0.9919	0.9921	0.9923	0	1	1	2	2
83	0.9925	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936	0.9938	0.9940	0.9942	0.9943	0	1	1	1	2
84	0.9945	0.9947	0.9949	0.9951	0.9952	0.9954	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0	1	1	1	2
85	0.9962	0.9963	0.9965	0.9966	0.9968	0.9969	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	0	0	1	1	1
86	0.9976	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9981	0.9982	0.9983	0.9984	0.9985	0	0	1	1	1
87	0.9986	0.9987	0.9988	0.9989	0.9990	0.9990	0.9991	0.9992	0.9993	0.9993	0	0	0	1	1
88	0.9994	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998	0	0	0	0	0
89	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0	0	0	0	0

NATURAL COSINES

(Numbers in mean difference columns to be subtracted, not added)

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0	0	0	0	0
1	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0	0	0	0	0
2	0.9994	0.9993	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9990	0.9989	0.9988	0.9987	0	0	0	1	1
3	0.9986	0.9985	0.9984	0.9983	0.9982	0.9981	0.9980	0.9979	0.9978	0.9977	0	0	1	1	1
4	0.9976	0.9974	0.9973	0.9972	0.9971	0.9969	0.9968	0.9966	0.9965	0.9963	0	0	1	1	1
5	0.9962	0.9960	0.9959	0.9957	0.9956	0.9954	0.9952	0.9951	0.9949	0.9947	0	1	1	1	2
6	0.9945	0.9943	0.9942	0.9940	0.9938	0.9936	0.9934	0.9932	0.9930	0.9928	0	1	1	1	2
7	0.9925	0.9923	0.9921	0.9919	0.9917	0.9914	0.9912	0.9910	0.9907	0.9905	0	1	1	2	2
8	0.9903	0.9900	0.9898	0.9895	0.9893	0.9890	0.9888	0.9885	0.9882	0.9880	0	1	1	2	2
9	0.9877	0.9874	0.9871	0.9869	0.9866	0.9863	0.9860	0.9857	0.9854	0.9851	0	1	1	2	2
10	0.9848	0.9845	0.9842	0.9839	0.9836	0.9833	0.9829	0.9826	0.9823	0.9820	1	1	2	2	3
11	0.9816	0.9813	0.9810	0.9806	0.9803	0.9799	0.9796	0.9792	0.9789	0.9785	1	1	2	2	3
12	0.9781	0.9778	0.9774	0.9770	0.9767	0.9763	0.9759	0.9755	0.9751	0.9748	1	1	2	3	3
13	0.9744	0.9740	0.9736	0.9732	0.9728	0.9724	0.9720	0.9715	0.9711	0.9707	1	1	2	3	3
14	0.9703	0.9699	0.9694	0.9690	0.9686	0.9681	0.9677	0.9673	0.9668	0.9664	1	1	2	3	4
15	0.9659	0.9655	0.9650	0.9646	0.9641	0.9636	0.9632	0.9627	0.9622	0.9617	1	2	2	3	4
16	0.9613	0.9608	0.9603	0.9598	0.9593	0.9588	0.9583	0.9578	0.9573	0.9568	1	2	2	3	4
17	0.9563	0.9558	0.9553	0.9548	0.9542	0.9537	0.9532	0.9527	0.9521	0.9516	1	2	3	3	4
18	0.9511	0.9505	0.9500	0.9494	0.9489	0.9483	0.9478	0.9472	0.9466	0.9461	1	2	3	4	5
19	0.9455	0.9449	0.9444	0.9438	0.9432	0.9426	0.9421	0.9415	0.9409	0.9403	1	2	3	4	5
20	0.9397	0.9391	0.9385	0.9379	0.9373	0.9367	0.9361	0.9354	0.9348	0.9342	1	2	3	4	5
21	0.9336	0.9330	0.9323	0.9317	0.9311	0.9304	0.9298	0.9291	0.9285	0.9278	1	2	3	4	5
22	0.9272	0.9265	0.9259	0.9252	0.9245	0.9239	0.9232	0.9225	0.9219	0.9212	1	2	3	4	6
23	0.9205	0.9198	0.9191	0.9184	0.9178	0.9171	0.9164	0.9157	0.9150	0.9143	1	2	3	5	6
24	0.9135	0.9128	0.9121	0.9114	0.9107	0.9100	0.9092	0.9085	0.9078	0.9070	1	2	4	5	6
25	0.9063	0.9056	0.9048	0.9041	0.9033	0.9026	0.9018	0.9011	0.9003	0.8996	1	3	4	5	6
26	0.8988	0.8980	0.8973	0.8965	0.8957	0.8949	0.8942	0.8934	0.8926	0.8918	1	3	4	5	6
27	0.8910	0.8902	0.8894	0.8886	0.8878	0.8870	0.8862	0.8854	0.8846	0.8838	1	3	4	5	7
28	0.8829	0.8821	0.8813	0.8805	0.8796	0.8788	0.8780	0.8771	0.8763	0.8755	1	3	4	6	7
29	0.8746	0.8738	0.8729	0.8721	0.8712	0.8704	0.8695	0.8686	0.8678	0.8669	1	3	4	6	7
30	0.8660	0.8652	0.8643	0.8634	0.8625	0.8616	0.8607	0.8599	0.8590	0.8581	1	3	4	6	7
31	0.8572	0.8563	0.8554	0.8545	0.8536	0.8526	0.8517	0.8508	0.8499	0.8490	2	3	5	6	8
32	0.8480	0.8471	0.8462	0.8453	0.8443	0.8434	0.8425	0.8415	0.8406	0.8396	2	3	5	6	8
33	0.8387	0.8377	0.8368	0.8358	0.8348	0.8339	0.8329	0.8320	0.8310	0.8300	2	3	5	6	8
34	0.8290	0.8281	0.8271	0.8261	0.8251	0.8241	0.8231	0.8221	0.8211	0.8202	2	3	5	7	8
35	0.8192	0.8181	0.8171	0.8161	0.8151	0.8141	0.8131	0.8121	0.8111	0.8100	2	3	5	7	8
36	0.8090	0.8080	0.8070	0.8059	0.8049	0.8039	0.8028	0.8018	0.8007	0.7997	2	3	5	7	9
37	0.7986	0.7976	0.7965	0.7955	0.7944	0.7934	0.7923	0.7912	0.7902	0.7891	2	4	5	7	9
38	0.7880	0.7869	0.7859	0.7848	0.7837	0.7826	0.7815	0.7804	0.7793	0.7782	2	4	5	7	9
39	0.7771	0.7760	0.7749	0.7738	0.7727	0.7716	0.7705	0.7694	0.7683	0.7672	2	4	6	7	9
40	0.7660	0.7649	0.7638	0.7627	0.7615	0.7604	0.7593	0.7581	0.7570	0.7559	2	4	6	8	9
41	0.7547	0.7536	0.7524	0.7513	0.7501	0.7490	0.7478	0.7466	0.7455	0.7443	2	4	6	8	10
42	0.7431	0.7420	0.7408	0.7396	0.7385	0.7373	0.7361	0.7349	0.7337	0.7325	2	4	6	8	10
43	0.7314	0.7302	0.7290	0.7278	0.7266	0.7254	0.7242	0.7230	0.7218	0.7206	2	4	6	8	10
44	0.7193	0.7181	0.7169	0.7157	0.7145	0.7133	0.7120	0.7108	0.7096	0.7083	2	4	6	8	10

NATURAL COSINES

(Numbers in mean difference columns to be subtracted, not added)

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7059	0.7046	0.7034	0.7022	0.7009	0.6997	0.6984	0.6972	0.6959	2	4	6	8	10
46	0.6947	0.6934	0.6921	0.6909	0.6896	0.6884	0.6871	0.6858	0.6845	0.6833	2	4	6	8	11
47	0.6820	0.6807	0.6794	0.6782	0.6769	0.6756	0.6743	0.6730	0.6717	0.6704	2	4	6	9	11
48	0.6691	0.6678	0.6665	0.6652	0.6639	0.6626	0.6613	0.6600	0.6587	0.6574	2	4	7	9	11
49	0.6561	0.6547	0.6534	0.6521	0.6508	0.6494	0.6481	0.6468	0.6455	0.6441	2	4	7	9	11
50	0.6428	0.6414	0.6401	0.6388	0.6374	0.6361	0.6347	0.6334	0.6320	0.6307	2	4	7	9	11
51	0.6293	0.6280	0.6266	0.6252	0.6239	0.6225	0.6211	0.6198	0.6184	0.6170	2	5	7	9	11
52	0.6157	0.6143	0.6129	0.6115	0.6101	0.6088	0.6074	0.6060	0.6046	0.6032	2	5	7	9	12
53	0.6018	0.6004	0.5990	0.5976	0.5962	0.5948	0.5934	0.5920	0.5906	0.5892	2	5	7	9	12
54	0.5878	0.5864	0.5850	0.5835	0.5821	0.5807	0.5793	0.5779	0.5764	0.5750	2	5	7	9	12
55	0.5736	0.5721	0.5707	0.5693	0.5678	0.5664	0.5650	0.5635	0.5621	0.5606	2	5	7	10	12
56	0.5592	0.5577	0.5563	0.5548	0.5534	0.5519	0.5505	0.5490	0.5476	0.5461	2	5	7	10	12
57	0.5446	0.5432	0.5417	0.5402	0.5388	0.5373	0.5358	0.5344	0.5329	0.5314	2	5	7	10	12
58	0.5299	0.5284	0.5270	0.5255	0.5240	0.5225	0.5210	0.5195	0.5180	0.5165	2	5	7	10	12
59	0.5150	0.5135	0.5120	0.5105	0.5090	0.5075	0.5060	0.5045	0.5030	0.5015	3	5	8	10	13
60	0.5000	0.4985	0.4970	0.4955	0.4939	0.4924	0.4909	0.4894	0.4879	0.4863	3	5	8	10	13
61	0.4848	0.4833	0.4818	0.4802	0.4787	0.4772	0.4756	0.4741	0.4726	0.4710	3	5	8	10	13
62	0.4695	0.4679	0.4664	0.4648	0.4633	0.4617	0.4602	0.4586	0.4571	0.4555	3	5	8	10	13
63	0.4540	0.4524	0.4509	0.4493	0.4478	0.4462	0.4446	0.4431	0.4415	0.4399	3	5	8	10	13
64	0.4384	0.4368	0.4352	0.4337	0.4321	0.4305	0.4289	0.4274	0.4258	0.4242	3	5	8	11	13
65	0.4226	0.4210	0.4195	0.4179	0.4163	0.4147	0.4131	0.4115	0.4099	0.4083	3	5	8	11	13
66	0.4067	0.4051	0.4035	0.4019	0.4003	0.3987	0.3971	0.3955	0.3939	0.3923	3	5	8	11	14
67	0.3907	0.3891	0.3875	0.3859	0.3843	0.3827	0.3811	0.3795	0.3778	0.3762	3	5	8	11	14
68	0.3746	0.3730	0.3714	0.3697	0.3681	0.3665	0.3649	0.3633	0.3616	0.3600	3	5	8	11	14
69	0.3584	0.3567	0.3551	0.3535	0.3518	0.3502	0.3486	0.3469	0.3453	0.3437	3	5	8	11	14
70	0.3420	0.3404	0.3387	0.3371	0.3355	0.3338	0.3322	0.3305	0.3289	0.3272	3	5	8	11	14
71	0.3256	0.3239	0.3223	0.3206	0.3190	0.3173	0.3156	0.3140	0.3123	0.3107	3	6	8	11	14
72	0.3090	0.3074	0.3057	0.3040	0.3024	0.3007	0.2990	0.2974	0.2957	0.2940	3	6	8	11	14
73	0.2924	0.2907	0.2890	0.2874	0.2857	0.2840	0.2823	0.2807	0.2790	0.2773	3	6	8	11	14
74	0.2756	0.2740	0.2723	0.2706	0.2689	0.2672	0.2656	0.2639	0.2622	0.2605	3	6	8	11	14
75	0.2588	0.2571	0.2554	0.2538	0.2521	0.2504	0.2487	0.2470	0.2453	0.2436	3	6	8	11	14
76	0.2419	0.2402	0.2385	0.2368	0.2351	0.2334	0.2317	0.2300	0.2284	0.2267	3	6	8	11	14
77	0.2250	0.2233	0.2215	0.2198	0.2181	0.2164	0.2147	0.2130	0.2113	0.2096	3	6	9	11	14
78	0.2079	0.2062	0.2045	0.2028	0.2011	0.1994	0.1977	0.1959	0.1942	0.1925	3	6	9	11	14
79	0.1908	0.1891	0.1874	0.1857	0.1840	0.1822	0.1805	0.1788	0.1771	0.1754	3	6	9	11	14
80	0.1736	0.1719	0.1702	0.1685	0.1668	0.1650	0.1633	0.1616	0.1599	0.1582	3	6	9	12	14
81	0.1564	0.1547	0.1530	0.1513	0.1495	0.1478	0.1461	0.1444	0.1426	0.1409	3	6	9	12	14
82	0.1392	0.1374	0.1357	0.1340	0.1323	0.1305	0.1288	0.1271	0.1253	0.1236	3	6	9	12	14
83	0.1219	0.1201	0.1184	0.1167	0.1149	0.1132	0.1115	0.1097	0.1080	0.1063	3	6	9	12	14
84	0.1045	0.1028	0.1011	0.0993	0.0976	0.0958	0.0941	0.0924	0.0906	0.0889	3	6	9	12	14
85	0.0872	0.0854	0.0837	0.0819	0.0802	0.0785	0.0767	0.0750	0.0732	0.0715	3	6	9	12	15
86	0.0698	0.0680	0.0663	0.0645	0.0628	0.0610	0.0593	0.0576	0.0558	0.0541	3	6	9	12	15
87	0.0523	0.0506	0.0488	0.0471	0.0454	0.0436	0.0419	0.0401	0.0384	0.0366	3	6	9	12	15
88	0.0349	0.0332	0.0314	0.0297	0.0279	0.0262	0.0244	0.0227	0.0209	0.0192	3	6	9	12	15
89	0.0175	0.0157	0.0140	0.0122	0.0105	0.0087	0.0070	0.0052	0.0035	0.0017	3	6	9	12	15

NATURAL TANGENTS

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0367	0.0384	0.0402	0.0419	0.0437	0.0454	0.0472	0.0489	0.0507	3	6	9	12	15
3	0.0524	0.0542	0.0559	0.0577	0.0594	0.0612	0.0629	0.0647	0.0664	0.0682	3	6	9	12	15
4	0.0699	0.0717	0.0734	0.0752	0.0769	0.0787	0.0805	0.0822	0.0840	0.0857	3	6	9	12	15
5	0.0875	0.0892	0.0910	0.0928	0.0945	0.0963	0.0981	0.0998	0.1016	0.1033	3	6	9	12	15
6	0.1051	0.1069	0.1086	0.1104	0.1122	0.1139	0.1157	0.1175	0.1192	0.1210	3	6	9	12	15
7	0.1228	0.1246	0.1263	0.1281	0.1299	0.1317	0.1334	0.1352	0.1370	0.1388	3	6	9	12	15
8	0.1405	0.1423	0.1441	0.1459	0.1477	0.1495	0.1512	0.1530	0.1548	0.1566	3	6	9	12	15
9	0.1584	0.1602	0.1620	0.1638	0.1655	0.1673	0.1691	0.1709	0.1727	0.1745	3	6	9	12	15
10	0.1763	0.1781	0.1799	0.1817	0.1835	0.1853	0.1871	0.1890	0.1908	0.1926	3	6	9	12	15
11	0.1944	0.1962	0.1980	0.1998	0.2016	0.2035	0.2053	0.2071	0.2089	0.2107	3	6	9	12	15
12	0.2126	0.2144	0.2162	0.2180	0.2199	0.2217	0.2235	0.2254	0.2272	0.2290	3	6	9	12	15
13	0.2309	0.2327	0.2345	0.2364	0.2382	0.2401	0.2419	0.2438	0.2456	0.2475	3	6	9	12	15
14	0.2493	0.2512	0.2530	0.2549	0.2568	0.2586	0.2605	0.2623	0.2642	0.2661	3	6	9	12	16
15	0.2679	0.2698	0.2717	0.2736	0.2754	0.2773	0.2792	0.2811	0.2830	0.2849	3	6	9	13	16
16	0.2867	0.2886	0.2905	0.2924	0.2943	0.2962	0.2981	0.3000	0.3019	0.3038	3	6	9	13	16
17	0.3057	0.3076	0.3096	0.3115	0.3134	0.3153	0.3172	0.3191	0.3211	0.3230	3	6	10	13	16
18	0.3249	0.3269	0.3288	0.3307	0.3327	0.3346	0.3365	0.3385	0.3404	0.3424	3	6	10	13	16
19	0.3443	0.3463	0.3482	0.3502	0.3522	0.3541	0.3561	0.3581	0.3600	0.3620	3	7	10	13	16
20	0.3640	0.3659	0.3679	0.3699	0.3719	0.3739	0.3759	0.3779	0.3799	0.3819	3	7	10	13	17
21	0.3839	0.3859	0.3879	0.3899	0.3919	0.3939	0.3959	0.3979	0.4000	0.4020	3	7	10	13	17
22	0.4040	0.4061	0.4081	0.4101	0.4122	0.4142	0.4163	0.4183	0.4204	0.4224	3	7	10	14	17
23	0.4245	0.4265	0.4286	0.4307	0.4327	0.4348	0.4369	0.4390	0.4411	0.4431	3	7	10	14	17
24	0.4452	0.4473	0.4494	0.4515	0.4536	0.4557	0.4578	0.4599	0.4621	0.4642	4	7	11	14	18
25	0.4663	0.4684	0.4706	0.4727	0.4748	0.4770	0.4791	0.4813	0.4834	0.4856	4	7	11	14	18
26	0.4877	0.4899	0.4921	0.4942	0.4964	0.4986	0.5008	0.5029	0.5051	0.5073	4	7	11	15	18
27	0.5095	0.5117	0.5139	0.5161	0.5184	0.5206	0.5228	0.5250	0.5272	0.5295	4	7	11	15	18
28	0.5317	0.5340	0.5362	0.5384	0.5407	0.5430	0.5452	0.5475	0.5498	0.5520	4	8	11	15	19
29	0.5543	0.5566	0.5589	0.5612	0.5635	0.5658	0.5681	0.5704	0.5727	0.5750	4	8	12	15	19
30	0.5774	0.5797	0.5820	0.5844	0.5867	0.5890	0.5914	0.5938	0.5961	0.5985	4	8	12	16	20
31	0.6009	0.6032	0.6056	0.6080	0.6104	0.6128	0.6152	0.6176	0.6200	0.6224	4	8	12	16	20
32	0.6249	0.6273	0.6297	0.6322	0.6346	0.6371	0.6395	0.6420	0.6445	0.6469	4	8	12	16	20
33	0.6494	0.6519	0.6544	0.6569	0.6594	0.6619	0.6644	0.6669	0.6694	0.6720	4	8	13	17	21
34	0.6745	0.6771	0.6796	0.6822	0.6847	0.6873	0.6899	0.6924	0.6950	0.6976	4	9	13	17	21
35	0.7002	0.7028	0.7054	0.7080	0.7107	0.7133	0.7159	0.7186	0.7212	0.7239	4	9	13	18	22
36	0.7265	0.7292	0.7319	0.7346	0.7373	0.7400	0.7427	0.7454	0.7481	0.7508	5	9	14	18	23
37	0.7536	0.7563	0.7590	0.7618	0.7646	0.7673	0.7701	0.7729	0.7757	0.7785	5	9	14	18	23
38	0.7813	0.7841	0.7869	0.7898	0.7926	0.7954	0.7983	0.8012	0.8040	0.8069	5	9	14	19	24
39	0.8098	0.8127	0.8156	0.8185	0.8214	0.8243	0.8273	0.8302	0.8332	0.8361	5	10	15	20	24
40	0.8391	0.8421	0.8451	0.8481	0.8511	0.8541	0.8571	0.8601	0.8632	0.8662	5	10	15	20	25
41	0.8693	0.8724	0.8754	0.8785	0.8816	0.8847	0.8878	0.8910	0.8941	0.8972	5	10	16	21	26
42	0.9004	0.9036	0.9067	0.9099	0.9131	0.9163	0.9195	0.9228	0.9260	0.9293	5	11	16	21	27
43	0.9325	0.9358	0.9391	0.9424	0.9457	0.9490	0.9523	0.9556	0.9590	0.9623	6	11	17	22	28
44	0.9657	0.9691	0.9725	0.9759	0.9793	0.9827	0.9861	0.9896	0.9930	0.9965	6	11	17	23	29

NATURAL TANGENTS

Degree	0´	6´	12´	18´	24´	30´	36´	42´	48´	54´	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	1.0000	1.0035	1.0070	1.0105	1.0141	1.0176	1.0212	1.0247	1.0283	1.0319	6	12	18	24	30
46	1.0355	1.0392	1.0428	1.0464	1.0501	1.0538	1.0575	1.0612	1.0649	1.0686	6	12	18	25	31
47	1.0724	1.0761	1.0799	1.0837	1.0875	1.0913	1.0951	1.0990	1.1028	1.1067	6	13	19	25	32
48	1.1106	1.1145	1.1184	1.1224	1.1263	1.1303	1.1343	1.1383	1.1423	1.1463	7	13	20	27	33
49	1.1504	1.1544	1.1585	1.1626	1.1667	1.1708	1.1750	1.1792	1.1833	1.1875	7	14	21	28	34
50	1.1918	1.1960	1.2002	1.2045	1.2088	1.2131	1.2174	1.2218	1.2261	1.2305	7	14	22	29	36
51	1.2349	1.2393	1.2437	1.2482	1.2527	1.2572	1.2617	1.2662	1.2708	1.2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	1.2846	1.2892	1.2938	1.2985	1.3032	1.3079	1.3127	1.3175	1.3222	8	16	24	31	39
53	1.3270	1.3319	1.3367	1.3416	1.3465	1.3514	1.3564	1.3613	1.3663	1.3713	8	16	25	33	41
54	1.3764	1.3814	1.3865	1.3916	1.3968	1.4019	1.4071	1.4124	1.4176	1.4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	1.4335	1.4388	1.4442	1.4496	1.4550	1.4605	1.4659	1.4715	1.4770	9	18	27	36	45
56	1.4826	1.4882	1.4938	1.4994	1.5051	1.5108	1.5166	1.5224	1.5282	1.5340	10	19	29	38	48
57	1.5399	1.5458	1.5517	1.5577	1.5637	1.5697	1.5757	1.5818	1.5880	1.5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	1.6066	1.6128	1.6191	1.6255	1.6319	1.6383	1.6447	1.6512	1.6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	1.6709	1.6775	1.6842	1.6909	1.6977	1.7045	1.7113	1.7182	1.7251	11	23	34	45	56
60	1.7321	1.7391	1.7461	1.7532	1.7603	1.7675	1.7747	1.7820	1.7893	1.7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	1.8115	1.8190	1.8265	1.8341	1.8418	1.8495	1.8572	1.8650	1.8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	1.8887	1.8967	1.9047	1.9128	1.9210	1.9292	1.9375	1.9458	1.9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	1.9711	1.9797	1.9883	1.9970	2.0057	2.0145	2.0233	2.0323	2.0413	15	29	44	58	73
64	2.0503	2.0594	2.0686	2.0778	2.0872	2.0965	2.1060	2.1155	2.1251	2.1348	16	31	47	63	78
65	2.1445	2.1543	2.1642	2.1742	2.1842	2.1943	2.2045	2.2148	2.2251	2.2355	17	34	51	68	85
66	2.2460	2.2566	2.2673	2.2781	2.2889	2.2998	2.3109	2.3220	2.3332	2.3445	18	37	55	73	92
67	2.3559	2.3673	2.3789	2.3906	2.4023	2.4142	2.4262	2.4383	2.4504	2.4627	20	40	60	79	99
68	2.4751	2.4876	2.5002	2.5129	2.5257	2.5386	2.5517	2.5649	2.5782	2.5916	22	43	65	87	108
69	2.6051	2.6187	2.6325	2.6464	2.6605	2.6746	2.6889	2.7034	2.7179	2.7326	24	47	71	95	119
70	2.7475	2.7625	2.7776	2.7929	2.8083	2.8239	2.8397	2.8556	2.8716	2.8878	26	52	78	104	131
71	2.9042	2.9208	2.9375	2.9544	2.9714	2.9887	3.0061	3.0237	3.0415	3.0595	29	58	87	116	145
72	3.0777	3.0961	3.1146	3.1334	3.1524	3.1716	3.1910	3.2106	3.2305	3.2506	32	64	96	129	161
73	3.2709	3.2914	3.3122	3.3332	3.3544	3.3759	3.3977	3.4197	3.4420	3.4646	36	72	108	144	180
74	3.4874	3.5105	3.5339	3.5576	3.5816	3.6059	3.6305	3.6554	3.6806	3.7062	41	81	122	163	204
75	3.7321	3.7583	3.7848	3.8118	3.8391	3.8667	3.8947	3.9232	3.9520	3.9812	46	93	139	186	232
76	4.0108	4.0408	4.0713	4.1022	4.1335	4.1653	4.1976	4.2303	4.2635	4.2972	53	107	160	213	267
77	4.3315	4.3662	4.4015	4.4373	4.4737	4.5107	4.5483	4.5864	4.6252	4.6646					
78	4.7046	4.7453	4.7867	4.8288	4.8716	4.9152	4.9594	5.0045	5.0504	5.0970					
79	5.1446	5.1929	5.2422	5.2924	5.3435	5.3955	5.4486	5.5026	5.5578	5.6140					
80	5.6713	5.7297	5.7894	5.8502	5.9124	5.9758	6.0405	6.1066	6.1742	6.2432					
81	6.3138	6.3859	6.4596	6.5350	6.6122	6.6912	6.7720	6.8548	6.9395	7.0264					
82	7.1154	7.2066	7.3002	7.3962	7.4947	7.5958	7.6996	7.8062	7.9158	8.0285					
83	8.1443	8.2636	8.3863	8.5126	8.6427	8.7769	8.9152	9.0579	9.2052	9.3572					
84	9.5144	9.6768	9.8448	10.0187	10.1988	10.3854	10.5789	10.7797	10.9882	11.2048					
85	11.4301	11.6645	11.9087	12.1632	12.4288	12.7062	12.9962	13.2996	13.6174	13.9507					
86	14.3007	14.6685	15.0557	15.4638	15.8945	16.3499	16.8319	17.3432	17.8863	18.4645					
87	19.0811	19.7403	20.4465	21.2049	22.0217	22.9038	23.8593	24.8978	26.0307	27.2715					
88	28.6363	30.1446	31.8205	33.6935	35.8006	38.1885	40.9174	44.0661	47.7395	52.0807					
89	57.2900	63.6567	71.6151	81.8470	95.4895	114.5887	143.2371	190.9842	286.4777	572.9572					