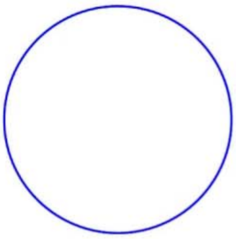
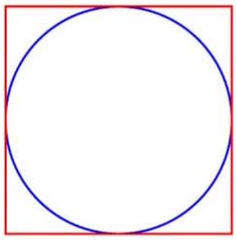
8 തൊടുവരകൾ

വൃത്തത്തിനു ചുറ്റും

ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക; ആരം എന്തുമാവാം:

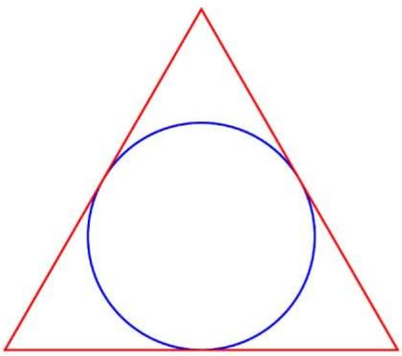


ഇനി അതിനു ചുറ്റുമായി ഇങ്ങനെ ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കണം:



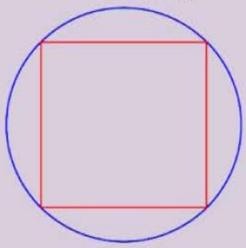
എങ്ങനെയാണ് വശങ്ങൾ വരയ്ക്കുക?

ഇനി ഇതേപോലെ ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, അതിനു ചുറ്റുമായി ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ഒരു സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കണം.

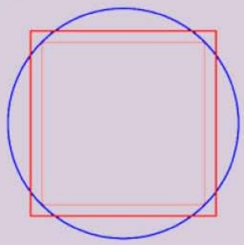


വലുതാകുന്ന സമചതുരം

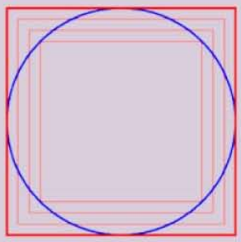
ഒരു വൃത്തത്തിനകത്ത്, ചുവടെകാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ വിഷമമില്ലല്ലോ.



വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം അൽപം കൂട്ടി ഇങ്ങനെയും വരയ്ക്കാം.



ഇങ്ങനെ ക്രമേണ വശങ്ങൾ വലുതാക്കിക്കൊണ്ടിരുന്നാൽ, ഇത്തരമൊരു സമചതുരവും കിട്ടും:



ഇതുപോലെ വൃത്തത്തിനകത്തുള്ള ഏത് സമചതുരത്തെയും വൃത്തത്തിന് പുറത്താക്കുവാൻ കഴിയുമോ?

അത്ര എളുപ്പമല്ല, അല്ലേ?

ചതുരച്ചിത്രത്തിലും, ത്രികോണച്ചിത്രത്തിലും, ഓരോ വശവും വൃത്തത്തിലെ എത്ര ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നു പോകുന്നുണ്ട്?

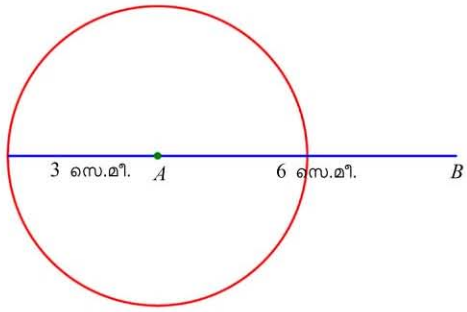
വരകളും വൃത്തങ്ങളുമായുള്ള ഇത്തരം ബന്ധങ്ങൾ വിശദമായിത്തന്നെ പരിശോധിക്കാം.

വരകൾ, വൃത്തങ്ങൾ

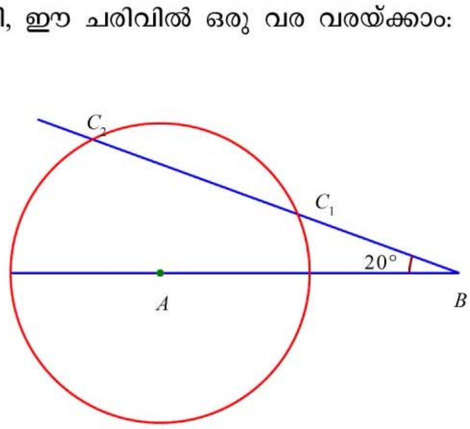
ഒരു വര, ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരേ ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി മാത്രം കടന്നു പോകുന്ന സന്ദർഭങ്ങൾ ഇതിനുമുമ്പു കണ്ടിട്ടുണ്ടോ?

ഈ ഉദാഹരണം നോക്കുക. ABC എന്നൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കണം; AB യുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്റർ, AC യുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ, B യിലെ കോൺ $20°$. (ഇത്തരമൊരു കണക്ക് എട്ടാം ക്ലാസിൽ ചെയ്തത് ഓർമയില്ലേ?)

ആദ്യം 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ AB വരയ്ക്കാം. A യിൽ നിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയാണ് C എന്നറിയാമല്ലോ; അപ്പോൾ A കേന്ദ്രമായി, 3 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിലെവിടെയോ ആണ് C.

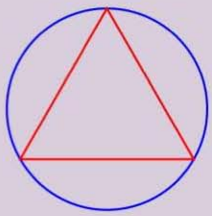


ഇനിയോ? B യിലെ കോൺ $20°$ ആണല്ലോ. അതിനാൽ B യിൽക്കൂടി, ഈ ചരിവിൽ ഒരു വര വരയ്ക്കാം:



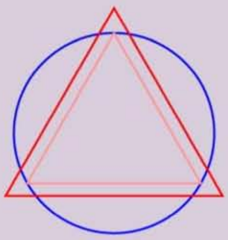
വളരുന്ന ത്രികോണം

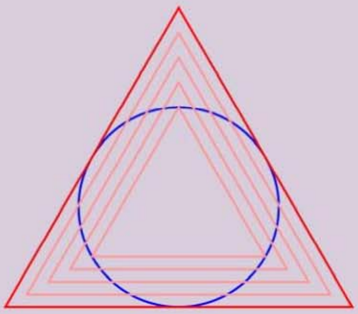
വൃത്തത്തിനകത്ത്, ഇതുപോലെ ഒരു സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കാമോ?



(**വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ചാപവും കോണും ഞാണും** എന്ന ഭാഗം ഓർക്കുക)

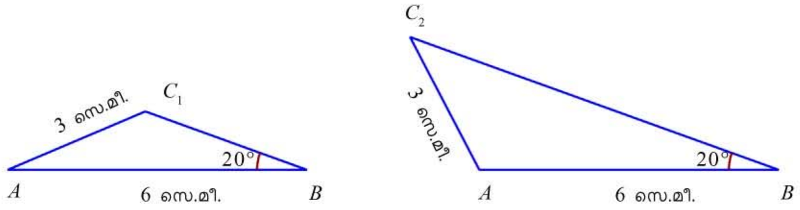
സമചതുരത്തിന്റെ കാര്യത്തിലെന്ന പോലെ ഇതിനേയും വലുതാക്കിയാലോ?



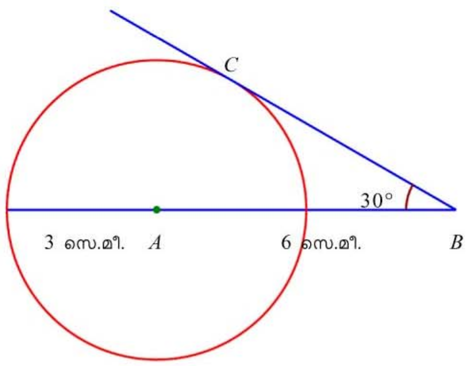


പുറത്തെ ത്രികോണം കിട്ടാൻ വശങ്ങൾ എത്ര വലുതാക്കണം?

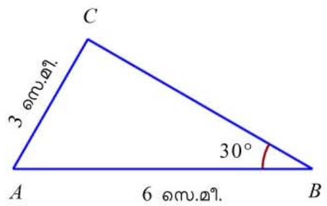
അപ്പോൾ ഇപ്പറഞ്ഞ അളവുകളിൽ രണ്ടു ത്രികോണം കിട്ടും:



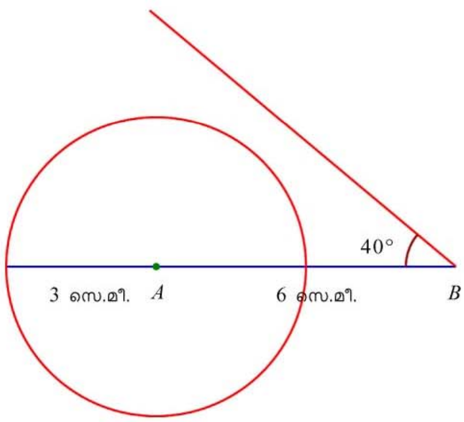
ഇനി B യിലെ കോൺ 30° യാണു വേണ്ടതെങ്കിലോ?



ഒരു ത്രികോണം മാത്രമാണു കിട്ടുന്നത്.



കോൺ 40° ആക്കിയാലോ?



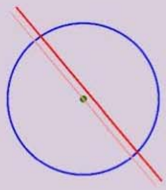
ഇവിടെ 20° വര വൃത്തത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിച്ചു; 40° വരയ്ക്ക് വൃത്തവുമായി ഒരു ബന്ധവുമില്ല.

30° വരയോ? വൃത്തത്തെ ഒന്നു തൊടുക മാത്രം; ഇത്തരമൊരു വരയെ, വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവര എന്നാണ് പറയുന്നത്. (സ്പർശ രേഖ എന്നും പറയാറുണ്ട്. ഇംഗ്ലീഷിൽ *tangent* എന്നും.)

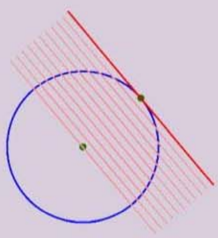
നീങ്ങുന്ന വരകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

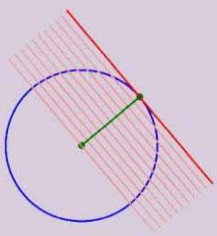
ഒരു വൃത്തവും, കേന്ദ്രത്തിലൂടെ ഒരു വരയും. വര അൽപം മുകളിലേക്കു നീക്കിയാലോ?



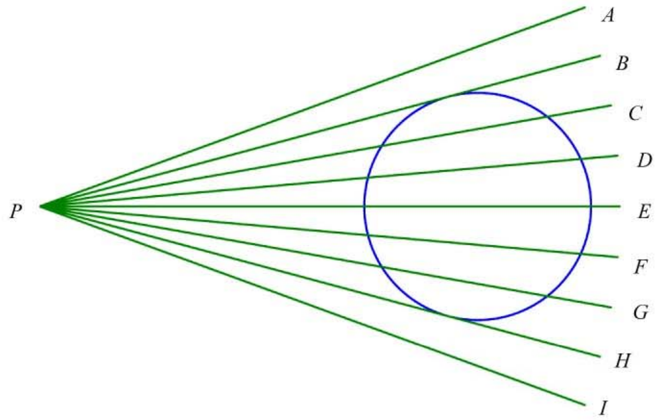
വര വീണ്ടും വീണ്ടും നീക്കിക്കൊണ്ടിരുന്നാൽ വൃത്തത്തിലെ ഒരേയൊരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടിപ്പോകുന്ന വരയിലെത്തില്ലേ?



കേന്ദ്രവും, അവസാനം കിട്ടിയ ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ഈ സമാന്തരവരകൾക്കെല്ലാം ലംബമാണല്ലോ.



ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

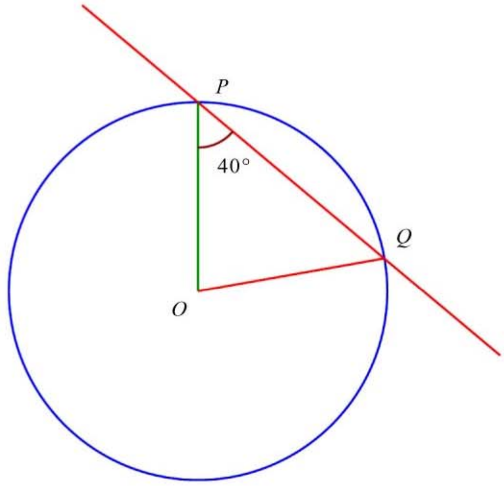


ചിത്രത്തിൽ രണ്ടെണ്ണം മാത്രമാണ് തൊടുവരകൾ. ഏതൊക്കെ?

ഇനി നേരത്തെ വരച്ച ത്രികോണങ്ങൾ ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടിയപ്പോൾ, ഒന്നിൽ മുകളിലെ കോൺ മട്ടത്തേക്കാൾ കൂടുതൽ, രണ്ടാമത്തേതിൽ മട്ടത്തേക്കാൾ കുറവ്. ഈ കോണുകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ? മുകളിലത്തെ മൂലകൾ കിട്ടിയതെങ്ങനെയാണെന്ന് ഒന്നു കൂടി നോക്കു.

ഒരു ത്രികോണം മാത്രം കിട്ടിയപ്പോഴോ?

മറ്റൊരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:



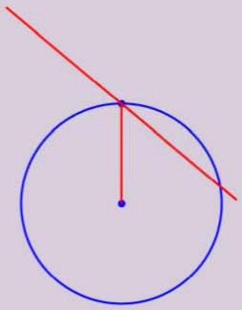
ഇതിൽ $\angle OQP$ എത്രയാണ്?

ഇതേ ചിത്രത്തിൽ Q ന്റെ സ്ഥാനത്തിനു മാത്രം മാറ്റം വരുത്തി, P യിലെ കോൺ $50°, 60°$ എന്നിങ്ങനെ വലുതാക്കി ചിത്രങ്ങൾ വരച്ചു നോക്കൂ. എന്താണ് കാണുന്നത്?

P യിലെ കോൺ വലുതാകുന്തോറും, Q എന്ന ബിന്ദു, P എന്ന ബിന്ദുവിനോടടുക്കുന്നു; ΔPOQ നേർത്തു വരുന്നു.

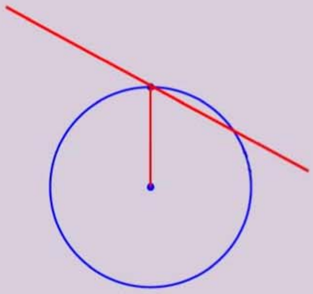
തിരിയുന്ന വരകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

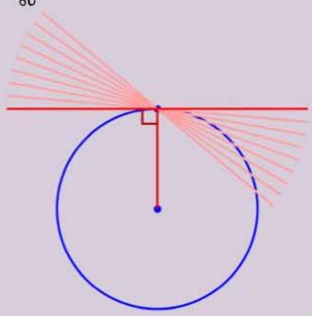


വൃത്തത്തിലെ ഒരു ആരവും, അതിന്റെ അറ്റത്തുനിന്ന്, അൽപം ചരിഞ്ഞ ഒരു വരയും.

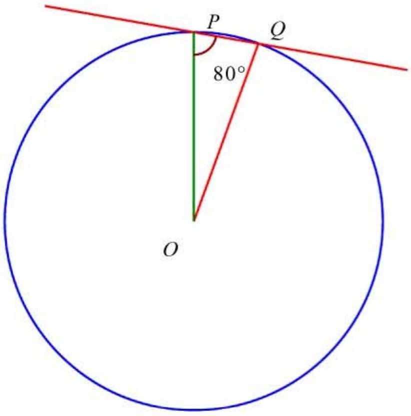
മുകളിലത്തെ ബിന്ദുവിൽക്കൂടി, ഈ വര അൽപം മേലോട്ടു തിരിച്ചാലോ?



ഇങ്ങനെ തിരിച്ചുകൊണ്ടിരുന്നാൽ, ആരത്തിനു ലംബമായ ഒരു വരയിലെത്തില്ലേ?



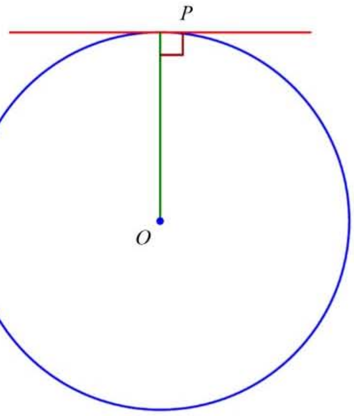
ഇതു വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകും?



P യിലെ കോൺ $90°$ ആയാലോ?

ഈ വര മറ്റൊരു ബിന്ദു Q വിൽ വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുമോ? അങ്ങനെയായാൽ, Q വിലെ കോണും $90°$ ആകണ്ടേ? ഒരു ത്രികോണത്തിലെങ്ങനെയാണ് രണ്ടു മട്ടകോണുകൾ?

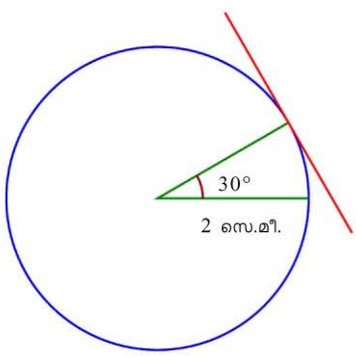
അപ്പോൾ ഈ വരയും വൃത്തവുമായി മറ്റൊരു ബിന്ദുവുമില്ല; അതായത്, ഈ വര P യിലെ തൊടുവരയാണ്:



ഇതിൽനിന്നു കിട്ടിയ സാമാന്യതത്വം എന്താണ്?

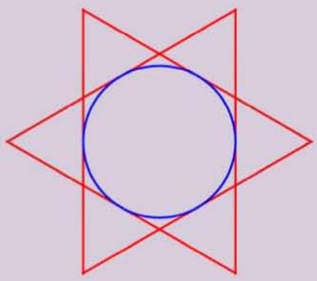
> *വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിലൂടെ ആരത്തിനു ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, ആ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയാണ്.*

ഇനി ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ, പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ വരച്ചു നോക്കൂ:

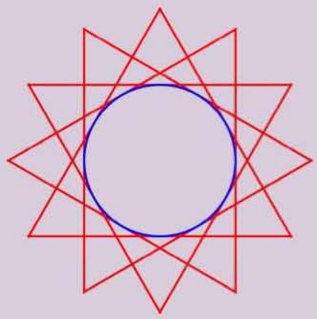


വരകൾകൊണ്ടൊരു വൃത്തം

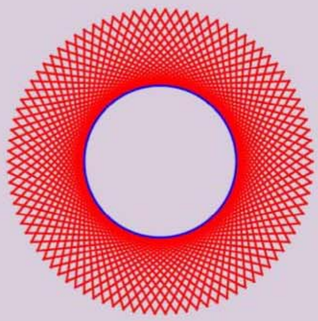
ചിത്രത്തിൽ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആറു ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുവരകൾ വരച്ച്, ഒരു നക്ഷത്രമുണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്നു.

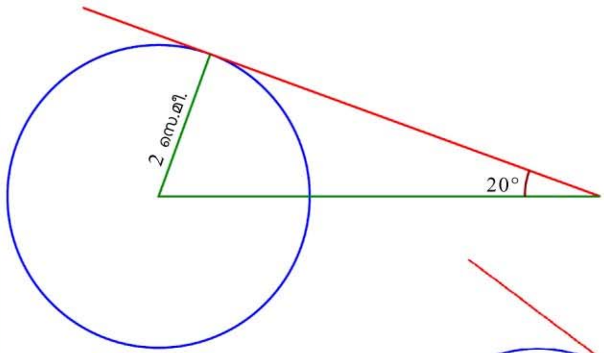


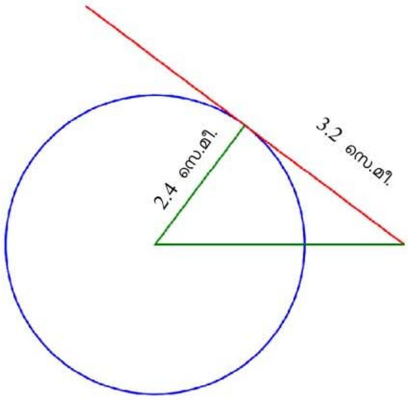
തൊടുവരകളുടെ എണ്ണം 12 ആക്കിയാലോ?



കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച്, 90 തൊടുവരകൾ വരച്ച ചിത്രമാണ് ഇത്:





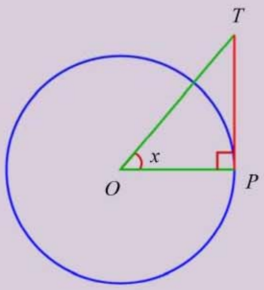


പേരുവിവരം

തൊടുക എന്നർത്ഥമുള്ള *tangere* എന്ന ലാറ്റിൻ വാക്കിൽനിന്നാണ്, തൊടുവരയ്ക്ക് ഇംഗ്ലീഷിൽ *tangent* എന്ന പേരു വന്നത്.

ത്രികോണമിതിയിലെ tan എന്ന അളവിന്റെയും മുഴുവൻ പേര് *tangent* എന്നു തന്നെയാണല്ലോ. എന്താണ് ഇതിന് തൊടുവരയുമായുള്ള ബന്ധം?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 1 എന്നെടുത്താൽ, PT എന്ന തൊടുവരയുടെ നീളം $\tan x$ തന്നെയല്ലേ?

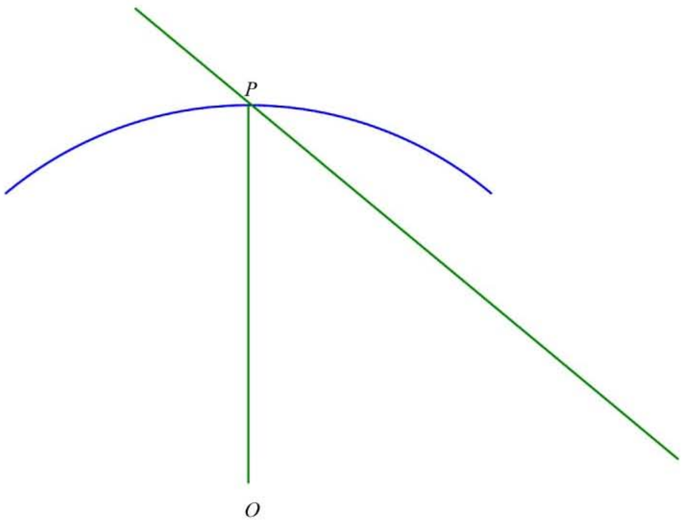
ഒരു വൃത്തത്തിൽ വ്യാസം AB വരയ്ക്കുക. A യിലൂടെയും B യിലൂടെയും കടന്നുപോകുന്ന തൊടുവരകൾ വരച്ച് ഇവ കൂട്ടിമുട്ടുന്നില്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

തത്വങ്ങളും പ്രയോഗങ്ങളും

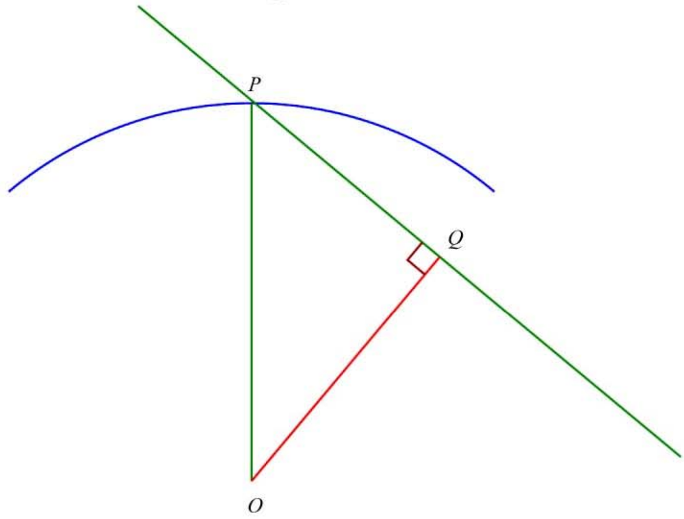
ആരത്തിനു ലംബം വരച്ചാൽ തൊടുവരയാകുമെന്നു കണ്ടു. എല്ലാ തൊടുവരകളും ഇങ്ങനെതന്നെയാണോ? മറ്റൊരു വിധത്തിൽ ചോദിച്ചാൽ, ഏതു തൊടുവരയും, അത് വൃത്തത്തിൽ തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ആരത്തിന് ലംബമാണോ?

ഇതിനുത്തരം പറയാൻ, ആദ്യം ഒരു വൃത്തവും അതിന്റെ ഒരു ആരവും വരച്ച്, ആരത്തിന്റെ അറ്റത്തുകൂടി ലംബമല്ലാത്ത ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഇത്, വൃത്തത്തിനെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലും കൂടി ഖണ്ഡിക്കുമെന്ന് കാണാമല്ലോ. എവിടെയാണ് ഈ രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദു? വൃത്തം മുഴുവൻ കാണാതെ പറയാൻ കഴിയുമോ?

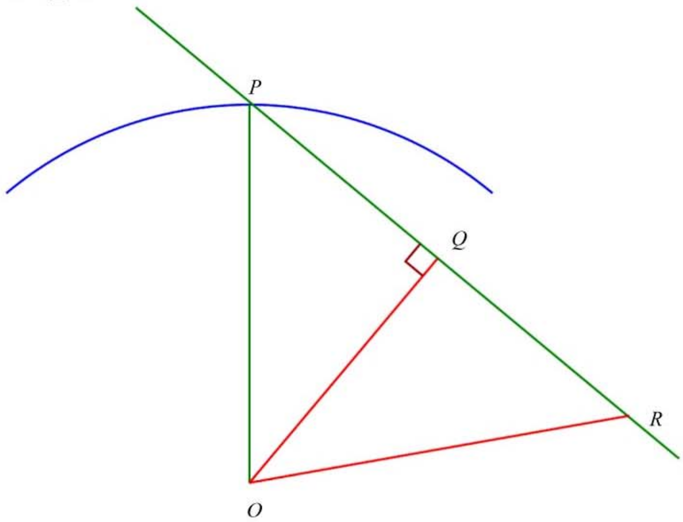
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



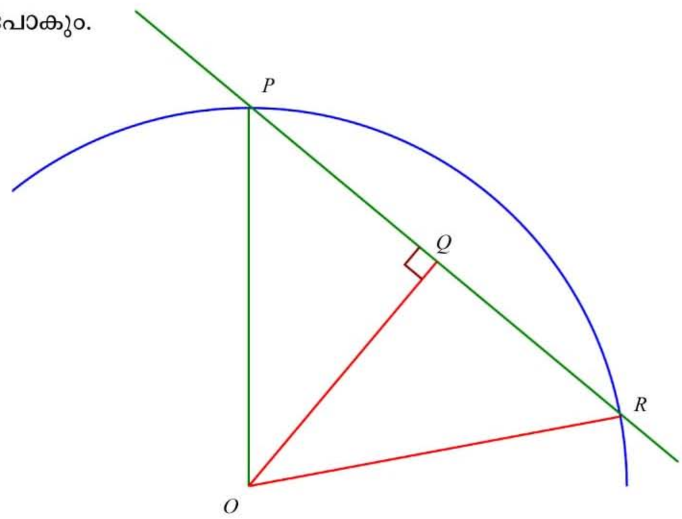
P യിലൂടെയുള്ള വര, ആരം OP ക്കു ലംബമല്ല. അപ്പോൾ, O യിൽ നിന്ന് ലംബം വരയ്ക്കാമല്ലോ.



ഇനി Q ൽ നിന്ന് P യിലേക്കുള്ള അതേ അകലം മുന്നോട്ട് R അടയാളപ്പെടുത്തുക.

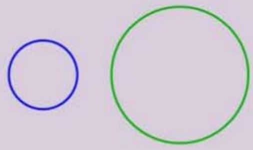


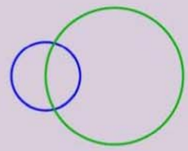
ഇപ്പോൾ ΔOPQ, ΔORQ ഇവ സർവസമമാണ് (കാരണം?) അതിനാൽ, $OP = OR$ ആണ്. അതായത്, വൃത്തം R ൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകും.



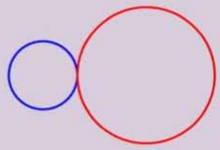
തൊടുവട്ടങ്ങൾ

വൃത്തവും വരയുമെന്നപോലെ, രണ്ടു വൃത്തങ്ങളും ഖണ്ഡിക്കാതിരിക്കാം. അല്ലെങ്കിൽ, രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കാം:

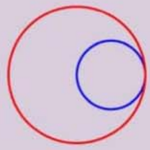




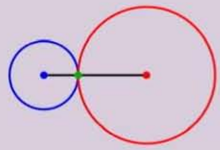
രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ തൊടുകയുമാവാം:

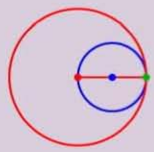


ഇങ്ങനെ പുറത്തുനിന്നു തൊടുന്നതിനുപകരം, അകത്തുനിന്നും തൊടാം:



എങ്ങനെ തൊട്ടാലും, തൊടുന്ന ബിന്ദുവും, വൃത്തകേന്ദ്രങ്ങളും ഒരേ വരയിലായിരിക്കുമെന്ന് യൂക്ലീഡ് തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്.





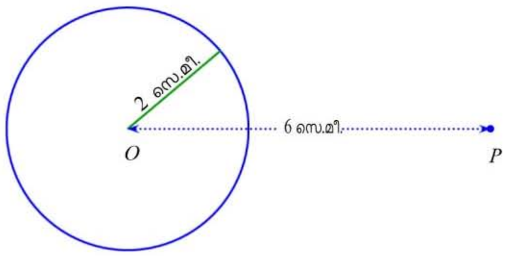
ഇവിടെ കണ്ടതെന്താണ്? P യിൽക്കൂടിയുള്ള ഒരു വര, OP യ്ക്കു ലംബമല്ലെങ്കിൽ, അത് വൃത്തത്തിനെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലും കൂടി ഖണ്ഡിക്കും; മറിച്ച്, P യിൽക്കൂടിയുള്ള തൊടുവര മറ്റൊരു ബിന്ദുവിൽ വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുകയുമില്ല. അപ്പോൾ P യിൽക്കൂടിയുള്ള തൊടുവര OP യ്ക്കു ലംബമാകാതെ തരമില്ലല്ലോ.

ഇതൊരു സാമാന്യ തത്വമായി പറയാം.

വൃത്തത്തിന്റെ ഏതു തൊടുവരയും, തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ആരത്തിന് ലംബമാണ്.

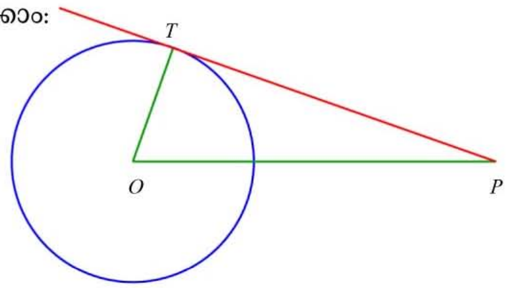
ഈ തത്വത്തിന്റെ ഒരു പ്രയോഗം നോക്കാം.

2 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 6 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ ഒരു കുത്തിടുക.



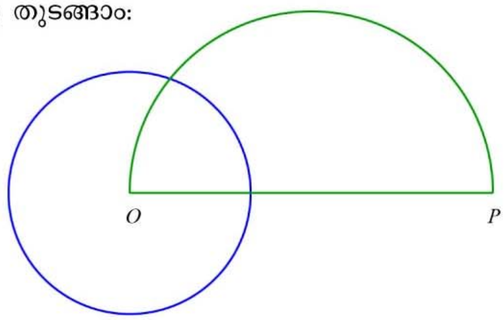
ഇതിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു തൊടുവര വരയ്ക്കാമോ?

വരയ്ക്കേണ്ടതെങ്ങനെയെന്ന് അറിയാൻ, ഒരു ഏകദേശ ചിത്രം വരച്ചു നോക്കാം:



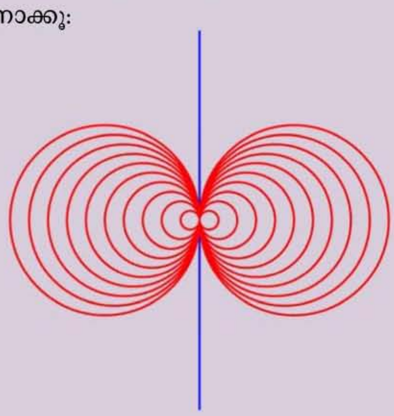
വേണ്ടത് തൊടുവരയായതിനാൽ, മുകളിലത്തെ കോൺ മട്ടമായിരിക്കണം. അപ്പോൾ വേണ്ടത്, ചുവട്ടിലെ വര കർണമായ മട്ടത്രികോണമാണ്. അതിന് ഒരു അർധവൃത്തം വരച്ചാൽപ്പോരേ? (**വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ പഠിച്ചതൊന്നും മറന്നിട്ടില്ലല്ലോ?)

ഇനി വരച്ചു തുടങ്ങാം:

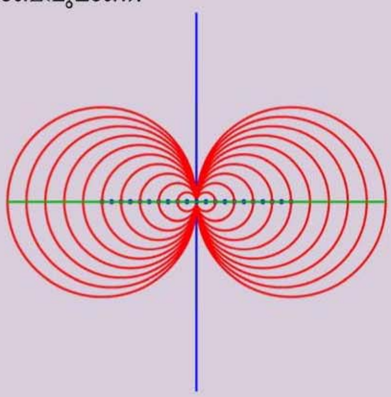


വട്ടക്കൂട്ടം

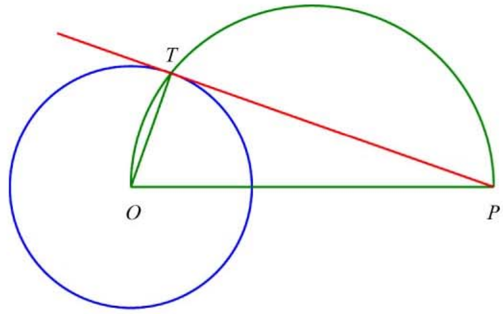
ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ തൊടുന്ന ഒരേ ഒരു വരയേ ഉള്ളൂ. എന്നാൽ ഒരു വരയെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ തൊടുന്ന അനേകം വൃത്തങ്ങളുണ്ട്. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



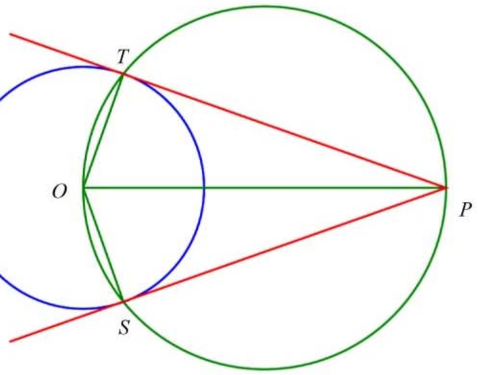
ഈ വൃത്തങ്ങളെല്ലാം പരസ്പരം തൊടുന്നുമുണ്ട്. അപ്പോൾ അവയുടെ കേന്ദ്രങ്ങളെല്ലാം ഒരേ വരയിലാണ്. പൊതുവായ തൊടുവര, ഈ വരയ്ക്കു ലംബവുമാണ്.



ചിത്രത്തിലെ അർധവൃത്തത്തിൽ ഏതു ബിന്ദുവുമായി O, P ഇവ യോജിപ്പിച്ചാലും, OP കർണമായ മട്ടത്രികോണം കിട്ടും. നമുക്കാവശ്യമായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം മൂല, കൊച്ചു വൃത്തത്തിലും ആകണമല്ലോ. അപ്പോൾ, ഈ വൃത്തവും, പുതുതായി വരച്ച അർധവൃത്തവും ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു എടുക്കണം.



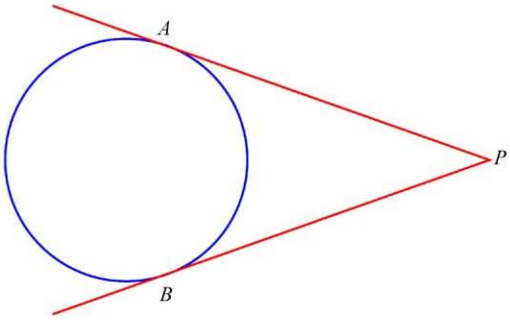
PT യോജിപ്പിച്ചു വരച്ചാൽ പറഞ്ഞ ജോലി കഴിഞ്ഞു. പക്ഷേ ഒരു കാര്യം കൂടി ആലോചിക്കാം അർധവൃത്തം മേലോട്ടു വരച്ചതു പോലെ താഴോട്ട് വരച്ചാലും തൊടുവര കിട്ടില്ലേ?



അപ്പോൾ, P യിൽക്കൂടി രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കാം.

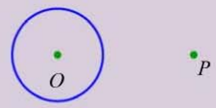
ചിത്രത്തിൽ PT യും PS ഉം തുല്യമാണെന്ന് കാണാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ? ഇവയെ P യിൽ നിന്നുള്ള തൊടുവരകളുടെ നീളം എന്നു പറയാം. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളുടെ നീളം തുല്യമാണ്. ഇതെങ്ങനെ തെളിയിക്കും?

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, P എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നു വൃത്തത്തിലേക്കു വരച്ചിരിക്കുന്ന തൊടുവരകളുടെ നീളം PA, PB ആണ്.

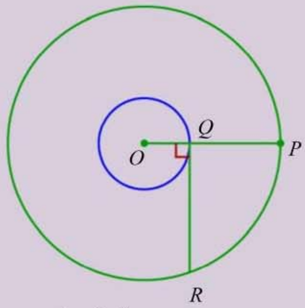


മറ്റൊരുരീതി

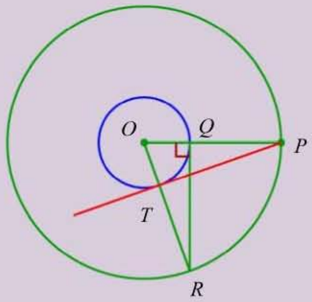
വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ബിന്ദുവിൽനിന്ന് തൊടുവര വരയ്ക്കാൻ യൂക്ലീഡ് ഉപയോഗിക്കുന്നത് മറ്റൊരു മാർഗമാണ്.



OP യോജിപ്പിച്ച്, ആ നീളം ആരമായി മറ്റൊരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. OP ആദ്യത്തെ വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി അതിനു ലംബം വരച്ച്, രണ്ടാമത്തെ വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുക.



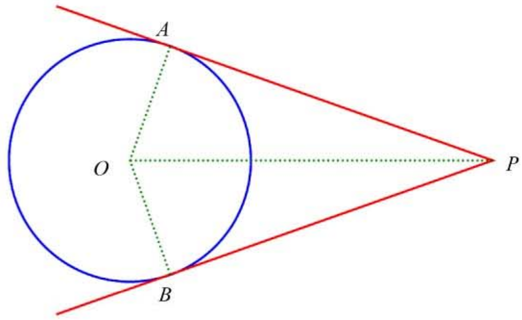
OR യോജിപ്പിച്ച്, ഇതു ആദ്യത്തെ വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവുമായി P യോജിപ്പിച്ചാൽ, തൊടുവരയായി.



ഇതു തെളിയിക്കാമോ?

P യിൽനിന്നുള്ള രണ്ടാമത്തെ തൊടുവര ഈ രീതിയിൽ വരയ്ക്കാമോ?

$PA = PB$ എന്നു തെളിയിക്കണം. അതിന് P, A, B ഇവ വൃത്തകേന്ദ്രം O യുമായി യോജിപ്പിക്കുക.



AP എന്ന വര, വൃത്തത്തിലെ A എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയാണ്; OA എന്ന വര A യിൽക്കൂടിയുള്ള ആരവും.

അതിനാൽ $\angle OAP = 90°$.

അതായത്, OAP മട്ടത്രികോണമാണ്. അപ്പോൾ പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ച്,

$$PA = \sqrt{OP^2 - OA^2}$$

ഇതേപോലെ, BP എന്ന വര, വൃത്തത്തിലെ B എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയാണ്; OB എന്ന വര B യിൽക്കൂടിയുള്ള ആരവുമായതിനാൽ, $\angle OBP = 90°$. അപ്പോൾ OBP എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$PB = \sqrt{OP^2 - OB^2}$$

ഇനി, OA, OB ഇവ വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങളായതിനാൽ

$$OA = OB$$

എന്നും കാണാം. മുകളിലെഴുതിയ മൂന്നു സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്ന്

$$PA = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{OP^2 - OB^2} = PB$$

എന്നു കിട്ടും.

ഇക്കാര്യങ്ങൾ ഒരു സമാന്യതത്വമായി എഴുതാം:

വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഏതു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കാം; ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ഈ തൊടുവരകളുടെ നീളം തുല്യമാണ്.

ഇനി ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കണക്കുകൾ ചെയ്തു നോക്കൂ:

- A, B ഇവ കേന്ദ്രമായ വൃത്തങ്ങൾ P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. AP എന്ന വര B കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ P യിലെ തൊടുവരയാണെങ്കിൽ, BP എന്ന വര A കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ P യിലെ തൊടുവരയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

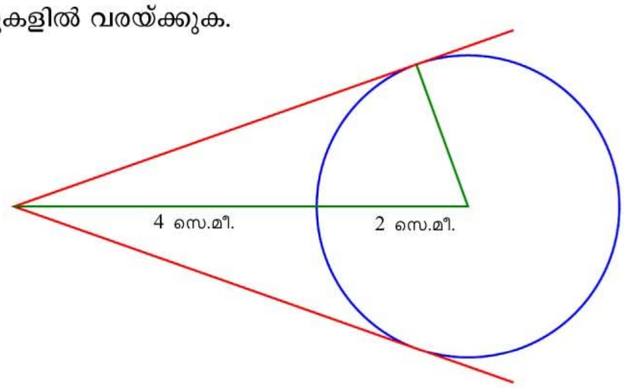
തെളിവിന്റെ രീതിശാസ്ത്രം

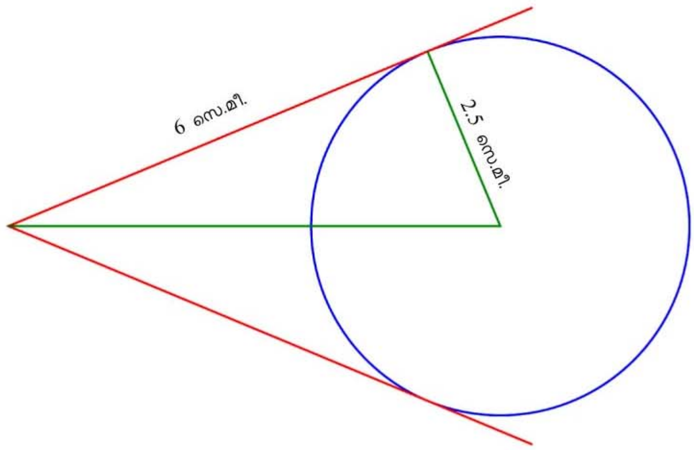
ജ്യാമിതിയുടെ ആചാര്യനായ യൂക്ലീഡിനെക്കുറിച്ചും, അദ്ദേഹമെഴുതിയ എലിമെന്റ്സ് എന്ന പുസ്തകത്തെക്കുറിച്ചും അറിയാമല്ലോ. (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **വരക്കണക്ക്** എന്ന പാഠത്തിലെ **വൃത്തവും ത്രികോണവും** എന്ന ഭാഗം).

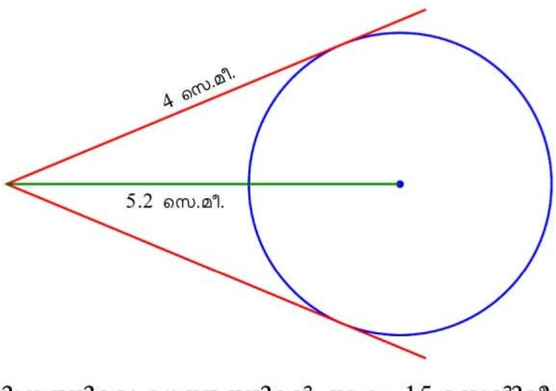
ചില അടിസ്ഥാനപ്രമാണങ്ങളിൽനിന്നു തുടങ്ങി, ലളിതമായ ചില സിദ്ധാന്തങ്ങൾ തെളിയിക്കുക; തുടർന്ന് ഇവ കൂടി ഉപയോഗിച്ചുകൊണ്ട് കൂടുതൽ സങ്കീർണ്ണങ്ങളായ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ തെളിയിക്കുക. ഇതാണ് എലിമെന്റ്സ് രീതി. (ഈ പുസ്തകം കമ്പ്യൂട്ടറിൽ വായിക്കാൻ http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html നോക്കുക). ജ്യാമിതിയിൽ മാത്രമല്ല, ഗണിതത്തിലെ എല്ലാ ശാഖകളിലും ഇന്ന് ഈ രീതിയാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. മറ്റുശാസ്ത്രങ്ങളിലും ഇതേ രീതി തന്നെ ഏറിയും കുറഞ്ഞും കാണാം.

സിദ്ധാന്തങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെയായാലും തെളിവുകൾ അവതരിപ്പിക്കുന്നത്, നിഗമനങ്ങളോരോന്നും കാര്യകാരണബന്ധത്തോടെ ചുരുക്കി എഴുതുന്ന യൂക്ലീഡിന്റെ രീതിയിലാകണം എന്നതാണ് ഇന്നത്തെ ഗണിത സമ്പ്രദായം.

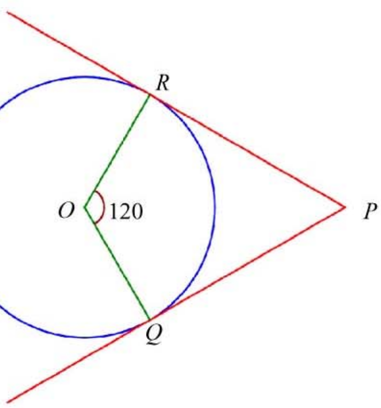
- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങൾ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ വരയ്ക്കുക.





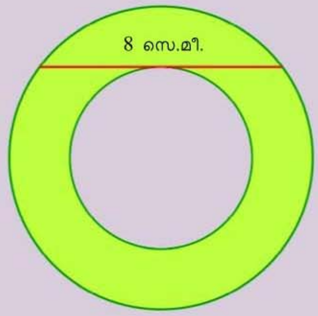


- ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 15 സെന്റിമീറ്റർ ആണ്. *PQ*, *PR* എന്നീ തൊടുവരകളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

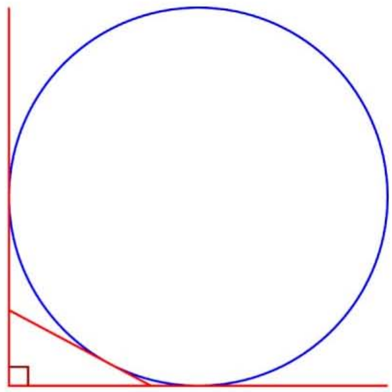


പരപ്പളവ് പ്രശ്നം

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, പച്ച ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

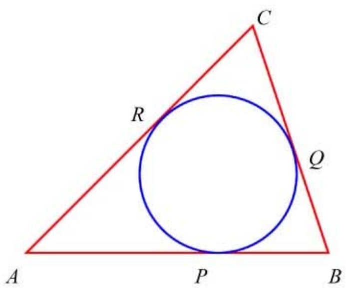


- O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിലെ A, B എന്നി ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. ചുവടെപ്പറയുന്ന കാര്യങ്ങൾ തെളിയിക്കുക:
  - P എന്ന ബിന്ദു, A യിൽ നിന്നും, B യിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിലാണ്.
  - OP എന്ന വര AB എന്ന വരയേയും, APB എന്ന കോണിനേയും സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.
  - AB എന്ന വരയെ OP എന്ന വര Q ൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ, $OQ \times OP = r^2$
- ചിത്രത്തിൽ വൃത്തം മൂന്നു വരകളേയും തൊടുന്നു.



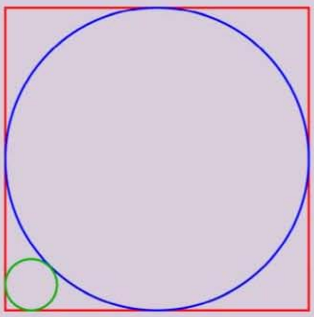
ചുവട്ടിലെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റ ചുറ്റളവ്, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

- ചിത്രത്തിൽ AB, BC, CA എന്നീ വരകൾ വൃത്തത്തെ P, Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുന്നു. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $2(AP + BQ + CR)$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.



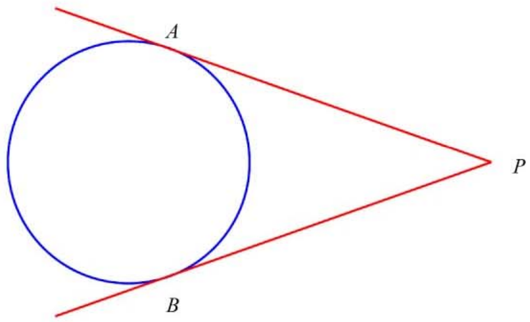
മൂലപ്രശ്നം

ചിത്രത്തിൽ ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെ തൊടുന്ന ഒരു വലിയ വൃത്തവും, ഈ വൃത്തത്തേയും സമചതുരത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളേയും തൊടുന്ന ഒരു ചെറിയ വൃത്തവുമുണ്ട്. ഈ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ ആരം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

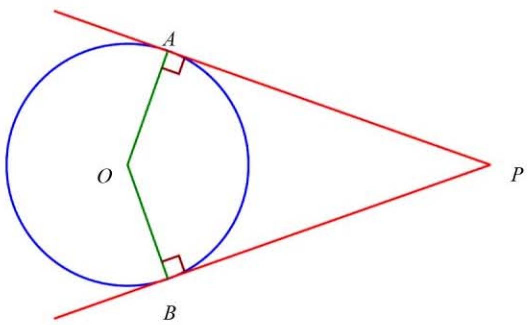


തൊടുവരയും കോണും

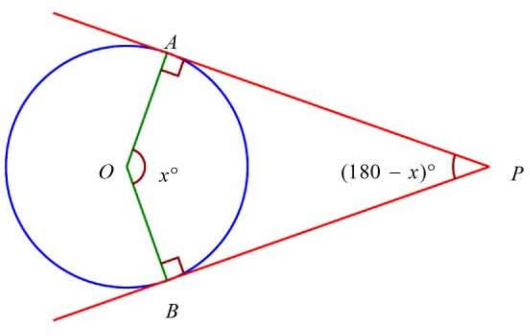
ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവരകൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു എന്നു കരുതുക.



A യും B യും യോജിപ്പിക്കുന്ന ചെറിയ ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, തൊടുവരകൾക്കിടയിലുള്ള P യിലെ കോണും നോക്കൂ:

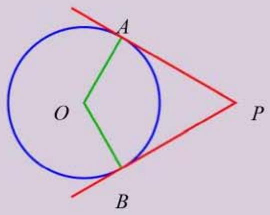


$OAPB$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിലെ രണ്ടു കോണുകൾ മട്ടമാണല്ലോ; അവയുടെ തുക $180°$. അപ്പോൾ മറ്റു രണ്ടു കോണുകളുടെ തുകയും $180°$ തന്നെ ആകണമല്ലോ. (ചതുർഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെയെല്ലാം തുക എത്രയാണ്?)

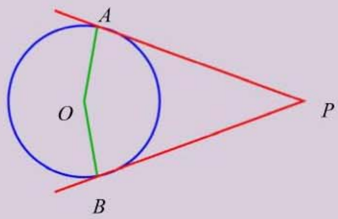


അടുത്തും അകന്നും

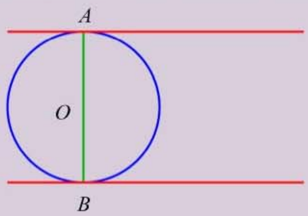
ചിത്രം നോക്കൂ:



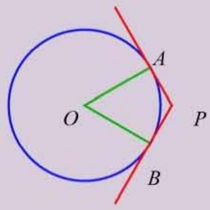
$\angle AOB$ വലുതാകുംതോറും, $\angle APB$ ചെറുതാകും; മാത്രവുമല്ല, O യിൽ നിന്ന് P അകന്നകന്നു പോകും:



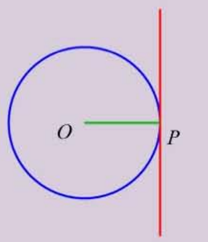
അവസാനം, AB വ്യാസമാകുമ്പോഴോ?



$\angle AOB$ ചെറുതാകുമ്പോഴോ?



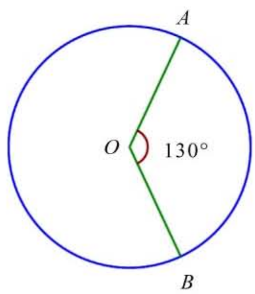
ഇങ്ങനെ തുടർന്ന്, A, B ഇവ ഒന്നിക്കുമ്പോഴോ?

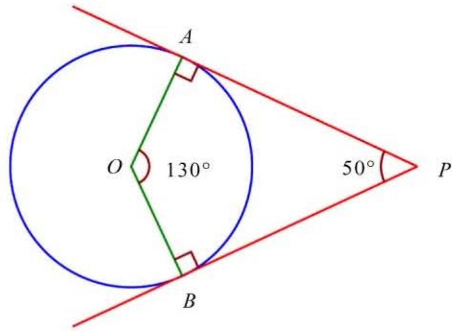


ഇവിടെ കണ്ടെത്തെന്താണ്?

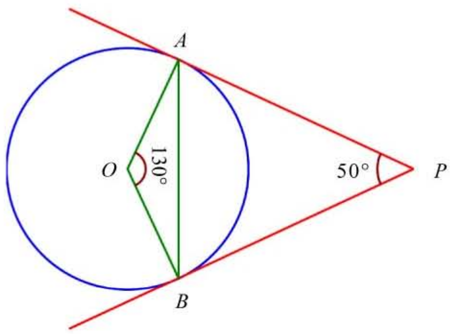
വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ചെറിയ ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, ഈ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണും അനുപൂരകമാണ്.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു വൃത്തത്തിന് രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കണം, അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ $50°$ ആയിരിക്കണം, എന്നു പറഞ്ഞാൽ, $130°$ കേന്ദ്രകോണായ ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളിൽനിന്നു വരച്ചാൽ മതി.



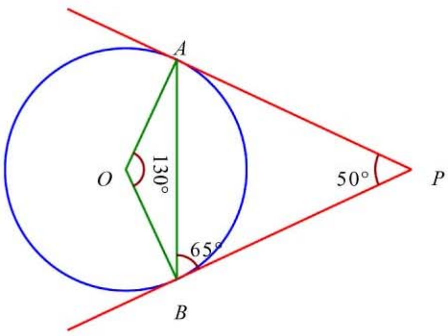


ഈ ചിത്രത്തിൽ, AB എന്ന ഞാണും കൂടി വരച്ചു നോക്കൂ:



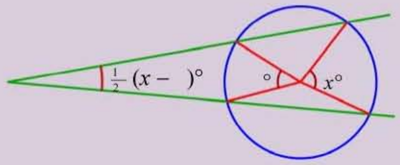
ഈ ഞാണും, തൊടുവരയും തമ്മിലുള്ള കോൺ എത്രയാണ്?

OAB എന്ന സമപാർശ്വത്രികോണത്തിലെ ചെറിയ കോണുകൾ രണ്ടും $25°$ വീതം.

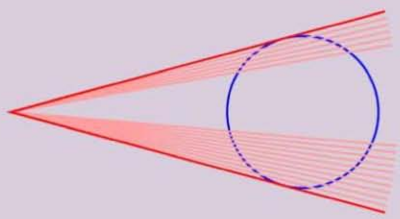


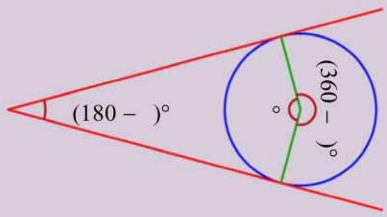
ഞാണും തൊടുവരയും

രണ്ടു ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിനുപുറത്തു ഖണ്ഡിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന കോണിനെക്കുറിച്ച്, **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വൃത്തത്തിനുപുറത്ത്** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടല്ലോ.



ഈ ഞാണുകൾ കറങ്ങി, തൊടുവരകളാകുമ്പോഴോ?

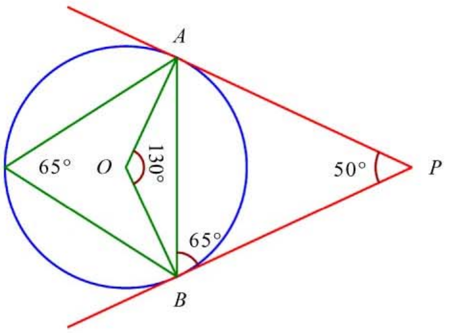




അപ്പോൾ ABP എന്ന കോൺ $90° - 25° = 65°$.

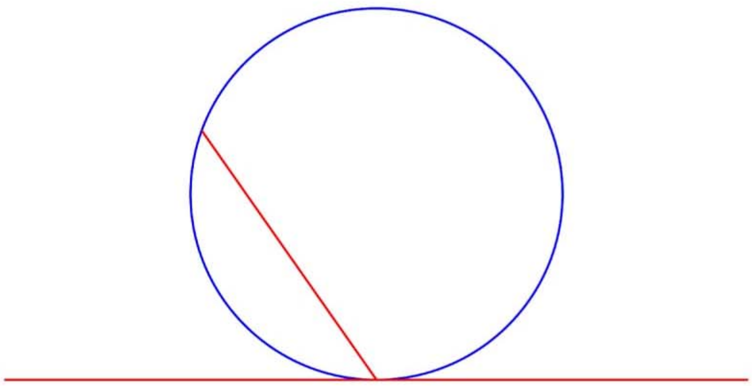
അതായത്, $130°$ യുടെ പകുതി ഇത്, AB എന്ന ഞാൺ മുറിക്കുന്ന വലിയ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണാണല്ലോ;

ചിത്രം നോക്കൂ.

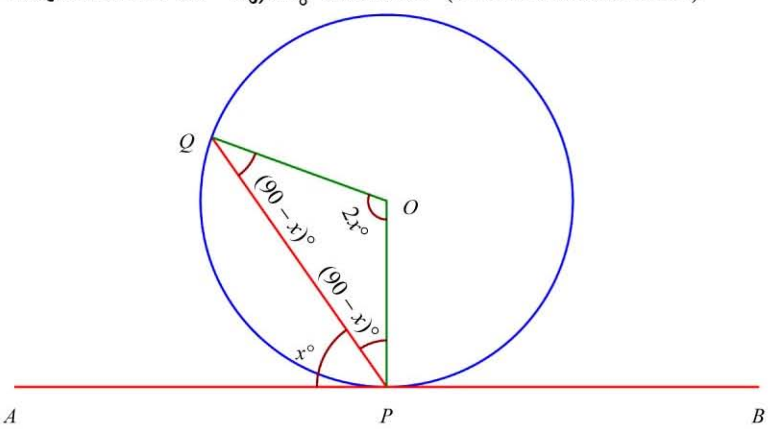


ഇത് എല്ലാ ഞാണുകൾക്കും തൊടുവരകൾക്കും ശരിയാണോ?

ഒരു ഞാണും, അതിന്റെ ഒരറ്റത്തൊരു തൊടുവരയും മാത്രം വരച്ചുനോക്കാം:



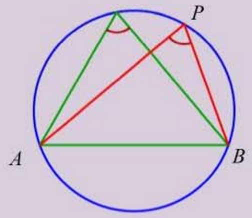
ഞാണും തൊടുവരയും തമ്മിലുള്ള ഒരു കോൺ $x°$ എന്നെടുത്താൽ, ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്, ചെറിയ ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $2x°$ എന്നു കാണാം. (വിശദീകരിക്കാമോ?)



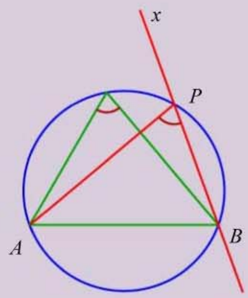
അപ്പോൾ PQ എന്ന ഞാൺ വൃത്തത്തിലെ വലിയ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണും $x°$ തന്നെയാണല്ലോ.

മാറാത്ത കോൺ

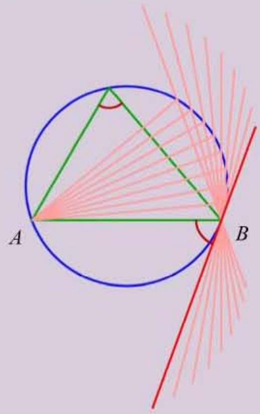
ഒരേ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു കണ്ടല്ലോ:



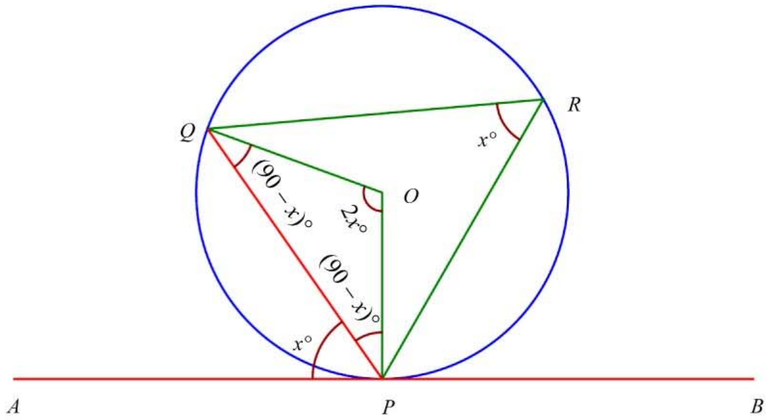
PB അൽപം നീട്ടി വരയ്ക്കാം:



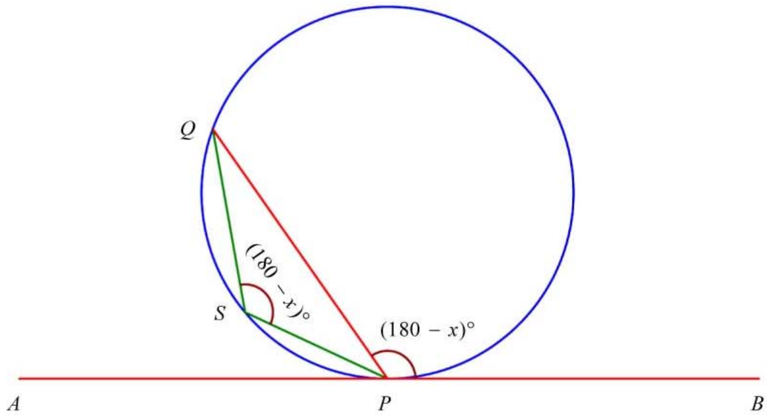
ഇനി P വൃത്തത്തിലൂടെ നീങ്ങി, B യിലെത്തിയാലോ?



എന്ന വര B യിലെ തൊടുവരയാകും; കോണൊട്ടു മാറുന്നുമില്ല.



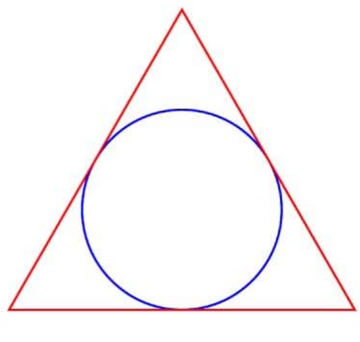
മാത്രവുമല്ല, തൊടുവരയും, ഞാണുമായുള്ള വലിയ കോണും, ഞാൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ചെറിയ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണും $(180 - x)^\circ$ ആണെന്നും കാണാം:



ഇപ്പോൾ കണ്ടതും ഒരു സാമാന്യതത്വമായി എഴുതാം:

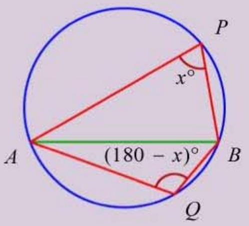
വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ഞാണും അതിന്റെ ഒരറ്റത്തുകൂടിയുള്ള തൊടുവരയും തമ്മിലുള്ള ഓരോ കോണും, ആ ഞാണിന്റെ മറുവശത്തുള്ള വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണിനു തുല്യമാണ്.

തൊടുവരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണിനെക്കുറിച്ച് ഇപ്പോൾ കണ്ടതുപയോഗിച്ച്, നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ പ്രശ്നം, വൃത്തത്തെ പൊതിയുന്ന സമഭുജത്രികോണം, പരിഹരിക്കാം.

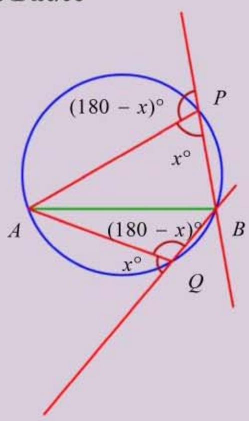


മറിയുന്ന കോണുകൾ

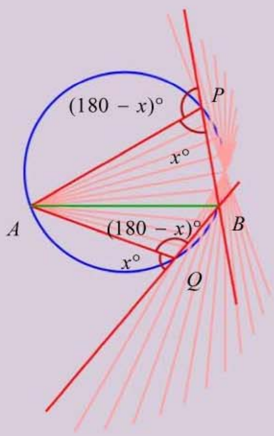
മറുഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകൾ അനുപൂരകമാണല്ലോ:



നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ വരകൾ നീട്ടിവരയ്ക്കാം



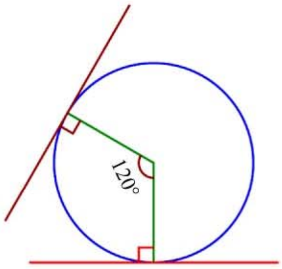
P വൃത്തത്തിലൂടെ Q വിലേക്കു നീങ്ങിയാലോ?



AP യുടെ താഴെ x° യും, മുകളിൽ $(180 - x)^\circ$ ഉം ആണ്. ചലനത്തിലുടനീളം അങ്ങനെതന്നെയല്ലേ?

ഇവിടെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളാണല്ലോ. അവ തമ്മിലുള്ള കോൺ എത്രയാണ്? അപ്പോൾ അവയുടെയിടയിലുള്ള ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണോ?

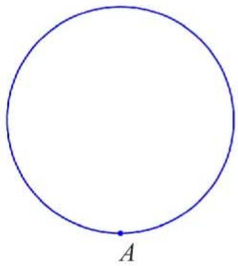
ഇനി വരയ്ക്കാമല്ലോ:



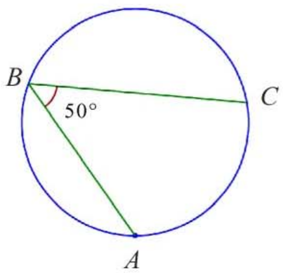
ഇതുപോലെ വൃത്തത്തിനെ തൊടുന്ന സമഭുജത്രികോണമല്ലാതെ ഏതു കോണുകളുള്ള ത്രികോണവും വരച്ചുകൂടേ? ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ.

ഇങ്ങനെ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ, വൃത്തകേന്ദ്രം ഉപയോഗിച്ചല്ലോ. കേന്ദ്രം ഉപയോഗിക്കാതെ (കേന്ദ്രമേതെന്ന് അറിയില്ലാത്ത വൃത്തമാണെന്നു കരുതിക്കോളൂ) ഇത്തരമൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ?

ആദ്യം കേന്ദ്രം ഉപയോഗിച്ച് തൊടുവര വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

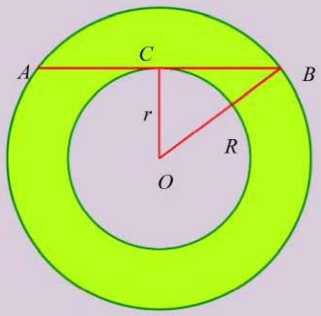


ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിൽ, A യിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവര വരയ്ക്കണം. ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ രണ്ട് വരകൾ വരയ്ക്കുക.



ഇനി AC യോജിപ്പിച്ച്, A യിൽ കൂടി AC യുമായി $50°$ കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന PQ വരയ്ക്കുക.

പരപ്പളവ് പ്രശ്നം – ഉത്തരം

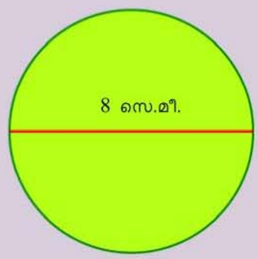


ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നും, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം R എന്നുമെടുത്താൽ, പച്ച ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $(R^2 - r^2)$ ആണല്ലോ.

ചിത്രത്തിൽ AB ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരയായതിനാൽ, അത് OC യ്ക്ക് ലംബമാണ്; AB വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണും ആയതിനാൽ, ഇതിൽനിന്ന് $AC = BC$ എന്നും കിട്ടും (എങ്ങനെ?). അപ്പോൾ OCB എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന് $R^2 - r^2 = 4^2 = 16$ എന്നു കാണാം.

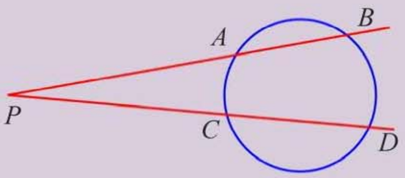
അങ്ങനെ, പച്ച ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 16 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ എന്നു കിട്ടും.

ഇത് AB വ്യാസമായ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവാണെന്നത് മറ്റൊരു രസം.



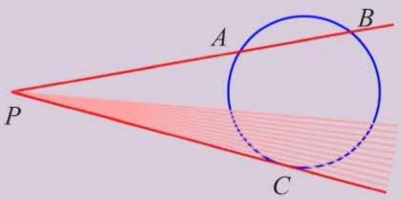
മാറാത്ത ബന്ധം

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഇതിൽ $AP \times PB = CP \times PD$ എന്നറിയാമല്ലോ.

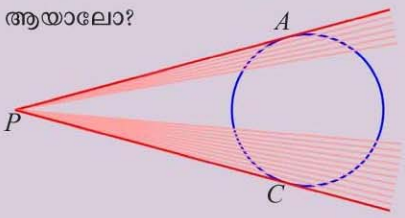
താഴത്തെ വര, കറങ്ങി തൊടുവരയായാലോ?



PD എന്നത് PC തന്നെയാകും; നേരത്തെ കണ്ട ബന്ധം

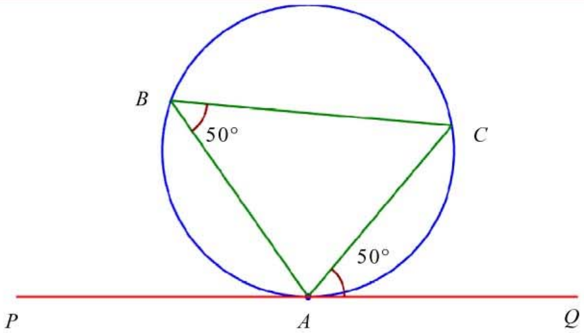
$AP \times PB = CP^2$ എന്നാകും.

മുകളിലത്തെ വരയും തൊടുവര ആയാലോ?



ഈ ബന്ധം $PA^2 = PC^2$ അഥവാ $PA = PC$ എന്നാകും.

ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ.

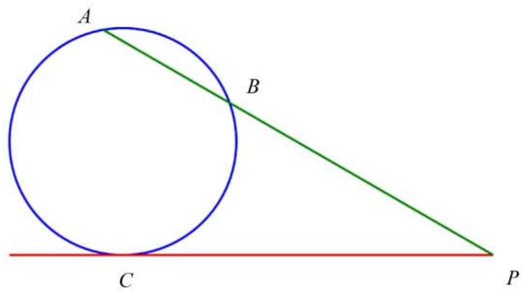


ഇത് A യിലെ തൊടുവരയല്ലേ? കാരണം?

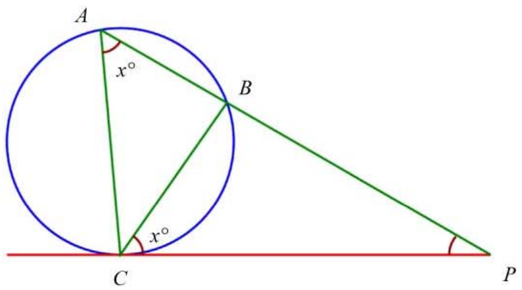
ഇതിൽ 50° യ്ക്കു പകരം ഏതു കോണെടുത്താലും ശരിയാകുമോ?

ഞാൺ തൊടുവരയുമായുണ്ടാക്കുന്ന കോണിനെക്കുറിച്ചുള്ള അറിവുപയോഗിച്ച്, മറ്റൊരു സാമാന്യതത്വമുണ്ടാക്കാം.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



AC, BC യോജിപ്പിക്കുക $\angle BCP$ x° എന്നെടുത്താൽ, $\angle BAC$ x° എന്നും കാണാമല്ലോ.



അതായത്, ΔAPC യിൽ A യിലെ കോണും ΔBPC യിൽ C യിലെ കോണും തുല്യമാണ്. ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലും P യിൽ ഒരേ കോണാണ്. അപ്പോൾ ഇവയുടെ മൂന്നാമത്തെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്; അതിനാൽ തുല്യ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ ജോടികൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും തുല്യമാണ്. യുക്തമായ രണ്ടു ജോടി വശങ്ങളെടുത്താൽ

$$\frac{PA}{PC}=\frac{PC}{PB}$$

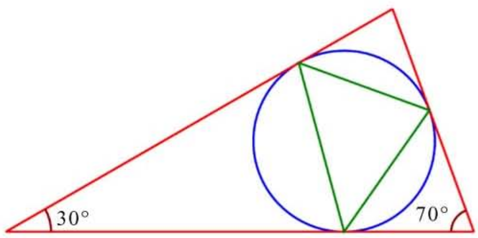
ഇതിനെ

$$PA \times PB = PC^2$$

എന്നെഴുതാം.

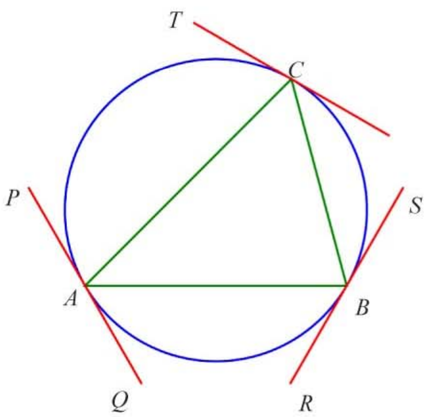
ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ:

- 3 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഒരു കോൺ $40°$ ആയ ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികം, വശങ്ങളെല്ലാം ഈ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന രീതിയിൽ വരയ്ക്കുക.
- 4 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, വശങ്ങളെല്ലാം അതിനെ തൊടുന്ന ഒരു സമപഞ്ചഭുജം വരയ്ക്കുക.
- ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതു രണ്ടു തൊടുവരകളും, തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാണുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.
- ചിത്രത്തിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം വൃത്തത്തിലാണ്; വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ വൃത്തത്തെ തൊടുന്നു.



ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ മൂന്നും കണ്ടുപിടിക്കുക.

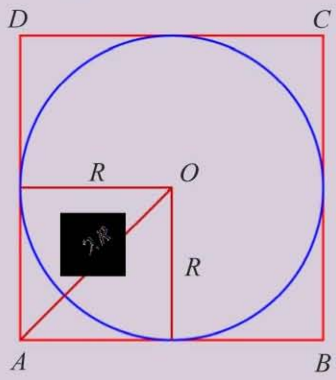
- ചിത്രത്തിൽ വൃത്തത്തിലെ A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകളാണ് PQ, RS, T എന്നിവ.



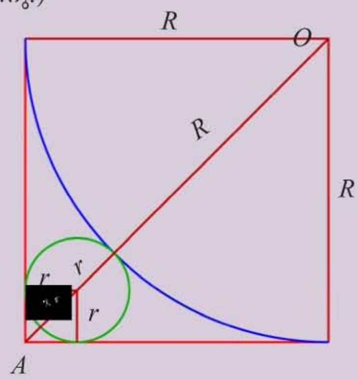
ഇതിൽ ഒരേ അളവുള്ള എത്ര ജോടി കോണുകളുണ്ട്?

മൂലപ്രശ്നം – ഉത്തരം

വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം R എന്നെടുക്കാം. അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന്, സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളിലേക്കു ലംബം വരച്ചാൽ ചുവടെക്കാണുന്ന ചിത്രം കിട്ടും:



ഇനി ചെറിയ വൃത്തത്തിനും ഇതുപോലെ വരയ്ക്കാം; അതിന്റെ ആരം r എന്നെടുക്കാം. (കാര്യങ്ങൾ വ്യക്തമാകാൻ, ചിത്രത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം മാത്രം വലുതാക്കി കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.)



രണ്ടു ചിത്രത്തിൽ നിന്നും OA യുടെ നീളം കണക്കാക്കിയാൽ,

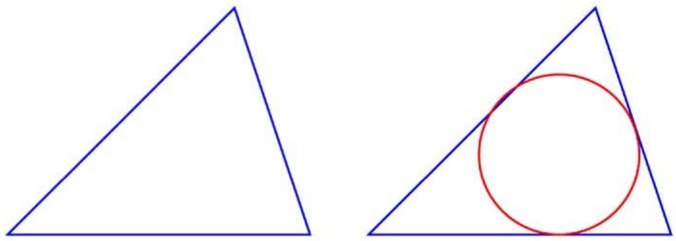
$$\sqrt{2}R = \sqrt{2}r + r + R$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ നിന്ന്

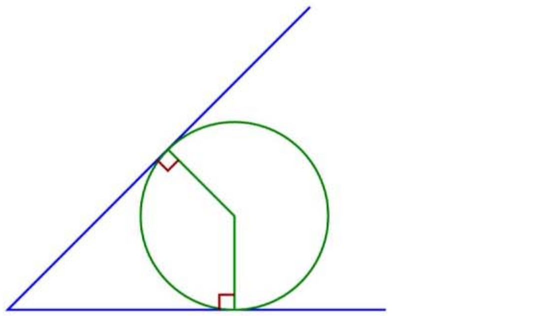
$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

ഉള്ളിലെ വൃത്തങ്ങൾ

ഒരു വൃത്തത്തിനെ തൊടുന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നതു കണ്ടല്ലോ. ഇനി ഒരു ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ, അതിന്റെ വശങ്ങളെയെല്ലാം തൊട്ടുകൊണ്ട് വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

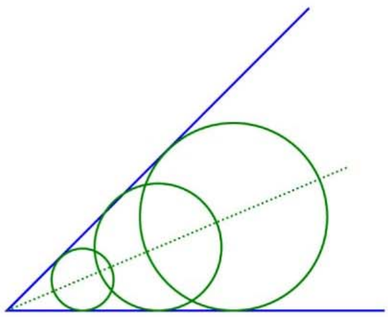


വൃത്തം ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളേയും തൊടണം. ഒരു വശത്തെ തൊടുന്ന ഒരുപാടു വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം അല്ലേ? രണ്ടു വശങ്ങളെ തൊടുന്നതോ?



ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങൾ ഈ വശങ്ങൾക്കു ലംബമാണ്. അതായത്, വൃത്തകേന്ദ്രം ഈ രണ്ടു വശങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലായിരിക്കണം. അപ്പോൾ അത് ഇവയുടെ ഇടയിലുള്ള കോണിന്റെ സമഭാജിയിലാകണമല്ലോ. (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **സർവസമത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമദൂരസമഭാജി** എന്ന ഭാഗം)

കോണിന്റെ സമഭാജിയിൽ എവിടെ കേന്ദ്രം എടുത്താലും, രണ്ടു വശങ്ങളേയും തൊടുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയും:



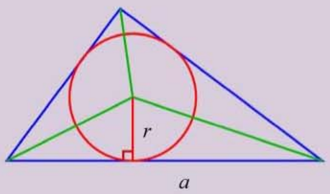
നമുക്കാവശ്യമായ വൃത്തം, മൂന്നാമത്തെ വശത്തേയും തൊടണമല്ലോ. അതിനെന്തു ചെയ്യും?

അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം

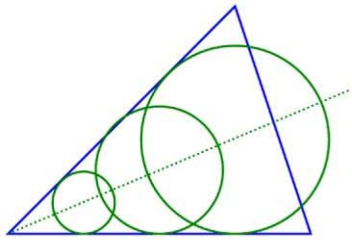
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളുടേയും നീളം അറിയാമെങ്കിൽ, അതിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം കണ്ടുപിടിക്കാം.

അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം, ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ മൂന്നു ത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടും. ഇവയുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

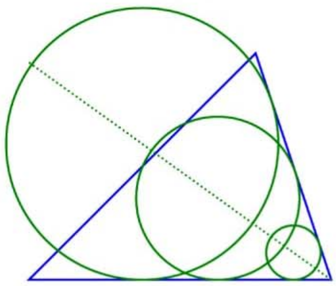
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



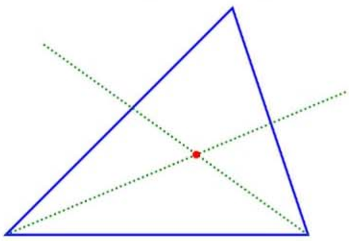
അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നും, ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം a എന്നുമെടുത്താൽ, താഴത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}ar$ ആണല്ലോ. ഇതുപോലെ ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം , എന്നെടുത്താൽ, മറ്റു രണ്ടു ചെറുത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ $\frac{1}{2}\ r$, $\frac{1}{2}\ r$ എന്നു കാണുമല്ലോ. അപ്പോൾ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}(a+\ \ +\ \ )r$ എന്നു കിട്ടും. അതായത്, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ, ചുറ്റളവിന്റെ പകുതി കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം കിട്ടും.



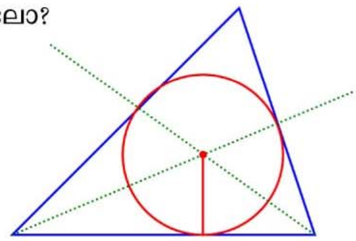
താഴത്തേയും വലത്തേയും വശങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദു എടുത്താലും, ആ രണ്ടു വശങ്ങളെ തൊടുന്ന വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാമല്ലോ.



അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു സമഭാജികളിലുമുള്ള ബിന്ദു, എടുത്താലോ? അതായത്, അവ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു.



ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മൂന്നു വശങ്ങളിലേക്കുമുള്ള ലംബങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമല്ലേ? ഈ നീളം ആരമായി, ഈ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി വൃത്തം വരച്ചാലോ?

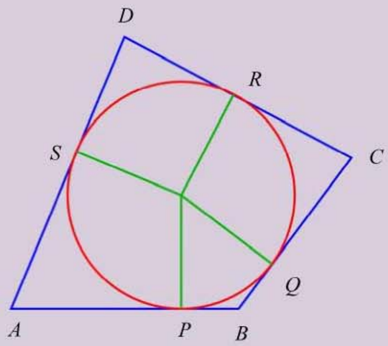


ഈ വൃത്തത്തിന് ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തം (*n r e*) എന്നാണു പേര്.

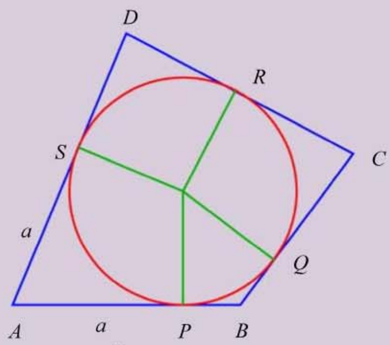
ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കാണാം. അന്തർവൃത്തം, ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതുമുള്ള വശങ്ങളെ സ്പർശിക്കുന്നതിനാൽ, ആ വശങ്ങളിൽ നിന്നും അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള ലംബങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്; അതായത്, വൃത്തകേന്ദ്രം, ഈ വശങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണിന്റേയും സമഭാജിയിലാണ്.

ചതുർഭുജവും വൃത്തവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



$ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിന് അന്തർവൃത്തമുണ്ട്. അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് വരച്ച ലംബങ്ങളുടെ ചുവടുകളാണ് P, Q, R, S. തൊടുവരകൾ തമ്മിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നത്, തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് തുല്യ അകലത്തിലാണ് എന്നതുപയോഗിച്ചാൽ, ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താമല്ലോ.



ഇതിൽ നിന്ന്

$$AB + CD = a + \quad + \quad + \quad = AD + BC$$

എന്നു കാണാം. അതായത്, ഒരു ചതുർഭുജത്തിന് അന്തർവൃത്തമുണ്ടെങ്കിൽ, എതിർവശങ്ങളുടെ തുക തുല്യമാണ്.

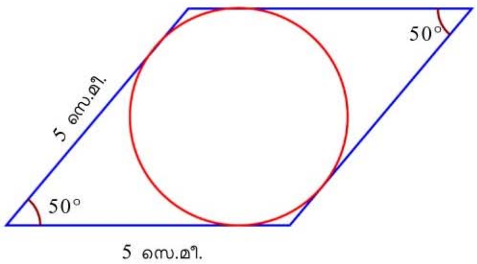
മറിച്ച്, എതിർവശങ്ങളുടെ തുക തുല്യമായ ഏതു ചതുർഭുജത്തിനും അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കാം എന്നും തെളിയിക്കാം (ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ)

ഇത് ഏതു ത്രികോണത്തിനും ശരിയാണല്ലോ.

ഏതു ത്രികോണത്തിലും, മൂന്നു കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ ഒരേ ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്യാമല്ലോ:

- വശങ്ങളുടെ നീളം 4, 5, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.
- 6 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമഭുജത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ അന്തർവൃത്തവും, പരിവൃത്തവും വരയ്ക്കുക.
- ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ഒരേ ബിന്ദുവാണെന്നു തെളിയിക്കുക. പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരവും, അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എത്രയാണ്?
- ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമചതുരം വരച്ച്, അതിന്റെ പരിവൃത്തവും, അന്തർവൃത്തവും വരയ്ക്കുക.
- ചുവടെക്കാണുന്ന ചിത്രം, പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ വരയ്ക്കുക.

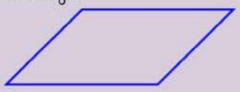


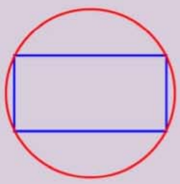
പ്രോജക്ട്

- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ തുടങ്ങിയ അഭിന്നകനീളമുള്ള വരകൾ നിർമിക്കുന്ന വിവിധ രീതികൾ ചുവടെപ്പറയുന്ന ആശയങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തുക.
    - പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തം
    - വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകളെ സംബന്ധിക്കുന്ന തത്വങ്ങൾ.
    - തൊടുവരകളെ സംബന്ധിക്കുന്ന തത്വങ്ങൾ.

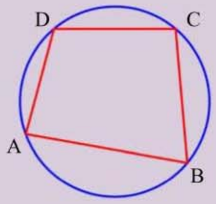
പരിവൃത്തവും അന്തർവൃത്തവും

ഏതു ത്രികോണത്തിനും പരിവൃത്തവും അന്തർവൃത്തവും വരയ്ക്കാം. എന്നാൽ ചതുർഭുജങ്ങളെടുത്താൽ, ചിലതിന് രണ്ടുമുണ്ടാകില്ല, ചിലതിന് ഏതെങ്കിലും ഒന്നുമാത്രം, ചിലതിന് രണ്ടുമുണ്ടാകും.



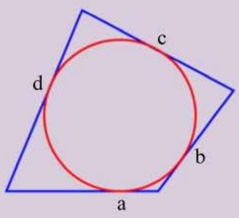


പരിവൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ചതുർഭുജങ്ങളിലെല്ലാം എതിർകോണുകളുടെ തുക 180° ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ. മറ്റൊരു വിധത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ രണ്ടു ജോടി എതിർകോണുകളുടെയും തുക തുല്യമാണ്.



$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$$

അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ചതുർഭുജങ്ങളിലോ? രണ്ടുജോടി എതിർവശങ്ങളുടെയും തുക തുല്യമാണ്.



$$a + \quad = \quad +$$