3 ന്യൂനസംഖ്യകൾ

കാർഡ് കളി

കുറേ വെളുത്ത കാർഡും കുറേ കറുത്ത കാർഡും കൊണ്ടൊരു കളി. ഏതെങ്കിലും പത്തു കാർഡ് എടുക്കണം. വെളുത്ത കാർഡുകളുടെ എണ്ണത്തിൽനിന്ന് കറുത്ത കാർഡുകളുടെ എണ്ണം കുറയ്ക്കണം. (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ ഇതുപോലൊരു കളിയുള്ളത് ഓർമയില്ലേ?)

ഉദാഹരണമായി 6 വെളുത്ത കാർഡും 4 കറുത്ത കാർഡുമാണ് എടുത്തതെങ്കിൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ

$$6 - 4 = 2$$

മറിച്ച് 4 വെളുത്ത കാർഡും 6 കറുത്ത കാർഡും ആയാലോ?

$$4 - 6 = -2$$

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കാമോ?

വെളുത്ത കാർഡ്	കറുത്ത കാർഡ്	സംഖ്യ
7	3	$7 - 3 = 4$
5	5	
3	7	
2	8	
1	9	
0	10	

ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ ഏറ്റവും വലിയ സംഖ്യ എത്രയാണ്?

ഏറ്റവും ചെറുതോ?

ഇതുപോലെ കളി തുടർന്നാൽ കിട്ടാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ സംഖ്യയേത്?

ഏറ്റവും ചെറുതോ?

ന്യൂനതാപം

ഭൂമിയിലെ ഏറ്റവും തണുപ്പുള്ള പ്രദേശം അന്റാർട്ടിക്ക ഭൂഖണ്ഡമാണെന്നും അവിടെ -89^{o}C വരെ താപനില താഴാറുണ്ടെന്നും നമുക്ക് അറിയാം.

ഇൻഡ്യയിലെ ഏറ്റവും തണുപ്പുള്ള സ്ഥലം കാശ്മീരിലെ കാർഗിൽ പ്രദേശത്തുള്ള ദ്രാസ് എന്ന കൊച്ചു പട്ടണമാണ്.

ഇവിടെ താപനില -60^{o}C വരെ താഴാറുണ്ട്.

നമ്മുടെ കേരളത്തിലും മൂന്നാർ പോലെയുള്ള ഉയർന്ന പ്രദേശങ്ങളിൽ ചിലപ്പോൾ ന്യൂനതാപം അനുഭവപ്പെടാറുണ്ട്.

ശരിയായ പൂജ്യം

ഭൂമിയിൽ അനുഭവപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ താപനില -89^{o}C ആണെന്ന് പറഞ്ഞല്ലോ. നമുക്കറിയാവുന്ന പ്രപഞ്ചം മുഴുവനായി എടുത്താൽ, ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ താപനില കണ്ടെത്തിയിട്ടുള്ളത്, ഭൂമിയിൽനിന്ന് അഞ്ഞൂറു കോടിക്കോടി (5×10^{16}) കിലോമീറ്റർ അകലെയുള്ള, ''ബൂമറാങ്ങ് നെബുല'' എന്ന പേരിട്ടിട്ടുള്ള നക്ഷത്രപടലത്തിലാണ്: -272.15^{o}C

പ്രകൃതിയിൽ സ്വാഭാവികമായുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ താപനില ഇതാണെങ്കിലും ഇതിലും കുറഞ്ഞ താപനില പരീക്ഷണശാലകളിൽ കൃത്രിമമായി ഉണ്ടാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

എന്നാൽ, ഭൗതിക ശാസ്ത്രത്തിലെ താപത്തെക്കുറിച്ചുള്ള സിദ്ധാന്തങ്ങളനുസരിച്ച്, -273.15^{o} സെൽഷിയസോ അതിൽക്കുറവോ ആയ താപനില ഉണ്ടാകുവാൻ സാധ്യമല്ല. ഈ താപനിലയെ കേവലപൂജ്യം (absolute zero) എന്നാണ് ശാസ്ത്രത്തിൽ പറയുന്നത്.

ന്യൂനഗുണനം

വെളുത്ത കാർഡും കറുത്ത കാർഡും കൊണ്ട് മറ്റൊരു കളിയാകാം. കാർഡുകളെല്ലാം കമഴ്ത്തിവച്ച് കളിക്കാർ മാറി മാറി ഓരോ കാർഡ് എടുക്കണം. വെളുത്ത കാർഡ് കിട്ടിയാൽ 10 പോയിന്റ് കൂട്ടാം. കറുത്ത കാർഡാണെങ്കിൽ 5 പോയിന്റ് കുറയ്ക്കണം. ആദ്യം 25 പോയിന്റ് (കൃത്യം 25 തന്നെയാകണം) കിട്ടുന്നയാൾ ജയിച്ചു.

അഞ്ചു ചുറ്റ് കഴിഞ്ഞപ്പോൾ ചിലർക്ക് കിട്ടിയ കാർഡുകൾ ഇങ്ങനെയാണ്.

പേര്	വെളുപ്പ്	കറുപ്പ്
അമ്മു	3	2
അപ്പു	2	3
ജേക്കബ്	1	4
ജമീല	4	1

ഇവരുടെ ഓരോരുത്തരുടേയും പോയിന്റുകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ജയിക്കാൻ ഓരോരുത്തർക്കും ഇനി എത്ര പോയിന്റ് വേണമെന്നു കണ്ടുപിടിക്കൂ.

അമ്മുവിന് ആദ്യം വെളുത്ത കാർഡും രണ്ടാമത് കറുപ്പുമാണ് കിട്ടിയത്. അപ്പോൾ എത്ര പോയിന്റ് ആയി?

$$10 - 5 = 5$$

മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം. ഒരു കറുത്ത കാർഡിന് -5 പോയിന്റ് ആണല്ലോ. അതിനാൽ അമ്മുവിന്റെ പോയിന്റ്

$$10 + (-5) = 10 - 5 = 5$$

അപ്പുവിന് ആദ്യം കിട്ടിയത് രണ്ടും കറുപ്പ്. ആദ്യത്തെ കറുത്ത കാർഡ് കിട്ടിയപ്പോൾ പോയിന്റ് -5 ആണ്. അടുത്ത കറുത്ത കാർഡ് കൂടി കിട്ടിയപ്പോഴോ?

$$-5 - 5 = -(5 + 5) = -10$$

അപ്പുവിന്റെ പോയിന്റ് മറ്റൊരു രീതിയിലും കണക്കാക്കാം.

$$(-5) + (-5) = -(5 + 5) = -10$$

$5 + 5$ ന് പകരം 2×5 എന്ന് എഴുതാമല്ലോ. ഇതുപോലെ

$$2 \times (-5) = (-5) + (-5) = -10$$

എന്നും എഴുതാം.

$$(-5) + (-5) = -(5 + 5)$$

ആണല്ലോ. അപ്പോൾ

$$2 \times (-5) = -(5 + 5) = -(2 \times 5) = -10$$

എന്നും എഴുതാം.

ഇതുപോലെ $3 \times (-5)$ എന്നതിന് എന്താണർത്ഥം?

$$3 \times (-5) = -(3 \times 5) = -15$$

ഇത്തരം ചില ഗുണനങ്ങൾ മനസ്സിൽ ചെയ്തു നോക്കൂ.

- $3 \times (-4)$
- $4 \times (-3)$
- $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$
- $6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$
- $20 \times \left(-\frac{1}{5}\right)$
- $5 \times (-0.3)$
- $20 \times (-0.4)$
- $9 \times (-0.1)$

രണ്ടു -5 കൾ ചേർന്നതാണല്ലോ -10. അപ്പോൾ -5 നെ -10 ന്റെ പകുതി എന്നും പറയാം. ഗണിതഭാഷയിൽ

$$\frac{-10}{2} = -5$$

പകുതിയാക്കുക എന്നതിനുപകരം $\frac{1}{2}$ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക എന്നും പറയാം. അപ്പോൾ

$$\frac{1}{2} \times (-10) = -5$$

$5 = \frac{1}{2} \times 10$ ആണല്ലോ. അതിനാൽ

$$\frac{1}{2} \times (-10) = -\left(\frac{1}{2} \times 10\right) = -5$$

എന്നും എഴുതാം.

ഇതുപോലെ

$$\frac{1}{3} \times (-12) = -\left(\frac{1}{3} \times 12\right) = -4$$

$$\frac{1}{5} \times (-2) = -\left(\frac{1}{5} \times 2\right) = -\frac{2}{5}$$

ഇനി ഈ കണക്കുകളും മനസ്സിൽ ചെയ്യാമല്ലോ.

- $\frac{1}{2} \times (-8)$
- $\frac{1}{3} \times (-3)$
- $\frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$
- $0.5 \times (-0.3)$

ഇപ്പോൾകണ്ട കാര്യങ്ങളെല്ലാം ചുരുക്കി ഒറ്റ ബീജഗണിത വാക്യത്തിൽപ്പറയാമോ?

x, y ഏത് അധിസംഖ്യകളായാലും

$$x \times (-y) = -(xy)$$

സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകുന്നത്

പല കാലങ്ങളിലെ ആവശ്യങ്ങൾക്കനുസരിച്ചാണ് ഗണിതത്തിൽ പലതരം സംഖ്യകൾ ഉണ്ടായിട്ടുള്ളത്. കൂട്ടത്തിലെ ആളുകളുടെ എണ്ണം, ആടുമാടുകളുടെ എണ്ണം എന്നിങ്ങനെ എണ്ണം മാത്രം ആവശ്യമായിരുന്ന കാലത്ത് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ മതിയായിരുന്നു. നീളം, പരപ്പ്, വ്യാപ്തം തുടങ്ങിയവ അളക്കേണ്ടി വന്നപ്പോൾ, ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കി.

കണക്ക് കൂട്ടുന്നതിലെ ചില സൗകര്യങ്ങൾക്കു വേണ്ടിയാണ് ന്യൂനസംഖ്യകൾ ആദ്യം ഉപയോഗിച്ചത്. പ്രാചീനകാലത്ത്, ചൈനയിൽ സംഖ്യകൾ കൂട്ടുന്നതിന് കറുത്ത കമ്പുകളും കുറയ്ക്കുന്നതിന് ചുവന്ന കമ്പുകളും ഉപയോഗിച്ചിരുന്നതും ഇന്ത്യയിൽ പണമിടപാടുകളിലെ കടം സൂചിപ്പിക്കാൻ ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നതും ഏഴാം ക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ചില ഗണിതപ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ബീജഗണിതത്തിലൂടെ പൊതുവായ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതി ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ അവതരിപ്പിച്ചതാണ് പിന്നീട് ഇവയുടെ പ്രധാന ഉപയോഗമായി മാറിയത്.

അതായത്, എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ, ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഇവയെപ്പോലെ നിത്യജീവിതപ്രശ്നങ്ങളിൽ നിന്നല്ല, ഗണിതസങ്കേതങ്ങളിൽ നിന്നാണ് ന്യൂനസംഖ്യകളും അവയുടെ ക്രിയകളും ഉണ്ടായത്.

ഗുണനക്രമം

2×3 ഉം 3×2 ഉം 6 തന്നെയാണെന്ന് നമുക്കറിയാം അതായത് 2 തവണ 3 കൂട്ടിയാലും, 3 തവണ 2 കൂട്ടിയാലും ഫലം 6 തന്നെ.

ഗണിതഭാഷയിൽ,

$$2 \times 3 = 3 \times 2$$

ഇതുപോലെ $2 \times (-3)$ ഉം $(-3) \times 2$ ഉം തുല്യമാണോ?

ആദ്യം ഈ രണ്ടു ക്രിയകളുടെയും അർഥം എന്താണെന്നു നോക്കാം. $2 \times (-3)$ എന്നാൽ 2 തവണ -3 കൂട്ടുക, അതായത് $(-3) + (-3)$ എന്നാണർഥം. $(-3) \times 2$ എന്നതിന് എന്താണർഥം? -3 തവണ 2 കൂട്ടുക എന്നു പറയുന്നതിൽ അർഥമില്ലല്ലോ!

ഈ ക്രിയയ്ക്ക് പുതുതായി അർഥം കൊടുക്കണം. എണ്ണൽസംഖ്യകൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ ഏതു ക്രമത്തിലും എടുക്കാം. (ഉദാഹരണമായി$2 \times 3 = 3 \times 2$) എന്നതിനാൽ ഈ സന്ദർഭത്തിലും അങ്ങനെതന്നെയാകുന്നതാണ് നല്ലത്.

അപ്പോൾ $(-3) \times 2$ നും -6 എന്നുതന്നെയാണ് അർഥം കൊടുക്കുന്നത്. അതായത്,

$$(-3) \times 2 = 2 \times (-3) = -6$$

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

x, y ഏത് അധിസംഖ്യകളായാലും

$$(-x) \times y = -(xy)$$

അതായത്,

$$(-x) \times y = x \times (-y) = -(xy)$$

ഇനി ചുവടെയുള്ള ഗുണനങ്ങൾ മനക്കണക്കായി ചെയ്യാം.

- $(-3) \times 4$
- $(-4) \times 7$
- $(-1) \times 9$
- $(-5) \times 4$
- $(-2) \times 5$
- $\left(\frac{-1}{3}\right) \times 3$
- $\left(-\frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{3}$
- $\frac{1}{5} \times \frac{-1}{3}$
- $\left(-\frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{7}$
- $(-0.5) \times 0.2$
- $(-0.4) \times 0.3$

ക്രിയകളുടെ അർഥം

എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനം എന്നത് ആവർത്തനസങ്കലനമാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി

$$2 \times 3 = 3 + 3$$

ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയും, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയും തമ്മിലുള്ള ഗുണനത്തിനും ആവർത്തന സങ്കലനം എന്ന അർഥം തന്നെ കൊടുക്കാം. ഉദാഹരണമായി

$$2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

പക്ഷേ $\frac{1}{2} \times 3$ എന്നതിന് ഇങ്ങനെ അർഥം കൊടുക്കാൻ പറ്റില്ല. ഇവിടെ

$$\frac{1}{2} \times 3 = 3 \times \frac{1}{2}$$

എന്ന് നാം അർഥം കൊടുക്കുന്നു. (രണ്ട് എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണിക്കുന്നത് ഏതു ക്രമത്തിലായാലും തുല്യമാണല്ലോ.)

എന്നാൽ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ എന്നതിന് ഇങ്ങനെയും അർഥം കൊടുക്കാൻ കഴിയില്ല. ഇവിടെ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ ന് $\frac{1}{2}$ ന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം എന്നാണ് അർഥം കൊടുക്കുന്നത് ($2 \times \frac{1}{3}$ ന് 2 ന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം എന്നും അർഥമുണ്ടല്ലോ).

ഇതുപോലെ $2 \times (-3)$എന്നതിന് ആവർത്തന സങ്കലനമായി അർഥം കൊടുക്കാമെങ്കിലും $(-2) \times 3$ ന് ഇങ്ങനെ അർഥം കൊടുക്കാൻ പറ്റില്ല.

$$(-2) \times 3 = 3 \times (-2)$$

എന്ന് പുതിയ അർഥം കൊടുക്കേണ്ടിവരും.

$(-2) \times (-3)$എന്നതിന് വീണ്ടുമൊരു അർഥം കാണേണ്ടിവരും.

ഗുണനവും സങ്കലനവും

$(3 \times 12) + (7 \times 12)$ എത്രയാണ്?

രണ്ടു ഗുണനങ്ങളും വെവ്വേറെ ചെയ്തു കൂട്ടുന്നതിനു പകരം ഒരു എളുപ്പവഴിയുണ്ടല്ലോ? (ഏഴാംക്ലാസിലെ **ചുരുക്കെഴുത്ത്** എന്ന പാഠത്തിന്റെ അവസാനം കൊടുത്തിരിക്കുന്ന മനക്കണക്കുകൾ നോക്കുക.)

$$\begin{aligned}(3 \times 12) + (7 \times 12) &= (3 + 7) \times 12 \\ &= 10 \times 12 \\ &= 120\end{aligned}$$

ഇതുപോലെ ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ മനക്കണക്കായി പറയാമോ?

- $(13 \times 8) + (7 \times 8)$
- $(15 \times 9) + (5 \times 9)$
- $\left(2 \times \frac{1}{7}\right) + \left(3 \times \frac{1}{7}\right)$
- $\left(\frac{1}{7} \times 2\right) + \left(\frac{1}{7} \times 5\right)$

ഇവിടെയെല്ലാം നാം ഉപയോഗിച്ച തത്വം എന്താണ്?

x, y, z ഏത് അധിസംഖ്യകളായാലും $xz + yz = (x + y) z$.

ഇതുപോലെ $(3 \times (-12)) + (7 \times (-12))$ ചെയ്യാൻ പറ്റുമോ?

ആദ്യം 3 തവണ -12 കൂട്ടുക. പിന്നീട് 7 തവണ -12 കൂട്ടുക എന്നാണല്ലോ ഇതിനർഥം. പകരം മൊത്തം 10 തവണ -12 കൂട്ടിയാൽപ്പോരേ? അതായത്

$$\begin{aligned}(3 \times (-12)) + (7 \times (-12)) &= (3 + 7) \times (-12) \\ &= 10 \times (-12) \\ &= -120\end{aligned}$$

$\left(\frac{1}{4} \times (-13)\right) + \left(\frac{3}{4} \times (-13)\right)$ എന്നായാലോ?

ആദ്യം -13 ന്റെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം, പിന്നെ -13 ന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗം, ഇവ കൂട്ടുക എന്നാണല്ലോ ഇതിന്റെ അർഥം. അപ്പോൾ -13 മുഴുവനുമായി.

ഗണിതഭാഷയിൽ

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4} \times (-13)\right) + \left(\frac{3}{4} \times (-13)\right) &= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) \times (-13) \\ &= 1 \times (-13) \\ &= -13\end{aligned}$$

ന്യൂനം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ

ഒരു പാത്രത്തിലേക്ക് വെള്ളം ഒരു നിശ്ചിത തോതിൽ ഒഴുകിക്കൊണ്ടിരിക്കുകയാണെന്ന് കരുതുക. ഓരോ സെക്കന്റിലും ജലനിരപ്പ് കൃത്യം 10 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരുന്നുവെന്നും കരുതുക. ഏതെങ്കിലും സമയത്ത് ജലനിരപ്പ് അളക്കുക. 2 സെക്കന്റിനുശേഷം ജലനിരപ്പിന് എന്തു മാറ്റമുണ്ടാകും? $2 \times 10 = 20$ സെന്റിമീറ്റർ ഉയർന്നിട്ടുണ്ടാകും, അല്ലേ?

ആദ്യം അളന്നതിന് 2 സെക്കന്റ് മുമ്പോ? 20 സെന്റിമീറ്റർ താഴെയായിരിക്കും.

2 സെക്കന്റ് മുമ്പ് എന്നതിനെ -2 സെക്കന്റ് എന്നെടുത്താലോ? ജലനിരപ്പിലെ മാറ്റം

$$(-2) \times 10 = -20$$

ഇവിടെ -20 എന്നതിനെ 20 സെന്റിമീറ്റർ താഴെ എന്നു പറയാമല്ലോ

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള കണക്കുകളും മനക്കണക്കായി ചെയ്യാമല്ലോ:

- $((12 \times (-7)) + (8 \times (-7))$
- $(29 \times (-2)) + (21 \times (-2))$
- $\left(\frac{2}{7} \times (-17)\right) + \left(\frac{5}{7} \times (-17)\right)$
- $\left(\frac{11}{9} \times (-5)\right) + \left(\frac{7}{9} \times (-5)\right)$
- $(1.5 \times (-9)) + (0.5 \times (-9))$
- $(3.4 \times (-7)) + (0.6 \times (-7))$
- $(4 \times (-0.19)) + (6 \times (-0.19))$

ഇതിലെല്ലാം ഉപയോഗിച്ച തത്വം എങ്ങനെ ബീജഗണിത രൂപത്തിൽ എഴുതും?

x, y, z ഏത് അധിസംഖ്യകളായാലും

$$x(-z) + y(-z) = (x + y)(-z)$$

മറ്റൊരു ഗുണനം

$(6 + (-4)) \times 5$ എത്രയാണ്?

$6 + (-4) = 6 - 4 = 2$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ

$$(6 + (-4)) \times 5 = (6 - 4) \times 5 = 2 \times 5 = 10$$

ഇതു നേരത്തേ കണ്ടതുപോലെ 6 നെയും -4 നെയും 5 കൊണ്ട് വെവ്വേറെ ഗുണിച്ച്, കൂട്ടുന്നതിനു തുല്യമാണോ?

$$6 \times 5 = 30$$

$$(-4) \times 5 = -(4 \times 5) = -20$$

അപ്പോൾ

$$(6 \times 5) + (-4) \times 5 = 30 - 20 = 10$$

ശരിയാകുന്നുണ്ടല്ലോ. അതായത്,

$$(6 + (-4)) \times 5 = (6 \times 5) + ((-4) \times 5)$$

5 നു പകരം -5 ആയാൽ ഇതു ശരിയാകുമോ?

ആദ്യം 6, (-4) ഇവയുടെ തുകയെ (-5) കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ എത്ര കിട്ടുമെന്നു നോക്കാം.

$$(6 + (-4)) \times (-5) = 2 \times (-5) = -10$$

ഇത് $(6 \times (-5)) + ((-4) \times (-5))$ നു തുല്യമാണോ എന്നു നോക്കണം.

ന്യൂനത്തിനെ ഗുണിച്ചാൽ

ഒരു പാത്രത്തിൽ നിന്ന് നിശ്ചിതതോതിൽ വെള്ളം പുറത്തേയ്ക്ക് ഒഴുകിക്കൊണ്ടിരിക്കുകയാണ്. ഓരോ സെക്കന്റിലും ജലനിരപ്പ് 10 സെന്റിമീറ്റർ താഴുന്നു. ഒരിക്കൽ ജലനിരപ്പ് അളന്ന് 2 സെക്കന്റിനുശേഷം ജലനിരപ്പിൽ എന്തു മാറ്റം ഉണ്ടാകും? 20 സെന്റിമീറ്റർ താഴും, അല്ലേ? ജലനിരപ്പ് അളന്നതിന് 2 സെക്കന്റ് മുമ്പോ? 20 സെന്റിമീറ്റർ മുകളിലായിരിക്കും.

ഓരോ സെക്കന്റിലും ജലനിരപ്പ് 10 സെന്റിമീറ്റർ താഴുന്നു എന്നതിനുപകരം, ജലനിരപ്പിൽ -10 സെന്റിമീറ്റർ മാറ്റം ഉണ്ടാകുന്നു എന്നു പറഞ്ഞാലോ?

2 സെക്കന്റിന് ശേഷമുള്ള മാറ്റം

$$2 \times -10 = -20.$$

അതായത് 20 സെന്റിമീറ്റർ താഴെ.

2 സെക്കന്റിന് മുമ്പ് എന്നതിനെ -2 എന്നെടുത്താലോ?

ജലനിരപ്പിലെ മാറ്റം.

$$(-2) \times (-10) = 20$$

അതായത്, 20 സെന്റിമീറ്റർ മേലേ.

$6 \times (-5) = -(6 \times 5) = -30$ എന്നു കണ്ടുകഴിഞ്ഞല്ലോ.

പക്ഷേ $(-4) \times (-5)$ എന്നാൽ എന്താണർഥം?

ഇതിനെ ആവർത്തനസങ്കലനം എന്നു പറയുവാൻ വയ്യല്ലോ. മറിച്ചിട്ടാൽ $(-5) \times (-4)$ ഉം ആവർത്തനസങ്കലനമല്ല.

അതുകൊണ്ട് $(-5) \times (-4)$ ന് പുതിയൊരു അർഥം കൊടുക്കണം.

$\left(6 + (-4)\right) \times (-5)$ ഉം $\left(6 \times (-5)\right) + \left((-4) \times (-5)\right)$ ഉം തുല്യമാകുന്ന വിധത്തിലാണ് ഈ അർഥം കൊടുക്കുന്നത്. ഇതിൽ ആദ്യത്തേത് $\left(6 + (-4)\right) \times (-5) = -10$

എന്ന് കണ്ടു. രണ്ടാമത്തേതിലെ ആദ്യത്തെ ഗുണനഫലം

$$6 \times (-5) = -30$$

ആണെന്നും കണ്ടു. അപ്പോൾ -30 നോട് $(-4) \times (-5)$ കൂട്ടിയാൽ -10 കിട്ടണം. ഇതനുസരിച്ച് $(-4) \times (-5)$ എന്താകണം?

$$-30 + 20 = -10$$

ആണല്ലോ. അതിനാൽ,

$$(-4) \times (-5) = 20$$

എന്നാണ് നാം അർഥം കൊടുക്കുന്നത്.

ഇതുപോലെ

$$(-2) \times (-3) = 6$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \times (-4) = 2$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$$

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

x, y ഏതു അധിസംഖ്യകളായാലും

$$(-x) \times (-y) = xy$$

ഇതുപയോഗിച്ച്

$$\frac{-6}{-2} = (-6) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ കൃതികൾ

2 ന്റെ കൃതികൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

$2^1 = 2$

$2^2 = 2 \times 2 = 4$

$2^3 = 4 \times 2 = 8$

....

....

....

-2 ന്റെ കൃതികളോ?

$(-2)^1 = -2$

$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

$(-2)^3 = 4 \times (-2) = -8$

അതായത് -2 ന്റെ ഇരട്ട കൃതികളെല്ലാം 2 ന്റെ അതേ കൃതികളാണ്; ഒറ്റ കൃതികൾ 2 ന്റെ അതേ കൃതികളുടെ ന്യൂനമാണ്.

2 നു പകരം ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും ഇത് ശരിയല്ലേ?

-1 ന്റെ കൃതികൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

നമുക്ക് കണ്ടെത്താം

- $(-2) \times (-5)$
- $(-5) \times (-5)$
- $(-1) \times (-1)$
- $\left(-\frac{1}{3}\right) \times (-2)$
- $\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right)$
- $(-2) \times (-5)$
- $(-12) \div (-4)$
- $(-12) \div (-12)$
- $(-2) \times \left(-\frac{1}{3}\right)$
- $(-3) \div \left(-\frac{1}{2}\right)$
- $(-2) \times \left(-\frac{1}{3}\right)$
- -2.5×-0.2

ഗുണനം ആവർത്തിച്ചാൽ

$(-3) \times 4 \times (-5)$ നെ ലഘൂകരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നതെന്താണ്?

$$\begin{aligned}(-3) \times 4 \times (-5) &= ((-3) \times 4) \times (-5)\\ &= (-12) \times (-5)\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

ഇതിനെത്തന്നെ

$$\begin{aligned}(-3) \times (4 \times (-5)) &= (-3) \times (-20)\\ &= 60\end{aligned}$$

എന്നും എഴുതാമല്ലോ.

$(-3) \times (-5) \times 4$ എന്നായാലോ? ചെയ്തു നോക്കൂ.

ചുവടെ കൊടുത്തവ ലഘൂകരിക്കുക.

- $(-1) \times 2 \times (-3)$
- $1 \times (-2) \times 3$
- $(-2) \times (-3) \times (-4)$
- $(-1) \times (-1)$
- $(-1)^3$
- $(-1)^5$
- $(-1)^{99}$

മറ്റൊരു ചോദ്യം.

3, 4, 5 എന്നീ സംഖ്യകളും അവയുടെ ന്യൂനങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച് എത്ര തരത്തിൽ -60 എന്ന ഗുണനഫലം ഉണ്ടാക്കാം?

വർഗമൂലം

25 ന്റെ വർഗമൂലം എത്രയാണ്?

$$5 \times 5 = 25$$

അതിനാൽ 25 ന്റെ വർഗമൂലമാണ് 5.

$$(-5) \times (-5) = 25$$

എന്നതും ഇപ്പോൾ കണ്ടു. അതായത്, -5 ഉം 25 ന്റെ വർഗമൂലം തന്നെയാണ്.

ഇതുപോലെ പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു പൂർണവർഗത്തിനും രണ്ടു വർഗമൂലങ്ങളുണ്ട്. അതിൽ ഒന്ന് അധിസംഖ്യയും, രണ്ടാമത്തേത് ആദ്യത്തേതിന്റെ ന്യൂനവും.

ഇവയിലെ അധിസംഖ്യയായ വർഗമൂലത്തേയാണ് $\sqrt{\ }$ ചിഹ്നം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി

$$\sqrt{25} = 5$$

രണ്ടാമത്തെ വർഗമൂലമായ -5, അപ്പോൾ $-\sqrt{25}$ ആണല്ലോ.

ന്യൂനത്തിന്റെ ന്യൂനം

$3-(-5)$ എന്താണ്?

(-5) നോട് എത്ര കൂട്ടിയാൽ 3 കിട്ടും എന്നാണല്ലോ കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്. (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ കുറയ്ക്കലോ കൂട്ടലോ എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)

(-5) നെ 0 ആക്കാൻ 5 കൂട്ടണം; ഇനി പൂജ്യത്തിനെ 3 ആക്കാൻ വീണ്ടും 3 കൂട്ടണം. അങ്ങനെ (-5) നെ 3 ആക്കാൻ ആകെ $5+3$ കൂട്ടണം. അതായത്.

$3-(-5)=3+5=8$

$0-(-5)$ ആയാലോ?

$$0-(-5)=0+5=5$$

0 ത്തിൽ നിന്ന് 5 കുറച്ചതിനെയാണല്ലോ -5 എന്നെഴുതുന്നത്. അപ്പോൾ പൂജ്യത്തിൽ നിന്ന് -5 കുറച്ചതിനെ $-(-5)$ എന്നും എഴുതാം.

അതായത്

$$-(-5)=0-(-5)=0+5=5$$

ഇതുപോലെ

$$-(-1)=1$$

$$-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം.

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാൽ

x ഏത് അധിസംഖ്യയായാലും

$$-(-x)=x$$

ബീജഗണിതരീതികൾ

1, 2, 3, ... തുടങ്ങിയ അധിസംഖ്യകളെ ചിഹ്നമൊന്നുമില്ലാതെയും -1. -2, -3, ... തുടങ്ങിയ ന്യൂനസംഖ്യകളെ ന്യൂനചിഹ്നം ചേർത്തുമാണല്ലോ നാം എഴുതുന്നത്.

ഇതുപോലെ ബീജഗണിതത്തിലും അധിസംഖ്യകളെ a, b, x, y എന്നിങ്ങനെ ചിഹ്നം ചേർക്കാത്ത അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ടും, ന്യൂനസംഖ്യകളെ $-a, -b, -x, -y$ എന്ന് ന്യൂനചിഹ്നം ചേർത്ത അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ടുമാണ് ഇതുവരെ നാം സൂചിപ്പിച്ചിരുന്നത്.

ന്യൂനവും ഗുണനവും

$3\times(-1)$ എത്രയാണ്?

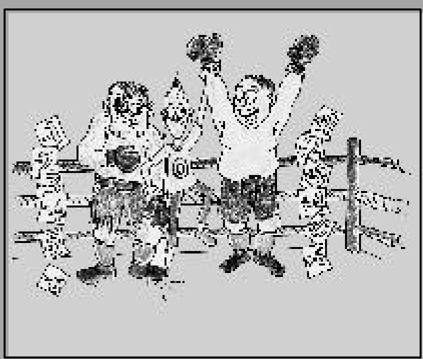
$(-3)\times(-1)$ ആയാലോ?

$$(-3)\times(-1)=3=-(-3)$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ. അപ്പോൾ അധിസംഖ്യയായാലും ന്യൂനസംഖ്യയായാലും, -1 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ സംഖ്യയുടെ ന്യൂനമാകും.

അതായത്, x ഏത് സംഖ്യയായാലും

$$(-1)\times x=-x$$



ന്യൂനകൃതികൾ

കൃതികളുടെ ഹരണത്തെക്കുറിച്ച് ഏഴാം ക്ലാസ്സിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ? ഉദാഹരണമായി

$$\frac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3$$

$$\frac{4^2}{4^5} = \frac{1}{4^{5-2}} = \frac{1}{4^3}$$

എന്തുകൊണ്ടാണ് $\frac{4^2}{4^5} = 4^{2-5} = 4^{-3}$ എന്നെഴുതാൻ കഴിയാത്തത്?

$(4)^{-3}$ എന്നതിന് അർഥമില്ലല്ലോ. -3 എണ്ണം 4 കൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുക എന്നാലെന്തർഥം?

ന്യൂനസംഖ്യകൾകൊണ്ടുള്ള ഗുണനത്തിന് (ആവർത്തനസങ്കലനമല്ലാത്ത) പുതിയ അർഥം കൊടുത്തതുപോലെ ന്യൂനകൃതികൾക്കും (ആവർത്തന ഗുണനമല്ലാത്ത) പുതിയ അർഥം കൊടുക്കാം.

$\frac{4^2}{4^5} = 4^{2-5} = 4^{-3}$ എന്നു കിട്ടണമെങ്കിൽ 4^{-3} ന് $\frac{1}{4^3}$ എന്ന അർഥമാണല്ലോ കൊടുക്കേണ്ടത്. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

x പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യയായാലും, n ഏതു എണ്ണൽ സംഖ്യയായാലും

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

എന്നാണർഥം.

ഇങ്ങനെ അർഥം കൊടുത്തുകഴിഞ്ഞാൽ, കൃതികളുടെ ഹരണത്തിന് ഏഴാംക്ലാസിൽ പഠിച്ച രണ്ടു തത്വങ്ങൾക്കു പകരം $m > n$ ആയാലും $m < n$ ആയാലും $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ എന്ന ഒരു തത്വം മതി.

എന്നാൽ ബീജഗണിതത്തിൽ സാധാരണയായി അധിസംഖ്യകളെയും ന്യൂനസംഖ്യകളെയുമെല്ലാം ചിഹ്നം ചേർക്കാത്ത അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ടുതന്നെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി $x + y$ എന്ന ബീജഗണിതവാചകം നോക്കുക. ഇതിൽ $x = 5, y = 3$ എന്നെടുത്താൽ

$$x + y = 5 + 3 = 8$$

$x = 5,\ y = -3$ എന്നും എടുക്കാം.

അപ്പോൾ

$$x + y = 5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

$x = -5, y = -3$ എന്നായാലോ?

$$x + y = (-5) + (-3) = -8$$

ഇതുപോലെ $x - y$ എന്നതിൽ $x = 5, y = 3$ എന്നെടുത്താൽ

$$x - y = 5 - 3 = 2$$

$x = 5, y = -3$ എന്നെടുത്താലോ?

$$x - y = 5 - (-3) = 5 + 3 = 8$$

$x = -5, y = -3$ ആയാലോ?

$$x - y = (-5) - (-3) = -5 + 3 = -2$$

$-x$ എന്നതും ഒരു വാചകമാണല്ലോ. എന്താണ് ഇതിന്റെ അർഥം? x എന്ന സംഖ്യയുടെ ന്യൂനം.

$-x$ എന്ന വാചകത്തിൽ, $x = 2$ എന്നെടുത്താലോ?

$$-x = -2$$

$x = -2$ ആയാലോ?

$$-x = -(-2) = 2$$

അതായത്, ബീജഗണിതവാചകങ്ങളിൽ, ചിഹ്നമൊന്നുമില്ലാതെ x എന്നെഴുതിയാൽ അത് അധിസംഖ്യ ആകണമെന്നില്ല.

$-x$ എന്നെഴുതിയാൽ അത് ന്യൂനസംഖ്യ ആകണമെന്നുമില്ല.

ചുവടെ കുറേ ബീജഗണിതവാചകങ്ങളും അവയിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ വിലകളും കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഓരോ വാചകത്തിന്റേയും വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

x	y	$x+y$	$y+x$	$x-y$	$y-x$	$-x-y$	$-y-x$
7	3	10	10	4	–4	–10	–10
7	–3						
–7	3						
–7	–3						
6	6						
6	–6						
–6	6						
–6	–6						

പൊതുതത്വങ്ങൾ

രണ്ട് അധിസംഖ്യകൾ കൂട്ടുമ്പോൾ ഏതു ക്രമത്തിൽ കൂട്ടിയാലും ഫലം തുല്യമാണെന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, $3 + 5 = 8 = 5 + 3$.

ഏഴാം ക്ലാസിലെ **ചുരുക്കെഴുത്ത്** എന്ന പാഠത്തിലെ ക്രമം മാറ്റിയാൽ എന്ന ഭാഗത്ത്, ഇത് ഒരു പൊതുതത്വമായി പറഞ്ഞതും ഓർമയില്ലേ?

x, y ഏത് അധിസംഖ്യകളായാലും

$$x + y = y + x$$

ന്യൂനസംഖ്യകൾക്കും ഇത് ശരിയാണെന്ന് മുകളിലെ പട്ടികയിൽ നിന്നു വ്യക്തമാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ തത്വം ഇനി ഇങ്ങനെ പറയാം.

x, y ഏത് സംഖ്യകളായാലും

$$x + y = y + x$$

ഇതുപോലെ ഏഴാംക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ തിരിച്ചു കുറച്ചാൽ എന്ന ഭാഗത്ത് മറ്റൊരു പൊതുതത്വമുണ്ട്:

x, y ഏത് അധിസംഖ്യകളായാലും $x < y$ ആണെങ്കിൽ

$$x - y = -(y - x)$$

ഇതിൽ നിബന്ധനകൾ ഉണ്ടല്ലോ (i) x, y ഇവ അധിസംഖ്യകളാകണം, (ii) $x < y$ ആകണം. ഈ നിബന്ധനകൾ ഇല്ലെങ്കിലും ഈ തത്വം ശരിയാകുമോ?

കൃതി പൂജ്യമായാൽ

ന്യൂന കൃതികൾക്കും കൂടി അർഥം കൊടുത്തു കഴിഞ്ഞപ്പോൾ, കൃതികളുടെ ഹരണത്തിൽ $m > n$ ആയാലും $m < n$ ആയാലും $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ എന്നെഴുതാം എന്നു കണ്ടല്ലോ.

അപ്പോഴും ഒരു ചോദ്യം ബാക്കിയുണ്ട്. കൃതികൾ തുല്യമായാലോ? ഉദാഹരണമായി $\frac{4^5}{4^5}$ എന്താണ്?

പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യയേയും അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് 1 ആണല്ലോ. അപ്പോൾ

$$\frac{4^5}{4^5} = 1$$

കൃത്യങ്കങ്ങൾ തമ്മിൽ കുറച്ചാൽ ഇതു കിട്ടുമോ?

4^0 എന്നതിന് അർഥമില്ലല്ലോ. ഇതിനും പുതിയ അർഥം കൊടുക്കാം. $\frac{4^5}{4^5} = 4^{5-5} = 4^0$ ആകണമെങ്കിൽ $4^0 = 1$ എന്നാണ് അർഥം കൊടുക്കേണ്ടത്

x പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യയായാലും,

$$x^0 = 1$$

എന്നാണർഥം.

ഇതും കൂടി ആയിക്കഴിഞ്ഞാൽ, കൃതികളുടെ ഹരണത്തിന് x പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏത് സംഖ്യയായാലും m, n ഏത് എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ ആയാലും,

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

എന്ന ഒരു തത്വം മതി.

വിപരീതസമന്വയം

കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും വിപരീത ക്രിയകളാണല്ലോ. അതുപോലെതന്നെ ഗുണനവും ഹരണവും. ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങുന്നതോടെ x, y എന്ന ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും (y പൂജ്യമാകരുത്),

$$x \div y = x \times \frac{1}{y}$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ. അങ്ങനെ ഹരണം എന്ന ക്രിയ ഗുണനത്തിന്റെതന്നെ ഒരു രൂപമാകുന്നു.

ഇതുപോലെ ന്യൂന സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങിയാൽ x, y എന്ന ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും

$$x - y = x + (-y)$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ. അങ്ങനെ വ്യവകലനം എന്ന ക്രിയ സങ്കലനത്തിന്റെതന്നെ വകഭേദമാകുന്നു.

ഭിന്നസംഖ്യകളും, ന്യൂനസംഖ്യകളുമെല്ലാം ഉൾപ്പെടുന്ന ബീജഗണിതത്തിൽ, xy എന്ന ഒറ്റ രൂപം കൊണ്ട് ഗുണനത്തേയും ഹരണത്തേയും സൂചിപ്പിക്കാം അതുപോലെ $x + y$ എന്ന ഒറ്റ രൂപം കൊണ്ട് സങ്കലനത്തേയും വ്യവകലനത്തേയും സൂചിപ്പിക്കാം.

ഈ പട്ടിക പൂരിപ്പിച്ചു നോക്കൂ.

x	y	$x - y$	$y - x$	$-(y - x)$
3	5	–2	2	–2
5	3	2	–2	2
5	–3			
3	–5			
–5	3			
3	–5			
–5	–3			
–3	–5			
3	0			
0	3			
–3	0			
0	–3			

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ

x, y ഏത് സംഖ്യകളായാലും

$$x - y = -(y - x)$$

ഏഴാം ക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ വേറെയും ചില പൊതുതത്വങ്ങൾ ഉണ്ടല്ലോ:

x, y ഏതു അധിസംഖ്യകളായാലും

$$-x + x = 0$$
$$-x + y = y - x$$
$$x + (-y) = x - y$$
$$-x + (-y) = -x - y = -(x + y)$$
$$x - (-y) = x + y$$
$$-x - (-y) = -x + y$$

ഇതെല്ലാം എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും (അധിസംഖ്യകൾ, ന്യൂനസംഖ്യകൾ, പൂജ്യം) ശരിയാകുന്നില്ലേ?

ഏകീകരണം

ഏതു മൂന്നു അധിസംഖ്യകൾ x, y, z എടുത്താലും

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

എന്ന് ഏഴാംക്ലാസിലെ **ചുരുക്കെഴുത്ത്** എന്ന പാഠത്തിലെ സംഖ്യകൾ മൂന്നായാൽ എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഇത് എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും (ന്യൂനസംഖ്യകളടക്കം) ശരിയാകുമോ?

ഈ പട്ടിക പൂരിപ്പിച്ചുനോക്കൂ:

x	y	z	$x + y$	$y + z$	$(x + y) + z$	$x + (y + z)$
–5	2	4	–3	6	1	1
5	–2	4				
5	2	–4				
–5	–2	4				
5	–2	–4				
–2	2	–4				
–5	–2	–4				

ഇതുപോലെയുള്ള കണക്കുകൂട്ടലുകളിൽ നിന്ന് എന്തു മനസ്സിലാക്കാം?

x, y, z ഏതു സംഖ്യകളായാലും

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

ഇതിൽ നിന്ന് മറ്റു ചില കാര്യങ്ങൾ കൂടി കാണാം. മുകളിലെഴുതിയ തത്വം എല്ലാം സംഖ്യകൾക്കും ശരിയായതിനാൽ ഇതിലെ y, z ഇവയ്ക്കു പകരം $-y, -z$ എടുത്താലും ശരിയാണ്. അതായത്,

$$\big(x + (-y)\big) + (-z) = x + \big((-y) + (-z)\big)$$

ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടുന്നതും, അതിന്റെ ന്യൂനം കുറയ്ക്കുന്നതും തുല്യമാണ് എന്ന തത്വം ഉപയോഗിച്ചാൽ, ഇത് എങ്ങനെ എഴുതാം?

$$(x - y) - z = x + (-y - z)$$

ഇതിലെ $-y -z$ എന്നതിനെ $-(y + z)$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

$$(x - y) - z = x - (y + z)$$

ഇത് കുറയ്ക്കലിന്റെ ഒരു പൊതുതത്വമായി ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടതല്ലേ? (**ചുരുക്കെഴുത്ത്** എന്ന പാഠത്തിലെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വ്യത്യാസം എന്ന ഭാഗം.) അപ്പോൾ ഈ തത്വം $(x + y) + z = x + (y + z)$ എന്നതിന്റെ ഒരു സവിശേഷ സന്ദർഭം മാത്രമാണ്.

ഇതുപോലെ x, y, z ഏതു സംഖ്യകളായാലും $(x + y) + z = x + (y + z)$ എന്നതിൽ നിന്ന്, ഇനിയുള്ളവ തെളിയിക്കാൻ ശ്രമിക്കൂ.

മാറുന്ന ചിഹ്നങ്ങൾ

x, y, z ഏതു സംഖ്യകളായാലും

$$x - (y + z) = x - y - z$$

$$x - (y - z) = x - y + z$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ. ബീജഗണിതവാചകങ്ങളുടെ ലഘൂകരണത്തിൽ, ഒരു തുകയോ വ്യത്യാസമോ കുറയ്ക്കേണ്ടി വരുമ്പോൾ, ഈ രണ്ടു തത്വങ്ങളാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. കുറയ്ക്കൽ എന്ന ക്രിയ +, − എന്നീ ചിഹ്നങ്ങളെ പരസ്പരം മാറ്റുന്നു എന്നു പൊതുവായിപ്പറയാം.

- x, y, z ഏതു സംഖ്യകളായാലും $(x - y) + z = x - (y - z)$.
- x, y, z ഏതു സംഖ്യകളായാലും $(x + y) - z = x + (y - z)$.

ലഘൂകരണം

ഏഴാം ക്ലാസിലെ **കണക്കിന്റെ ഭാഷ** എന്ന പാഠത്തിൽ ബീജഗണിതവാചകങ്ങൾ ലഘൂകരിച്ചത് ഓർക്കുന്നില്ലേ?

ഉദാഹരണമായി

$$x + (x + 1) = (x + x) + 1 = 2x + 1$$

എന്താണിതിന്റെ അർഥം?

x ന്റെ ഏത് വിലയ്ക്കും $x + (x + 1)$ ഉം $2x + 1$ ഉം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ, ഇവ രണ്ടും തുല്യമായിരിക്കും. ഇതിലെ $x + (x + 1)$ നെക്കാൾ കുറേക്കൂടി ലളിതമായ രൂപമാണല്ലോ $2x + 1$

ഇതുപോലെ $2x - (x + 1)$ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

x, y, z ഏതുസംഖ്യകളായാലും $x - (y + z) = (x - y) - z$ എന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

അപ്പോൾ

$$2x - (x + 1) = (2x - x) - 1 = x - 1$$

$(3x + y) - (2x + y)$ ആയാലോ?

$$\begin{aligned}(3x + y) - (2x + y) &= (3x + y) - 2x - y \\ &= 3x + y - 2x - y \\ &= (3x - 2x) + (y - y) \\ &= x\end{aligned}$$

ഒരു ഉദാഹരണം കൂടി: $(2x + 3y) - (x - 2y)$ എങ്ങനെ ലഘൂകരിക്കും?

x, y, z ഏതു സംഖ്യകളായാലും $x - (y - z) = x - y + z$ എന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇതനുസരിച്ച്

$$\begin{aligned}(2x + 3y) - (x - 2y) &= (2x + 3y) - x + 2y \\ &= 2x + 3y - x + 2y \\ &= 2x - x + 3y + 2y \\ &= x + 5y\end{aligned}$$

ഇനി ചുവടെയുള്ള വാചകങ്ങൾ ലഘൂകരിച്ചെഴുതൂ.

- $(3x + 2y) - (x + y)$
- $(3x + 2y) - (x - y)$
- $(x + y) - (x - y)$
- $(x - y) - (x + y)$
- $(4x - 3y) - (2x - 5x)$

വ്യവകലനവും ഹരണവും

$$x - (y + z) = (x - y) - z$$

$$x - (y - z) = (x - y) + z$$

എന്നീ നിയമങ്ങൾപോലെ ഗുണനത്തെയും ഹരണത്തെയും ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന നിയമങ്ങളുമുണ്ട്.

$$x \div (y \times z) = (x \div y) \div z$$

$$x \div (y \div z) = (x \div y) \times z$$