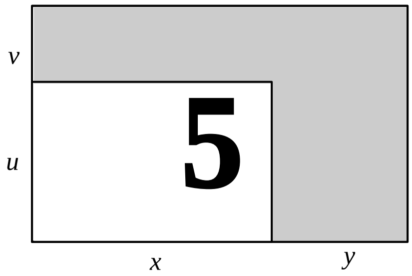


ബീജഗണിതം

സൂത്രത്തിലൊരു ഗുണനം

101×26 എത്രയാണ്? 101×47 ആയാലോ? കുറേക്കൂടി രണ്ടക്കസംഖ്യകൾകൊണ്ട് 101 നെ ഗുണിച്ചു നോക്കൂ. എന്തുകൊണ്ടാണ് അതേ അക്കങ്ങൾ തന്നെ കിട്ടുന്നത്?

101×23 നെ $(100 + 1) \times 23$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. അപ്പോൾ

$$\begin{aligned} 101 \times 23 &= (100 + 1)\ 23 \\ &= 2300 + 23 = 2323 \end{aligned}$$

ഇവിടെ നാം ഉപയോഗിച്ച പൊതുതത്വം എന്താണ്?

ഇതുപോലെ ഏതുസംഖ്യയെ മൂന്നക്കസംഖ്യകൾകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാലാണ് അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്നത്? (അഞ്ചാം ക്ലാസ്സിലെ **സംഖ്യാലോകം** എന്ന പാഠത്തിലെ ഹരിച്ച് ഹരിച്ച് എന്ന ഭാഗം ഒന്നു കൂടി നോക്കൂ.)

തുകകളുടെ ഗുണനം

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയെ മറ്റൊരു സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നതിന്, തുകയിലെ ഓരോ സംഖ്യയേയും വെവ്വേറെ ഗുണിച്ചു കൂട്ടണം എന്നതാണല്ലോ മുകളിൽ ചെയ്ത കണക്കുകളിൽ ഉപയോഗിച്ച തത്വം.

ബീജഗണിതരീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ x, y, z ഏതു സംഖ്യകളായാലും

$$(x + y)\ z = xz + yz$$

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയെ മറ്റു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക കൊണ്ട് ഗുണിക്കണമെങ്കിലോ?

ഉദാഹരണമായി $(8 + 6) \times (10 + 5)$ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

പല മാർഗങ്ങളുണ്ട്, അല്ലേ?

$$(8 + 6)\ (10 + 5) = 14 \times 15 = 210$$

എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാം. അല്ലെങ്കിൽ

$$(8 + 6)\ (10 + 5) = 14 \times (10 + 5)$$

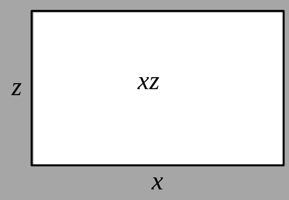
ബീജഗണിതവും ജ്യാമിതിയും

x, y, z അധിസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ

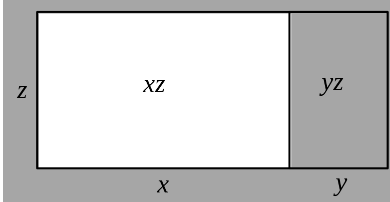
$$(x + y)\ z = xz + yz$$

എന്നതിനെ ജ്യാമിതിയിലൂടെ വിശദീകരിക്കാം.

വശങ്ങളുടെ നീളം x, z ആയ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് xz ആണല്ലോ.



ഇതിന്റെ x നീളമുള്ള വശം നീട്ടി, അൽപം കൂടി വലിയ ചതുരം ഉണ്ടാക്കിയാലോ? കൂട്ടിയ നീളം y ആണെങ്കിൽ, പുതിയ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $x + y$ ഉം z ഉം ആണ്.



അപ്പോൾ പുതിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $(x + y)\ z$ ആണല്ലോ.

ചിത്രത്തിൽനിന്ന് ഈ പുതിയ ചതുരം, ആദ്യത്തെ ചതുരവും മറ്റൊരു ചതുരവും ചേർന്നതാണെന്ന് കാണാം. ഇവയുടെ പരപ്പളവുകൾ xz, yz ആണ്. വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ഈ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയുമാണ്.

അതായത്,

$$(x + y)\ z = xz + yz$$

$$= (14 \times 10) + (14 \times 5)$$

$$= 140 + 70$$

$$= 210$$

എന്നും കാണാം. (14×15) കണ്ടുപിടിക്കാൻ, സാധാരണ രീതിയിൽ ഗുണനഫലങ്ങൾ ഒന്നിനുതാഴെ മറ്റൊന്നെഴുതി കൂട്ടുമ്പോൾ, ഉപയോഗിക്കുന്നത് ഇതാണല്ലോ.

$$(8 + 6)(10 + 5) = (8 + 6) \times 15$$

$$= (8 \times 15) + (6 \times 15)$$

$$= 120 + 90$$

$$= 210$$

എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുന്നതാണ് ഇനിയുമൊരു രീതി.

പൊതുവായ ബീജഗണിതരീതി നോക്കാം: $(x + y)(u + v)$ കണ്ടുപിടിക്കണം.

$u + v$ എന്ന തുകയെ z എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിച്ചാൽ

$$(x + y)(u + v) = (x + y)z$$

എന്നാകുമല്ലോ.

$$(x + y)z = xz + yz$$

എന്നും നമുക്കറിയാം. ഇനി $z = u + v$ എന്നത് തിരിച്ചുപയോഗിച്ചാൽ

$$xz = x(u + v) = xu + xv$$

$$yz = y(u + v) = yu + yv$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതെല്ലാം ചേർത്തുവച്ചാൽ എന്താകും?

x, y, u, v ഏതു സംഖ്യകളായാലും

$$(x + y)(u + v) = xu + xv + yu + yv$$

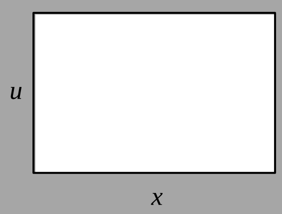
എന്താണിതിന്റെ അർഥം?

ഒരു തുകയെ മറ്റൊരു തുകകൊണ്ട് ഗുണിക്കാൻ, ആദ്യത്തെ തുകയിലെ ഓരോ സംഖ്യയേയും രണ്ടാമത്തെ തുകയിലെ ഓരോ സംഖ്യകൊണ്ടും ഗുണിച്ച് ഈ ഗുണനഫലങ്ങളെല്ലാം കൂട്ടണം.

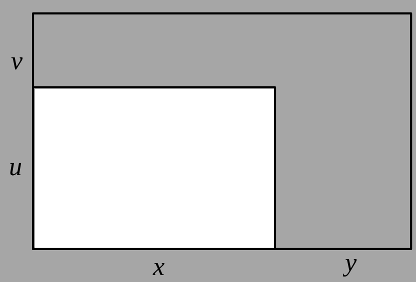
വീണ്ടും ജ്യാമിതി

തുകകളുടെ ഗുണനവും (അധിസംഖ്യകളാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നതെങ്കിൽ) ജ്യാമിതിയിലൂടെ വിശദീകരിക്കാം.

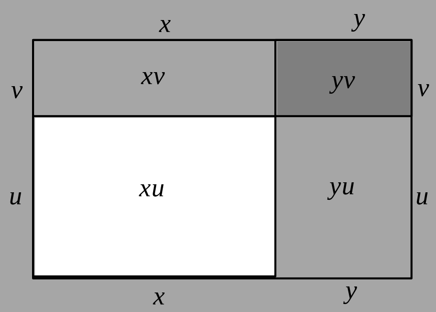
x, y, u, v എന്നീ അധിസംഖ്യകളിൽനിന്നു തുടങ്ങാം. ആദ്യം വശങ്ങളുടെ നീളം x, u ആയ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കുക.



ഇനി x നീളമുള്ള വശം $x + y$ ആയും u നീളവുമുള്ള വശം $u + v$ ആയും നീട്ടി ചതുരം വലുതാക്കുക.



ഈ വലിയ ചതുരത്തെ ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ നാലു ചതുരങ്ങളായി ഭാഗിക്കാമല്ലോ.



വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ഈ നാലു ചെറുചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണ് എന്നതിൽ നിന്ന്

$$(x + y)(u + v) = xu + xv + yu + yv$$

എന്നു കാണാം.

അപ്പോൾ നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ

$$(8 + 6)\ (10 + 5) = (8 \times 10) + (8 \times 5) + (6 \times 10) + (6 \times 5)$$
$$= 80 + 40 + 60 + 30$$
$$= 210$$

എന്നും ചെയ്യാം.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ പൊതുതത്വം ഉപയോഗിച്ച്

$(2x + y) \times (3u + 2v)$ എന്ന ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

$$(2x + y)\ (3u + 2v) = 2x \times 3u + 2x \times 2v + y \times 3u + y \times 2v$$
$$= 6xu + 4xv + 3yu + 2yv$$

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള ഗുണനഫലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

- $(p + q)\ (2m + 3n)$
- $(4x + 3y)\ (2a + 3b)$
- $(4a + 2b)\ (5c + 3d)$
- $(m + n)\ (5a + b)$
- $(2x + 3y)\ (x + 2y)$
- $(3a + 2b)\ (x + 2y)$

വ്യത്യാസ ഗുണനം

x, y, u, v ഇവ അധിസംഖ്യകളായാലും ന്യൂനസംഖ്യകളായാലും, പൂജ്യമായാലും

$$(x + y)\ (u + v) = xu + xv + yu + yv$$

എന്നു പറഞ്ഞല്ലോ. അപ്പോൾ ഇതിൽ y ക്കു പകരം $-y$ എടുത്താലും ഇതു ശരിയാകും. അതായത്,

$$\big(x + (-y)\big)\ (u + v) = xu + xv + (-y)\ u + (-y)\ v$$

ഇതിൽ ഇടതുവശത്തുള്ള $x + (-y)$ എന്നാൽ എന്താണർഥം?

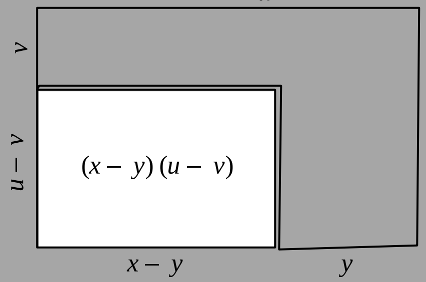
$$x + (-y) = x - y$$

എന്ന് **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

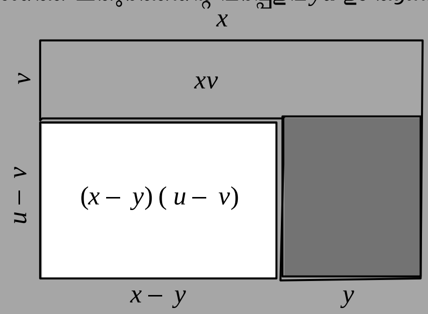
വലതുവശത്തുള്ള $(-y)\ u$, $(-y)\ v$ ഇവയുടെ അർഥമോ?

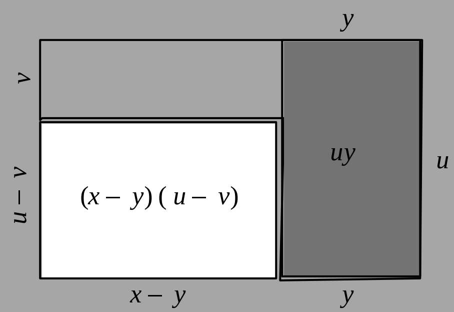
വ്യത്യാസഗുണനം ജ്യാമിതിയിലൂടെ

വശങ്ങളുടെ നീളം x ഉം u ഉം ആയ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ വശത്തിൽനിന്ന് y ഉം, രണ്ടാമത്തെ വശത്തിൽനിന്ന് v ഉം കുറച്ച് ചതുരം ചെറുതാക്കിയെന്നു കരുതുക. അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് xu ഉം ചെറിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $(x - y)\ (u - v)$ ഉം ആണല്ലോ.

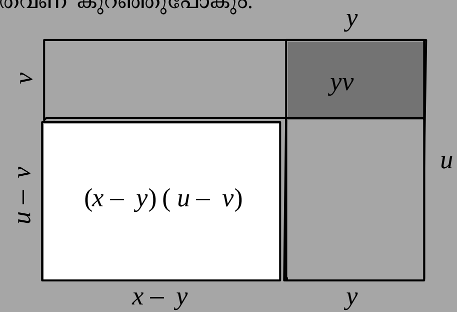


മുറിച്ചു മാറ്റിയ ഭാഗത്തിന്റെ മുകളിലത്തെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് xv യും, വലതുവശത്തെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് yu ഉം ആണ്.





ഇത് രണ്ടും കുറച്ചാൽ, വലതു മുകളിലെ മൂലയിലുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവായ yv രണ്ടു തവണ കുറഞ്ഞുപോകും.



അത് ശരിയാക്കാൻ, ഈ പരപ്പളവ് ഒരു തവണ കൂട്ടണം. അതായത്

$$(x - y)\ (u - v) = xu - xv - yu + yv$$

വേറൊരു ഗുണനരീതി

സാധാരണരീതിയിൽ 32×46 കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെയാണ്?

$$\begin{array}{r} 32 \times \\ 46 \\ \hline 192 \\ 1280 \\ \hline 1472 \end{array}$$

(സാധാരണയായി രണ്ടാമത്തെ ഗുണനഫലത്തിലെ 0 എഴുതാറില്ല.)

ഇവിടെ ഉപയോഗിക്കുന്ന തത്വം എന്താണ്?

$$\begin{aligned} 32 \times 46 &= 32 \times (6 + 40) \\ &= (32 \times 6) + (32 \times 40) \\ &= 192 + 1280 \\ &= 1472 \end{aligned}$$

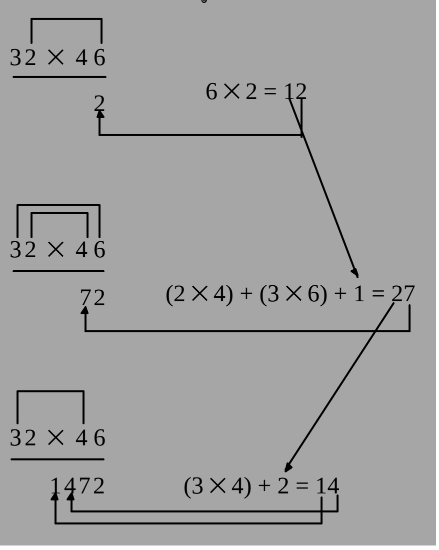
ഇതിനുപകരം

$$\begin{aligned} 32 \times 46 &= (2 + 30) \times (6 + 40) \\ &= (2 \times 6) + (2 \times 40) \\ &\quad + (30 \times 6) + (30 \times 40) \\ &= 12 + 80 + 180 + 1200 \\ &= 1472 \end{aligned}$$

എന്നതിനെ ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ എഴുതി ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 80 \\ 180 \\ 1200 \\ \hline 1472 \end{array}$$

ഈ ക്രിയ അൽപംകൂടി എളുപ്പമാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കൂ.



$(-y)\ u = -yu \qquad (-y)\ v = -yv$

എന്ന് കണ്ടല്ലോ.

അപ്പോൾ നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ഗുണനഫലത്തെ എങ്ങനെ എഴുതാം?

$$(x - y)\,(u + v) = xu + xv - yu - yv$$

ഇതുപോലെ

$$(x + y)\,(u - v) = xu - xv + yu - yv$$

എന്നും കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

ഇനി $(x - y)\,(u - v)$ ആയാലോ?

$$\begin{aligned} (x - y)\,(u - v) &= xu + x\,(-v) + (-y)\,u + (-y)(-v) \\ &= xu - xv - yu + yv \end{aligned}$$

ഇനി ചുവടെയുള്ള ഗുണനഫലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

- $(x + 3y)\,(2a - b)$
- $(3x + 5y)\,(3m - 2n)$
- $(2r - 3s)\,(t - u)$
- $(a - b)\,(4x - 3y)$
- $(3a - 5b)\,(2c - d)$
- $(2p + 5q)\,(3r - 4s)$

തുകയുടെ വർഗം

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗം, ഈ സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിനു തുല്യമാണെന്ന കാര്യം ഓർമയുണ്ടല്ലോ? (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **സമചതുരസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ വർഗഗുണനം എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)

ഉദാഹരണമായി

$$(5 \times 2)^2 = 10^2 = 100 = 25 \times 4 = 5^2 \times 2^2$$

ഇതുപോലെ ഒരു തുകയുടെ വർഗം, വർഗങ്ങളുടെ തുകയാണോ?

$(5 + 2)^2 = 49$ ഉം $5^2 + 2^2 = 29$ ഉം ആണല്ലോ.

തുകയുടെ വർഗവും, വർഗങ്ങളുടെ തുകയും തമ്മിൽ പൊതുവായി എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ എന്നു നോക്കാം. x, y എന്ന രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗം $(x + y)^2$ ആണല്ലോ.

ഇതിനെ $(x + y)\,(x + y)$ എന്നെഴുതി, തുകകളുടെ ഗുണനഫലം കാണാനുള്ള രീതി ഉപയോഗിച്ചാലോ?

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$$
$$= (x \times x) + (x \times y) + (y \times x) + (y \times y)$$

ഇതിൽ

$$x \times x = x^2 \qquad y \times y = y^2$$

ആണല്ലോ. കൂടാതെ

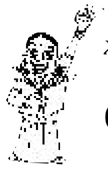
$$xy = yx$$

എന്നും അറിയാം. അതിനാൽ

$$(x + y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

അപ്പോൾ, തുകയുടെ വർഗവും, വർഗങ്ങളുടെ തുകയും തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?

ബീജഗണിതഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ



x, y ഏതു സംഖ്യകളായാലും

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

ഇത് സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാലോ?

> രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗം, അവയുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയോട് അവയുടെ ഗുണനഫല ത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് കൂട്ടിയതിനു തുല്യമാണ്.

ഇതുപയോഗിച്ച് 101 ന്റെ വർഗം കണ്ടുപിടിച്ചു നോക്കാം.

$$101^2 = (100 + 1)^2$$
$$= 100^2 + 1^2 + 2 \times 100 \times 1$$
$$= 10000 + 1 + 200$$
$$= 10201$$

ഇതുപോലെ 201 ന്റെ വർഗം മനക്കണക്കായി കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$(x + 1)^2 = x^2 + 1 + 2x = x^2 + 2x + 1$$

എന്നു കിട്ടുമല്ലോ.

വർഗസൂത്രം

തുകകളുടെ ഗുണനത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുതത്വം ഉപയോഗിച്ച് രണ്ടക്കസംഖ്യകൾ ഗുണിച്ചതുപോലെ, തുകകളുടെ വർഗത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുതത്വം ഉപയോഗിച്ച് രണ്ടക്കസംഖ്യകളുടെ വർഗവും കണ്ടുപിടിക്കാം.

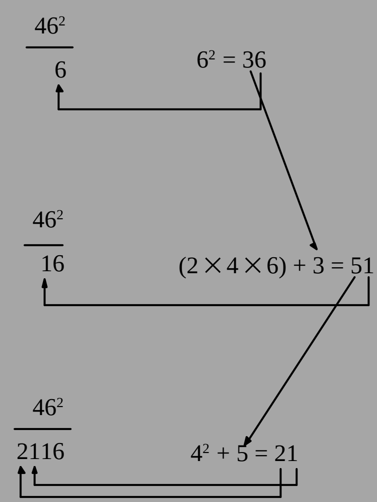
ഉദാഹരണമായി

$$46^2 = (6 + 40)^2$$
$$= 6^2 + (2 \times 6 \times 40) + 40^2$$
$$= 36 + 480 + 1600$$
$$= 2116$$

എന്നതിനെ ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ എഴുതി വർഗം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$\begin{array}{r} 36 \\ 480 \\ 1600 \\ \hline 2116 \end{array}$$

ഈ ക്രിയകൾ കുറേക്കൂടി എളുപ്പമാക്കാം.



ഇനി ഈ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

- ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബീജഗണിതവാചകങ്ങളുടെ വർഗം കണ്ടുപിടിക്കുക.
  - $2x + 3y$
  - $x + 2$
  - $2x + 1$
- ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗം മനക്കണക്കായി കണ്ടുപിടിക്കുക.
  - 102
  - 202
  - 1001
  - 2002
  - 205
  - 10.3
- x ഏതു എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $x^2 + 6x + 9$ പൂർണവർഗമാണ് എന്നു തെളിയിക്കുക. അതിന്റെ വർഗമൂലം എന്താണ്?
- 1, 2, 3, 4, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ, ഒന്നിടവിട്ട ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടേയും ഗുണനഫലത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയാൽ ഒരു പൂർണവർഗം കിട്ടുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

വ്യത്യാസ വർഗം

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ബീജഗണിതവാക്യം കണ്ടല്ലോ. ഇനി രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗം നോക്കാം.

x, y ഏത് സംഖ്യകൾ എടുത്താലും

$x - y = x + (-y)$

എന്നെഴുതാമല്ലോ. അപ്പോൾ

$$(x - y)^2 = \big(x + (-y)\big)^2$$

വിചിത്ര വർഗങ്ങൾ

15^2 എത്രയാണ്? 25^2 ആയാലോ? 5 ൽ അവസാനിക്കുന്ന ഏത് സംഖ്യയുടേയും വർഗത്തിന്റെ അവസാന രണ്ട് അക്കങ്ങൾ 25 തന്നെയാണോ?

എന്തുകൊണ്ടാണിങ്ങനെ?

$(10x + 5)^2$ കണ്ടുപിടിച്ചു നോക്കൂ.

കാര്യം പിടികിട്ടിയോ?

ഇനി ഇത്തരം വർഗങ്ങളുടെ മറ്റ് അക്കങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ എന്തെങ്കിലും എളുപ്പവഴിയുണ്ടോ?

1 5^2 = 2 25

2 5^2 = 6 25

3 5^2 = 12 25

ഇരു വശത്തും വട്ടത്തിലാക്കിയ സംഖ്യകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

മുമ്പ് ചെയ്തതുപോലെ $(10x + 5)^2$ ഒന്നു കൂടി നോക്കൂ.

$$(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25$$
$$= 100x\,(x + 1) + 25$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ. സൂത്രം കണ്ടുപിടിച്ചോ?

$$= x^2 + (-y)^2 + 2x\,(-y)$$

ഇതിൽ

$$(-y)^2 = (-y) \times (-y) = y \times y = y^2$$

എന്നും

$$2x\,(-y) = 2\,(-xy) = -2xy$$

എന്നും അറിയാമല്ലോ. അപ്പോൾ $(x-y)^2$ നെ എങ്ങനെ എഴുതാം?

x, y ഏതു സംഖ്യകളായാലും,

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

ഇത് സാധാരണഭാഷയിൽ എങ്ങനെ പറയാം?

ഇതുപയോഗിച്ച് 99 ന്റെ വർഗം കണ്ടുപിടിച്ചു നോക്കാം:

$$\begin{aligned} 99^2 &= (100-1)^2 \\ &= 10000 + 1 - 200 \\ &= 9801 \end{aligned}$$

ഇനി ചില ചോദ്യങ്ങൾ.

- ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബീജഗണിതവാചകങ്ങളുടെ വർഗം കണ്ടുപിടിക്കൂ.
  - $2x - 3y$
  - $x - 2$
  - $2x - 1$
- ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗം മനക്കണക്കായി കണ്ടുപിടിക്കുക.
  - 98
  - 198
  - 999
  - 1998
  - 195
  - 9.7
- x ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $x^2 - 6x + 9$ പൂർണ

ജ്യാമിതീയ ബീജഗണിതം

ജ്യാമിതിയുടെ ആചാര്യനായ യൂക്ലിഡിനെക്കുറിച്ചും അദ്ദേഹത്തിന്റെ എലിമെന്റ്സ് എന്ന കൃതിയെക്കുറിച്ചും ഏഴാം ക്ലാസിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. എലിമെന്റ്സിലെ രണ്ടാം ഭാഗം, നാം ഈ പാഠത്തിൽ കണ്ട പൊതുതത്വങ്ങളെക്കുറിച്ചാണ് പ്രതിപാദിക്കുന്നത്. ബീജഗണിതഭാഷയിലല്ല. ജ്യാമിതീയ ഭാഷയിലാണെന്നു മാത്രം. ഉദാഹരണമായി,

> രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗം, സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടേയും സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ ഇരട്ടിയുടേയും തുകയാണ്.

എന്ന പൊതുതത്വം, ബീജഗണിതഭാഷയിൽ

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

എന്നെഴുതാമെന്ന് കണ്ടല്ലോ. ഇതേ തത്വം യൂക്ലിഡ് പറയുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്.

> ഒരു വര വശമായി വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ആ വരയെ രണ്ടായി മുറിച്ചാൽക്കിട്ടുന്ന കഷണങ്ങൾ ഓരോന്നും വശമായി വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടേയും, ഈ കഷണങ്ങൾ വശങ്ങളായി വരയ്ക്കുന്ന രണ്ട് ചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവിന്റേയും തുകയാണ്.

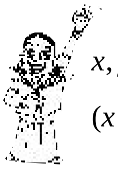
വർഗമാണ് എന്നു തെളിയിക്കുക. അതിന്റെ വർഗമൂലം എന്താണ്?

തുകയും വ്യത്യാസവും

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയേയോ, വ്യത്യാസത്തിനേയോ അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിച്ചാൽ (അതായത് വർഗം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ) എന്തു കിട്ടുമെന്നു കണ്ടു. രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയെ അവയുടെ വ്യത്യാസംകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാലോ?

$$\begin{aligned}(x + y)(x - y) &= (x + y)\big(x + (-y)\big)\\ &= (x \times x) + \big(x \times (-y)\big) + (y \times x) + \big(y \times (-y)\big)\\ &= x^2 - xy + yx - y^2\\ &= x^2 - xy + xy - y^2\\ &= x^2 - y^2\end{aligned}$$

അതായത്



x, y ഏതു സംഖ്യകളായാലും,

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാലോ?

> ഏതു രണ്ടുസംഖ്യകളുടേയും തുകയുടേയും വ്യത്യാസത്തിന്റേയും ഗുണനഫലം, അവയുടെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തിനു തുല്യമാണ്.

ഉദാഹരണമായി, ഇതുപയോഗിച്ച് 45×35 എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം.

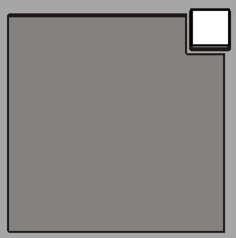
$$\begin{aligned}45 \times 35 &= (40 + 5) \times (40 - 5)\\ &= 40^2 - 5^2\\ &= 1600 - 25\\ &= 1575\end{aligned}$$

ഇതുപോലെ ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഗുണനഫലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

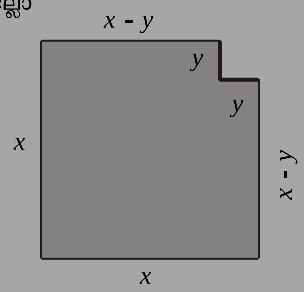
- 51×49
- 98×102

സമചതുരവ്യത്യാസം

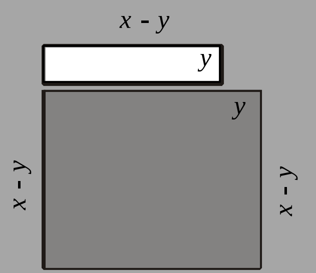
വശങ്ങളുടെ നീളം x ആയ ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽ നിന്ന്, വശങ്ങളുടെ നീളം y ആയ ഒരു സമചതുരം മുറിച്ചു മാറ്റി എന്ന് കരുതുക



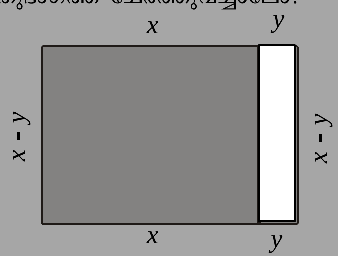
മിച്ചമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $x^2 - y^2$ ആണല്ലോ



ഇനി ഇതിന്റെ മുകൾഭാഗത്തുനിന്ന് y വീതിയിൽ ഒരു ചതുരം മുറിച്ചെടുക്കുക.



മുറിച്ചെടുത്ത ചതുരം മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ വലതുഭാഗത്ത് ചേർത്തുവച്ചാലോ?



ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $(x + y)(x - y)$ അല്ലേ?

അപ്പോൾ

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

- 10.2×9.8
- 7.3×6.7

വർഗവ്യത്യാസം

തുകയുടേയും വ്യത്യാസത്തിന്റേയും ഗുണനഫലത്തെക്കുറിച്ചുള്ള തത്വം തിരിച്ചിട്ടാലോ?

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

അതായത്

ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടേയും വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം, ആ സംഖ്യകളുടെ തുകയുടേയും വ്യത്യാസത്തിന്റേയും ഗുണനഫലത്തിനു തുല്യമാണ്.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം 53 സെന്റിമീറ്ററും, ഒരു ചെറിയ വശം 28 സെന്റിമീറ്ററുമാണെങ്കിൽ, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{53^2 - 28^2}$ ആണല്ലോ. ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്,

$$53^2 - 28^2 = (53 + 28)(53 - 28) = 81 \times 25$$

അതിനാൽ

$$\sqrt{53^2 - 28^2} = \sqrt{81 \times 25} = \sqrt{81} \times \sqrt{25} = 9 \times 5 = 45$$

അതായത്, മൂന്നാമത്തെ വശം 45 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ ചെയ്യാമല്ലോ.

- മനക്കണക്കായി കണ്ടുപിടിക്കുക.
  - $67^2 - 33^2$
  - $123^2 - 122^2$
  - $\left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{2}{7}\right)^2$
  - $0.27^2 - 0.23^2$
- ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം 65 സെന്റിമീറ്ററും, നീളം 63 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്. അതിന്റെ വീതി എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

പൈഥഗോറസ് ത്രയങ്ങൾ

മൂന്ന് എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ രണ്ടെണ്ണത്തിന്റെ വർഗങ്ങളുടെ തുക മൂന്നാമത്തേതിന്റെ വർഗത്തിന് തുല്യമായാൽ, ഈ മൂന്നു സംഖ്യകളെ ഒരു പൈഥഗോറസ് ത്രയം എന്നാണ് പറയുക എന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ

ഉദാഹരണമായി

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

ആയതിനാൽ 3, 4, 5 എന്ന മൂന്നു സംഖ്യകൾ ഒരു പൈഥഗോറസ് ത്രയമാണ്. ഏതാണ്ട് ബി.സി. രണ്ടായിരത്തിലെ ബാബിലോണിയയിൽ നിന്നുള്ള ഒരു കളിമൺപലകയിൽ ഇത്തരം ത്രയങ്ങളുടെ ഒരു പട്ടിക തന്നെ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

ഇത്തരം എല്ലാ ത്രയങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഒരു മാർഗമുണ്ട്. m, n എന്ന ഏതെങ്കിലും രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളെടുക്കുക. ചുവടെ പറഞ്ഞിട്ടുള്ളതു പോലെ x, y, z എന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$
$$z = m^2 + n^2$$

ഇപ്പോൾ

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ആണെന്ന് കാണാൻ വിഷമമില്ല.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + n^4 + 2m^2n^2 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= z^2 \end{aligned}$$

ഏതാണ്ട് ബി.സി. മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടിൽത്തന്നെ ഗ്രീസിലെ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർക്ക് ഈ രീതി അറിയാമായിരുന്നു.

- അടുത്തടുത്തുള്ള രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗ ങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം അവയുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാ ണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
- 15 നെ എത്ര രീതിയിൽ രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാൻ സാധിക്കു മെന്നു പരിശോധിക്കുക.