1 സർവസമത്രികോണങ്ങൾ

ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.

അടുക്കിവച്ചിരിക്കുന്ന നാണയങ്ങൾ, തട്ടുകൾ, തറയോടുകൾ.

ഈ അട്ടികൾ നോക്കൂ.

എന്താണ് വ്യത്യാസം?

ക്ലാസ്സിലെ എല്ലാവരുടേയും കണക്കുപാഠപുസ്തകങ്ങൾ അട്ടിയായി വച്ചാൽ, കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കുമോ?

കണക്കിന്റെ നോട്ടുബുക്കുകളായാലോ?

ഒരു പുസ്തകത്തിലെ പേജുകളെല്ലാം കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കുന്നുണ്ടല്ലോ. രണ്ടു പുസ്തകങ്ങളിലെ പേജുകളായാലോ?

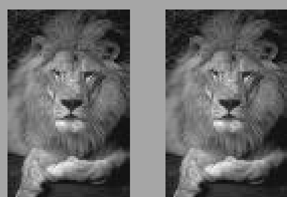
കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കത്തക്കവിധം ഒന്നിനുമീതേ ഒന്നായി വയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ത്രികോണം, ചതുരം, വൃത്തം മുതലായ രൂപങ്ങളെ ജ്യാമിതിയിൽ **സർവസമരൂപങ്ങൾ** (congruent figures) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

സർവസമമായതും അല്ലാത്തതുമായ വസ്തുക്കളുടെ കുറേ ഉദാഹരണങ്ങൾ പറയാമോ?

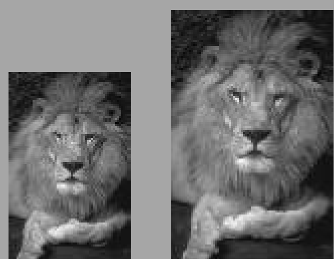
എല്ലാം തുല്യം

''എല്ലാ അളവുകളും തുല്യം'' എന്ന അർഥത്തിലാണ് ജ്യാമിതിയിൽ ''സർവസമം'' എന്ന വാക്ക് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഇടതുവശത്തുള്ള ചിത്രത്തിലെ തറയോടുകൾ പലതിനും പല നിറമാണ്. പക്ഷേ എല്ലാം ചതുരമാണ്. എല്ലാറ്റിന്റെയും നീളവും വീതിയും തുല്യമാണ്. അതുകൊണ്ടുതന്നെ അവയെല്ലാം ഒന്നിനുമീതെ ഒന്നായി കൃത്യമായി ചേർത്തു വയ്ക്കാം. ഇങ്ങനെ ഒരേ ആകൃതിയും വലിപ്പവും ഉള്ള രൂപങ്ങളാണ് സർവസമരൂപങ്ങൾ എന്ന് പൊതുവേ പറയാം.

ഉദാഹരണമായി ഒരു ഫോട്ടോയ്ക്കും അതിന്റെ ശരിപ്പകർപ്പിനും ഒരേ ആകൃതിയും വലിപ്പവുമാണ്. അവ സർവസമവുമാണ്.



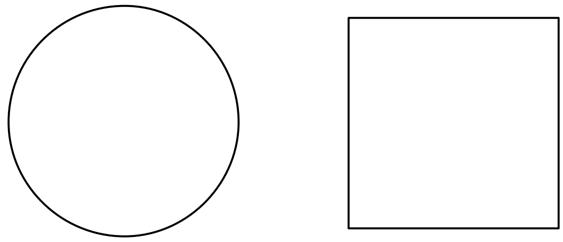
ഒരു ഫോട്ടോയും അതിന്റെ വലിപ്പം കൂട്ടിയ പകർപ്പും ആയാലോ?



ആകൃതിക്ക് വ്യത്യാസമില്ലെങ്കിലും വലിപ്പം മാറിയല്ലോ. അതിനാൽ അവ സർവസമവുമല്ല.

അളന്നു നോക്കാം

ചിത്രം നോക്കൂ.



ഒരു വൃത്തവും ഒരു സമചതുരവും. ഇവയ്ക്ക് സർവസമമായ രൂപങ്ങൾ നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കണം.

എങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

ട്രേസിങ്ങ്പേപ്പറിൽ പകർത്തിവരയ്ക്കാം. അല്ലെങ്കിൽ അളന്നു നോക്കി, അതേ അളവുകളിൽ വരയ്ക്കാം.

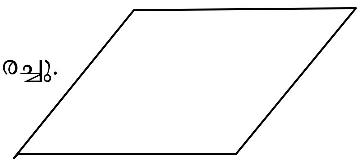
എന്തൊക്കെ അളക്കണം?

ഈ ചതുരം നോക്കൂ.

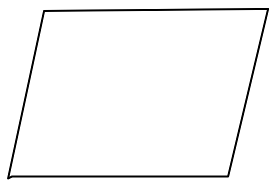
ഇതിനു സർവസമമായ മറ്റൊരു ചതുരം വരയ്ക്കാൻ എന്തെല്ലാം അളക്കണം?

വരച്ചു നോക്കൂ.

അപ്പു ഒരു സാമാന്തരികം വരച്ചു.



അമ്മു അതിന്റെ വശങ്ങൾ അളന്ന് അതേ അളവിലുള്ള സാമാന്തരികം വരച്ചത് ഇങ്ങനെയാണ്.



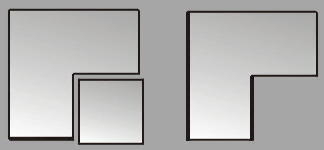
വശങ്ങൾ അളന്നുനോക്കൂ. ഒരേ നീളമല്ലേ?

പക്ഷേ ഇവ സർവസമമല്ലെന്ന് ഒറ്റ നോട്ടത്തിൽ തന്നെ അറിയാമല്ലോ. സാമാന്തരികങ്ങൾ സർവസമമാകാൻ വശങ്ങൾക്കു പുറമെ എന്തുകൂടി തുല്യമാകണം?

അപ്പു വരച്ച സാമാന്തരികത്തിന് സർവസമമായ സാമാന്തരികം നിങ്ങൾക്കും വരയ്ക്കാമോ?

സർവസമവിഭജനം

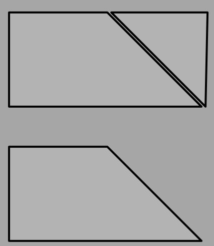
സമചതുരാകൃതിയിൽ ഒരു കടലാസ് വെട്ടിയെടുത്ത് അതിന്റെ കാൽഭാഗം ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മുറിച്ചുകളയുക.



ഇനി ഈ രൂപത്തെ സർവസമമായ നാലു കഷണങ്ങളാക്കണം. ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ.

ഇനി മറ്റൊരു ചോദ്യം.

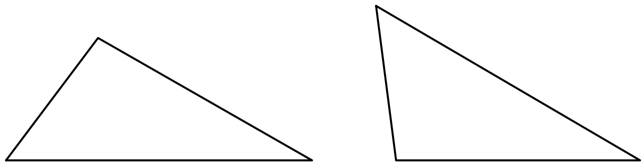
വീതിയുടെ ഇരട്ടി നീളമുള്ള ഒരു ചതുരം വെട്ടിയെടുക്കുക. ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ അതിന്റെ കാൽഭാഗം മുറിച്ചുകളയുക.



ഈ രൂപത്തെ സർവസമമായ നാലു കഷണങ്ങളാക്കാമോ?

ത്രികോണപ്പൊരുത്തം

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കൂ.



ഇവ സർവസമമാണോ?

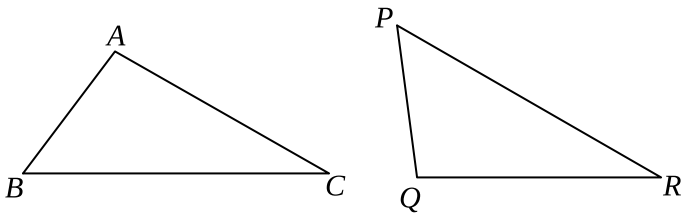
ഇവയിൽ ഒരു ത്രികോണം ട്രേസിങ്ങ്പേപ്പറിൽ പകർത്തി രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന് പുറത്ത് പല രീതിയിൽ വച്ചു നോക്കൂ.

സർവസമമാണെന്ന് കണ്ടില്ലേ?

ത്രികോണങ്ങൾ കൃത്യമായി ചേർത്തുവച്ചപ്പോൾ ഏതൊക്കെ വശങ്ങളാണ് ചേർന്നിരുന്നത്?

കോണുകളോ?

ഏതൊക്കെ വശങ്ങളും കോണുകളുമാണ് തുല്യമായതെന്ന് എഴുതാൻ ത്രികോണങ്ങൾക്ക് പേരു കൊടുക്കാം.



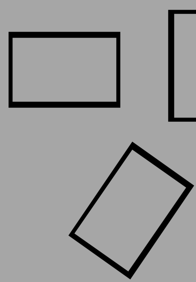
തുല്യമായ വശങ്ങളുടെ ജോടികളും, കോണുകളുടെ ജോടികളും എഴുതി, ചുവടെയുള്ള പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കൂ.

തുല്യമായ വശങ്ങൾ	തുല്യമായ കോണുകൾ
$AB = PQ$	$\angle ACB = \angle PRQ$
$BC = PR$	$\angle BAC = \angle PQR$

പട്ടികയിൽ വശങ്ങളുടെ ജോടികളും അവയ്ക്കെതിരെയുള്ള കോണുകളുടെ ജോടികളും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധം കാണുന്നുണ്ടോ?

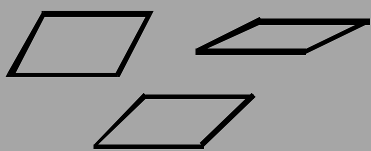
വ്യത്യസ്തകോണുകളിലൂടെ

3 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള രണ്ട് ഈർക്കിൽ കഷണങ്ങളും 2 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള രണ്ടു ഈർക്കിൽ കഷണങ്ങളും മുറിച്ചെടുക്കുക. ഇവ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര വ്യത്യസ്ത ചതുരങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം?



ഒരേ ചതുരം തിരിച്ചും ചരിച്ചും വയ്ക്കാമെന്നല്ലാതെ വ്യത്യസ്ത ചതുരങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയില്ലല്ലോ.

ഇനി ഇതേ ഈർക്കിലുകൾ കൊണ്ട് എത്ര സാമാന്തരികങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം?



എത്ര വേണമെങ്കിലും ഉണ്ടാക്കാം, അല്ലേ?

ഇനി ഒരു ചെറിയ ഈർക്കിലും ഒരു വലിയ ഈർക്കിലും 45° കോണിൽ ചേർത്തു വയ്ക്കുക.

ഇവ അനക്കാതെ മറ്റു രണ്ട് ഈർക്കിൽ കൂടി ഉപയോഗിച്ച് എത്ര സാമാന്തരികങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം?

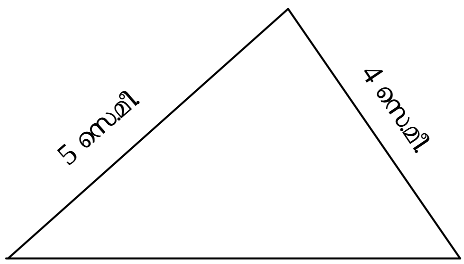
ഒരു ത്രികോണത്തിന് സർവസമമായ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളും കോണുകളും ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കും കോണുകൾക്കും തുല്യമാണ്. തുല്യമായ വശങ്ങളുടെ എതിരേയുള്ള കോണുകൾ തുല്യമാണ്. തുല്യമായ കോണുകളുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

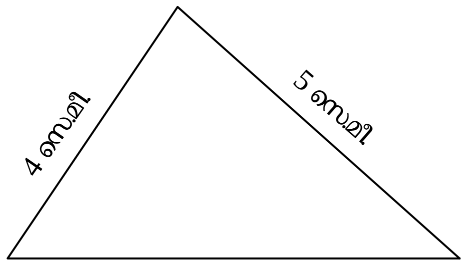
വശങ്ങൾ തുല്യമായാൽ

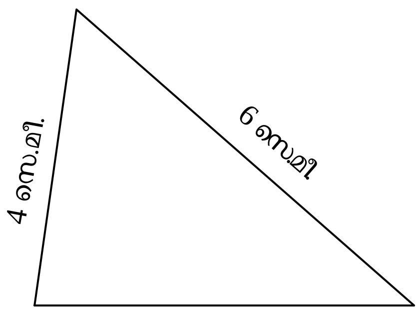
തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളിൽ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ ഏഴാം ക്ലാസിൽ പഠിച്ചില്ലേ? (**വരക്കണക്ക്** എന്ന പാഠം)

വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്റർ, 5 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാമോ?

ഈ അളവുകളിൽ ചില കുട്ടികൾ വരച്ച ത്രികോണങ്ങളാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



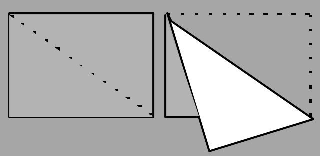




മടക്കാം തിരിക്കാം

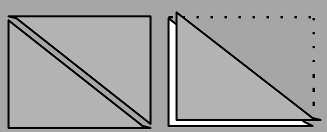
ഒരു സമചതുരം കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുക്കുക. ഇത് വികർണത്തിലൂടെ മടക്കിയാൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടും. മടക്കുമ്പോൾ അവ കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കുകയും ചെയ്യും. അതായത്, ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണ്.

ഇനി സമചതുരമല്ലാത്ത ഒരു ചതുരം വെട്ടിയെടുത്ത് വികർണത്തിലൂടെ മടക്കി നോക്കൂ.

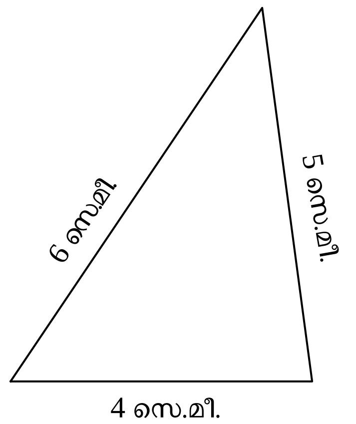


ചേർന്നിരിക്കുന്നില്ലല്ലോ. ഇവ സർവസമമല്ലെന്ന് പറയാമോ?

വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങളെ പല രീതിയിൽ ചേർത്തുവച്ച് നോക്കൂ.



ഇപ്പോൾ എന്തു പറയുന്നു?



ഇവയിൽ ഒരു ത്രികോണം ട്രേസിങ്ങ് പേപ്പറിൽ പകർത്തി മറ്റുള്ളവയിൽ ചേർത്തുവച്ചു നോക്കൂ. ഇവയെല്ലാം സർവ സമമല്ലേ?

ഇതുപോലെ ക്ലാസിലെ എല്ലാവരും വരച്ചത് ഒത്തുനോക്കൂ.

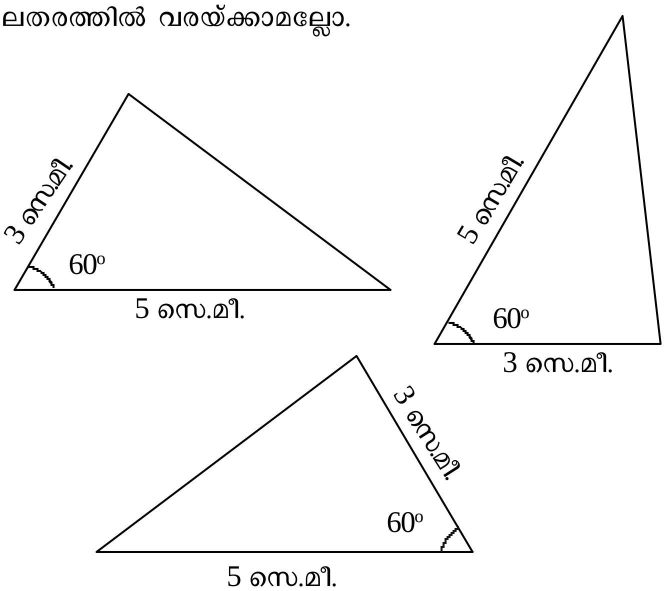
ഇവിടെ നാം കണ്ടത് എന്താണ്?

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങൾ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങൾക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണ്.

രണ്ടു വശങ്ങളും ഒരു കോണും

മൂന്നു വശങ്ങൾക്കുപകരം രണ്ടു വശങ്ങളും അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോണും തന്നാലും ത്രികോണം വരയ്ക്കാമല്ലോ. ഉദാഹരണമായി രണ്ടു വശങ്ങൾ 5 സെന്റിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ, അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ 60° ആയ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാമോ?

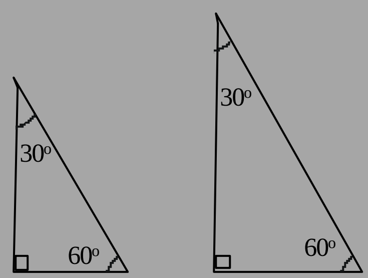
പലതരത്തിൽ വരയ്ക്കാമല്ലോ.



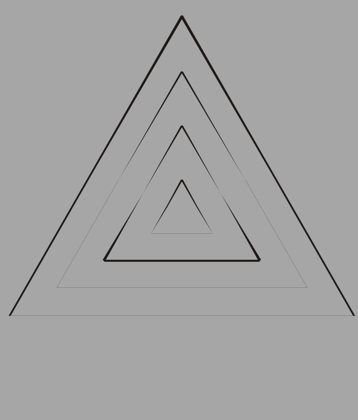
കോണുകൾ തുല്യമായാലും

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ അവ സർവസമമാണ് എന്നു കണ്ടല്ലോ. കോണുകളാണ് തുല്യമാകുന്നതെങ്കിലോ?

ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വ്യത്യസ്ത വലിപ്പത്തിൽ വരയ്ക്കാമല്ലോ.

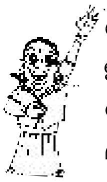


അതായത് രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ കോണുകളും തുല്യമാണ്. മറിച്ച് കോണുകൾ തുല്യമായതുകൊണ്ട് വശങ്ങൾ തുല്യമാകണമെന്നില്ല. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



മുമ്പ് ചെയ്തതുപോലെ ഇവയെല്ലാം സർവസമമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കൂ. ക്ലാസിലെ മറ്റു കുട്ടികൾ വരച്ചതും പരിശോധിക്കാം.

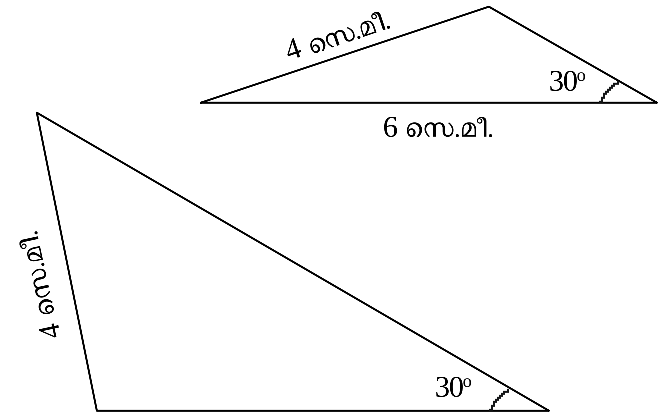
ഇവിടെക്കാണുന്നത് എന്താണ്?



ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളും അവയുടെ ഉൾക്കോണും മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾക്കും അവയുടെ ഉൾക്കോണിനും തുല്യമാണെങ്കിൽ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണ്.

ഉൾക്കോണിന് പകരം മറ്റേതെങ്കിലും കോൺ തന്നാലും ചിലപ്പോൾ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ, ചെറിയ വശത്തിനെതിരേയുള്ള കോൺ 30º എന്നീ അളവുകളിൽ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കണം. ഈ അളവുകളിൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ ഏഴാം ക്ലാസിൽ വച്ച് വരച്ചത് ഓർമയുണ്ടോ? (**വരക്കണക്ക്** എന്ന പാഠത്തിലെ മറ്റൊരു കോൺ എന്ന ഭാഗം നോക്കുക).

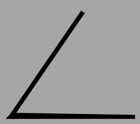


ഇവ സർവസമമല്ലെന്ന് ഒറ്റനോട്ടത്തിൽത്തന്നെ അറിയാമല്ലോ. ഇതിൽനിന്ന് എന്തു മനസ്സിലാക്കാം?

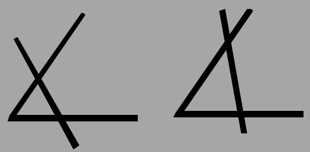
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും ഏതെങ്കിലും ഒരു കോണും മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾക്കും ഒരു കോണിനും തുല്യമായതുകൊണ്ടുമാത്രം ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാകണമെന്നില്ല.

ത്രികോണനിശ്ചയം

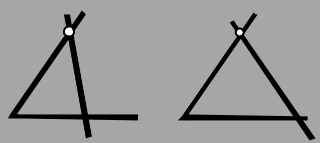
നീളമുള്ള ഒരു ഈർക്കിൽ മടക്കി ഒരു കോൺ ഉണ്ടാക്കുക.



ഈ കോണിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടേയും മുകളിൽ മറ്റൊരു ഈർക്കിൽ വച്ച് ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കണം. പല രീതിയിൽ വയ്ക്കാമല്ലോ.



മുകളിലെ ഭുജത്തിൽ ഒരു അടയാളമിട്ട് രണ്ടാമത്തെ ഈർക്കിൽ അതിൽക്കൂടിത്തന്നെ കടന്നു പോകണമെന്നു പറഞ്ഞാലോ?



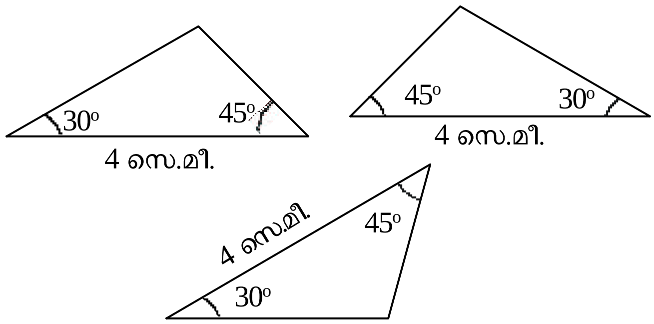
മുകളിലത്തെ ഭുജത്തിലും താഴത്തെ ഭുജത്തിലും അടയാളമിട്ട്, ഈ രണ്ടടയാളങ്ങളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകത്തക്കവിധം ഈർക്കിൽ വയ്ക്കണമെന്നു പറഞ്ഞാലോ? എത്ര ത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം?

ഒരു കോണും അതിന്റെ രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ നീളവും പറയുന്നതോടെ ത്രികോണം ഉറപ്പിക്കാം, അല്ലേ?

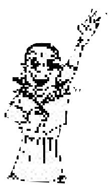
ഒരു വശവും രണ്ടു കോണും

ഒരു വശവും അതിലെ രണ്ടു കോണുകളും തന്നാലും ത്രികോണം വരയ്ക്കാമെന്നറിയാമല്ലോ. ഉദാഹരണമായി ഒരു വശം 4 സെന്റിമീറ്ററും അതിലെ രണ്ടു കോണുകൾ 30°, 45° യും ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

ഇത്തരം ചില ത്രികോണങ്ങൾ ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



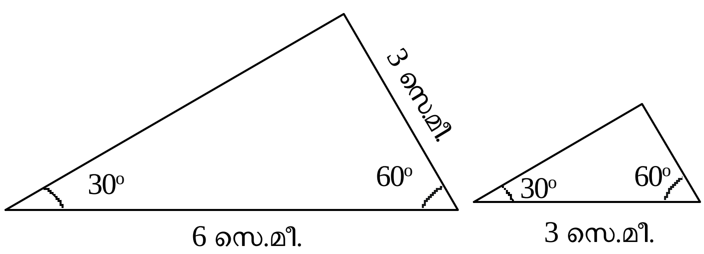
ഇവയും ക്ലാസിൽ വരച്ച ത്രികോണങ്ങളുമെല്ലാം ഒത്തുനോക്കൂ. എന്താണ് കണ്ടത്?



ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശവും അതിലുള്ള രണ്ടു കോണുകളും മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിലെ ഒരു വശത്തിനും അതിലുള്ള രണ്ടു കോണുകൾക്കും തുല്യമാണെങ്കിൽ ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണ്.

ഒരു വശവും ഏതെങ്കിലും രണ്ടു കോണുകളും തുല്യമായാൽ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാകുമോ?

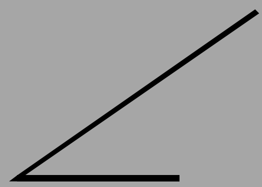
ഉദാഹരണമായി ഒരു വശം 6 സെന്റിമീറ്ററും അതിലെ കോണുകൾ 30° യും 60° യും ആയ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഒരു വശം 3 സെന്റിമീറ്ററും അതിലെ കോണുകൾ 30° യും 60° യും ആയ മറ്റൊരു ത്രികോണവും വരയ്ക്കുക. ഇനി വലിയ ത്രികോണത്തിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ വശം അളന്നു നോക്കുക. അതും 3 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെയല്ലേ?



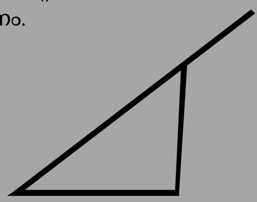
അതായത് ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലും ഒരു വശം (3 സെന്റിമീറ്റർ) തുല്യമാണ്. രണ്ട് കോണുകളും (30°, 60°) തുല്യമാണ്. പക്ഷേ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമല്ലല്ലോ.

എത്ര ത്രികോണം?

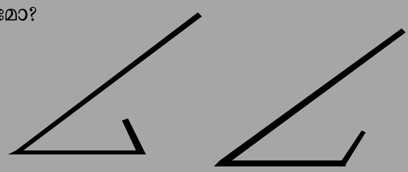
6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു ഈർക്കിൽ മുറിച്ചെടുക്കുക. ഇതിന്റെ ഒരറ്റത്ത് 30° കോണിൽ മറ്റൊരു നീണ്ട ഈർക്കിൽ വയ്ക്കുക.



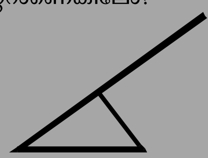
ഇനിയൊരു ഈർക്കിൽ മുറിച്ചെടുത്ത് ഈ കോണുമായി ചേർത്തുവച്ച് ത്രികോണമുണ്ടാക്കണം. ചില വ്യവസ്ഥകളുണ്ട്. ഈ ഈർക്കിലിന്റെ ഒരറ്റം, കോണിന്റെ താഴത്തെ ഭുജത്തിന്റെ അറ്റവുമായി ചേർന്നിരിക്കണം; മറ്റേ അറ്റം കോണിന്റെ മുകളിലത്തെ ഭുജത്തിനെ തൊട്ടിരിക്കണം.



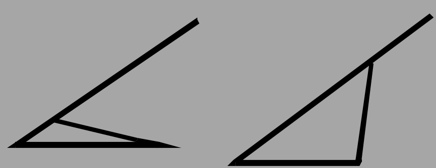
2 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഈർക്കിൽ മുറിച്ചെടുത്ത് ഇങ്ങനെ ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ?



3 സെന്റിമീറ്ററാണെങ്കിലോ?



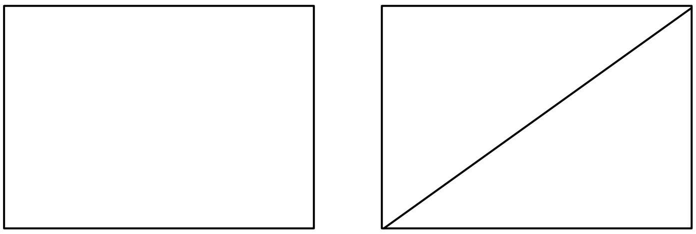
4 സെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ?



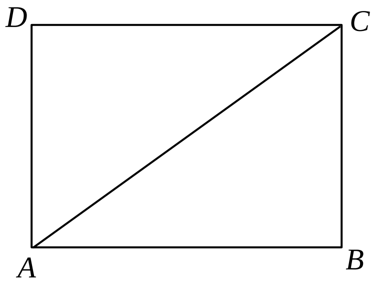
ഇതിലും നീളമുള്ള ഈർക്കിലുകൾ മുറിച്ച് പരീക്ഷിച്ചു നോക്കൂ.

ഉപയോഗങ്ങൾ, ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വികർണം വരച്ചാൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടുമല്ലോ.



ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണെന്ന് കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത് കണ്ടുവല്ലോ. ഇനി ഇത് എല്ലാ ചതുരങ്ങൾക്കും ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുന്നതെങ്ങനെ?



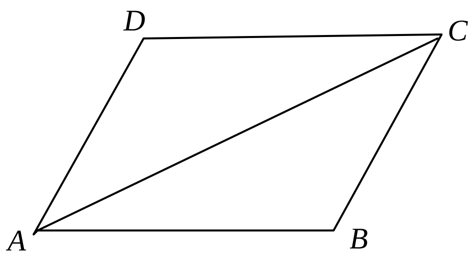
ചിത്രത്തിലെ $ABCD$ എന്ന ചതുരത്തിൽ, എതിർവശങ്ങളായ AB യും CD യും തുല്യമാണ്; AD യും BC യും തുല്യമാണ്.

അതായത് ΔACB യുടെ രണ്ടു വശങ്ങൾ ΔACD യുടെ രണ്ടു വശങ്ങൾക്ക് തുല്യമാണ്. മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളോ?

രണ്ടു ത്രികോണത്തിന്റേയും മൂന്നാമത്തെ വശം AC തന്നെയല്ലേ? (AC രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടേയും പൊതുവശം ആണ് എന്നു പറയാം)

അപ്പോൾ ΔACB യുടെ മൂന്നു വശങ്ങൾ ΔACD യുടെ മൂന്നു വശങ്ങൾക്ക് തുല്യമാണ്. അതിനാൽ ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണ്.

ഇനി സാമാന്തരികമായാലോ?

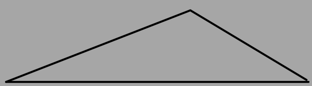


വികർണം വരച്ചാൽകിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണോ?

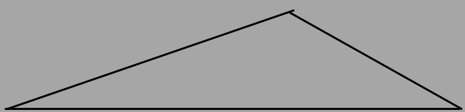
ശരിയല്ലാത്ത പൊരുത്തം

ഒരു ത്രികോണത്തിന് മൂന്നു വശങ്ങൾ, മൂന്നു കോണുകൾ എന്നിങ്ങനെ ആകെ ആറ് അളവുകളാണല്ലോ ഉള്ളത്. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ ഈ അളവുകളിലെ നിശ്ചിതമായ മൂന്നെണ്ണം (മൂന്ന് വശങ്ങൾ, രണ്ടു വശങ്ങളും അവയുടെ ഉൾക്കോണും, ഒരു വശവും അതിലെ രണ്ടു കോണുകളും) തുല്യമായാൽ ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാകുമെന്ന് (അതായത് ബാക്കി മൂന്ന് അളവുകളും തുല്യമായിരിക്കുമെന്ന്) കണ്ടു.

ഇനി വലിയൊരു കടലാസെടുത്ത് അതിൽ വശങ്ങൾ 8, 12, 18 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കൂ.



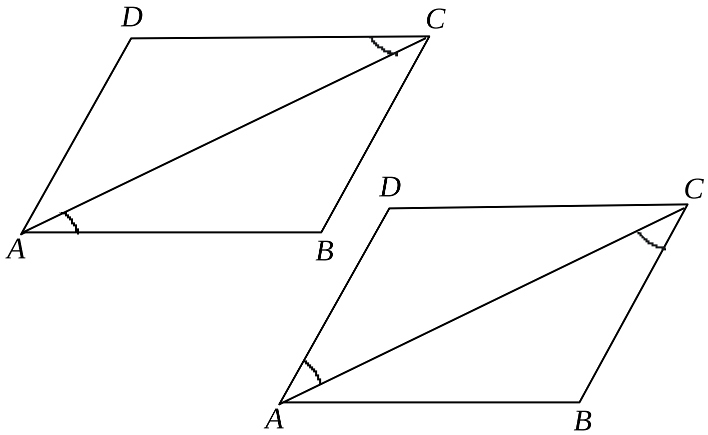
അടുത്തതായി 12, 18, 27 സെന്റിമീറ്റർ ആയ മറ്റൊരു ത്രികോണവും.



ഇവയുടെ കോണുകൾ അളന്നു നോക്കൂ. രണ്ട് ത്രികോണത്തിലെയും കോണുകൾ തുല്യമല്ലേ? (വെട്ടിയെടുത്ത് കോണുകളോരോന്നും ചേർത്തുവെച്ച് നോക്കിയാലും മതി).

അതായത്, ഈ ത്രികോണങ്ങളിൽ മൂന്ന് കോണുകളും, രണ്ടു വശങ്ങളുമായി അഞ്ച് അളവുകൾ തുല്യമാണ്. പക്ഷേ ഇവ സർവസമമല്ലല്ലോ.

ഇവിടെ ACB, ACD എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ AC പൊതു വശം തന്നെയാണ്. പക്ഷേ മറ്റ് രണ്ടു വശങ്ങൾ തുല്യ മാണോ എന്നറിയില്ല.



രണ്ടു ത്രികോണത്തിലും ഈ വശത്തിലുള്ള കോണുകൾ നോക്കൂ.

AB, CD എന്നീ സമാന്തരവരകളും AC എന്ന മൂന്നാമത്തെ വരയും ചേർന്നുണ്ടാക്കുന്ന ഒരു ജോടി മറുകോണുകളാണ് (alternate angles) $\angle BAC$ യും $\angle DCA$ യും. അതിനാൽ

$$\angle BAC = \angle DCA$$

ഇതുപോലെ AD, BC എന്നീ സമാന്തരവരകളും AC യും ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ഒരു ജോടി മറുകോണുകളായതിനാൽ

$$\angle BCA = \angle DAC$$

(ഏഴാം ക്ലാസിലെ **വരകളിലെ ഒരുമ** എന്ന പാഠത്തിലെ മറ്റൊരു തരം ജോടികൾ എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.) അപ്പോൾ ΔACB യിലെ ഒരു വശവും ആ വശത്തിലെ രണ്ടു കോണുകളും ΔACD യിലെ ഒരു വശത്തിനും ആ വശത്തിലെ രണ്ടു കോണുകൾക്കും തുല്യമാണ്. അതിനാൽ ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണ്.

സർവസമമാണ് എന്നതിന് $\cong$ എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗി ക്കാറുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ

$$\Delta ACB \cong \Delta ACD$$

എന്നെഴുതാം.

ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ സർവസമതയിൽനിന്ന് മറ്റൊരു കാര്യംകൂടി കിട്ടുമല്ലോ.

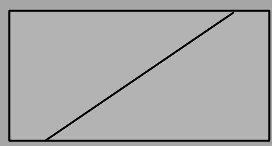
$$AB = CD \qquad BC = AD$$

അതായത്,

ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമാണ്.

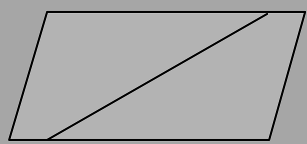
സർവസമഭാഗങ്ങൾ

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ എതിർമൂലകൾ യോജിപ്പി ച്ചാൽ സർവസമമായ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടുമെന്ന് കണ്ടുവല്ലോ. എതിർമൂലകളിൽ നിന്ന് തുല്യ അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാലോ?



മുറിച്ചെടുത്ത് പരിശോധിക്കൂ. ഇങ്ങനെ പല രീതിയിൽ വരച്ചു നോക്കൂ. എങ്ങനെ വരയ്ക്കു മ്പോഴാണ് രണ്ടു ഭാഗങ്ങളും ചതുരം തന്നെ യാകുന്നത്?

സാമാന്തരികങ്ങൾക്കും ഈ സവിശേഷത ഉണ്ടോ?

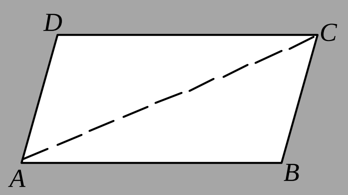


എങ്ങനെ വര വരയ്ക്കുമ്പോഴാണ് ഭാഗങ്ങളും സാമാന്തരികങ്ങളാകുന്നത്?

സാമാന്തരികമെന്നാൽ

നാലു വശങ്ങളുള്ള രൂപങ്ങൾക്കെല്ലാം പൊതുവായുള്ള പേരാണ് ചതുർഭുജം (quadrilateral). രണ്ടു ജോടി എതിർവശങ്ങളും സമാന്തരമായ ചതുർഭുജമാണ് സാമാന്തരികം. ഏതു സാമാന്തരികത്തിന്റെയും രണ്ടു ജോടി എതിർവശങ്ങളും തുല്യമാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. മറിച്ചൊരു ചോദ്യമുണ്ട്. രണ്ടു ജോടി എതിർവശങ്ങളും തുല്യമായ ഏതു ചതുർഭുജവും സാമാന്തരികമാണോ?

$ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $AB = CD$ യും $BC = AD$ യും ആണെന്നു കരുതുക. AC എന്ന വികർണം വരയ്ക്കുക.



ഇപ്പോൾ ABC, ADC എന്ന രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടിയില്ലേ? ΔABC യിലെ AB, BC എന്നീ വശങ്ങൾ ΔADC യിലെ CD, DA എന്നീ വശങ്ങൾക്ക് തുല്യമാണ്. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും മൂന്നാമത്തെ വശം ACതന്നെയാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങൾ തുല്യമാണ്. അതിനാൽ അവ സർവസമവുമാണ്.

അതിനാൽ തുല്യവശങ്ങളായ BC, DA ഇവയുടെ എതിരേയുള്ള കോണുകളായ $\angle BAC$, $\angle DCA$ ഇവയും തുല്യമാണ്.

AB, CD എന്നീ വരകളും AC എന്ന വരയും ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ഒരു ജോടി മറുകോണുകളാണല്ലോ ഈ കോണുകൾ. ഇവ തുല്യമായതിനാൽ AB, CD എന്നീ വരകൾ സാമാന്തരമാണ്.

ഇതുപോലെ $\angle DAC = \angle BCA$ എന്നും അതിനാൽ AD, BC ഇവ സമാന്തരമാണെന്നും തെളിയിക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ $ABCD$ ഒരു സമാന്തരികം തന്നെയാണ്.

ഇവിടെ തെളിയിച്ചതെന്താണ്?

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ രണ്ടു ജോടി എതിർവശങ്ങളും തുല്യമാണെങ്കിൽ അതൊരു സാമാന്തരികമാണ്.

ഇതുകൂടാതെ ACB, ACD എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ സർവസമതയിൽ നിന്ന്

$$\angle ABC = \angle ADC$$

എന്നും കാണാം.

ഇതുപോലെ BD എന്ന വികർണം വരച്ചാൽ ΔBDA, ΔBDC ഇവ സർവസമമാണെന്നും അതിനാൽ

$$\angle BAD = \angle BCD.$$

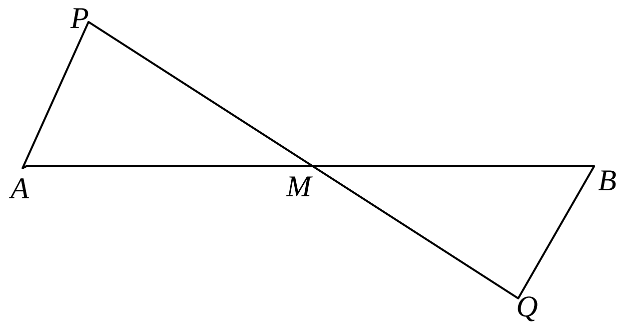
എന്നും കാണാം. അതായത്,

> ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ തുല്യമാണ്.

ഇനി ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.

- ചിത്രത്തിൽ AP, BQ ഇവ സമാന്തരവും തുല്യവുമാണ്.

  $AM = MB$ എന്നു തെളിയിക്കുക.



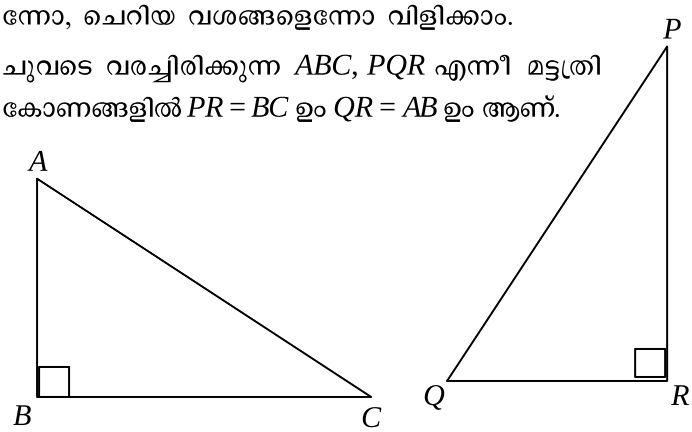
  ഇതുപയോഗിച്ച് തന്നിട്ടുള്ള ഒരു വരയുടെ മധ്യബിന്ദു കണ്ടു പിടിയ്ക്കാനുള്ള ഒരു മാർഗം നിർദ്ദേശിക്കുക.

- ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ തമ്മിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു, രണ്ടു വികർണങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുവാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

മട്ടത്രികോണങ്ങൾ

ഒരു കോൺ 90° (മട്ടം) ആയ ത്രികോണമാണല്ലോ മട്ടത്രികോണം. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ വശമാണ് കർണം. മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ ലംബവശങ്ങളെന്നോ, ചെറിയ വശങ്ങളെന്നോ വിളിക്കാം.

ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന ABC, PQR എന്നീ മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ $PR = BC$ ഉം $QR = AB$ ഉം ആണ്.



ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണോ?

ΔPQR ന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ ΔABC യുടെ രണ്ടു വശങ്ങൾക്ക് തുല്യമാണ്. ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാകാൻ ഇനി എന്തു കൂടി വേണം?

ΔPQR ൽ PR, RQ ഇവയുടെ ഉൾക്കോണായ $\angle PRQ$ മട്ട കോണാണ്.

ΔABC യിൽ AB, BC ഇവയുടെ ഉൾക്കോണായ $\angle ABC$ മട്ട കോണാണ്.

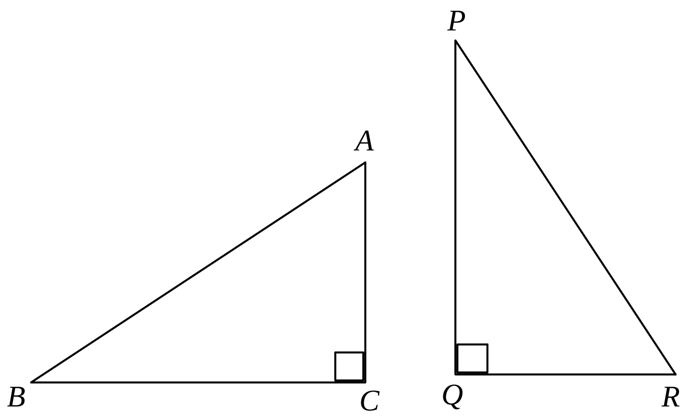
അതായത്,

$$\angle PRQ = 90^{\circ} = \angle ABC$$

അങ്ങനെ ΔPQR ലെ PR, RQ എന്നീ വശങ്ങളും അവയുടെ ഉൾക്കോണായ $\angle PRQ$ ഉം ΔABC യിലെ BC, AB എന്നീ വശങ്ങൾക്കും അവയുടെ ഉൾക്കോണായ $\angle ABC$ യ്ക്കും തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ മുമ്പു കണ്ടതനുസരിച്ച് ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണ്.

ലംബവശങ്ങൾക്കു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും ജോടി വശങ്ങൾ തുല്യമായാലും മട്ടത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാകുമോ?

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുണ്ട്.



ഇവയിൽ $PR = AB$ ഉം $PQ = BC$ ഉം ആണ്.

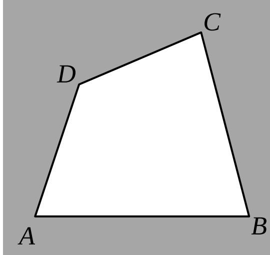
ഇവിടെ ഉൾക്കോണുകളായ $\angle PRQ, \angle BAC$ ഇവയെക്കുറിച്ച് ഒന്നും അറിയില്ലല്ലോ.

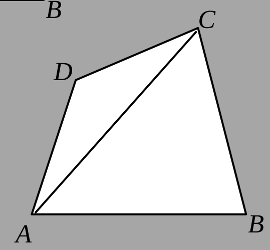
മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങൾ നോക്കാം: QR, AC ഇവ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

ചതുർഭുജകോണുകൾ

ഒരു സാമാന്തരികത്തിലെ രണ്ടു ജോടി എതിർകോണുകളും തുല്യമാണെന്നു കണ്ടു. മറിച്ച്, ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ രണ്ടു ജോടി എതിർകോണുകളും തുല്യമായാൽ അതൊരു സാമാന്തരികമാണോ?

ഇത് ശരിയാണെന്നു തെളിയിക്കാൻ, ആദ്യം ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെയെല്ലാം തുക എന്തെന്നറിയണം. ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.





ഒരു വികർണം വരച്ചപ്പോൾ ചതുർഭുജത്തിലെ രണ്ടു കോണുകൾ ഈരണ്ടായി മുറിഞ്ഞു. ആകെ ആറു കോണുകളായി. ഈ ആറു കോണുകൾ ABC, ACD എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ ആറു കോണുകളുടെ തുക $180^{\circ} + 180^{\circ} = 360^{\circ}$ ആണ്. എന്തു കിട്ടി?

ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 360° ആണ്.

ABC എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണമാണ് AB. അതിനാൽ പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$$AC^2 = AB^2 - BC^2$$

ഇതുപോലെ PQR എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം PR ആയതിനാൽ

$$QR^2 = PR^2 - PQ^2$$

ആദ്യം പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്

$$PR = AB, \ PQ = BC$$

എന്നും അറിയാം. ഇവയെല്ലാം ചേർത്തുവായിച്ചാൽ

$$QR^2 = PR^2 - PQ^2 = AB^2 - BC^2 = AC^2$$

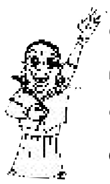
എന്നും കാണാമല്ലോ. ഇതിൽനിന്ന്

$$QR = AC$$

എന്നും കിട്ടും. ഇപ്പോൾ ΔPQR ന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളും ΔABC യുടെ മൂന്നു വശങ്ങളോടും തുല്യമാണെന്ന് കിട്ടി. അതിനാൽ

$$\Delta PQR \cong \Delta ABC$$

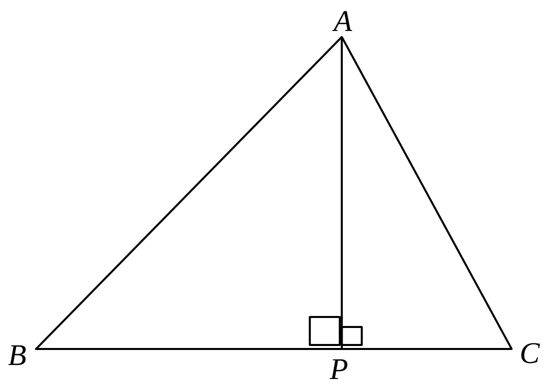
ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ പൊതുതത്വം എന്താണ്?



ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണവും ഒരു വശവും മറ്റൊരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിനും ഒരു വശത്തിനും തുല്യമാണെങ്കിൽ ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണ്.

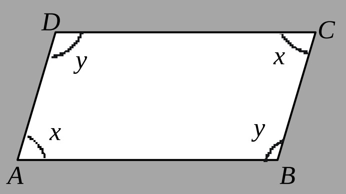
സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ

ഏതു ത്രികോണത്തിന്റേയും ഒരു മൂലയിലൂടെ ലംബം വരച്ച് രണ്ട് മട്ടത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കാമല്ലോ.



സാമാന്തരികം - കോണുകളിലൂടെ

ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ രണ്ടു ജോടി എതിർകോണുകളും തുല്യമാണെങ്കിൽ അതൊരു സാമാന്തരികമാണെന്നു തെളിയിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ എതിർകോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു കരുതുക.



ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിൽ തുല്യമായ ഒരു ജോടി എതിർകോണുകളിൽ ഒന്നിന്റെ അളവ് x° എന്നും, തുല്യമായ രണ്ടാമത്തെ ജോടി എതിർകോണുകളിൽ ഒന്നിന്റെ അളവ് y° എന്നും എടുത്താലോ?

ചതുർഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 360° ആയതിനാൽ

$$x + y + x + y = 360$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x + y = 180$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

അപ്പോൾ

$$\angle A + \angle D = x + y = 180^\circ$$

AB, CD എന്നീ വരകളും AD എന്ന മൂന്നാമത്തെ വരയും ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ഒരു ജോടി ആന്തരസഹകോണുകളാണല്ലോ $\angle A$ യും $\angle D$ യും. ഇവയുടെ തുക 180° ആയതിനാൽ AB, CD ഇവ സമാന്തരമാണ്.

ഇതുപോലെ $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ആയതിനാൽ AD, BC ഇവയും സമാന്തരമാണെന്ന് കിട്ടുമല്ലോ.

രണ്ടു ജോടി എതിർവശങ്ങളും സമാന്തരമായതിനാൽ $ABCD$ സാമാന്തരികമാണ്.

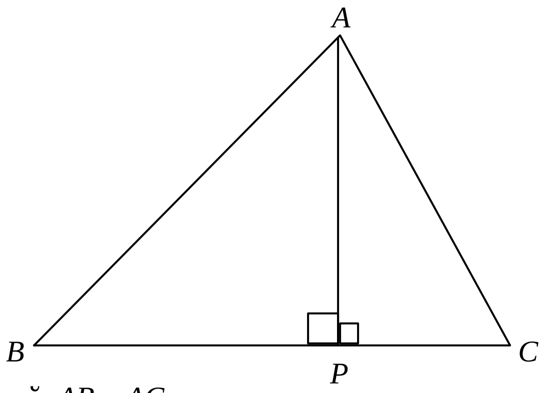
അതായത്,

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ രണ്ടു ജോടി എതിർകോണുകളും തുല്യമാണെങ്കിൽ, അതൊരു സാമാന്തരികമാണ്.

മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ ΔABC യിൽനിന്ന് ഇങ്ങനെ കിട്ടിയ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളാണ് ΔABP, ΔACP. ഇവ സർവസമമല്ലെന്ന് ചിത്രത്തിൽനിന്നുതന്നെ അറിയാം.

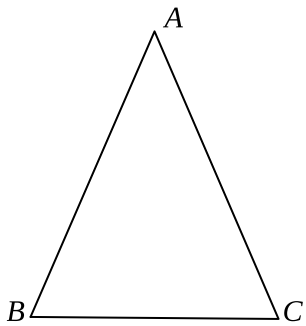
ΔABC ഏതുതരം ത്രികോണമായാലാണ് ഈ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാകുന്നത്?

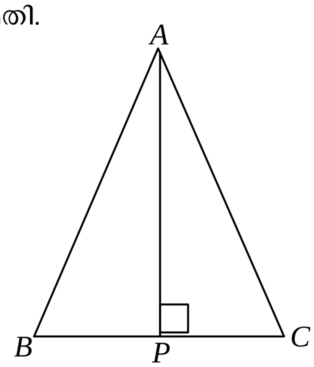
ΔABP, ΔACP എന്നീ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടേയും ഒരു വശം AP തന്നെയാണ്. അപ്പോൾ ΔABP യുടെ ഒരു വശം ΔACP യുടെ ഒരു വശത്തിനു തുല്യമാണ്. മട്ടത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാകാൻ ഇനി കർണങ്ങൾ കൂടി തുല്യമാകണം.



അതായത്, $AB = AC$ ആകണം.

അപ്പോൾ രണ്ടു വശങ്ങൾ തുല്യമായ ഒരു ത്രികോണത്തെ സർവസമമായ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളാക്കാം. അതിന്, തുല്യമായ വശങ്ങൾ ചേരുന്ന മൂലയിൽനിന്നു എതിർവശത്തേക്കു ലംബം വരച്ചാൽ മതി.



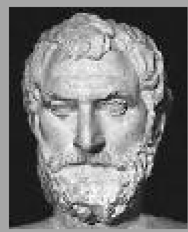


ഇതിൽനിന്ന് മറ്റൊരു കാര്യം മനസിലാക്കാം. ചിത്രത്തിലെ ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $AB = AC$ ആണ്. AP എന്ന വര BC ക്ക് ലംബമായി വരച്ചിരിക്കുന്നു. നേരത്തേ കണ്ടതനുസരിച്ച് ABP, ACP എന്നീ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണ്. അപ്പോൾ ഇവയിലെ വശങ്ങളും കോണുകളുമെല്ലാം തുല്യമാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി AP രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടേയും ഒരു വശം ആയതിനാൽ, രണ്ട് ത്രികോണത്തിലും AP യ്ക്ക് എതിരേയുള്ള കോണുകളും തുല്യമാണ്. അതായത്

$$\angle ABC = \angle ACB$$

ഇതിൽനിന്ന് എന്തു മനസിലാക്കാം?

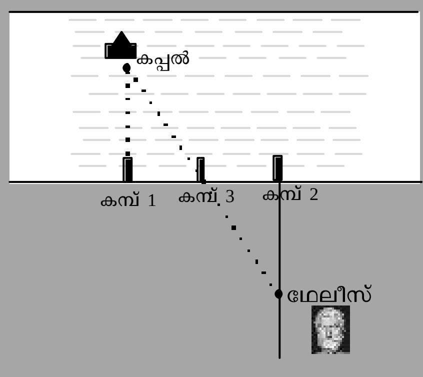
സർവസമതാതന്ത്രം



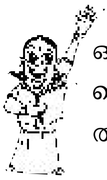
ബി.സി. ആറാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഗ്രീസിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന തത്വചിന്തകനും ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനുമായിരുന്നു ഥേലീസ്. ദൂരെ കടലിൽ നങ്കൂരമിട്ടു കിടക്കുന്ന ഒരു കപ്പൽ കരയിൽ നിന്ന് എത്ര അകലെയാണെന്ന് കണക്കുകൂട്ടാൻ ഥേലീസ് ഉപയോഗിച്ചതായി പറയപ്പെടുന്ന ഒരു സൂത്രം നോക്കൂ.

ആദ്യം കപ്പലിന് നേരെ തീരത്തോടു ചേർന്ന് ഒരു കമ്പു നാട്ടി. കുറച്ചകലെയായി തീരത്തോടു ചേർന്നുതന്നെ മറ്റൊരു കമ്പും. തുടർന്ന് ഈ രണ്ടു കമ്പുകളുടെ ഒത്ത നടുക്കായി മൂന്നാമതൊരു കമ്പും കുത്തി നിർത്തി.

പിന്നീട്, രണ്ടാമത്തെ കമ്പിൽ നിന്ന് തീരത്തിന് ലംബമായി കരയിൽ ഒരു വര വരച്ചു. കപ്പലിനെ നോക്കിക്കൊണ്ട് ഈ വരയിലൂടെ പുറകോട്ടു നടന്ന് നടുവിലത്തെ കമ്പ് കപ്പലിന് നേരെ കണ്ടപ്പോൾ നടത്തം നിർത്തി. അപ്പോൾ നിന്നിരുന്ന സ്ഥാനം വരയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി.



ഇപ്പോൾ കടലിലെ ത്രികോണവും കരയിലെ ത്രികോണവും സർവസമമായതിനാൽ (എന്തുകൊണ്ട്?) കരയിൽ നിന്ന് കപ്പലിലേക്കുള്ള ദൂരം ഥേലീസ് അവസാനം നിന്ന സ്ഥാനവും തീരവും തമ്മിലുള്ള ദൂരം തന്നെയാണല്ലോ.

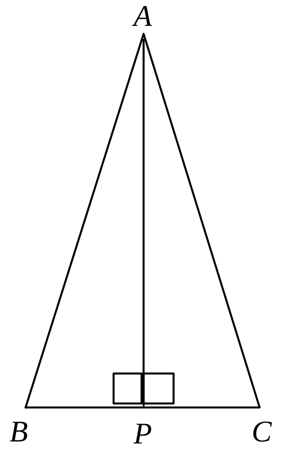


ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവയ്ക്ക് എതിരേയുള്ള കോണുകളും തുല്യമാണ്.

ഇതു മറിച്ച് പറഞ്ഞാൽ ശരിയാകുമോ?

അതായത് ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു കോണുകൾ തുല്യമായാൽ അവയുടെ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമാകുമോ?

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ ΔABC യിൽ $\angle ABC = \angle ACB$ ആണ്. $AB = AC$ ആണോ എന്നു നോക്കാം. മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ A യിൽ നിന്ന് BC യിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കാം.



ABP, ACP എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണോ?

രണ്ടു ത്രികോണത്തിനും AP പൊതുവശമാണ്. ഈ വശത്തിലെ ഒരു കോൺ രണ്ടു ത്രികോണത്തിലും 90° തന്നെ. ഇനി എന്തുകൂടി വേണം?

$\angle BAP$ യും $\angle CAP$ യും തുല്യമാണോ?

ഏതു ത്രികോണത്തിലേയും കോണുകളുടെ തുക 180° ആയതിനാൽ, ΔABP യിൽ

$$\angle ABP + \angle BAP + 90^\circ = 180^\circ$$

ഇതിൽനിന്ന് $\angle ABP + \angle BAP = 90^\circ$ എന്നും. അതിനാൽ

$$\angle BAP = 90^\circ - \angle ABP$$

എന്നും കിട്ടുമല്ലോ. ഇതുപോലെ ΔACP യിൽനിന്ന്

$$\angle CAP = 90^\circ - \angle ACP$$

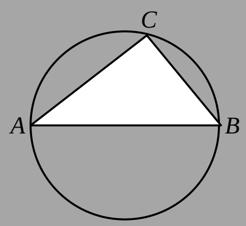
എന്നും കാണാം. ഇനി $\angle ABP = \angle ACP$ എന്നും കൂടി ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$\angle BAP = \angle CAP$$

എന്നും കാണാം.

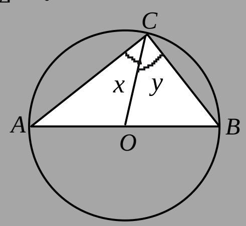
അർധവൃത്തത്തിലെ കോൺ

ചിത്രത്തിൽ AB വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും C വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമാണ്.



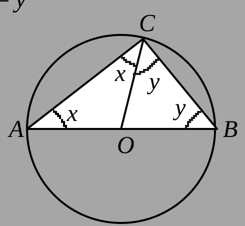
$\angle ACB$ കണ്ടുപിടിക്കണം

അതിന് C യും, വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം O യും യോജിപ്പിക്കുക.



ഇപ്പോൾ $\angle ACB$ രണ്ടു ഭാഗമായില്ലേ? അവയുടെ അളവുകളെ x, y എന്നെടുക്കുക.

ΔOAC യിൽ $OA = OC$ ആണല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?) അതിനാൽ $\angle OAC = x$. ഇതുപോലെ $\angle OBC$ യിൽ $OB = OC$ ആയതിനാൽ $\angle OBC = y$



ΔACB യിലെ കോണുകൾ $x, y, x + y$ ആണല്ലോ അതിനാൽ $x + y + (x + y) = 180$ എന്നും അതിൽ നിന്ന് $x + y = 90$ എന്നും കാണാം. അതായത്, $\angle ACB = 90^\circ$.

ഇവിടെ C വൃത്തത്തിൽ എവിടെയുമാകാം. അപ്പോൾ എന്തു മനസ്സിലായി?

വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളെ വൃത്തത്തിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന കോൺ മട്ടമാണ്.

അപ്പോൾ ΔABP യിലെ AP എന്ന വശവും അതിലെ രണ്ടു കോണുകളായ $\angle APB, \angle BAP$ എന്നിവയും ΔACP യിലെ AP എന്ന വശത്തിനും അതിലെ രണ്ടു കോണുകളായ $\angle APC, \angle CAP$ എന്നിവയ്ക്കും തുല്യമാണ്. അതിനാൽ ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണ്.

അതുകൊണ്ടു തന്നെ ഈ ത്രികോണത്തിലെ $\angle APB$, $\angle APC$ എന്നീ തുല്യകോണുകളുടെ എതിർവശങ്ങളായ AB യും AC യും തുല്യമാണ്.

ഇവിടെ എന്താണ് തെളിയിച്ചത്?

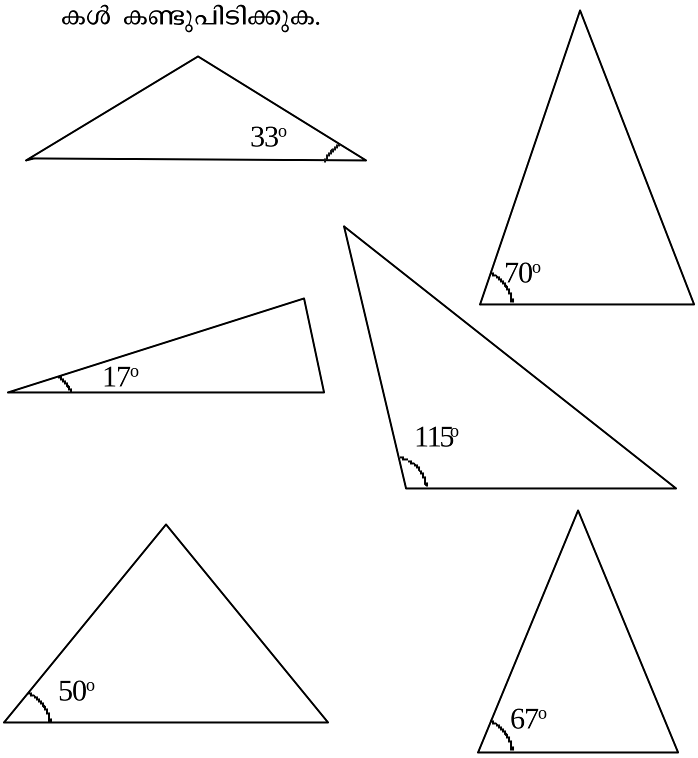
ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു കോണുകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ അവയുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

രണ്ടു വശങ്ങൾ തുല്യമായ ത്രികോണത്തിന് സമപാർശ്വ ത്രികോണം (isosceles triangle) എന്നാണ് പേര്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, സമപാർശ്വത്രികോണം എന്നാൽ രണ്ടു കോണുകൾ തുല്യമായ ത്രികോണം എന്നും പറയാം.

എല്ലാ വശങ്ങളും തുല്യമായ ത്രികോണത്തെ സമഭുജത്രികോണം (equilateral triangle) എന്നാണല്ലോ വിളിക്കുന്നത്. ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങൾ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളിലെ ഒരു പ്രത്യേക ഇനമാണ്.

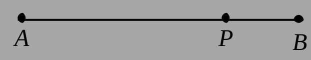
ഇനി ചില കണക്കുകളാവാം.

- ചുവടെ കുറേ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചിട്ടുണ്ട്. ഓരോന്നിലും ഒരു കോൺ തന്നിട്ടുണ്ട്. മറ്റു കോണുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.



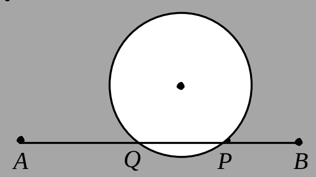
വൃത്തവും ലംബവും

AB എന്നൊരു വരയും, അതിൽ P എന്നൊരു ബിന്ദുവും തന്നിട്ടുണ്ട്.

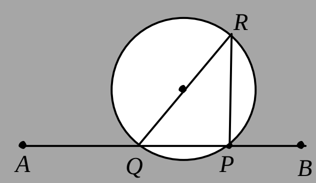


P യിൽക്കൂടി AB യ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കണം. ജ്യാമിതിപ്പെട്ടിയിലെ മട്ടം (setsquare) ഉപയോഗിച്ചു വരയ്ക്കാമല്ലോ. കോമ്പസ് ഉപയോഗിച്ചും വരയ്ക്കാം.

അതിന് ആദ്യം P യിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നതും AB യെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നതുമായ വൃത്തം വരയ്ക്കണം. ഈ ബിന്ദുവിന് Q എന്ന് പേരിടാം.



ഇനി Q വിൽക്കൂടിയുള്ള വ്യാസം വരച്ച്, അതിന്റെ മറ്റേ അറ്റം P യുമായി യോജിപ്പിക്കുക.



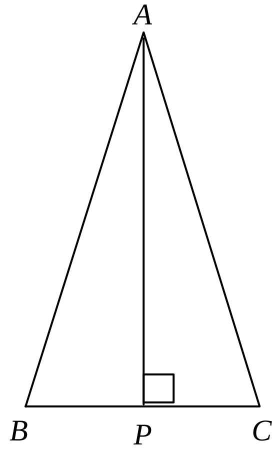
QR വ്യാസവും P വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവും ആയതിനാൽ QPR മട്ടകോണാണല്ലോ. അതായത് PR എന്ന വര AB യ്ക്ക് ലംബമാണ്.

- ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ 120° ആണ്. മറ്റു കോണുകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?
- ഒരു സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?
- ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

സമഭാജികൾ

ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിനെ സർവസമമായ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നതു കണ്ടുവല്ലോ. ഇതിൽനിന്ന് ചില കാര്യങ്ങൾകൂടി മനസിലാക്കാം.

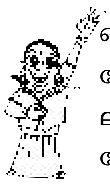
ചിത്രത്തിലെ ΔABC യിൽ $AB = AC$ ആണ്. A യിൽനിന്ന് BC യിലേക്കുള്ള ലംബമാണ് AP.



ABP, ACP എന്നി ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമായതിനാൽ ഇവയുടെ വശങ്ങളും കോണുകളും തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ

$BP = CP$ എന്നും ഈ വശങ്ങളുടെ എതിരേയുള്ള കോണുകളായ $\angle BAP = \angle CAP$ എന്നും കിട്ടുമല്ലോ.

അതായത്, AP എന്ന വര BC എന്ന വരയെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. $\angle BAC$ എന്ന കോണിനേയും രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.



ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിൽ, തുല്യ വശങ്ങൾ ചേരുന്ന മൂലയിൽ നിന്ന് എതിർവശത്തേക്കുള്ള ലംബം, ഈ വശത്തെയും ഈ മൂലയിലുള്ള കോണിനേയും സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.

ഒരു വരയേയോ കോണിനേയോ സമഭാഗം ചെയ്യുന്ന വരയ്ക്ക് സമഭാജി (bisector) എന്നാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ AP എന്ന വര BC എന്ന വരയുടെ സമഭാജിയാണ്; BAC എന്ന കോണിന്റെയും സമഭാജിയാണ്. ഇത് BC ക്ക് ലംബവും കൂടിയായതിനാൽ ഇതിനെ BC യുടെ ലംബസമഭാജി എന്നു വിളിക്കാം.

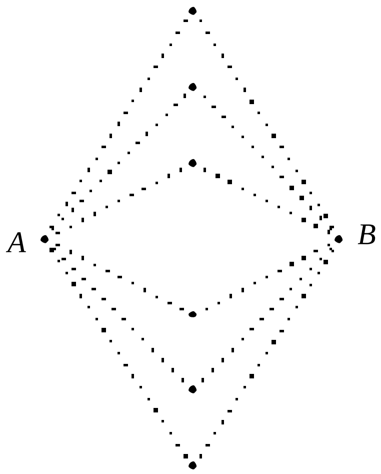
കയറും കണക്കും

പ്രാചീന ജ്യാമിതിയുടെ പ്രാമാണികഗ്രന്ഥമായ എലിമെന്റ്സിനെക്കുറിച്ച് കേട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇതിൽ വരകളും വൃത്തങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച് വരയ്ക്കാവുന്ന രൂപങ്ങൾ മാത്രമേ യൂക്ലിഡ് പരിഗണിക്കുന്നുള്ളൂ. മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ വളവില്ലാത്ത, നീളങ്ങളൊന്നും അടയാളപ്പെടുത്താത്ത ഒരു വടിയും (straight- edge) കോമ്പസും കൊണ്ട് വരയ്ക്കാവുന്ന രൂപങ്ങൾ മാത്രം. എന്തുകൊണ്ടാണിങ്ങിനെ?

പണ്ടുകാലത്ത് നീളമളക്കാനും, വരവരയ്ക്കാനുമെല്ലാം ചരടോ കയറോ ആണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. കയർ ഉപയോഗിച്ച് വരയ്ക്കാവുന്നത് വരയും വട്ടവുമാണ്. രണ്ടു കുറ്റികൾക്കിടയിൽ കയർ വലിച്ചു കെട്ടിയാൽ വരയായി. ഒരു കുറ്റി ഇളക്കി മറ്റേ കുറ്റിയ്ക്കു ചുറ്റും കറക്കിയാൽ വട്ടവും.

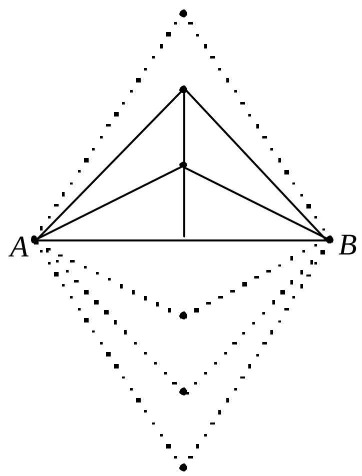
വിവിധ രൂപങ്ങൾ വരയ്ക്കാനുള്ള ഉപകരണങ്ങൾ നിർമിക്കാൻ കഴിയുന്ന ഇന്ന് ഇത്തരം നിർമിതികൾക്ക് ചരിത്രപരവും സൈദ്ധാന്തികവുമായ പ്രാധാന്യമേയുള്ളൂ.

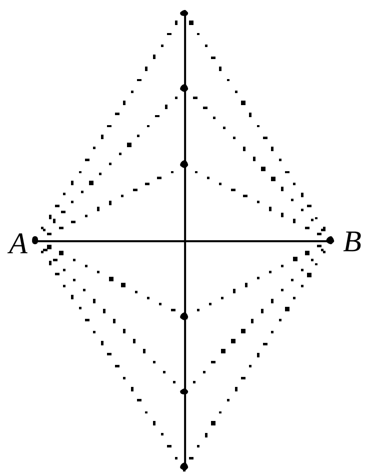
ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽനിന്ന് തുല്യ അകലത്തിൽ കുറേ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

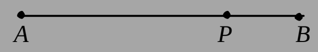
ഈ ബിന്ദുക്കളോരോന്നും A, B ഇവയുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് സമപാർശ്വത്രികോണമാണല്ലോ. അതിനാൽ ഇവയെല്ലാം AB യുടെ ലംബസമഭാജിയിലാണ്. മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ ഇവ യോജിപ്പിച്ചാൽ AB എന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജി കിട്ടും.



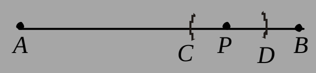


മറ്റൊരു മാർഗം

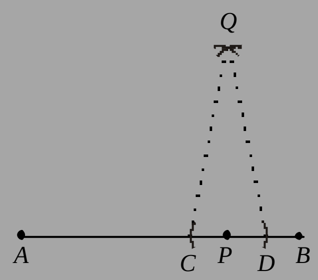
ഒരു വരയിലെ നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തുനിന്നു ലംബം വരയ്ക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്.



ആദ്യം P യിൽ നിന്ന് തുല്യ അകലത്തിൽ AB യിൽത്തന്നെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ C, D അടയാളപ്പെടുത്തുക.

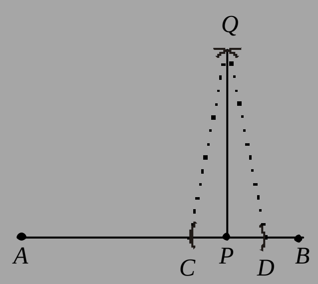


ഇനി C യിൽനിന്നും D യിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിൽ Q അടയാളപ്പെടുത്തുക



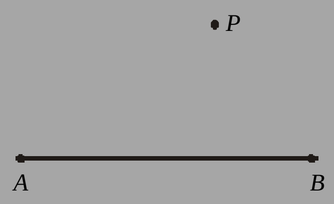
ΔCQD സമപാർശ്വത്രികോണമാണല്ലോ.അതിനാൽ Q വിൽ നിന്ന് CD യിലേക്കുള്ള ലംബം CD യുടെ സമഭാജിയാണ്. അതായത്, ഈ ലംബം CD യുടെ മധ്യബിന്ദുവായ P യിലൂടെ കടന്നുപോകും.

മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, QP എന്ന വര CD യ്ക്ക് ലംബമാണ്. CD എന്ന വര AB എന്ന വരയുടെ ഭാഗമായതിനാൽ QP എന്ന വര AB യ്ക്ക് ലംബമാണ്.



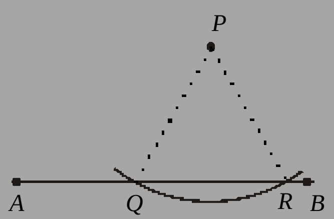
പുറമേ നിന്നൊരു ലംബം

ഒരു വരയിലെ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് കോമ്പസ് ഉപയോഗിച്ച് ലംബം വരയ്ക്കാം. വരയിലല്ലാത്ത ബിന്ദുവിൽനിന്ന് ലംബം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

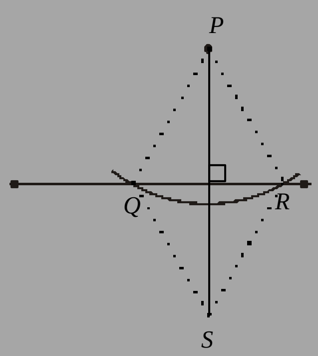


അതിന് P മുകളിലത്തെ മൂലയായും, താഴത്തെ വശം AB യിലും ആകത്തക്കവണ്ണം ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം വരയ്ക്കണം. അതിന് P യിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിൽ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ AB യിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ മതിയല്ലോ.

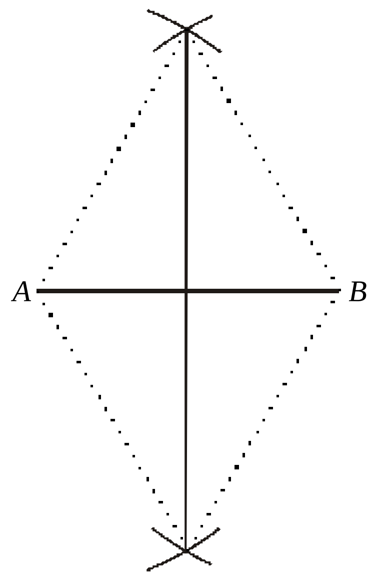
P കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് AB യെ Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുക.



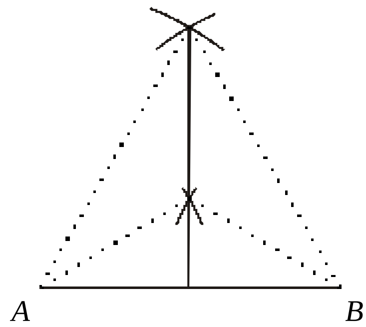
ഇനി QR ന്റെ ലംബസമഭാജി വരച്ചാൽ മതി. അതിന് Q, R ഇവ കേന്ദ്രമാക്കി ഒരേ ആരത്തിൽ വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചാൽ മതിയല്ലോ.



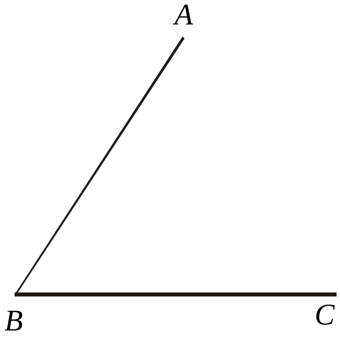
ഒരു വര വരയ്ക്കാൻ രണ്ടു കുത്തുകൾ മതിയല്ലോ. അപ്പോൾ AB എന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജി ഇവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ വരയ്ക്കാം.

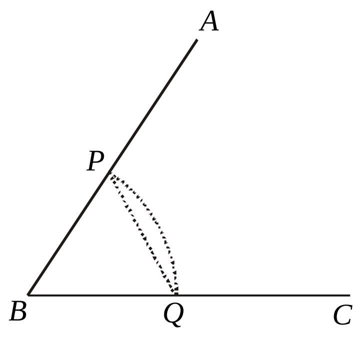


AB ക്ക് ചുവടെ സ്ഥലമില്ലെങ്കിൽ ഇങ്ങനെയും വരയ്ക്കാം:

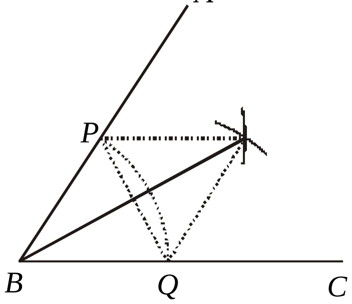


ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജി വരയ്ക്കാനും ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വം ഉപയോഗിക്കാം. ആദ്യം ഈ കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം നിർമിക്കണം.





ഇനി ΔPBQ യിലെ PQ എന്ന വശത്തിന്റെ ലംബസമഭാജി വരച്ചാൽ മതി.



ഇവിടെ ഒരു സൗകര്യമുണ്ട്. നമുക്ക് വരയ്ക്കേണ്ട ലംബസമഭാജി B യിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുമല്ലോ. (എന്തുകൊണ്ട്?) അപ്പോൾ ഈ സമഭാജിയിലെ ഒരു ബിന്ദു കൂടി അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ മതി.

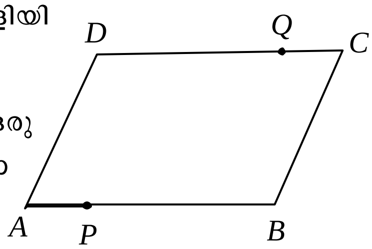
ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തു നോക്കൂ.

- നാലു വശങ്ങളും തുല്യമായ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ കർണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബസമഭാജികളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
- സ്കെയിൽ മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് 2.25 മീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ? സ്കെയിലും കോമ്പസും ഉപയോഗിച്ചായാലോ?
- തന്നിട്ടുള്ള ഒരു വരയുടെ നീളം അളക്കാതെ, ആ വര വ്യാസമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?
- $22\frac{1}{2}^{\circ}$ അളവിൽ ഒരു കോൺ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?
- ചിത്രത്തിൽ $ABCD$ ഒരു സാമാന്തരികമാണ്.

  $AP = CQ$ ആണ്.

  $PD = BQ$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

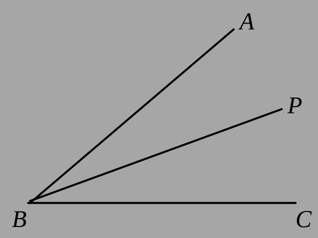
  ചതുർഭുജം $PBQD$ ഒരു സാമാന്തരികമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



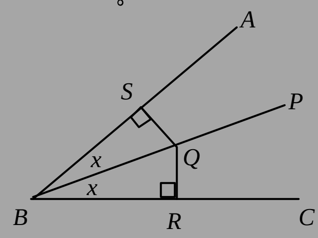
- ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു ജോടി എതിർവശങ്ങൾ സമവും സമാന്തരവുമായാൽ അത് സാമാന്തരികമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

സമദൂര സമഭാജി

ചിത്രത്തിൽ $\angle ABC$ യുടെ സമഭാജിയാണ് BP.



BP യിൽ ഒരു ബിന്ദു Q അടയാളപ്പെടുത്തുക. അതിൽനിന്ന് AB യിലേക്കും, BC യിലേക്കും ലംബം വരയ്ക്കുക.



BP എന്ന വര $\angle ABC$ യുടെ സമഭാജി ആയതിനാൽ, $\angle ABP = \angle CBP$.

ഇത് x° എന്നെടുത്താൽ,

$\angle BQS = \angle BQR = 90^{\circ} - x^{\circ}$ (എന്തുകൊണ്ട്?)

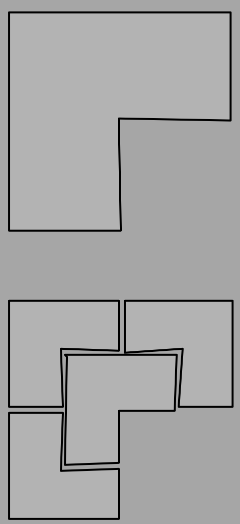
ഇനി ΔBQS, ΔBQR ഇവ സർവസമമാണെന്ന് തെളിയിക്കാമല്ലോ. (എങ്ങനെ?)

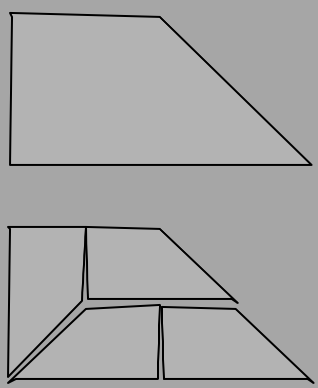
അപ്പോൾ $QS = QR$

അതായത്,

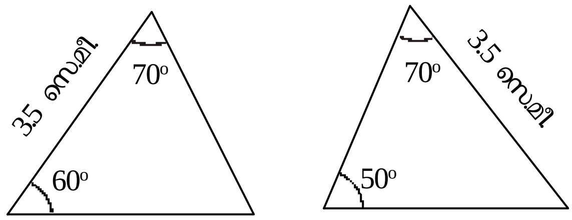
ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വശങ്ങളിലേക്കുള്ള ലംബങ്ങൾ തുല്യമാണ്.

സർവസമവിഭജനം





- ചുവടെ കൊടുത്ത ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?



- ഒരു കോൺ 70° യും ഒരു വശം 8 സെന്റിമീറ്ററും ആയ എത്ര വ്യത്യസ്ത (സർവസമമല്ലാത്ത) സമപാർശ്വ ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം?
- ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ $PQ = PR$ ആണ്. P എന്ന ബിന്ദു $\angle ABC$ യുടെ സമഭാജിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.