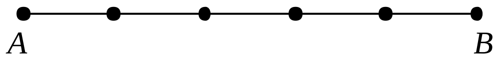
2 അംശബന്ധവും അനുപാതവും

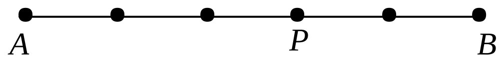
ഒരു കാര്യം, പല രീതി

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



AB എന്ന വരയെ അഞ്ചു സമഭാഗങ്ങളാക്കിയിരിക്കുന്നു.

ആദ്യത്തെ മൂന്നുഭാഗം ചേർന്നതിനെ AP എന്നു വിളിച്ചാൽ AB, AP, BP എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എങ്ങനെയെല്ലാം പറയാം?



- AB യുടെ $\frac{3}{5}$ ഭാഗമാണ് AP.
- AB യുടെ $\frac{2}{5}$ ഭാഗമാണ് BP.
- AP യുടെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ് BP.
- BP യുടെ $\frac{3}{2}$ മടങ്ങാണ് AP.
- AP, BP ഇവയുടെ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $3 : 2$ ആണ്.

മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം:

- AB യുടെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗം കൊണ്ട് അളന്നാൽ AP യുടെ നീളം 3 ഉം BP യുടെ നീളം 2 ഉം ആണ്.

(ഏഴാം ക്ലാസിലെ **ഭാഗങ്ങൾ ബന്ധങ്ങൾ** എന്ന അധ്യായം നോക്കുക).

വേറൊരു കണക്ക്: 50 രൂപ അമ്മുവും അപ്പുവും പങ്കിട്ടെടുത്തു. അമ്മു 30 രൂപയും, അപ്പു 20 രൂപയുമാണ് എടുത്തത്.

അമ്മുവിന് 50 ൽ 30 കിട്ടി. $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$ ആണല്ലോ.

അപ്പോൾ അമ്മുവിന് കിട്ടിയത് ആകെ തുകയുടെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

അപ്പുവിനോ?

ഭിന്നങ്ങളില്ലാതെ

ഒരു നിശ്ചിത ഏകകം ഉപയോഗിച്ച് നീളവും മറ്റും അളക്കുമ്പോൾ എപ്പോഴും എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കിട്ടില്ല, എന്ന വസ്തുതയിൽ നിന്നാണ് ഭിന്നസംഖ്യ എന്ന ആശയം ഉണ്ടായത്. രണ്ട് അളവുകൾ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ വേണ്ടത്ര ചെറിയ ഏകകം ഉപയോഗിച്ചാൽ രണ്ടിനേയും എണ്ണൽ സംഖ്യയാക്കാമോ എന്ന ചിന്തയാണ് അംശബന്ധം എന്ന ആശയത്തിന് ആധാരം.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു ചരടുകൊണ്ട് അളക്കുമ്പോൾ ഒരു വസ്തുവിന്റെ നീളം $\frac{2}{5}$ ഉം മറ്റൊന്നിന്റെ നീളം $\frac{3}{5}$ ഉം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ചരടിന്റെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗം ഏകകമായെടുത്താൽ, ആദ്യത്തേതിന്റെ നീളം 2 ഉം രണ്ടാമത്തേതിന്റെ നീളം 3 ഉം ആകുമല്ലോ. നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $2 : 3$ എന്നു പറയാം.

രണ്ടു വസ്തുക്കളിൽ ഒന്നിന്റെ നീളം ഒരു ചരടിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗവും മറ്റൊന്നിന്റെ നീളം $\frac{1}{5}$ ഭാഗവും ആണെങ്കിലോ? ചരടിന്റെ $\frac{1}{15}$ ഭാഗം ഏകകമായെടുത്താൽ ആദ്യത്തേതിന്റെ നീളം 5 ഉം രണ്ടാമത്തേതിന്റെ നീളം 3 ഉം ആകും. അംശബന്ധം $5 : 3$ എന്നു പറയാം.

ഇതുകൊണ്ടുതന്നെ അംശബന്ധങ്ങൾ പൊതുവേ എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് പറയുന്നത്.

ഇത് ഏതെല്ലാം രീതിയിൽ പറയാം?

- ആകെ തുകയുടെ .... ഭാഗം അമ്മുവിനും .... ഭാഗം അപ്പുവിനും കിട്ടി
- അപ്പുവിന് കിട്ടിയതിന്റെ .... മടങ്ങ് അമ്മുവിന് കിട്ടി.
- അമ്മുവിന് കിട്ടിയതിന്റെ .... ഭാഗം അപ്പുവിന് കിട്ടി.
- അമ്മുവിനും അപ്പുവിനും കിട്ടിയ തുകകളുടെ അംശബന്ധം .... ആണ്.

ഇവർ വീതിച്ച തുക പത്ത് രൂപ നോട്ടുകളാണെങ്കിലോ?

- അമ്മുവിന് .... നോട്ടും അപ്പുവിന് .... നോട്ടും കിട്ടി.

ഇനി ഈ കണക്ക് നോക്കൂ.

ചാക്കോച്ചനും ദിനേശനും കൂടി ഒരു പങ്കു കച്ചവടം തുടങ്ങി. ചാക്കോച്ചൻ 5000 രൂപയും ദിനേശൻ 7000 രൂപയും ആണ് മുതൽ മുടക്കിയത്.

ആകെ മുടക്കുമുതലിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് ചാക്കോച്ചൻ മുടക്കിയത്? ദിനേശനോ?

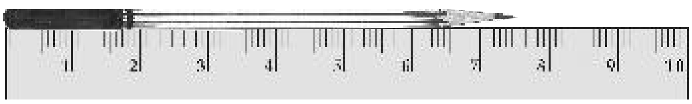
ചാക്കോച്ചൻ മുടക്കിയതിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് ദിനേശൻ മുടക്കിയത്?

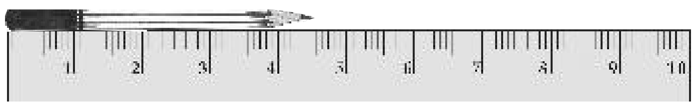
ദിനേശൻ മുടക്കിയതിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് ചാക്കോച്ചൻ മുടക്കിയത്?

എത്ര ആയിരം രൂപയാണ് ചാക്കോച്ചൻ മുടക്കിയത്? ദിനേശനോ?

ഇവരുടെ മുടക്കുമുതലുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

ഒരു ഉദാഹരണം കൂടിയാകാം. ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



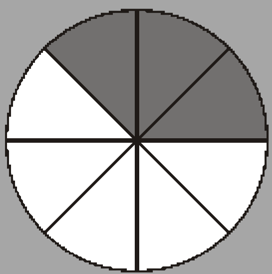


വലിയ പെൻസിലിന്റെ നീളം 7.5 സെന്റിമീറ്റർ; ചെറിയ പെൻസിലിന്റെ നീളം 4.5 സെന്റിമീറ്റർ.

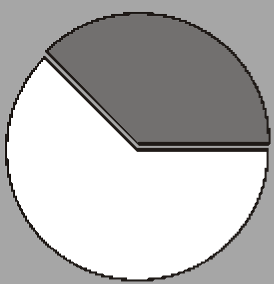
ചെറിയ പെൻസിലിന്റെ എത്ര മടങ്ങ് നീളമുണ്ട് വലിയ പെൻസിലിന്?

അംശബന്ധവും ഭിന്നങ്ങളും

ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഭാഗങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യാനും അംശബന്ധം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രത്തിൽ കറുത്ത നിറമുള്ള ഭാഗം വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{3}{8}$ ഭാഗമാണ്; വെളുത്ത നിറമുള്ള ഭാഗം വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{5}{8}$ ഭാഗവും.



ഇവ രണ്ടും ചേർന്നാൽ മുഴുവൻ വൃത്തമായി. ഈ രണ്ട് ഭാഗങ്ങളുടേയും വലിപ്പം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 5.



ഇങ്ങനെ നോക്കുമ്പോൾ 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധം $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ എന്ന രണ്ടു ഭിന്നസംഖ്യകളെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

$$\frac{7.5}{4.5} = \frac{75}{45} = \frac{5}{3}$$

അപ്പോൾ ചെറിയ പെൻസിലിന്റെ നീളത്തിന്റെ $\frac{5}{3}$ മടങ്ങാണ് വലിയ പെൻസിലിന്റെ നീളം. വലിയ പെൻസിലിന്റെ നീളത്തിന്റെ $\frac{3}{5}$ ഭാഗമാണ് ചെറിയ പെൻസിലിന്റെ നീളം എന്നും പറയാം.

1.5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ചരടു കൊണ്ട് അളന്നാലോ? വലിയ പെൻസിലിന്റെ നീളം 5 ചരടും ചെറിയ പെൻസിലിന്റെ നീളം 3 ചരടും ആയിരിക്കും.

വലിയ പെൻസിലിന്റെയും ചെറിയ പെൻസിലിന്റെയും നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

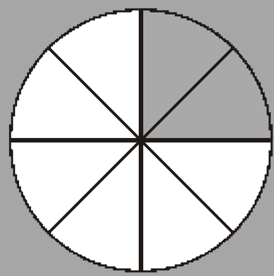
പെൻസിലുകൾ രണ്ടും ചേർത്തുവച്ചാൽ ആകെ നീളം 12 സെന്റിമീറ്റർ ആണല്ലോ. വലിയ പെൻസിലിന്റെ നീളം ഇതിന്റെ $\frac{7.5}{12} = \frac{5}{8}$ ഭാഗവും, ചെറിയ പെൻസിലിന്റെ നീളം $\frac{4.5}{12} = \frac{3}{8}$ ഭാഗവും ആണെന്നും വേണമെങ്കിൽ പറയാം. പക്ഷേ പെൻസിലുകൾ ചേർത്തു വയ്ക്കേണ്ട ആവശ്യം വരുന്നില്ലല്ലോ.

ഇതുപോലെ ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന കാര്യങ്ങൾ ഭിന്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചും, അംശബന്ധം ഉപയോഗിച്ചും പല രീതിയിൽ പറയാമോ എന്നു നോക്കൂ:

- ദോശയുണ്ടാക്കാൻ 6 കപ്പ് അരിയും 2 കപ്പ് ഉഴുന്നും എടുത്തു.
- ക്ലാസിൽ 26 പെൺകുട്ടികളും 24 ആൺകുട്ടികളുമുണ്ട്.
- സ്കൂളിൽ 500 വിദ്യാർത്ഥികളും 15 അധ്യാപകരും ഉണ്ട്.
- ഒരു ചരടുകൊണ്ട് അളന്നപ്പോൾ ഒരു പെൻസിലിന്റെ നീളം ചരടിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗമാണ്. മറ്റൊരു പെൻസിലിന്റെ നീളം ചരടിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗവുമാണ്.

ലഘൂകരണം

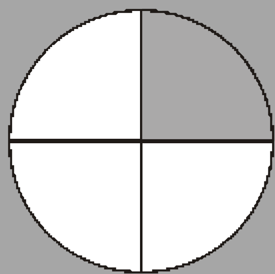
ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?



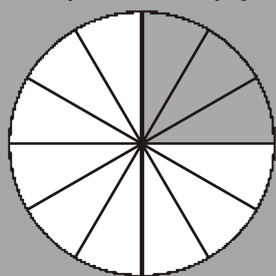
വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{2}{8}$ ഭാഗമാണ് ചെറിയ കഷണം. വലിയ കഷണം $\frac{6}{8}$ ഭാഗമാണ്. അതിനാൽ അംശബന്ധം $2:6$ എന്നു പറയാം.

പക്ഷേ $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ഉം $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ആണല്ലോ

അപ്പോൾ അംശബന്ധം $1:3$ എന്നും പറയാം. വൃത്തത്തെ 4 സമഭാഗങ്ങളാക്കി 1 ഭാഗവും, മിച്ചമുള്ള 3 ഭാഗങ്ങളും എടുത്താലും ഇതേ കഷണങ്ങൾ തന്നെയല്ലേ കിട്ടുന്നത്?



അപ്പോൾ $2:6$ എന്ന അംശബന്ധവും $1:3$ എന്ന അംശബന്ധവും തുല്യമാണ്.$4:12$ എന്ന അംശബന്ധവും ഇവയ്ക്ക് തുല്യമാണ്.



പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

$$a : b = ma : mb$$

സാധാരണയായി അംശബന്ധങ്ങൾ പറയുമ്പോൾ പൊതു ഘടകങ്ങൾ ഒഴിവാക്കി ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് പറയുന്നത്.

ഗണിതവും പ്രയോഗവും

അംശബന്ധം എന്ന ആശയത്തിന് പല വിവരണങ്ങൾ കണ്ടല്ലോ. സന്ദർഭത്തിനനുസരിച്ച് ഇവ പ്രയോഗിക്കണം. ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കൂ.

> വീടിന് ചായമടിക്കാൻ നീലയും വെള്ളയും നിറങ്ങൾ 3 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ചേർക്കണം. 35 ലിറ്റർ ചായക്കൂട്ടുണ്ടാക്കാൻ എത്ര ലിറ്റർ നീലയും എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളയും ചേർക്കണം?

ഇവിടെ തന്നിട്ടുള്ളത് ആകെയുള്ള ചായക്കൂട്ടിന്റെ അളവാണ്. നീലയും വെള്ളയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 2 എന്നതിൽ നിന്ന്, ചായക്കൂട്ടിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് നീല, എത്ര ഭാഗമാണ് വെള്ള എന്ന് മനസ്സിലാക്കാമല്ലോ.

$\frac{3}{5}$ ഭാഗം നീല.

$\frac{2}{5}$ ഭാഗം വെള്ള.

ചായക്കൂട്ട് 35 ലിറ്റർ വേണമെങ്കിലോ?

നീലയുടെ അളവ് $= \mathbf{35} \times \frac{3}{5} = 21$ ലിറ്റർ

വെള്ളയുടെ അളവ് $= 35 \times \frac{2}{5} = 14$ ലിറ്റർ

മറ്റൊരു രീതിയിലും ആലോചിക്കാം. നീലയും വെള്ളയും ചേർക്കുന്നതിന്റെ അംശബന്ധം 3 : 2 ആയതിനാൽ ഇവയുടെ മിശ്രിതത്തിൽ നീലയുടെയും വെള്ളയുടെയും അളവ്, ഒരു നിശ്ചിത അളവിന്റെ 3 മടങ്ങും 2 മടങ്ങും ആയിരിക്കണം.

ഈ നിശ്ചിത അളവ് 1 ലിറ്ററാണെങ്കിൽ ആകെ 5 ലിറ്റർ മിശ്രിതം കിട്ടും. വേണ്ടത് 35 ലിറ്ററാണല്ലോ. അപ്പോൾ നീല, 3 ലിറ്ററിന്റെ 7 മടങ്ങും വെള്ള, 2 ലിറ്ററിന്റെ 7 മടങ്ങും ആയിരിക്കും.

ഇനി മറ്റൊരു കണക്ക്.

> ഒരു സ്കൂളിൽ ആൺകുട്ടികളുടേയും പെൺകുട്ടികളുടേയും എണ്ണം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 12 : 13 ആണ്. സ്കൂളിൽ 360 ആൺകുട്ടികളുണ്ട്. പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം എത്രയാണ്?

ഇവിടെ തന്നിട്ടുള്ള അംശബന്ധത്തിൽ നിന്ന് വായിച്ചെടുക്കേണ്ടതെന്താണ്?

പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണമാണല്ലോ കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്. അത് ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ്?

അംശബന്ധവും നിരക്കും

ഇഡ്ഡലി ഉണ്ടാക്കുമ്പോൾ 2 കപ്പ് അരിക്ക് 1 കപ്പ് ഉഴുന്ന് എന്നാണ് പൊതുവേ എടുക്കുന്നത്. അരിയും ഉഴുന്നും എടുക്കുന്നത് 2 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് എന്നു പറയാം. ഓരോ 2 കപ്പ് അരിക്കും 1 കപ്പ് ഉഴുന്ന് എടുക്കണം എന്നാണല്ലോ ഇതിന്റെ അർത്ഥം. ഇവിടെ 2 ന് 1 എന്ന നിരക്കിനാണ് പ്രാധാന്യം.

ഇതുപോലെ രാസവസ്തുക്കൾ ചേർത്ത് സംയുക്തങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുമ്പോൾ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം (നിരക്ക്) മാറിയാൽ സംയുക്തത്തിന്റെ സ്വഭാവം തന്നെ മാറിയേക്കാം.

തന്നിട്ടുള്ള അംശബന്ധത്തിൽനിന്ന് പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ $\frac{13}{12}$ മടങ്ങാണ്. ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം 360 ആണെന്നും തന്നിട്ടുണ്ട്.

അപ്പോൾ പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം $= 360 \times \frac{13}{12} = 390$.

മറ്റൊരു രീതിയിലും ആലോചിക്കാം. ആൺകുട്ടികളുടെ യഥാർത്ഥ എണ്ണം 360; അംശബന്ധത്തിൽ ഇതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യ 12.

12 ന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് 360?

അപ്പോൾ പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം 13 ന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ്?

ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തു നോക്കൂ.

- ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും 5 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. നീളം 2.5 മീറ്ററാണ്. വീതി എത്ര മീറ്ററാണ്?
- നസീർ 4000 രൂപയും നാരായണൻ 6000 രൂപയും മുടക്കി ഒന്നിച്ചൊരു കച്ചവടം തുടങ്ങി. ഒരു വർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 3000 രൂപ ലാഭം കിട്ടി. ഇത് മുടക്കിയ തുകയുടെ അംശബന്ധത്തിൽ വീതിച്ചാൽ ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര രൂപ കിട്ടും?
- രമയുടെ കൈയിൽ 18 ചുവന്ന മുത്തുകളും 12 പച്ച മുത്തുകളും ഉണ്ട്. ഉമയുടെ കൈയിൽ ചുവപ്പും പച്ചയുമായി 20 മുത്തുകളാണുള്ളത്. രണ്ടു നിറത്തിലുമുള്ള മുത്തുകളുടെ അംശബന്ധം രമയുടേതു തന്നെ. ഉമയുടെ കൈയിൽ എത്ര ചുവന്ന മുത്തുകളുണ്ട്? പച്ച മുത്തുകളോ?

മറ്റു ചില ചോദ്യങ്ങൾ

ജോയിയും ജയനും ഒരു തുക 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വീതിച്ചു. ജയന് 2000 രൂപ അധികം കിട്ടി. എത്ര രൂപയാണ് വീതിച്ചത്? ഓരോരുത്തർക്കും കിട്ടിയതെത്ര?

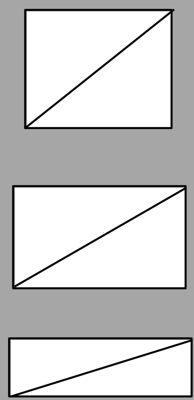
ഇവിടെ കിട്ടിയ തുക അറിയില്ല. പക്ഷേ അംശബന്ധം 3 : 5 എന്നു തന്നിട്ടുള്ളതിൽ നിന്ന്, ജോയിക്ക് ഈ തുകയുടെ $\frac{3}{8}$ ഭാഗവും ജയന് $\frac{5}{8}$ ഭാഗവുമാണ് കിട്ടിയതെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

ടെലിവിഷൻ ഗണിതം

ടെലിവിഷൻ സെറ്റുകളുടെ വലിപ്പം പൊതുവെ 14 ഇഞ്ച്, 17 ഇഞ്ച് , 21 ഇഞ്ച് എന്നിങ്ങനെയാണ് പറയുന്നത്. എന്താണ് ഇതിന്റെ അർഥം?

ടെലിവിഷൻ സ്ക്രീൻ ഒരു ചതുരമാണല്ലോ. അതിന്റെ വികർണത്തിന്റെ അളവുകളാണ് ഇവയെല്ലാം. (എന്തുകൊണ്ടോ ടെലിവിഷൻ വ്യവസായത്തിൽ ഇന്നും സെന്റിമീറ്ററിനു പകരം ഇഞ്ച് തന്നെയാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്.)

ഇതുകൊണ്ടു മാത്രം ടെലിവിഷന്റെ വലിപ്പം നിശ്ചയിക്കാമോ? വികർണം തുല്യമായാലും വീതിയും നീളവും വ്യത്യാസമാകാമല്ലോ.



സ്ക്രീനിന്റെ വലിപ്പം എത്രതന്നെയായാലും അതിന്റെ നീളവും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം സാധാരണ ടെലിവിഷൻ സെറ്റുകളിൽ 4 : 3 ആണ്. ഈ അംശബന്ധം 16 : 9 ആയ (wide screen) സെറ്റുകളും ഇപ്പോൾ ഉണ്ടാക്കിത്തുടങ്ങിയിട്ടുണ്ട്. വികർണത്തിന്റെ വലിപ്പം തുല്യമായ രണ്ട് ടെലിവിഷന്റെ സ്ക്രീനുകളിൽ ഈ വ്യത്യാസം നോക്കൂ.

4 : 3

16 : 9

ഈ അംശബന്ധത്തിന് ചതുരത്തിന്റെ മുഖാംശബന്ധം (aspect - ratio) എന്നാണ് പേര്.

17 ഇഞ്ച് വലിപ്പമുള്ള 4 : 3 ടെലിവിഷൻ സ്ക്രീനിന്റെ നീളവും ഉയരവും കണ്ടുപിടിക്കാമോ? പൈഥഗോറസിനെ ഓർക്കുക.

ഇവയുടെ വ്യത്യാസമാണ് ജയന് കൂടുതൽ കിട്ടിയ 2000 രൂപ. $\frac{5}{8}$ ന്റേയും $\frac{3}{8}$ ന്റേയും വ്യത്യാസം എത്രയാണ്?

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

അപ്പോൾ വീതിച്ച തുകയുടെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗമാണ് 2000.

ഇനി വീതിച്ച തുകയും ഓരോരുത്തരുടേയും വീതവും കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ?

മറ്റൊരു രീതിയിലും ആലോചിക്കാം. ജോയിക്കും ജയനും കിട്ടിയത് ഒരു നിശ്ചിത തുകയുടെ 3 മടങ്ങും 5 മടങ്ങും ആണല്ലോ. അതിനാൽ ജയന് കൂടുതൽ കിട്ടിയത്, ഈ തുകയുടെ 2 മടങ്ങാണ്. അത് 2000 രൂപയാണ്. അപ്പോൾ, ഈ നിശ്ചിത തുക $\frac{1}{2} \times 2000 = 1000$ രൂപയാകണമല്ലോ. ഇനി ജോയിക്ക് കിട്ടിയത് $3 \times 1000 = 3000$ രൂപയും, ജയനു കിട്ടിയത് $5 \times 1000 = 5000$ രൂപയും എന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല.

വേറൊരു ചോദ്യം നോക്കൂ:

> ഒരു ക്ലാസിലെ ആൺകുട്ടികളുടേയും പെൺകുട്ടികളുടേയും എണ്ണം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $2 : 3$ ആണ്. ആൺകുട്ടികളിലെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം പേർ ക്ലാസിൽനിന്നു പോയാൽ ഈ അംശബന്ധം എത്രയാകും?

ഈ ക്ലാസിൽ ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങാണല്ലോ പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം. ആൺകുട്ടികളിലെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം പേർ ക്ലാസിൽനിന്നുപോയാൽ $\frac{3}{4}$ ഭാഗം പേർ അവശേഷിക്കും. $\frac{3}{4}$ ന്റെ 2 മടങ്ങാണ് $1\frac{1}{2}$. അപ്പോൾ അംശബന്ധം $1 : 2$ ആണ്.

മറ്റേതെല്ലാം രീതിയിൽ ഇതു ചെയ്യാം?

ഒരു ചോദ്യം കൂടി:

> ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $AB : BC = 1 : 2$ ഉം $BC : AC = 3 : 5$ ആണ്. $AB : AC$ എത്രയാണ്?

ഇവിടെ AB എന്ന വശത്തിന്റെ നീളം, AC എന്ന വശത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് (അല്ലെങ്കിൽ ഭാഗമാണ്) എന്നു കണ്ടുപിടിക്കണം.

അങ്ങോട്ടും ഇങ്ങോട്ടും

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം 33 സെന്റിമീറ്ററും വീതി 1 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്. രണ്ടാമത്തെ ചതുരത്തിന്റെ നീളം 11 സെന്റിമീറ്ററും വീതി 6 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്. ഈ ചതുരങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്? അവയുടെ പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്? ഇതേ സവിശേഷതയുള്ള വേറേ ചതുരങ്ങളുണ്ടോ?

AB യുടെ നീളം BC യുടെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

$AB : BC = 1 : 2$ എന്നതിൽ നിന്ന്

$$AB = \frac{1}{2}\ BC$$

ഇനി BC യുടെ നീളം AC യുടെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

$BC : AC = 3 : 5$ എന്നതിൽനിന്ന്

$$BC = \frac{3}{5}\ AC$$

അപ്പോൾ AB യുടെ നീളവും AC യുടെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്?

$$AB = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\ AC = \frac{3}{10}\ AC$$

അതായത്, $AB = \frac{3}{10}\ AC$

ഇതിൽനിന്ന്

$$AB : AC = 3 : 10$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. ഇതും മറ്റേതെങ്കിലും രീതിയിൽ ചെയ്യാമോ?

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തു നോക്കൂ.

- ഒരു പ്രദേശത്തെ നിരക്ഷരരുടെ എണ്ണവും സാക്ഷരരുടെ എണ്ണവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $1 : 19$ ആണ്. ആകെ ജനസംഖ്യ 64000 ആണെങ്കിൽ നിരക്ഷരരുടെ എണ്ണമെത്ര? സാക്ഷരരുടെ എണ്ണമെത്ര?
- ഒരു പശുവളർത്തൽ കേന്ദ്രത്തിലെ പശുക്കളിൽ കറവയുള്ളവയുടേയും കറവയില്ലാത്തവയുടേയും എണ്ണം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $8 : 3$ ആണ്. കറവയില്ലാത്തവയുടെ എണ്ണം 144 ആണെങ്കിൽ കറവയുള്ളവയുടെ എണ്ണമെത്ര? ആകെ പശുക്കളുടെ എണ്ണമെത്ര?
- ഒരു സ്കൂളിലെ ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണവും പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണവും $14 : 15$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തേക്കാൾ 27 കൂടുതലാണ്. എങ്കിൽ ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണമെത്ര? പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണമെത്ര?
- ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും $8 : 5$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. നീളം വീതിയേക്കാൾ 10.5 മീറ്റർ കൂടുതലാണ്. ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും എത്രയാണ്?
- ഒരു യോഗത്തിൽ പങ്കെടുത്ത പുരുഷൻമാരുടേയും സ്ത്രീകളുടേയും അംശബന്ധം$3 : 5$ ആണ്. കുറേക്കഴിഞ്ഞപ്പോൾ പുരുഷന്മാരിൽ പകുതിപേരും സ്ത്രീകളിൽ മൂന്നിലൊന്നു പേരും തിരികെ പോയി. ഇപ്പോൾ

ദശാംശസംഖ്യകൾ

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം 2.5 മീറ്ററും വീതി 1.5 മീറ്ററുമാണ്. നീളവും വീതിയും ഏത് അംശബന്ധത്തിലാണ്?

0.5 മീറ്ററിന്റെ 5 മടങ്ങാണ് നീളം; വീതി 3 മടങ്ങും. അപ്പോൾ നീളവും വീതിയും $5 : 3$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.

മറ്റൊരു രീതിയിലും ആലോചിക്കാം ഈ ചതുരത്തിൽ നീളം, വീതിയുടെ $\frac{2.5}{1.5}$ മടങ്ങാണെന്ന് പറയാം.

$$\frac{2.5}{1.5} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

ആണല്ലോ. അപ്പോൾ അംശബന്ധം 5:3

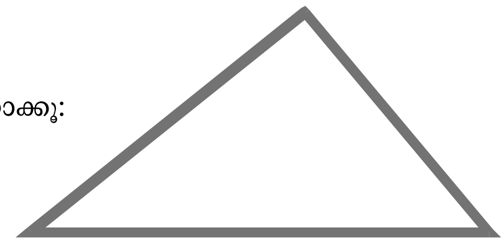
നീളം 3.5 മീറ്ററും, വീതി 2.25 മീറ്ററുമായ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

പുരുഷന്മാരുടെയും സ്ത്രീകളുടെയും എണ്ണം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എത്രയാണ്?

- ഒരു സ്കൂളിൽ ലോവർ പ്രൈമറിയിലും അപ്പർ പ്രൈമറിയിലും പഠിക്കുന്ന കുട്ടികളുടെ എണ്ണം തമ്മിലുള്ള **A wi - Ô w** 2 : 3 ആണ്. അപ്പർ പ്രൈമറിയിലും സെക്കന്ററിയിലും പഠിക്കുന്ന കുട്ടികളുടെ എണ്ണം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 4 : 5 ആണ്. ലോവർ പ്രൈമറിയിലും സെക്കന്ററിയിലും പഠിക്കുന്ന കുട്ടികളുടെ എണ്ണം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?
- ഫാത്തിമ, ഗംഗ, ഹീര എന്നിവർ ചേർന്ന് രണ്ടു പാക്കറ്റ് മിഠായിവാങ്ങി. 140 മിഠായികളുണ്ടായിരുന്നു. അവർ 3 പേരും കൂടി അത് വീതിച്ചു. ഫാത്തിമ എടുത്ത മിഠായികളുടെ എണ്ണവും ഗംഗ എടുത്ത മിഠായികളുടെ എണ്ണവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 4 ആണ്. ഗംഗ എടുത്ത മിഠായികളുടെ എണ്ണവും ഹീര എടുത്തവയും 6 : 7 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. എന്നാൽ ഓരോരുത്തർക്കും കിട്ടിയ മിഠായികളുടെ എണ്ണം എത്ര?

അളവുകൾ മൂന്നായാൽ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഈർക്കിൽ കൊണ്ടൊരു ത്രികോണം. ഇതിന്റെ വശങ്ങൾ 8 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയാണ്.

അപ്പോൾ ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കാൻ എത്ര നീളമുള്ള ഈർക്കിലാണ് ഉപയോഗിച്ചത്?

8 + 4 + 6 = 18, അല്ലേ?

താഴത്തെ വശം ഇതിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

$$\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

മറ്റു രണ്ടുവശങ്ങളോ?

$$\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{6}{18} = \frac{3}{9}$$

അപ്പോൾ വശങ്ങൾ അവയുടെ തുകയുടെ $\frac{4}{9}$ ഭാഗം, $\frac{2}{9}$ ഭാഗം, $\frac{3}{9}$ ഭാഗം എന്നിങ്ങനെയാണ്.

അംശബന്ധവും വിസ്തീർണവും

ഒരേ ചുറ്റളവുള്ള രണ്ടു ചതുരങ്ങളിൽ ഒന്നിന്റെ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 1. രണ്ടാമത്തേതിന്റെ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 2. ഏതിനാണ് പരപ്പളവ് കൂടുതൽ?

ചുറ്റളവ് തുല്യമായതിനാൽ വീതിയുടെയും നീളത്തിന്റെയും തുക തുല്യമാണ്. ഇത് s എന്നെടുത്താൽ ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ $\frac{1}{3}s$, $\frac{2}{3}s$. അതിനാൽ പരപ്പളവ് $\frac{2}{9}s^2$.

രണ്ടാമത്തെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവോ?

$$\frac{2}{5}s \times \frac{3}{5}s = \frac{6}{25}s^2.$$

$\frac{2}{9}$, $\frac{6}{25}$ ഇവയിൽ വലുതേതാണ്?

$2 \times 25 < 6 \times 9$ ആയതിനാൽ

$$\frac{2}{9} < \frac{6}{25}.$$

അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ ചതുരത്തിനാണ് കൂടുതൽ പരപ്പുള്ളത്.

ഇനി ഇതേ ചുറ്റളവും വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 1 : 3 ഉം ആയ ചതുരമെടുത്താലോ?

ഏതിനാണ് പരപ്പളവ് കൂടുതൽ?

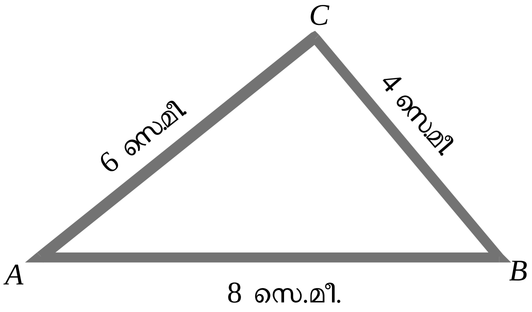
ഈ ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കണ്ടുപിടിച്ചു നോക്കൂ.

ഒരേ ചുറ്റളവുള്ള കൂറേക്കൂടി ചതുരങ്ങളെടുത്തു പരിശോധിക്കൂ.

ഇതു മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറയാം.

വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 4 : 2 : 3 ആണ്.

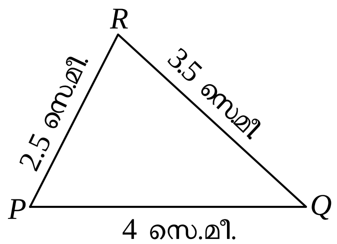
കുറേക്കൂടി കൃത്യമായിപ്പറയാൻ ത്രികോണത്തിനു പേരിടാം:



ഈ ത്രികോണത്തിൽ AB, BC, CA ഇവയുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 4 : 2 : 3 ആണ്.

മറ്റൊരു രീതിയിലും ഇതു കാണാം. 2 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ചരടുകൊണ്ട് അളന്നാൽ, AB, BC, CA ഇവയുടെ നീളം 4, 2, 3 എന്നു കിട്ടും.

ഇനി ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:



വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

വശങ്ങളുടെ തുക (അതായത്, ചുറ്റളവ്) എത്രയാണ്?

$$PQ + QR + RP = 4 + 3.5 + 2.5 = 10 \text{ സെ.മീ.}$$

ഓരോ വശവും ഇതിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{3.5}{10} = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{2.5}{10} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

ഈ ഭിന്നങ്ങളുടെയെല്ലാം ഛേദം തുല്യമല്ലല്ലോ. പിന്നെങ്ങനെ അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കും?

അംശബന്ധം മാറിയാൽ

ഈ ഫോട്ടോ നോക്കൂ:

ഇതിന്റെ വീതി 1.5 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 2.25 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതായത് വീതിയും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3.

നീളവും വീതിയും ഇരട്ടിയാക്കിയാലോ?

വീതി 3 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 4.5 സെന്റിമീറ്ററും. അംശബന്ധം പഴയതു തന്നെ.

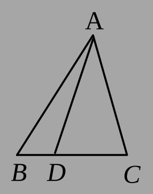
ഇനി വീതി 3 സെന്റിമീറ്റർ ആക്കുമ്പോൾ ഉയരവും ഇരട്ടിയാക്കുന്നതിനു പകരം, ഉയരവും 1.5 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി 3.75 സെന്റിമീറ്റർ ആക്കിയാലോ?

അംശബന്ധം 4 : 5 ആയി.

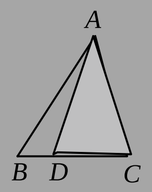
ചിത്രത്തിനെന്തു സംഭവിച്ചു?

വിസ്തീർണബന്ധം

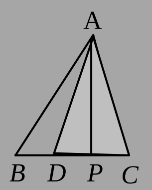
ചിത്രം നോക്കൂ.



ഇതിലെ ABD, ACD എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?



A യിൽ നിന്ന് BC യിലേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക



ഈ ലംബത്തിന്റെ നീളം h എന്നെടുത്താൽ

ΔABD യുടെ പരപ്പളവ്

$$= \frac{1}{2}\ h \times BD$$

ΔACD യുടെ പരപ്പളവ്

$$= \frac{1}{2}\ h \times CD$$

അപ്പോൾ

$$\frac{\Delta ABD \text{ യുടെ പരപ്പളവ്}}{\Delta ACD \text{ യുടെ പരപ്പളവ്}} = \frac{BD}{CD}$$

അതായത്, ഈ പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധം BD, CD എന്നീ നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണ്.

അപ്പോൾ, ഒരു ത്രികോണത്തെ ഒരേ പരപ്പളവുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ഒരു ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പ്, രണ്ടാമത്തെ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പിന്റെ ഇരട്ടിയാകണമെങ്കിലോ?

ഛേദങ്ങൾ തുല്യമാക്കണം. 20 ആക്കിയാലോ?

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$$

അപ്പോൾ, PQ, QR, RP ഇവയുടെ നീളം ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{8}{20}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{5}{20}$ എന്നിങ്ങനെയാണ്. അതായത്,

$$PQ : QR : RP = 8 : 7 : 5$$

മറ്റൊരു രീതിയിലും ഇത് കണ്ടുപിടിക്കാം: $\frac{1}{2}$ (അല്ലെങ്കിൽ 0.5) സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ചരടുകൊണ്ട് അളന്നാൽ PQ, QR, RP ഇവയുടെ നീളം 8, 7, 5 എന്നായിരിക്കും.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം: ആലി 40000 രൂപയും ജോസ് 20000 രൂപയും ജോൺ 50000 രൂപയും മുതലിറക്കി ഒരു ഏജൻസി ആരംഭിച്ചു. ഇവർ മുതൽ മുടക്കിയത് ഏത് അംശബന്ധത്തിലാണ്?

ആകെ മുടക്കിയത് 40000 + 20000 + 50000 = 110000 രൂപയാണല്ലോ. അതിൽ ആലിയുടേത് എത്ര ഭാഗം?

$$\frac{40000}{110000} = \frac{4}{11}$$

ജോസിന്റേതോ?

$$\frac{20000}{110000} = \frac{2}{11}$$

ജോണിന്റേത്?

$$\frac{50000}{110000} = \frac{5}{11}$$

അപ്പോൾ ആലി, ജോസ്, ജോൺ ഇവരുടെ മുടക്കുമുതൽ 4 : 2 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.

മറ്റൊരു രീതിയിലും ഇതു കാണാം. പതിനായിരം രൂപ വച്ചു കണക്കാക്കിയാൽ, ആലിയുടെ മുടക്കുമുതൽ 4 പതിനായിരം, ജോസഫിന്റേത് 2 പതിനായിരം, ജോണിന്റേത് 5 പതിനായിരം എന്നിങ്ങനെയാണല്ലോ.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ഒരു മത്സരത്തിലെ ഒന്നാമന് 1000 രൂപയും, രണ്ടാമന് 600 രൂപയും, മൂന്നാമന് 400 രൂപയുമാണ് സമ്മാനം. സമ്മാനത്തുകകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

- 10 മീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ $2\frac{1}{2}$ മീറ്ററും $3\frac{1}{2}$ മീറ്ററുമാണ്. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളുടേയും നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?
- 1 കിലോഗ്രാം അരിയും 250 ഗ്രാം പഴവും 750 ഗ്രാം ശർക്കരയും ചേർത്ത് ഉണ്ണിയപ്പം ഉണ്ടാക്കി. ചേരുവകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

മറ്റു ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം:

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 60 സെന്റിമീറ്ററാണ്. വശങ്ങൾ 3 : 4 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. വശങ്ങളുടെ നീളമെത്ര?

വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 3 : 4 : 5 ആയതിനാൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{3}{12}$ ഭാഗം, $\frac{4}{12}$ ഭാഗം, $\frac{5}{12}$ ഭാഗം എന്നിങ്ങനെയാണല്ലോ. ചുറ്റളവ് 60 സെന്റിമീറ്ററാണ്. അപ്പോൾ വശങ്ങളുടെ നീളം

$$60 \times \frac{3}{12} = 15$$

$$60 \times \frac{4}{12} = 20$$

$$60 \times \frac{5}{12} = 25$$

സെന്റിമീറ്റർ വീതമാണ്.

മറ്റേതെങ്കിലും രീതിയിൽ ഇതു ചെയ്യാമോ?

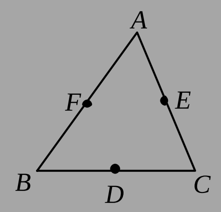
വശങ്ങൾ ഒരു നിശ്ചിത അളവിന്റെ 3, 4, 5 മടങ്ങാണല്ലോ. അപ്പോൾ ചുറ്റളവോ?

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

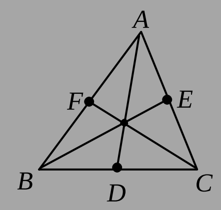
വിജയനും ഗോപനും മുകുന്ദനും ഒരു കരാറുപണി ഏറ്റെടുത്തു. വിജയൻ 3 ദിവസവും, ഗോപൻ 5 ദിവസവും, മുകുന്ദൻ 6 ദിവസവുമാണ് ജോലി ചെയ്തത്. കരാറുതുക വീതിച്ചപ്പോൾ ഗോപനു വിജയനേക്കാൾ 500 രൂപ കൂടുതൽ കിട്ടി. കരാറുതുക എത്രയാണ്? ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര രൂപ കിട്ടി?

ത്രികോണമധ്യം

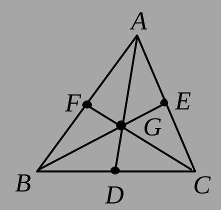
ഒരു ത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം മധ്യബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക:



ഇനി ഈ മധ്യബിന്ദുക്കൾ ഓരോന്നിനേയും എതിർശീർഷവുമായി യോജിപ്പിക്കുക:



ഈ വരകളെ ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമരേഖകൾ (medians) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഈ മൂന്നു മധ്യമരേഖകളും ത്രികോണത്തിനകത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നില്ലേ?



ഈ ബിന്ദുവിന് ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു (centroid) എന്നാണ് പേര്.

ഈ ബിന്ദു മധ്യമരേഖകളെയെല്ലാം 2 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്. അതായത്, നമ്മുടെ ചിത്രത്തിൽ

$$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF}$$

ഈ ബിന്ദുവിന് മറ്റൊരു പ്രത്യേകത കൂടിയുണ്ട്. ഇതുപോലൊരു ചിത്രം കാർഡ്ബോർഡിൽ വരച്ച് വെട്ടിയെടുക്കൂ. ഈ ബിന്ദുവിൽ പെൻസിൽമുന വച്ച് ത്രികോണത്തെ ചായാതെ, ചരിയാതെ നിർത്താം.

അതായത് ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു, അതിന്റെ ഗുരുത്വാകർഷണകേന്ദ്രം (centre of gravity) ആണ്.

ജോലി ചെയ്ത ദിവസങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 3 : 5 : 6 ആണല്ലോ. ഈ അംശബന്ധത്തിൽത്തന്നെയാണ് തുക വീതിക്കുന്നതും. അപ്പോൾ ഒരു നിശ്ചിത തുകയുടെ 3 മടങ്ങ് വിജയനും 5 മടങ്ങ് ഗോപനും 7 മടങ്ങ് മുകുന്ദനും കിട്ടി.

അപ്പോൾ ഈ തുകയുടെ 2 മടങ്ങാണ് ഗോപന് വിജയനേക്കാൾ കൂടുതൽ കിട്ടിയത്.

ഇത് 500 രൂപയാണെന്ന് പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ആ നിശ്ചിതതുക $\frac{1}{2} \times 500 = 250$ രൂപയാണ്. ഇനി ഓരോരുത്തർക്കും കിട്ടിയത് എത്രയാണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ:

വിജയനു കിട്ടിയത് $= 3 \times 250 = 750$ രൂ

ഗോപനു കിട്ടിയത് $= 5 \times 250 = 1250$ രൂ

മുകുന്ദനു കിട്ടിയത് $= 6 \times 250 = 1500$ രൂ

ഇതുപോലെ ഈ കണക്കുകളും ചെയ്യാമല്ലോ.

- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ 1 : 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഓരോ കോണും എത്രയാണ്?
- വെടിമരുന്നുണ്ടാക്കാൻ കാർബൺ, സൾഫർ, പൊട്ടാസ്യം നൈട്രേറ്റ് ഇവ 3 : 2 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് ചേർക്കേണ്ടത്. 1.2 കിലോഗ്രാം വെടിമരുന്നുണ്ടാക്കാൻ ഇവ ഓരോന്നും എത്ര വീതം വേണം?
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 2 : 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിന് ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 20 സെന്റിമീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. ഓരോ വശത്തിന്റേയും നീളം കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ഏതെങ്കിലും ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 1 : 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആകുമോ? എന്തുകൊണ്ട്?
- ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $AB : BC = 2 : 3$ ഉം $BC : CA = 4 : 5$ ഉം ആണ്. $AB : BC : CA$ എന്താണ്?

അധ്യാപകവിദ്യാർഥി അംശബന്ധം

അധ്യാപക വിദ്യാർഥി അംശബന്ധം എന്നത് ഒരു രാജ്യത്തിലെ വിദ്യാഭ്യാസത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു പ്രധാന സൂചികയാണ്. 2005 ലെ കണക്കനുസരിച്ച്, കേരളത്തിലെ സ്കൂളുകളിൽ ഇത് 1 : 27 ആണ്. അതായത്, ശരാശരി 27 വിദ്യാർഥികൾക്ക് 1 അധ്യാപകൻ വീതമുണ്ട്. ഇന്ത്യ മൊത്തമായെടുത്താൽ ഈ അംശബന്ധം ഏതാണ്ട് 1 : 40 ആണ്.

- മോളി, നഫീസ, ഓമന എന്നിവർ ചേർന്ന് ഒരു തയ്യൽക്കട തുടങ്ങി. അവർ മുടക്കിയ തുക 5 : 7 : 8 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഒരു വർഷത്തെ ലാഭം അവർ ഇതേ അംശബന്ധത്തിൽ വീതിച്ചെടുത്തു. ഓമനക്ക് മോളിയേക്കാൾ 10,800 രൂപ കൂടുതൽ കിട്ടി. എന്നാൽ ഓരോരുത്തർക്കും കിട്ടിയ തുകയെത്ര?

മാറുന്നതും മാറാത്തതും

ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:

ഒരേ ചിത്രം തന്നെ രണ്ടു വലിപ്പത്തിൽ അല്ലേ?

ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിന്റെ വീതി 1 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 1.5 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്.

രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലോ?

വീതി 2 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 3 സെന്റിമീറ്ററും.

അതായത് വീതിയും ഉയരവും ഇരട്ടിച്ചു.

ഇവിടെ ചിത്രങ്ങളുടെ വീതിയും ഉയരവും മാറി.

മാറാതിരിക്കുന്നത് എന്താണ്?

ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ, വീതിയുടെ $\frac{3}{2}$ മടങ്ങാണല്ലോ ഉയരം.

രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലോ?

ഇത് ഭിന്നങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാതെ പറയാമോ?

രണ്ടു ചിത്രത്തിലും വീതിയും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 തന്നെയല്ലേ?

ഈ ചിത്രത്തിലോ?

അംശബന്ധവും രസതന്ത്രവും

രസതന്ത്രത്തിൽ പദാർഥങ്ങളെ മൂലകങ്ങൾ എന്നും സംയുക്തങ്ങൾ എന്നും തരം തിരിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഏതു സംയുക്തത്തിലും അതിലടങ്ങുന്ന മൂലകങ്ങളുടെ ദ്രവ്യമാനം (mass) ഒരു നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിലായിരിക്കുമെന്ന് പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജോസഫ് പ്രൂസ്റ്റ് എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞൻ കണ്ടെത്തി.

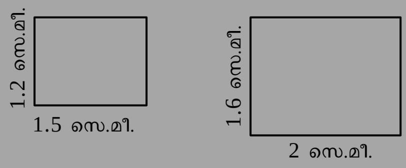
ഉദാഹരണമായി കോപ്പർ കാർബണേറ്റിൽ എപ്പോഴും കാർബണേറ്റിന്റെ ദ്രവ്യമാനത്തിന്റെ 5.3 മടങ്ങ് കോപ്പറും, 4 മടങ്ങ് ഓക്സിജനും ആയിരിക്കും എന്ന് പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെ അദ്ദേഹം കണ്ടെത്തി.

മൂലകങ്ങളുടെ തീരെ ചെറിയ കണികകൾ സങ്കല്പിച്ചാൽ ഇത്തരം താരതമ്യം എണ്ണൽ സംഖ്യകളിലൂടെ ആവാം എന്ന ചിന്തയാകണം, പരമാണു എന്ന ആശയത്തിലേക്ക് നയിച്ചത്. പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജോൺ ഡാൽട്ടൻ എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് ഇത്തരം ഒരു സിദ്ധാന്തം അവതരിപ്പിച്ചത്.

ഡാൽട്ടന്റെ സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് മൂലകങ്ങളുടെ തീരെ ചെറിയ കണികകളായ പരമാണുക്കൾ (atoms) ചേർന്നാണ് സംയുക്തങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നത്. ഏതു സംയുക്തത്തിലും അതിലെ വിവിധ മൂലകങ്ങളുടെ പരമാണുക്കളുടെ എണ്ണം ഒരു നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിലാണ്.

അംശബന്ധപരിശോധന

ചിത്രത്തിലെ രണ്ടു ചതുരങ്ങളുടേയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം തുല്യമാണോ?



ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിൽ, ചെറിയ വശത്തിന്റെ $\frac{1.5}{1.2}$ മടങ്ങാണ് വലിയ വശം. രണ്ടാമത്തെ ചതുരത്തിലോ? ചെറിയ വശത്തിന്റെ $\frac{2}{1.6}$ മടങ്ങാണ് വലിയ വശം.

അംശബന്ധം തുല്യമാകണമെങ്കിൽ ഈ സംഖ്യകൾ തുല്യമാകണമല്ലോ.

തുല്യമാണോ? പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ.

മറ്റൊരു രീതിയിലും ഇത് ആലോചിക്കാം. രണ്ടാമത്തെ ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശം ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശത്തിന്റെ $\frac{2}{1.5}$ മടങ്ങാണ്. ചെറിയ വശമോ? രണ്ടാമത്തെ ചതുരത്തിന്റെ ചെറിയ വശം ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ ചെറിയ വശത്തിന്റെ $\frac{1.6}{1.2}$ മടങ്ങാണ്.

അംശബന്ധം തുല്യമാണെങ്കിൽ ഇവയും തുല്യമാകണ്ടേ?

ഭിന്നങ്ങൾ ലഘൂകരിച്ച് നോക്കൂ.

ആദ്യം കിട്ടിയ ഭിന്നസംഖ്യ എന്താണ് കാണിക്കുന്നത്?

രണ്ടു ചതുരങ്ങളിലും ചെറിയ വശത്തിന്റെ $\frac{5}{4}$ മടങ്ങാണ് വലിയ വശം.

രണ്ടാമതു കിട്ടിയ ഭിന്നസംഖ്യയോ?

ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ $\frac{4}{3}$ മടങ്ങാണ് രണ്ടാമത്തെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കൂ:

അപ്പുവിന്റെ അമ്മ ഇഡ്ഡലി ഉണ്ടാക്കുന്നതിന് സാധാരണയായി 2 കപ്പ് അരിയും 1 കപ്പ് ഉഴുന്നുമാണ് എടുക്കുന്നത്. വിരുന്നുകാർ ഉണ്ടായിരുന്ന ഒരു ദിവസം 3 കപ്പ് അരിയും $1\frac{1}{2}$ കപ്പ് ഉഴുന്നുമാണ് എടുത്തത്.

ഇവിടെ അരിയുടെ അളവ് $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങാക്കി. ഉഴുന്നിന്റെ അളവോ?

രണ്ടവസരത്തിലും അരിയുടെയും ഉഴുന്നിന്റെയും അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

ഇങ്ങനെ അംശബന്ധം മാറാതെ അളവുകൾ മാറുന്നതിന് ഗണിതത്തിലൊരു പേരുണ്ട്: അനുപാതം (proportion).

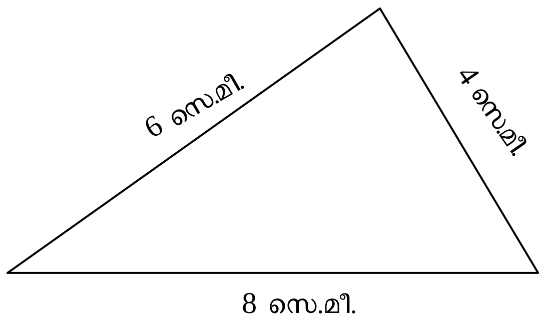
അപ്പോൾ, ചിത്രക്കണക്കിൽ, ആദ്യത്തെ രണ്ടു ചതുരങ്ങളുടെ വീതിയും ഉയരവും ആനുപാതികമാണ്(proportional).

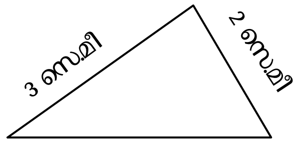
ഇഡ്ഡലിക്കണക്കിലോ?

രണ്ടവസരങ്ങളിലുമുള്ള അരിയുടെയും ഉഴുന്നിന്റെയും അളവ് ആനുപാതികമാണ്.

മൂന്നളവുകൾ ആനുപാതികമാവുന്ന സന്ദർഭങ്ങളുമുണ്ട്.

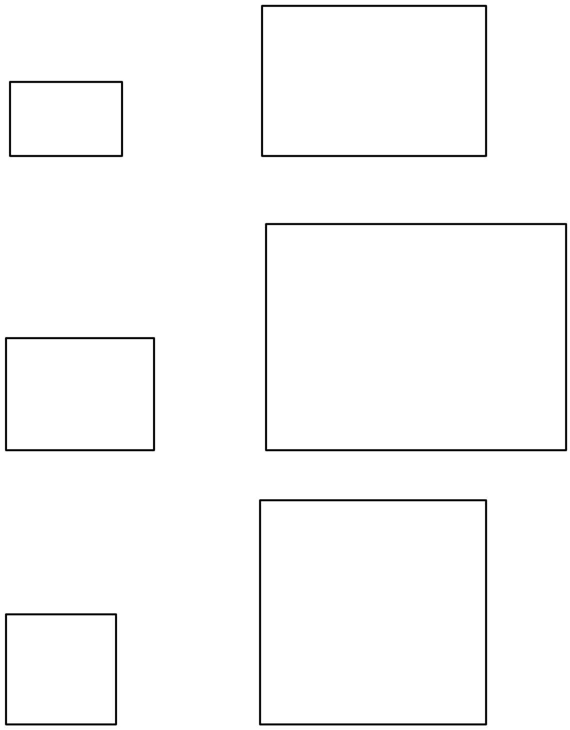
ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



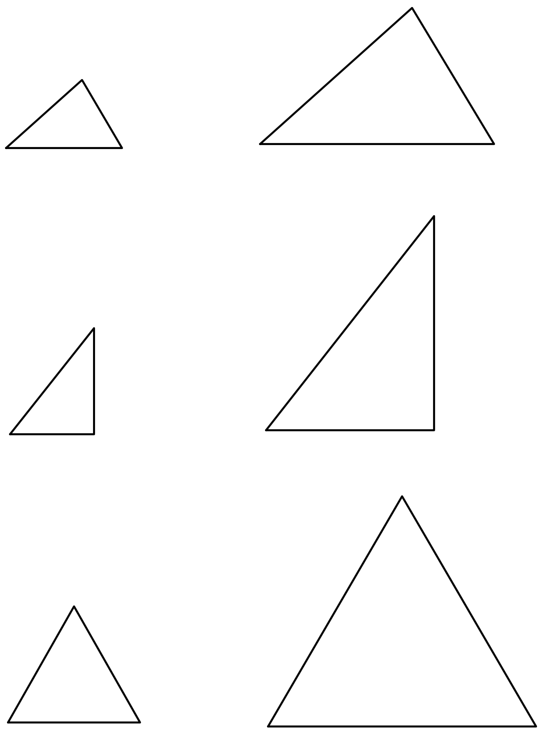


ഓരോ ത്രികോണത്തിലും വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ അംശബന്ധം എന്താണ്?

ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ചതുരത്തിലും വശങ്ങളുടെ നീളം ആനുപാതികമായവ ഏതൊക്കെയാണെന്ന് ഊഹിക്കുക. അളന്നു നോക്കി ഊഹം ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.



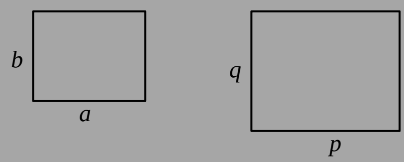
ഇനി കുറേ ത്രികോണജോടികളാകട്ടെ.



ബീജഗണിതസഹായം

രണ്ടു ചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ ആനുപാതികമാണോ എന്ന് എങ്ങനെ പരിശോധിക്കും?

ആദ്യത്തേതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം a, b എന്നിരിക്കട്ടെ. രണ്ടാമത്തേതിന്റേത് p, q എന്നും.



ഓരോ ചതുരത്തിലും ഒരു വശം മറ്റേ വശത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങ് (അല്ലെങ്കിൽ ഭാഗം) ആണെന്നു നോക്കണം. അതായത് $\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$ ഇവ തുല്യമാണോ എന്നു നോക്കണം. അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടു ചതുരങ്ങളിലേയും ചെറിയ വശങ്ങളും വലിയ വശങ്ങളും ഒരേ മടങ്ങ് (ഭാഗം) ആണോ എന്ന് നോക്കണം.

അതായത്, $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ ആണോ എന്ന് നോക്കണം.

$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ ആകണമെങ്കിലും $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$ ആകണമെങ്കിലും $aq = bp$ ആകണമല്ലൊ. മറിച്ച്, ഈ ഗുണനഫലങ്ങൾ തുല്യമായാൽ ഭിന്നങ്ങളും തുല്യമാകും. അപ്പോൾ ആനുപാതികമാണോ എന്നു നോക്കാൻ ഈ ഗുണനഫലങ്ങൾ പരിശോധിച്ചാൽ മതി.

വശങ്ങൾ 2.5 സെന്റിമീറ്ററും 1.5 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ഒരു ചതുരം; വശങ്ങൾ 2 സെന്റിമീറ്ററും 1.2 സെന്റിമീറ്ററും ആയ മറ്റൊരു ചതുരം. വശങ്ങളുടെ നീളം ആനുപാതികമാണോ?

ആനുപാതികമല്ലാത്ത വളർച്ച

രണ്ട് അളവുകൾ അനുപാതികമാണെങ്കിൽ, അതിൽ ഒരളവ് കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് മറ്റേ അളവും കൂടും. എന്നാൽ ഒന്നു കൂടുന്നതിന നുസരിച്ച് മറ്റൊന്ന് കൂടുന്നു എന്നതു കൊണ്ടു മാത്രം രണ്ടളവുകൾ ആനുപാതികമാകണമെ ന്നില്ല.

ഉദാഹരണമായി സമചതുരത്തിൽ വശത്തിന്റെ നീളം കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് പരപ്പളവും കൂടും. പക്ഷേ, 1 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുര ത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 1 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററും 2 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 4 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണല്ലോ; ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിൽ വശത്തിന്റെ നീളവും പരപ്പളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $1:1$ ഉം രണ്ടാമത്തേതിൽ ഇത് $2:4 = 1:2$ ഉം ആണ്. രണ്ടു സന്ദർഭങ്ങളിലെയും അംശബന്ധങ്ങൾ തുല്യമല്ലാത്തതിനാൽ ഈ മാറ്റം ആനുപാതി കമല്ല.

സമചതുരത്തിന്റെ വശവും ചുറ്റളവും ആനു പാതികമാണോ?

നമുക്ക് കണ്ടെത്താം

- മാത്യു 30000 രൂപയും സ്റ്റീഫൻ 50000 രൂപയും മുടക്കി കൂട്ടുകച്ചവടം ആരംഭിച്ചു. ഒരു മാസംകൊണ്ട് 2400 രൂപ ആദായം കിട്ടി. മാത്യു 900 രൂപയും സ്റ്റീഫൻ 1500 രൂപയും ആദായം വീതിച്ചെടുത്തു. മുടക്കുമുതലുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എത്ര? വീതങ്ങളുടെ അംശ ബന്ധമോ? മുടക്കുമുതലും വീതവും ആനുപാതിക മാണോ?
- രാമു 8 മണിക്കൂർ ജോലി ചെയ്തപ്പോൾ 400 രൂപ കിട്ടി. ബെന്നി 6 മണിക്കൂർ ജോലി ചെയ്തു 300 രൂപ കിട്ടി. ജോലി സമയത്തിന് ആനുപാതികമായാണോ കൂലി കിട്ടിയത്?
- 10 ലിറ്റർ നീലയും 15 ലിറ്റർ വെള്ളയും കലർത്തിയ ചായക്കൂട്ടിനും 12 ലിറ്റർ നീലയും 17 ലിറ്റർ വെള്ളയും കലർത്തിയ ചായക്കൂട്ടിനും ഒരേ നിറമായിരിക്കുമോ? എന്തുകൊണ്ട്?

മാറ്റത്തിലെ സ്ഥിരത

3 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ്?

5 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവോ?

വശത്തിന്റെ നീളം എന്തായാലും അതിന്റെ നാലുമടങ്ങാ ണല്ലോ സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്. ഇതു വേറൊരു രീതി യിലും പറയാം:

സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും തമ്മി ലുള്ള അംശബന്ധം $1 : 4$ ആണ്.

വശത്തിന്റെ നീളം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവും മാറും; പക്ഷേ ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം മാറുന്നില്ല. അപ്പോൾ മുമ്പു പറഞ്ഞ കാര്യം മറ്റൊരു രീതി യിലും പറയാമല്ലോ:

സമചതുരങ്ങളിൽ, വശത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും ആനു പാതികമാണ്.

സമചതുരത്തിനു പകരം സമഭുജത്രികോണം എടുത്താലും ഇതു ശരിയല്ലേ?

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം: ഒരു പെൻസിലിന് $1\frac{1}{2}$ രൂപയാണ് വില. ഇത്തരത്തിലുള്ള 10 പെൻസിലുകളുടെ

വിലയെന്ത്? 20 പെൻസിലുകളുടേയോ? പെൻസിലിന്റെ എണ്ണവും ആകെ വിലയും ആനുപാതികമാണോ?

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളെല്ലാം ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ എഴുതി നോക്കാം:

- സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്ററും ചുറ്റളവ് y സെന്റിമീറ്ററും ആണെങ്കിൽ

$$y = 4x$$

- സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്ററും ചുറ്റളവ് y സെന്റിമീറ്ററും ആണെങ്കിൽ

$$y = 3x$$

- പെൻസിലിന്റെ എണ്ണം x ഉം ആകെ വില y രൂപയും ആണെങ്കിൽ

$$y = \frac{3}{2}x$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ x, y എന്ന രണ്ടളവുകൾ ആനുപാതികമായാണ് മാറുന്നതെങ്കിൽ, വ്യത്യസ്ത സന്ദർഭങ്ങളിലുള്ള അവയുടെ വിലകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

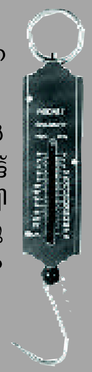
$$y = kx$$

എന്നായിരിക്കും. ഇവിടെ k എന്നത് x ന്റെയും y യുടേയും വിലകൾ മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് മാറുന്നില്ല. ഇതിനെ ഈ മാറ്റത്തിലെ ആനുപാതികസ്ഥിരം (constant of proportionality) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ഉദാഹരണത്തിലെ ആനുപാതികസ്ഥിരമായ 4 എന്ന സംഖ്യ വശങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ്. രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിലെ3 ഉം വശങ്ങളുടെ എണ്ണം തന്നെ. മൂന്നാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ ആനുപാതികസ്ഥിരം $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ ആണ്. ഇത് ഒരു പെൻസിലിന്റെ വിലയാണ്.

- രാജൻ 10000 രൂപ, 6% സാധാരണ പലിശ കിട്ടുന്ന ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. തുക ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിച്ച വർഷങ്ങളുടെ എണ്ണത്തേയും ആകെ കിട്ടുന്ന പലിശയേയും ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യം എഴുതുക. ആകെ കിട്ടുന്ന പലിശ, വർഷങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന് ആനുപാതികമാണോ? സാധാരണ പലിശയ്ക്കു പകരം കൂട്ടുപലിശയായാലോ?

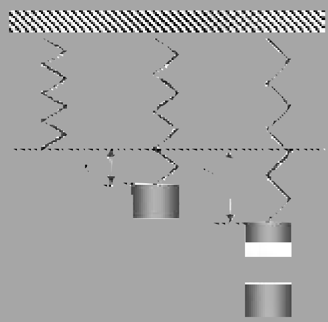
ഭാരമളക്കാൻ അനുപാതം



ഭാരമളക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സ്പ്രിങ്ങ്ത്രാസ് കണ്ടിട്ടില്ലേ?

കൊളുത്തിൽ ഭാരം തൂക്കുമ്പോൾ ത്രാസിനുള്ളിലെ സ്പ്രിങ്ങ് താഴോട്ട് വലിയുന്നു. സ്പ്രിങ്ങിൽ ഘടിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു സൂചിക, ത്രാസിന്റെ ഒരു വശത്തുള്ള സ്കെയിലിൽ ഭാരം കാണിക്കുന്നു.

എന്താണിതിന്റെ തത്വം? ഭാരം തൂക്കുമ്പോൾ സ്പ്രിങ്ങിനുണ്ടാകുന്ന വലിവിന്റെ നീളം ഭാരത്തിന് ആനുപാതികമാണെന്ന്, പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന റോബർട്ട് ഹൂക് എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞൻ കണ്ടെത്തി.



ഇതുപയോഗിച്ച്, ഈ ത്രാസിൽ ഭാരങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താൻ എളുപ്പമാണ്. കൊളുത്തിൽ ഭാരമൊന്നും ഇല്ലാത്തപ്പോൾ സൂചികയുടെ സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു. പിന്നീട് ഒരു നിശ്ചിതഭാരം തൂക്കുമ്പോഴുള്ള സ്ഥാനവും അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു. ഉദാഹരണമായി 1 കിലോഗ്രാം തൂക്കിയപ്പോൾ 2 സെന്റിമീറ്റർ വലിവുണ്ടായി എന്നു കരുതുക. അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ അടയാളത്തിൽ നിന്ന് 2, 4, 6, 8 സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നിങ്ങനെ കിലോഗ്രാമിൽ ഭാരം അടയാളപ്പെടുത്താമല്ലോ. ഈ അകലങ്ങളെയെല്ലാം പത്തു തുല്യ ഭാഗങ്ങളാക്കിയാൽ 1.1 കിലോഗ്രാം, 2.4 കിലോഗ്രാം എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഭാരങ്ങളും അടയാളപ്പെടുത്താം.

പ്രപഞ്ചാനുപാതം

പ്രപഞ്ചത്തിലെ എല്ലാ വസ്തുക്കളും പരസ്പരം ആകർഷിക്കുന്നുവെന്നത് ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലെ അടിസ്ഥാനതത്വമാണ്.

ഈ ആകർഷണശക്തി, വസ്തുക്കളുടെ ദ്രവ്യമാനങ്ങളുടെ (mass) ഗുണനഫലത്തിന് ആനുപാതികവും, അവ തമ്മിലുള്ള ദൂരത്തിന്റെ വർഗത്തിന് വിപരീതാനുപാതത്തിലും ആണെന്നാണ് ഈ തത്വം പറയുന്നത്.

പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന പ്രസിദ്ധ ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഐസക്ക് ന്യൂട്ടനാണ് ഈ തത്വം അവതരിപ്പിച്ചത്.

- മേരിയ്ക്ക് ഓരോ വർഷവും 200 രൂപ കൂടുതൽ ശമ്പളം കിട്ടും. ജോലി ചെയ്യുന്ന വർഷങ്ങളുടെ എണ്ണവും ശമ്പളത്തിൽ ആകെയുണ്ടാകുന്ന വർധനവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഒരു സമവാക്യമായി എഴുതുക. ആകെ ശമ്പളവർധനവ് ജോലി ചെയ്ത വർഷങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന് ആനുപാതികമാണോ?
- ഉയരത്തിൽനിന്ന് താഴോട്ടു വീഴുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ t സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോഴുള്ള വേഗം v മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ആണെങ്കിൽ

$$v = 9.8t$$

  വേഗം സമയത്തിന് ആനുപാതികമാണോ?
- ഉയരത്തിൽനിന്ന് താഴോട്ടു വീഴുന്ന ഒരു വസ്തു t സെക്കന്റ് കൊണ്ട് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം s മീറ്ററാണെങ്കിൽ

$$s = 4.9t^2$$

  സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം സമയത്തിന് ആനുപാതികമാണോ?

വിപരീതമാറ്റം

30 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള എത്ര ചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കാം?

വശങ്ങളുടെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്ററും വീതി 3 സെന്റിമീറ്ററും ആയി വരയ്ക്കാം; അല്ലെങ്കിൽ 6 സെന്റിമീറ്ററും 5 സെന്റിമീറ്ററും. 12.5 സെന്റിമീറ്റർ, 2.4 സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെ ഭിന്നസംഖ്യകളും ഉപയോഗിക്കാം.

അപ്പോൾ ഇങ്ങനെയുള്ള എത്ര ചതുരങ്ങൾ വേണമെങ്കിലും വരയ്ക്കാമല്ലോ. ഈ ചതുരങ്ങളിൽ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം കൂടുമ്പോൾ മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം കുറയുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. അതിനാൽ വശങ്ങളുടെ നീളം ആനുപാതികമല്ല എന്നു തീർച്ചയാണ്. എന്താണ് അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം?

ഇത്തരമൊരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ x, y എന്നെടുത്താൽ

$$xy = 30$$

ഈ സമവാക്യം

$$y = \frac{30}{x} = 30 \times \frac{1}{x}$$

എന്നും എഴുതാമല്ലോ. അതായത്, y എന്നത് $\frac{1}{x}$ ന് ആനുപാതികമാണ്.

x, y എന്ന ഏതെങ്കിലും രണ്ടളവുകൾ മാറുന്നത്

$$y = \frac{k}{x}$$

എന്ന ബന്ധം (ഇതിൽ k എന്ന സംഖ്യ മാറുന്നില്ല) അനുസരിച്ചാണെങ്കിൽ, ഇവ വിപരീതാനുപാതത്തിലാണ് (inversely proportional) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

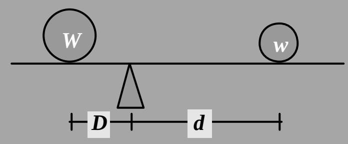
മുമ്പ് കണ്ട ആനുപാതികമായ അളവുകൾ, നേരനുപാതത്തിലാണ് (directly proportional) എന്നും പറയാറുണ്ട്.

ഇനി ചില ചോദ്യങ്ങളാകാം.

- ഒരേ ചുറ്റളവുള്ള വിവിധ ചതുരങ്ങളുടെ നീളവും വീതിയും വിപരീതാനുപാതത്തിലാണോ?
- 200 കിലോമീറ്റർ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വാഹനത്തിന്റെ ശരാശരി വേഗവും, യാത്ര ചെയ്യാനെടുക്കുന്ന സമയവും ബന്ധിപ്പിച്ച് ഒരു സമവാക്യം എഴുതുക. ശരാശരി വേഗവും സമയവും വിപരീത അനുപാതത്തിലാണോ?
- 1000 രൂപ കുറേപ്പേർക്ക് തുല്യമായി വീതിക്കണം. വീതിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണവും ഓരോരുത്തർക്കും കിട്ടുന്ന പണവും നേരനുപാതത്തിലോ, വിപരീതാനുപാതത്തിലോ ആണോ?
- ഒരു കമ്പനിയുടെ 50 ഗ്രാം, 100 ഗ്രാം, 150 ഗ്രാം, 200 ഗ്രാം പെയ്സ്റ്റുകളുടെ വിലവിവരം ശേഖരിക്കുക. പെയ്സ്റ്റുകളുടെ തൂക്കവും വിലയും നേരനുപാതത്തിലാണോ?

വിപരീതബലം

ചിത്രത്തിൽ ഇടതുവശത്ത് ഭാരം കൂടുതലുള്ള വസ്തുവാണ്. എന്നാലും തുലനം സാധിച്ചതെങ്ങനെ?



ഇങ്ങനെ തുലനം ചെയ്യണമെങ്കിൽ ഇരുവശത്തുമുള്ള ഭാരങ്ങളും തുലനബിന്ദുവിൽനിന്ന് അവയിലേക്കുള്ള അകലങ്ങളും വിപരീത അനുപാതത്തിലായിരിക്കണം.

അതായത്, ചിത്രത്തിലെ ഗോളങ്ങളുടെ ഭാരം W, w എന്നും, തുലനബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ദൂരം D, d എന്നും എടുത്താൽ

$$W \times D = w \times d$$

ബി.സി രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ആർക്കിമിഡീസ് എന്ന പ്രസിദ്ധ ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് ഈ തത്വം കണ്ടുപിടിച്ചത്. ഉത്തോലകതത്വം (lever principle) എന്നാണ് ഈ തത്വം അറിയപ്പെടുന്നത്.

ഈ തത്വത്തിന്റെ ഒരു പ്രയോഗമായി, നീളമുള്ള കോൽ ഉപയോഗിച്ചാൽ ചെറിയ ബലം ഉപയോഗിച്ചുതന്നെ ഭാരം കൂടിയ വസ്തുക്കൾ ഉയർത്താം എന്നും അദ്ദേഹം കണ്ടെത്തി. (ഇരുമ്പു വടി ഉപയോഗിച്ച് പാറകളും മറ്റും പൊക്കുന്നത് കണ്ടിട്ടുണ്ടോ?)

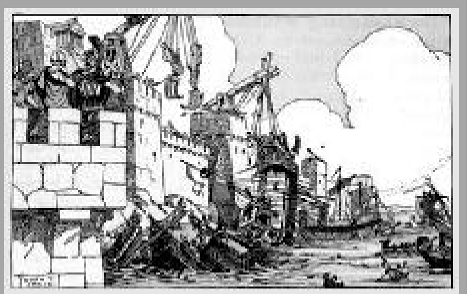
“നില്ക്കാനൊരിടവും, വേണ്ടത്ര നീളമുള്ള കോലും ഉണ്ടെങ്കിൽ ഭൂമിയുടെ സ്ഥാനം തന്നെ മാറ്റാം.” എന്നത് ആർക്കിമിഡീസിന്റെ ഒരു പ്രസിദ്ധമായ പ്രസ്താവനയാണ്.

ആർക്കിമിഡിസ്

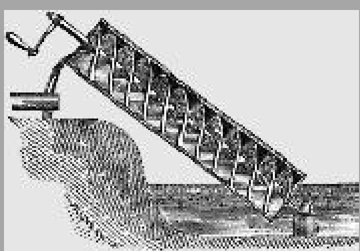
പ്രാചീനകാലത്തെ ഏറ്റവും മഹാനായ ശാസ്ത്രജ്ഞനും ലോകത്തിലെ എക്കാലത്തെയും മികച്ച ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരിൽ ഒരാളുമാണ് ആർക്കിമിഡിസ്.

അദ്ദേഹത്തിന്റെ കാലത്തെ മറ്റ് ഗ്രീക്കു ശാസ്ത്രജ്ഞരിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമായി, സൈദ്ധാന്തിക ചിന്തകൾക്ക് പുറമെ സാങ്കേതിക നിർമാണങ്ങളും ആർക്കിമിഡീസ് നടത്തിയിരുന്നു.

തന്റെ ജന്മദേശമായ സിറാക്കുസിനെ റോമാക്കാർ ആക്രമിച്ചപ്പോൾ ഉത്തോലകതത്വം ഉപയോഗിച്ചുണ്ടാക്കിയ യന്ത്രങ്ങൾ കൊണ്ട് കപ്പലുകളെപ്പോലും മറിച്ചിട്ടതായി അന്നത്തെ ചരിത്രകാരന്മാർ എഴുതിയിട്ടുണ്ട്.



താഴ്ന്ന നിരപ്പിലുള്ള വെള്ളം ഉയർത്തി മുകളിലെ വയലുകളിൽ ജലസേചനം നടത്താൻ ആർക്കിമിഡീസ് കണ്ടുപിടിച്ച യന്ത്രമാണ് ആർക്കിമിഡീസ് സ്ക്രൂ.



ഇത്തരം യന്ത്രങ്ങൾ ഇന്നും വ്യവസായശാലകളിലെ വൻയന്ത്രങ്ങളിലും ഹൃദയശസ്ത്രക്രിയയിൽ രക്തചംക്രമണം സാധ്യമാക്കുന്ന ചെറുയന്ത്രങ്ങളിലും ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്.

- പുരുഷന്മാരുടെ 100 മീറ്റർ, 200 മീറ്റർ, 400 മീറ്റർ, 800 മീറ്റർ ഓട്ട മത്സരങ്ങളുടെ ലോക റിക്കാർഡ് പരിശോധിക്കുക. ഈ ദൂരങ്ങളും സമയങ്ങളും നേരനുപാതത്തിലാണോ?
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളുടെ നീളവും അവയിലേക്കുള്ള ഉയരങ്ങളുടെ നീളവും വിപരീതാനുപാതത്തിലാണോ?