9 ബഹുപദങ്ങൾ

പുതിയ സമവാക്യങ്ങൾ

7 എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യ, 315 എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യയുടെ ഘടക മാണോ?

ഹരിച്ചുനോക്കണം, അല്ലേ?

$$315 \div 7 = 45$$

അപ്പോൾ 7 എന്ന സംഖ്യ 315 ന്റെ ഘടകമാണ്.

മുകളിലെ ഹരണത്തിൽ നിന്ന് $315 = 45 \times 7$ എന്നെഴുതാം.

316 ആയാലോ?

7 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം വരുമല്ലോ; അപ്പോൾ ഘടകമല്ല.

$316 = 45 \times 7 + 1$ എന്നെഴുതാം.

ഇതുപോലെ $x^2 - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിനെ $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലോ?

$$x^2 - 1 = (x - 1)\ (x + 1)$$

ആയതിനാൽ $x^2 - 1$ നെ $x - 1$ കൊണ്ട് ശിഷ്ടമില്ലാതെ ഹരിക്കാം. മറ്റൊരു രീതിയിൽ

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$$

എന്നും എഴുതാം.

അപ്പോൾ $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം $x^2 - 1$ ന്റെ ഘടകം (*factor*) ആണെന്നു പറയാം.

ഇതുപോലെ $x + 1$ ഉം $x^2 - 1$ ന്റെ ഘടകം തന്നെ.

$x - 1$ എന്ന ബഹുപദം, $x^2 + 1$ ന്റെ ഘടകമാണോ?

$x^2 + 1$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $x - 1$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലോ?

$x^2 + 1 = (x - 1)\ (x + 1) + 2$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ $x^2 + 1$ നെ $(x - 1)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 2.

അതുകൊണ്ടു തന്നെ $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം, $x^2 + 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമല്ല.

ഘടകമെന്നാൽ

എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ കണ്ട ഘടകം എന്ന ആശയം, എല്ലാ പൂർണസംഖ്യകളിലേക്കുമായി വ്യാപിപ്പിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, $-12 = 3 \times (-4)$ ആയതിനാൽ, -4 എന്ന സംഖ്യ -12 ന്റെ ഘടകമാണെന്നു പറയാം.

ഭിന്നകസംഖ്യകളായാലോ? പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു രണ്ടു ഭിന്നകസംഖ്യകളെടുത്താലും, യുക്തമായ ഒരു ഭിന്നകസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ച്, ഒന്നിനെ മറ്റൊന്നാക്കാം. ഉദാഹരണമായി, $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ എന്ന രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താൽ $\frac{2}{3} = \frac{14}{15} \times \frac{5}{7}$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. (ഒരു സംഖ്യ പൂജ്യമായാലോ?)

അതായത് ഭിന്നകസംഖ്യകൾ മൊത്തത്തിൽ എടുത്താൽ ഘടകം എന്ന ആശയത്തിന് പ്രസക്തി ഇല്ല.

ഇതുപോലെ, ബഹുപദങ്ങളുടെ കാര്യത്തിലും, ഘടകം എന്നു പറയുന്നത്, ബഹുപദങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തെ മാത്രം അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ്; എല്ലാ ബീജഗണിത വാചകങ്ങളുടേയും അടിസ്ഥാനത്തിലല്ല.

$$x^2 + 1 = (x - 1)\left(x + 1 + \frac{2}{x-1}\right)$$

എന്നെഴുതാമെന്നതുകൊണ്ട്, $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം, $x^2 + 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് എന്നു പറയില്ല.

ഇനി $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം $x^3 - 1$ ന്റെ ഘടകമാണോ എന്നെങ്ങനെ പരിശോധിക്കും?

ശിഷ്ടം വരുമോ എന്നു ഹരിച്ചുനോക്കണം. ഹരിക്കുന്നത് $x - 1$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം കൊണ്ടായതിനാൽ, ശിഷ്ടം ഒരു സംഖ്യ മാത്രമായിരിക്കും. ഹരണഫലമോ?

അപ്പോൾ, ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ ചെയ്തതുപോലെ

$$x^3 - 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c) + d$$

എന്നെഴുതി, a, b, c, d ഇവ കണ്ടുപിടിക്കാം.

മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശത്തുള്ള ഗുണനക്രിയ എങ്ങനെ ചെയ്യും? ആദ്യത്തെ ബഹുപദത്തിലെ പദങ്ങളോരോന്നുകൊണ്ടും, രണ്ടാമത്തെ ബഹുപദത്തിലെ പദങ്ങളോരോന്നിനേയും ഗുണിച്ച്, കൂട്ടിയാൽ മതിയല്ലോ. അപ്പോൾ,

$$x^3 - 1 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x + (d - c)$$

ഇതു ശരിയാകാൻ,

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b - a &= 0 \\ c - b &= 0 \\ d - c &= -1 \end{aligned}$$

എന്നെടുത്താൽ മതി. അതായത്,

$$a = 1$$

$$b = 1$$

$$c = 1$$

$$d = 0$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

എന്നു കിട്ടും.

ശിഷ്ടമൊന്നും ഇല്ലാത്തതിനാൽ, $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം, $x^3 - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകം തന്നെയാണെന്നു കാണാം.

അപ്പോഴൊരു ചോദ്യം: $2x - 2$ എന്ന ബഹുപദം $x^3 - 1$ ന്റെ ഘടകമാണോ?

$$2x - 2 = 2(x - 1)$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ. അതായത്

$$x - 1 = \frac{1}{2}(2x - 2)$$

അപ്പോൾ $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ എന്നതിനെ

ബഹുപദങ്ങളും സംഖ്യകളും

ബഹുപദങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള സാമാന്യ തത്വങ്ങൾ പറയുമ്പോൾ പലപ്പോഴും സംഖ്യകളേയും ഉൾപ്പെടുത്തേണ്ടി വരും. ഉദാഹരണമായി, രണ്ടു ബഹുപദങ്ങളുടെ തുക, ഒരു സംഖ്യയാകാം;

$$(x^2 + x + 1) + (-x^2 - x + 1) = 2$$

അതുപോലെ, ഒരു ബഹുപദത്തെ മറ്റൊരു ബഹുപദംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹരണഫലം സംഖ്യയാകാം.

$$\frac{2x + 4}{x + 2} = 2$$

“ബഹുപദമോ, സംഖ്യയോ” എന്നെപ്പോഴും പറയുന്നതിലെ അസൗകര്യം ഒഴിവാക്കാൻ, സംഖ്യകളേയും ബഹുപദങ്ങളായി എടുക്കാറുണ്ട്. ($2 = 2x^0$ എന്നെഴുതാമല്ലോ.) പൂജ്യമൊഴിച്ചുള്ള സംഖ്യകളെയെല്ലാം, പൂജ്യം കൃതി ബഹുപദങ്ങൾ എന്നാണ് പറയുന്നത്.

0 എന്ന സംഖ്യയെ കൃതിയില്ലാത്ത ബഹുപദമായാണ് എടുക്കുന്നത്. ഏതു ബഹുപദത്തേയും 0 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത്, 0 തന്നെയാണല്ലോ. അപ്പോൾ 0 എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം ഏതു സംഖ്യയായെടുത്താലും, “ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം, ഘടകങ്ങളുടെ കൃത്യങ്കങ്ങളുടെ തുകയാണ്” എന്ന സാമാന്യ തത്വം ഈ ഗുണനത്തിന് ശരിയാകില്ല.

$$x^3 - 1 = \frac{1}{2}(2x - 2)(x^2 + x + 1)$$

$$= (2x - 2)\frac{1}{2}(x^2 + x + 1)$$

$$= (2x - 2)\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ നിന്ന് എന്തുപറയാം?

$2x - 2$ എന്ന ബഹുപദവും $x^3 - 1$ ന്റെ ഘടകം തന്നെ.

$3x - 3$ ആയാലോ?

$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ നെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

$1 - x$ ന്റെ കാര്യമോ?

ഇനി ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ബഹുപദങ്ങളിലും, ആദ്യത്തേത് രണ്ടാമത്തേതിന്റെ ഘടകമാണോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കൂ:

- $x + 1, x^3 - 1$
- $x - 1, x^3 + 1$
- $x + 1, x^3 + 1$
- $x^2 - 1, x^4 - 1$
- $x - 1, x^4 - 1$
- $x + 1, x^4 - 1$
- $x - 2, x^2 - 5x + 1$
- $x + 2, x^2 + 5x + 6$
- $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, x^2 - 5x + 6$
- $1.3x - 2.6,\ x^2 - 5x + 6$

ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങൾ

$x - 2$ എന്ന ബഹുപദം, $4x^3 - 3x^2 + x - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ എന്നെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ഹരിച്ച് നോക്കി ശിഷ്ടം പൂജ്യമാണോ എന്നു നോക്കാം. ഹരണഫലം രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദവും, ശിഷ്ടം ഒരു സംഖ്യയുമായതിനാൽ

$$4x^3 - 3x^2 + x - 1 = (x - 2)(ax^2 + bx + c) + d$$

ഇനി a, b, c, d ഇവ കണ്ടുപിടിക്കണം.

ഘടകമാണോ എന്നറിയാൻ ഇവയെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കണോ?

ബഹുപദഘടകങ്ങൾ

സംഖ്യകളേയും ബഹുപദങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിൽ പരിഗണിച്ചാൽ, പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യയും ഏതു ബഹുപദത്തിന്റേയും ഘടകമാണ്.

ഉദാഹരണമായി,

$$x^2 - 2x + 3 = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right)$$

$$2x^3 + 5x + 7 = \frac{1}{5}\left(10x^3 + 25x + 35\right)$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാമല്ലോ.

മാത്രവുമല്ല, ഒരു ബഹുപദത്തിന്റെ ഏതു ഘടകത്തേയും സംഖ്യകൾകൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, അസംഖ്യം മറ്റു ഘടകങ്ങളുണ്ടാക്കാം. അതായത്, $p(x)$ എന്ന ബഹുപദം, $q(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെങ്കിൽ, പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യ a എടുത്താലും, $ap(x)$ എന്ന ബഹുപദവും $q(x)$ ന്റെ ഘടകം തന്നെ.

ശിഷ്ടം മാത്രം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ പോരേ?

മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുഭാഗത്തു നിന്ന് d മാത്രമായി കിട്ടാൻ എന്താണൊരു വഴി? ബാക്കിയുള്ളത് പൂജ്യമാക്കിയാൽ മതി. x ഏതു സംഖ്യയായെടുത്താലും ഈ സമവാക്യം ശരിയാണ് എന്നും അറിയാം.

ഉദാഹരണമായി $x = 1$ എന്നെടുത്താൽ

$$(4 \times 1^3) - (3 \times 1^2) + 1 - 1 = (1 - 2)(a \times 1^2 + b \times 1 + c) + d$$

ഇതു തിരിച്ച് വായിച്ചാൽ

$$-(a + b + c) + d = 1$$

എന്നു കാണാം.

$x = 2$ എന്നെടുത്താലോ?

$$(4 \times 2^3) - (3 \times 2^2) + 2 - 1 = (2 - 2)((a \times 2^2) + (b \times 2) + c) + d$$

അഥവാ, $0 \times (4a + 2b + c) + d = 21$

അതായത്, $d = 21$

എന്താണിതിന് അർത്ഥം? $4x^3 - 3x^2 + x - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിനെ $x - 2$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 21. അപ്പോൾ $x - 2$ എന്നത് $4x^3 - 3x^2 + x - 1$ ന്റെ ഘടകമല്ല.

ഇതുപോലെ $x - 3$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ എന്നു പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

ഹരണഫലത്തിന്റെ ആവശ്യം ഇല്ലാത്തതിനാൽ അതിനെ $q(x)$ എന്നുമാത്രം ചുരുക്കി എഴുതാം. ശിഷ്ടമായി വരുന്ന സംഖ്യയെ r എന്നുമെഴുതാം. അപ്പോൾ

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x - 3)\, q(x) + r$$

ഇനി r പൂജ്യമാണോ എന്നു മാത്രം നോക്കിയാൽ മതി. r ന്റെ വില കാണുന്നതിന് $x = 3$ എന്ന് എടുത്താൽ പോരേ? അപ്പോൾ,

$$(2 \times 3^3) - (5 \times 3^2) - (4 \times 3) + 3 = (3 - 3)\, q(3) + r$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്,

$$54 - 45 - 12 + 3 = 0 \times q(3) + r$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$r = 0$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

എന്താണിതിന്റെ അർത്ഥം?

ആശയവും അർത്ഥവും

പലതരം അളവുകളെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ് എണ്ണൽ സംഖ്യകളും ഭിന്നകസംഖ്യകളും അഭിന്നകസംഖ്യകളും ഉണ്ടാക്കിയതെന്നു കണ്ടു; മാത്രമല്ല ഈ അളവുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ഭൗതിക സാഹചര്യങ്ങൾ തന്നെയാണ് ഈ സംഖ്യകളുടെ ക്രിയകൾക്ക് ആധാരമെന്നും കണ്ടിട്ടുണ്ട്.

14 മിഠായി, 3 പേർക്കു തുല്യമായി വീതിക്കാൻ ശ്രമിക്കുമ്പോൾ, മുഴുവനായി കൊടുക്കാൻ പറ്റാതെ 2 മിഠായി ശേഷിക്കുന്നതും, 14 മീറ്റർ നീളമുള്ള ചരട്, 3 മീറ്റർ നീളമുള്ള കഷണങ്ങളാക്കാൻ ശ്രമിക്കുമ്പോൾ, നീളം തികയാതെ 2 മീറ്ററിന്റെ ഒരു കഷണം ബാക്കി വരുന്നതുമൊക്കെയാണ്, 14 നെ 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽക്കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം 2 ആണ് എന്ന ഗണിത പ്രസ്താവനയാകുന്നത്.

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കുമ്പോൾ,

−14 നെ −3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടമെന്താണ്?

എന്ന ചോദ്യത്തിനെന്താണർത്ഥം?

$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് $x - 3$.

ഈ രീതിയെ ഒരു സാമാന്യ തത്വമായി എങ്ങനെ എഴുതാമെന്ന് നോക്കാം. $x - a$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം, $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ എന്നാണ് പരിശോധിക്കേണ്ടത്. അതിന് $p(x)$ നെ $x - a$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന ഹരണഫലമായ ബഹുപദത്തെ $q(x)$ എന്നും ശിഷ്ടമായി കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ r എന്നും എഴുതാം. അപ്പോൾ,

$$p(x) = (x - a)q(x) + r$$

എന്ന സർവസമവാക്യം കിട്ടും. x ഏതു സംഖ്യയായെടുത്താലും ഇതു ശരിയാണ്. അപ്പോൾ $x = a$ എന്നെടുത്താൽ,

$$p(a) = (a - a)q(a) + r$$

$$p(a) = r$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്,

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ, $x - a$ എന്ന ബഹുപദം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം $p(a)$ ആണ്.

ഇനി $p(a) = 0$ ആയാലോ? $x - a$ കൊണ്ട് $p(x)$ നെ ഹരിച്ചപ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം പൂജ്യമാണ്; അതായത് $x - a$ എന്നത്, $p(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ്. മറിച്ച് $p(a) \neq 0$ ആയാലോ? ശിഷ്ടം പൂജ്യമല്ലാത്തതിനാൽ $x - a$ എന്നത്, $p(x)$ ന്റെ ഘടകമല്ല.

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ $x = a$ എന്നെടുക്കുമ്പോൾ $p(a) = 0$ ആണെങ്കിൽ, $x - a$ എന്ന ബഹുപദം $p(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ്; $p(a) \neq 0$ ആണെങ്കിൽ $x - a$ എന്ന ബഹുപദം, $p(x)$ ന്റെ ഘടകമല്ല.

ഇതിൽ ആദ്യം പറഞ്ഞ തത്വത്തിന്, ശിഷ്ടസിദ്ധാന്തം (*Remainder Theorem*) എന്നും, രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതിന്, ഘടകസിദ്ധാന്തം (*Factor Theorem*) എന്നുമാണ് പേര്.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം:

- $x - 2$ എന്ന ബഹുപദം, $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ?

  ഇതു പരിശോധിക്കാൻ $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ ൽ $x = 2$ എന്നെടുത്താൽകിട്ടുന്നത് പൂജ്യമാണോ എന്നു നോക്കിയാൽ മതി, എന്നാണ് ഘടകസിദ്ധാന്തം പറയുന്നത്,

  $$2^4 - 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 16 - 8 - 4 - 2 - 2 = 0$$

  അപ്പോൾ $x - 2$ എന്ന ബഹുപദം $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ്.

ശിഷ്ടമെന്നാൽ

ശിഷ്ടം എന്ന ആശയം, പൂർണസംഖ്യകൾക്കെല്ലാമായി വികസിപ്പിക്കാൻ, ആദ്യം എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽത്തന്നെ ഈ ആശയം ഗണിതപരമായി വ്യാഖ്യാനിക്കണം.

a എന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യയെ b എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ, ഹരണഫലം q, ശിഷ്ടം r എന്നു പറയുന്നത്, ചുവടെപ്പറയുന്ന നിബന്ധനകൾ അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെയാണ്:

1. $a = qb + r$ ആയിരിക്കണം
2. q, r ഇവ പൂജ്യമോ, എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ആയിരിക്കണം
3. $r < b$ ആയിരിക്കണം

ഈ നിർവചനംതന്നെ അൽപം ഭേദഗതികളോടെ പൂർണസംഖ്യകളിലേക്ക് വ്യാപിപ്പിക്കാം:

a എന്ന പൂർണസംഖ്യയെ b എന്ന പൂർണസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ, ഹരണഫലം q, ശിഷ്ടം r എന്നു പറയുന്നത്, ചുവടെപ്പറയുന്ന നിബന്ധനകൾ അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെയാണ്:

1. $a = qb + r$ ആയിരിക്കണം
2. q, r ഇവ പൂർണസംഖ്യകളായിരിക്കണം
3. $r = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $0 < r < |b|$ ആയിരിക്കണം

ഉദാഹരണമായി, -14, -3 എന്നീ സംഖ്യകളെടുത്താൽ

1. $-14 = 5 \times (-3) + 1$ എന്നെഴുതാം.
2. 5, 1 പൂർണസംഖ്യകളാണ്
3. $0 < 1 < |-3|$ ആണ്.

അതിനാൽ, -14 നെ -3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഹരണഫലം 5, ശിഷ്ടം 1 എന്നാണ് എടുക്കുന്നത്.

- $x + 3$ എന്ന ബഹുപദം, $2x^2 + 3x - 5$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ?

ഘടകസിദ്ധാന്തത്തിൽ $x - a$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഘടകങ്ങളെക്കുറിച്ചാണ് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. ഇവിടെ പരിശോധിക്കേണ്ടത് $x + 3$ ഉം.

$x + 3$ നെ ഈ രൂപത്തിലും എഴുതിക്കൂടേ?

$$x + 3 = x - (-3)$$

അപ്പോൾ, $2x^2 + 3x - 5$ ൽ $x = -3$ എന്നെടുത്ത്, 0 കിട്ടുന്നുണ്ടോ എന്നു നോക്കിയാൽ മതി.

$$\left(2 \times (-3)^2\right) + \left(3 \times (-3)\right) - 5 = 18 - 9 - 5 = 4$$

ഇവിടെ പൂജ്യം കിട്ടാത്തതിനാൽ, $x + 3$ എന്ന ബഹുപദം, $2x^2 + 3x - 5$ ന്റെ ഘടകമല്ല.

- $2x - 3$ എന്ന ബഹുപദം $2x^2 - x - 3$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ?

ഘടകസിദ്ധാന്തമുപയോഗിക്കാൻ പാകത്തിൽ $2x - 3$ നെ മാറ്റിയെഴുതുന്നതെങ്ങനെ?

$$2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

ഇനി $x - \frac{3}{2}$ എന്ന ബഹുപദം $2x^2 - x - 3$ ന്റെ ഘടകമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാം. (അതുമതിയോ?)

ഇതിന് $2x^2 - x - 3$ ൽ $x = \frac{3}{2}$ എന്നെടുത്തു നോക്കണം.

$$2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 3 = \left(2 \times \frac{9}{4}\right) - \frac{3}{2} - 3 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 3 = 0$$

അപ്പോൾ $x - \frac{3}{2}$ എന്ന ബഹുപദം $2x^2 - x - 3$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ്. അതിനാൽ $2x - 3$ എന്ന ബഹുപദവും $2x^2 - x - 3$ ന്റെ ഘടകമാണ്. (എന്തുകൊണ്ട്?)

ഇനി ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തു നോക്കൂ:

- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബഹുപദങ്ങൾ ഓരോന്നും, $3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. ഘടകമല്ലെങ്കിൽ, ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം എഴുതുക.

• $x - 1$	• $3x - 2$	• $2x - 3$
• $x + 1$	• $3x + 2$	• $2x + 3$

ബഹുപദഹരണം

സംഖ്യകളേയും ബഹുപദങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്തിക്കഴിഞ്ഞാൽ, പൂർണസംഖ്യകളിലെ ഹരണഫലം, ശിഷ്ടം എന്നിവയുടെ നിർവചനം ഏതാണ്ട് അതുപോലെതന്നെ ബഹുപദങ്ങളിലേക്കും നീട്ടാം.

$a(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിനെ $b(x)$ എന്ന ബഹുപദംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ, ഹരണഫലം $q(x)$, ശിഷ്ടം $r(x)$ എന്നു പറയുന്നത്, ചുവടെപ്പറയുന്ന നിബന്ധനകൾ അനുസരിക്കുന്ന ബഹുപദങ്ങളെയാണ്:

1. $a(x) = q(x)b(x) + r(x)$ ആയിരിക്കണം
2. $q(x)$, $r(x)$ ഇവ ബഹുപദങ്ങളായിരിക്കണം
3. ഒന്നുകിൽ $r(x) = 0$, അല്ലെങ്കിൽ $\deg r(x) < \deg b(x)$ ആയിരിക്കണം

ഇതിൽ deg കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, ബഹുപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം (*degree*) ആണ്.

- $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $ax + b$ എന്ന ബഹുപദം കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം എന്താണ്? $ax + b$ എന്ന ബഹുപദം, $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാകാനുള്ള നിബന്ധന എന്താണ്?
- $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം $x^{100} - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ? $x + 1$ ആയാലോ?
- $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം $x^{101} - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ? $x + 1$ ആയാലോ?
- n ഏതു എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം, $x^n - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.
- n ഏതു ഇരട്ടസംഖ്യയായാലും $x + 1$ എന്ന ബഹുപദം, $x^n - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.
- n ഏതു ഒറ്റസംഖ്യയായാലും $x^n - 1$ ന്റെ ഒരു ഘടകം അല്ല $x + 1$ എന്നു തെളിയിക്കുക.
- $3x^3 - 2x^2 + 5x$ എന്ന ബഹുപദത്തോട് ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ്, $x - 1$ ഘടകമായ ഒരു ബഹുപദം കിട്ടുക?
- $3x^3 - 2x^2$ എന്ന ബഹുപദത്തോട് ഏത് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം കൂട്ടിയാലാണ്, $x - 1$, $x + 1$ ഇവ രണ്ടും ഘടകങ്ങളായ ഒരു ബഹുപദം കിട്ടുക?

ഘടകക്രിയ

$x^2 + x - 12$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

$x - 2$ എന്നോ, $2x + 1$ എന്നോ തന്നിട്ടുള്ള ഒരു ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം $x^2 + x - 12$ ന്റെ ഘടകമാണോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. ഇങ്ങനെയല്ലാതെ, ഒരു ഘടകം തന്നെ നേരിട്ടു കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ഘടകസിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, $x^2 + x - 12$ ന്റെ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്, $x^2 + x - 12$ പൂജ്യമാക്കാൻ x ഏതു സംഖ്യയായി എടുക്കണമെന്നു കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി.

അതായത്,

$$x^2 + x - 12 = 0$$

എന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യം പരിഹരിച്ചാൽ മതി.

അതറിയാമല്ലോ.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = 3 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -4$$

കൃതികളുടെ തുക

n ഏതു എണ്ണൽ സംഖ്യയായാലും, $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം $x^n - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇതിലെ ഹരണഫലം എന്താണ്?

$n = 2$ ആയാൽ $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ എന്നും

$n = 3$ ആയാൽ $\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$

എന്നും കണ്ടല്ലോ. ഇതുപോലെ

$$\frac{x^4 - 1}{x - 1} = x^3 + x^2 + x + 1$$

എന്നു കാണാനും വിഷമമില്ല. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, n ഏത് എണ്ണൽ സംഖ്യയായാലും

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x^2 + x + 1$$

ഇതു തിരിച്ചു വായിച്ചാൽ

$$1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

1 അല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യ x ആയി എടുത്താലും ഈ സമവാക്യം ശരിയാണല്ലോ.

$x = 2$ എന്നെടുത്താൽ

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

(**സമാന്തരശ്രേണി** എന്ന പാഠത്തിലെ **വളരുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.) ഇതുപോലെ.

$$1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1}$$

$$= \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

അതായത്, $x = 3$ എന്നോ, $x = -4$ എന്നോ എടുത്താൽ $x^2 + x - 12$ പൂജ്യമാകും. അപ്പോൾ ഘടകസിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് $x - 3$, $x - (-4) = x + 4$ ഇവ $x^2 + x - 12$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്.

ഇവ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചു നോക്കിയാൽ

$$(x - 3)(x + 4) = x^2 + x - 12$$

എന്നു കിട്ടുന്നുമുണ്ടല്ലോ.

ഇതുപോലെ $3x^2 + 5x + 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ ആദ്യം

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

എന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യം പരിഹരിക്കാം.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{-5 \pm 1}{6} = -\frac{2}{3} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -1$$

ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ, ഘടകസിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് $x + \frac{2}{3}$, $x + 1$ എന്നീ ബഹുപദങ്ങൾ $3x^2 + 5x + 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകങ്ങളാണെന്നും കാണാം.

ഇവ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചാലോ?

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)(x + 1) = x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$$

ഇത് തുടങ്ങിയ ബഹുപദം $3x^2 + 5x + 2$ അല്ലല്ലോ. പക്ഷേ

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(3x^2 + 5x + 2)$$

എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)(x + 1) = \frac{1}{3}(3x^2 + 5x + 2)$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$3x^2 + 5x + 2 = 3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x + 1) = (3x + 2)(x + 1)$$

എന്നു കിട്ടും.

ഇതുപോലെ $6x^2 - 7x - 3$ എന്ന ബഹുപദത്തെ ഘടകങ്ങളാക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

മറ്റൊരു മാർഗം

$x^2 + ax + b$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ചില രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെ എളുപ്പത്തിൽ ഘടകങ്ങളാക്കാം. ഉദാഹരണമായി $x^2 + 5x + 6$ എന്ന ബഹുപദം നോക്കുക. ഇതിന്റെ ഘടകങ്ങൾ $x + a$, $x + b$ എന്നെടുത്താൽ

$$\begin{aligned} x^2+5x+6 &= (x+a)(x+b) \\ &= x^2+(a+b)x+ab \end{aligned}$$

ഇതു ശരിയാകാൻ,

$$a + b = 5$$

$$ab = 6$$

എന്നെടുത്താൽ മതിയല്ലോ. അതായത്, തുക 5 ഉം, ഗുണനഫലം 6 ഉം ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ വേണം. അൽപം ആലോചിച്ചാൽ, 3, 2 എന്ന ഉത്തരം കിട്ടും. അപ്പോൾ

$$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$$

ഈ രീതിയിൽ $x^2 + 10x + 24$ നെ ഘടകങ്ങളാക്കാമോ എന്നു നോക്കൂ.

$x^2 - 10x + 24$ ആയാലോ?

ആദ്യം

$$6x^2 - 7x - 3 = 0$$

എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കണം (അതെന്തിന്?)

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{12} = \frac{7 \pm 11}{12} = \frac{3}{2} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -\frac{1}{3}$$

ഇനി $x - \frac{3}{2}$, $x + \frac{1}{3}$ ഇവയുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കണം.

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) = x^2 + \left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)x - \left(\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\right)$$

$$= x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{6}(6x^2 - 7x - 3)$$

ഇതു തിരിച്ചെഴുതിയാൽ കാര്യം കഴിഞ്ഞല്ലോ.

$$6x^2 - 7x - 3 = 6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

$$= 2\left(x-\frac{3}{2}\right) \times 3\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

$$= (2x - 3)(3x + 1)$$

ഒരു ഉദാഹരണം കൂടി നോക്കാം:

$x^2 - 2x - 1$ നെ ഘടകങ്ങളാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം,

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

എന്നാണല്ലോ കിട്ടുന്നത്. അതായത് $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$ എന്നീ സംഖ്യകളാണ് ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ.

ഇവയോരോന്നും x ൽ നിന്നു കുറച്ചു കിട്ടുന്ന ബഹുപദങ്ങൾ ഗുണിച്ചുനോക്കിയാലോ?

$$\left(x - (1 + \sqrt{2})\right)\left(x - (1 - \sqrt{2})\right)$$

$$= x^2 - \left((1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})\right)x + (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$$

$$= x^2 - 2x + (1^2 - (\sqrt{2})^2)$$

$$= x^2 - 2x - 1$$

ഘടകപരിഹാരം

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിനെ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ $p(x) = 0$ എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിച്ചാൽ മതി എന്നു കണ്ടല്ലോ. മറിച്ച്, $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ കഴിഞ്ഞാൽ, $p(x) = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിനു പരിഹാരവുമാകും.

ഉദാഹരണമായി

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

എന്ന സമവാക്യം നോക്കുക

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

എന്നു കിട്ടിക്കഴിഞ്ഞാൽ, ഈ സമവാക്യത്തെ

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

എന്നെഴുതാം. ഇതു ശരിയാകാൻ $(x + 2)$, $(x + 3)$ എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം പൂജ്യമാകുന്നതരത്തിൽ x എന്ന സംഖ്യകണ്ടുപിടിക്കണം.

ഗുണനഫലം പൂജ്യമാകാൻ, ഏതെങ്കിലും ഒരു ഘടകം പൂജ്യമായാൽ മതിയല്ലോ. അപ്പോൾ $x + 2$, $x + 3$ ഇവയിലേതെങ്കിലും ഒന്ന് പൂജ്യമാകുന്നവിധം x കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി. അതായത്,

$x + 2 = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $x + 3 = 0$

$x = -2$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -3$

അതായത്,

$$x^2 - 2x - 1 = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$$

എല്ലാ ബഹുപദങ്ങളേയും ഇങ്ങനെ ഘടകങ്ങളാക്കി പിരിച്ചെഴുതാൻ കഴിയുമോ?

$x^2 + 1$ എന്ന ബഹുപദം നോക്കുക. ഇതിന് ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ $x^2 + 1 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിനു പരിഹാരം വേണം; അതില്ലാത്തതിനാൽ, (എന്തുകൊണ്ട്?) ഈ ബഹുപദത്തിന് ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങൾ ഇല്ല.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബഹുപദങ്ങളോരോന്നിനേയും, ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക
  - $2x^2 + 5x + 3$
  - $x^2 + 2x - 1$
  - $x^2 + 3x + 2$
  - $x^2 - 2$
  - $4x^2 + 20x + 25$
  - $x^2 - x - 1$
- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബഹുപദങ്ങളോരോന്നിനും, ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങൾ ഇല്ല എന്നു തെളിയിക്കുക
  - $x^2 + x + 1$
  - $x^4 + 1$
  - $x^2 - x + 1$
  - $x^4 + x^2 + 1$

പ്രോജക്ട്

- $x - 1,\ x + 1, x^2 - 1$ ഇവയിലേതെങ്കിലും ഘടകങ്ങളായി വരുന്ന ബഹുപദങ്ങളിലെ ഗുണകങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ വെവ്വേറെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദം

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ന്റെ ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ? ഘടകസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കണമെങ്കിൽ

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കണം. അതിനു പൊതുവായ മാർഗമൊന്നും അറിയില്ലല്ലോ.

ചില സാധ്യതകൾ പരീക്ഷിച്ചുനോക്കാം. ഈ ബഹുപദത്തിൽ $x = 1$ എന്നെടുത്താൽ $1 - 6 + 11 - 6 = 0$ എന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ $x - 1$ ഇതിന്റെ ഘടകമാണ്. മറ്റു ഘടകങ്ങൾ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ നെ $x - 1$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ $x^2 - 5x + 6$ കിട്ടും. (ചെയ്തുനോക്കൂ) ഇനി $x^2 - 5x + 6 = 0$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകാൻ $x = 2$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 3$ എന്നെടുക്കണം എന്നും കണ്ടുപിടിക്കാം. അപ്പോൾ എന്തുകിട്ടി?

$$\begin{aligned} & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ &= (x - 1)(x^2 - 5x + 6) \\ &= (x - 1)(x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

ഇതുപോലെ $x^3 - 4x^2 + x + 6$ നെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാമോ?