7 സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം

സാധ്യതകളും സംഖ്യകളും

ഒരു ചെപ്പിൽ പത്തു മുത്തുകളുണ്ട്; ഒമ്പതെണ്ണം കറുത്തതും, ഒരെണ്ണം മാത്രം വെളുത്തതും. ഇതിൽ നിന്ന് (നോക്കാതെ) ഒരു മുത്തെടുത്താൽ...

മിക്കവാറും കറുപ്പാകും, അല്ലേ? വെളുത്തതായിക്കൂടായ്കയുമില്ല.

മറ്റൊരു ചെപ്പിൽ അഞ്ചു കറുത്ത മുത്തും, അഞ്ചു വെളുത്ത മുത്തും ആണ്. ഇതിൽനിന്നും ഒരെണ്ണം എടുത്തു. അത് കറുത്തതോ വെളുത്തതോ ആകാം, എന്നല്ലാതെ മറ്റൊന്നും കൂട്ടിച്ചേർക്കാനില്ലല്ലോ.

ഇക്കാര്യങ്ങൾ മറ്റൊരു തരത്തിൽപ്പറയാം. ആദ്യത്തെ ചെപ്പിൽ നിന്ന് ഒരു മുത്തെടുത്താൽ, കറുത്തതാകാനാണ് കൂടുതൽ സാധ്യത; അഥവാ, വെളുത്തതു കിട്ടാൻ സാധ്യത വളരെ കുറവാണ്. രണ്ടാമത്തെ ചെപ്പിലോ? കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാനും, വെളുത്ത മുത്തു കിട്ടാനും ഒരേ സാധ്യത ആണെന്നു പറയാം, അല്ലേ?

കുറേക്കൂടി വ്യക്തമായിപ്പറയാൻ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാം. ആദ്യത്തെ ചെപ്പിൽ പത്തിൽ ഒമ്പതും കറുത്ത മുത്തുകളാണ്; വെളുത്ത മുത്ത് പത്തിലൊന്നേയുള്ളൂ. അപ്പോൾ കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാൻ സാധ്യത $\frac{9}{10}$ ആണെന്നു പറയാം. വെളുത്ത മുത്തു കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{10}$ എന്നും.

രണ്ടാമത്തെചെപ്പിലോ? $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാനും, വെളുത്ത മുത്തു കിട്ടാനും സാധ്യത $\frac{1}{2}$ തന്നെ.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം. 1 മുതൽ 25 വരെയുള്ള സംഖ്യകളോരോന്നും ഓരോ കടലാസു കഷണത്തിലെഴുതി, ഒരു പെട്ടിയിലിട്ടു. ഇതിൽ നിന്ന് ഒരു കടലാസ് എടുത്തു. അതിലെ സംഖ്യ 3 ന്റെ ഗുണിതമാകാൻ സാധ്യത എത്രയാണ്?

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 എന്നീ എട്ടു സംഖ്യകളല്ലേ, പെട്ടിയിലുള്ള മൂന്നിന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ?

പകിട ഗണിതം

പാമ്പും കോണിയും പോലെ പകിട (dice) ഉപയോഗിച്ച് പലതും കളിച്ചിട്ടില്ലേ? വളരെ പണ്ടു തന്നെ ഇത്തരം പകിടകളികൾ ഉണ്ടായിരുന്നു. ഏതാണ്ട് 2500 ബി.സി.യിൽ ഭാരതത്തിൽ നിലവിലുണ്ടായിരുന്ന സിന്ധു നദീതട സംസ്കാരകാലത്തുള്ള ഒരു പകിടയുടെ ചിത്രമാണിത്:

പകിടയുരുട്ടുമ്പോൾ ഏതു സംഖ്യയാണ് കിട്ടുകയെന്ന് മുൻകൂട്ടി കൃത്യമായി പറയാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. ഏ.ഡി. പതിനാറാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇറ്റലിയിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ജെറോലാമോ കാർഡാനോ (Gerolamo Cardano) എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് ഇതിന്റെ ഗണിതത്തെക്കുറിച്ച് ആദ്യമായൊരു പുസ്തകമെഴുതിയത്.

പ്രധാനമായും ചൂതുകളിക്കാർക്കുള്ള നിർദ്ദേശങ്ങൾ നൽകുന്ന ഇതിൽ, രണ്ടു പകിടകൾ ഒന്നിച്ചുരുട്ടുമ്പോൾ വിവിധ സംഖ്യകൾ തുകയായി കിട്ടാനുള്ള സാധ്യതകൾ സംഖ്യകളായി കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

അപ്പോൾ, സാധ്യത $\frac{8}{25}$

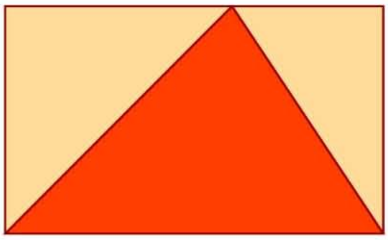
എടുക്കുന്നത് 4 ന്റെ ഗുണിതമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ?

ഒറ്റസംഖ്യ?

ഒരു കണക്കു കൂടി.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഇതുപോലൊരു ചതുരം വെട്ടിയെടുത്ത്, കണ്ണടച്ച് പെൻസിൽകൊണ്ടൊരു കുത്തിടുന്നു. അത് ചുവന്ന ത്രികോണത്തിനുള്ളിലാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

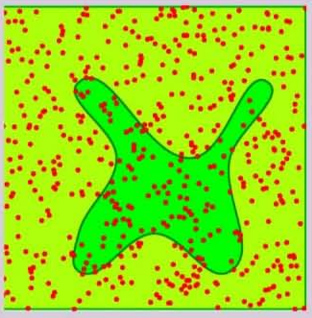
ചിത്രത്തിൽ ചുവന്ന ത്രികോണം, ചതുരത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്? (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **പരപ്പളവ്** എന്ന പാഠത്തിലെ **ചതുരവും ത്രികോണവും** എന്ന ഭാഗം ഓർക്കുക.) അപ്പോൾ, സാധ്യത $\frac{1}{2}$. മറ്റൊരു വിധത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, കുത്ത് ത്രികോണത്തിനകത്താകാനും പുറത്താകാനും ഒരേ സാധ്യത തന്നെയാണ്.

ഇതുപോലെ ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തു നോക്കൂ:

- ഒരു പെട്ടിയിൽ 4 വെളുത്ത പന്തുകളും 6 കറുത്ത പന്തുകളുമുണ്ട്; മറ്റൊന്നിൽ, 3 വെളുത്ത പന്തുകളും 5 കറുത്ത പന്തുകളും. കറുത്ത പന്താണ് വേണ്ടതെങ്കിൽ, ഏതു പെട്ടിയിൽ നിന്നെടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്?
- ഒരാളോട് 10 നേക്കാൾ ചെറിയ ഒരു (എണ്ണൽ) സംഖ്യ പറയാൻ ആവശ്യപ്പെടുന്നു. അയാൾ പറയുന്നത് ഒരു അഭാജ്യ സംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്? ഇതുതന്നെ 100 നേക്കാൾ ചെറിയ സംഖ്യയായാലോ?
- ഒരു പെട്ടിയിൽ സംഖ്യകളെഴുതിയ കുറേ കടലാസു കഷണങ്ങൾ ഇട്ടിരിക്കുന്നു. 4 ഒറ്റസംഖ്യകളും, 5 ഇരട്ടസംഖ്യകളും. ഒറ്റ സംഖ്യയെഴുതിയ ഒരു കടലാസു കഷണവും, ഇരട്ടസംഖ്യ എഴുതിയ മറ്റൊന്നും കൂടി പെട്ടിയിലിട്ടാൽ, ഒറ്റസംഖ്യ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത കൂടുമോ, കുറയുമോ? ഇരട്ടസംഖ്യയുടെ കാര്യമോ?

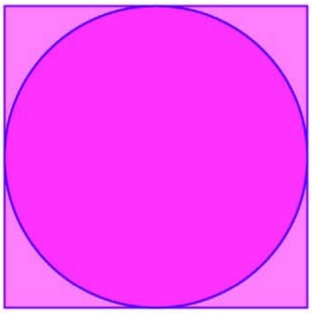
പരപ്പളവും സാധ്യതയും

സങ്കീർണമായ രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് ഏകദേശമായി കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധ്യതയുടെ ഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം. ഒരു നിശ്ചിത സമചതുരത്തിനകത്ത് ഈ രൂപം വരയ്ക്കണം. എന്നിട്ട്, പ്രത്യേകിച്ചൊരു ക്രമമോ ചിട്ടയോ ഇല്ലാതെ ചിത്രത്തിൽ കുത്തുകളിടണം.



നമുക്കാവശ്യമായ രൂപത്തിനകത്തു വീണ കുത്തുകളുടെ എണ്ണത്തെ ആകെ കുത്തുകളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യ, ഈ രൂപത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവുകൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായിരിക്കും. കുത്തുകളുടെ എണ്ണം വർധിക്കുന്തോറും ഇതു കൂടുതൽ കൃത്യമാകുകയും ചെയ്യും. ഈ ജ്യാമിതീയ ക്രിയയും, സംഖ്യകളുടെ ക്രിയയും കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച് വേഗം ചെയ്യാം. മോണ്ടി കാർലോ രീതി (Monte Carlo method) എന്നാണ് ഇതിന്റെ പേര്.

- ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ കണ്ണടച്ചൊരു കുത്തിട്ടു.



ഇതു വൃത്തത്തിനകത്താകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്? വൃത്തത്തിനു പുറത്താകാനോ? രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കണക്കാക്കുക.

രണ്ടെണ്ണമെടുത്താൽ

ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2 എന്നെഴുതിയ രണ്ടു കടലാസു കഷണങ്ങളും, മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3 എന്നെഴുതിയ മൂന്നു കടലാസു കഷണങ്ങളും ഇട്ടിട്ടുണ്ട്. ഓരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസു വീതമെടുത്തു. രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

ഓരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ, ഒരു ജോടി സംഖ്യകളാണ് കിട്ടുന്നത്. ഇവ എങ്ങനെയൊക്കെയാകാം? ആദ്യത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്നു 1, രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്നു 2; അല്ലെങ്കിൽ, രണ്ടുപെട്ടിയിൽ നിന്നും 1; എന്നിങ്ങനെ പലതരത്തിൽ സംഭവിക്കാമല്ലോ. എല്ലാ ജോടികളും ഒന്നെഴുതി നോക്കാം:

$$(1, 1) \quad (1, 2) \quad (1, 3)$$

$$(2, 1) \quad (2, 2) \quad (2, 3)$$

ആകെ ആറു ജോടികൾ. നമ്മുടെ താൽപര്യം, രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യയാകുന്ന ജോടികളിലാണല്ലോ. അത്തരം എത്രയെണ്ണമുണ്ട് ഈ കൂട്ടത്തിൽ?

രണ്ടെണ്ണം മാത്രം അല്ലേ?

അപ്പോൾ ഇങ്ങനെ സംഭവിക്കാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ഒരു ഒറ്റസംഖ്യയും, ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയും കിട്ടാനുള്ള സാധ്യതയോ?

ഒരു പ്രശ്നം

പ്രസിദ്ധ ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഗലീലിയോ, ചൂതുകളിക്കാരനായ ഒരു സുഹൃത്ത് ഉന്നയിച്ച പ്രശ്നത്തെക്കുറിച്ചു പറയുന്നുണ്ട്. മൂന്നു പകിട ഒന്നിച്ചുരുട്ടുമ്പോൾ, തുകയായി 9 കിട്ടുന്നതും 10 കിട്ടുന്നതും, ആറു വിധത്തിലാണ് എന്നയാൾ കണക്കാക്കി.

	9	10
1.	$1+2+6$	$1+3+6$
2.	$1+3+5$	$1+4+5$
3.	$1+4+4$	$2+2+6$
4.	$2+2+5$	$2+3+5$
5.	$2+3+4$	$2+4+4$
6.	$3+3+3$	$3+3+4$

എന്നാൽ അനുഭവത്തിൽ, 10 ആണ് 9 നേക്കാൾ കൂടുതൽ വരുന്നത്. ഇതെന്തുകൊണ്ടാണെന്നാണ് ചോദ്യം.

ഇതിൽ 1, 2, 6 എന്നെടുത്തിരിക്കുന്നത്, ഏതോ ഒരു പകിടയിൽ 1, മറ്റൊന്നിൽ 2, മൂന്നാമത്തേതിൽ 6 എന്നാണല്ലോ. ഇതിനുപകരം ആദ്യത്തെ പകിടയിൽ 1, രണ്ടാമത്തെ പകിടയിൽ 2, മൂന്നാമത്തെ പകിടയിൽ 6 എന്നതിനെമാത്രം (1, 2, 6) എന്ന ത്രയമുപയോഗിച്ചു സൂചിപ്പിക്കുക, ആദ്യത്തെ പകിടയിൽ 1, രണ്ടാമത്തെ പകിടയിൽ 6, മൂന്നാമത്തെ പകിടയിൽ 2, എന്നതിനെ (1, 6, 2) എന്ന ത്രയമുപയോഗിച്ചു സൂചിപ്പിക്കുക. (1, 2, 6), (1, 6, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1) എന്നീ ആറു വ്യത്യസ്ത ത്രയങ്ങൾ 9 തുകയായി കിട്ടുന്ന വിധത്തിൽ എടുക്കണം എന്നാണ് ഗലീലിയോയുടെ ഉത്തരം. മറ്റു ത്രയങ്ങളേയും ഇതുപോലെ വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാൽ, 9 കിട്ടുന്നത് 25 രീതിയിലും, 10 കിട്ടുന്നത് 27 രീതിയിലുമാണെന്നും ഗലീലിയോ വ്യക്തമാക്കുന്നു. (ചെയ്തു നോക്കൂ)

തത്വവും യാഥാർത്ഥ്യവും

ഒരു നാണയം മേൽപ്പൊട്ടെറിഞ്ഞാൽ വന്നു വീഴുന്നത് തലയോ (head) വാലോ (tail) ആകാം. രണ്ടിനും തുല്യ സാധ്യത, അഥവാ ഓരോന്നിനും സാധ്യത $\frac{1}{2}$, എന്നെടുക്കുന്നതാണ് ഗണിതയുക്തി.

എന്നുവച്ച്, രണ്ടു തവണ നാണയമെറിയുമ്പോൾ ഒരു തവണ തലയും, ഒരു തവണ വാലും കിട്ടണമെന്നില്ലല്ലോ. പത്തു തവണ എറിഞ്ഞാൽ, കൃത്യം അഞ്ചു തവണ തലയും, അഞ്ചു തവണ വാലും കിട്ടണമെന്നുമില്ല. സാധാരണ ഒരു നാണയം കുറെയേറെ തവണ എറിയുമ്പോൾ, തലയുടെ എണ്ണവും, വാലിന്റെ എണ്ണവും, ഏതാണ്ട് തുല്യമാകുമെന്നേ ഇതിന് അർത്ഥമുള്ളൂ. ഉദാഹരണമായി 1000 തവണ എറിയുമ്പോൾ, തല 510, വാൽ 490 എന്നാകാം.

ഇതുപോലെ പകിടയുരുട്ടുമ്പോഴും, 1200 തവണ ഉരുട്ടുമ്പോൾ ഓരോ സംഖ്യയും കൃത്യം 200 തവണ വന്നെന്നിരിക്കില്ല (മിക്കവാറും വരികയുമില്ല). ഒരു സംഖ്യ 220 തവണ, മറ്റൊന്ന് 180 തവണ എന്നൊക്കെയാകാം.

സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം കൂട്ടിയാലോ? ഒരു പെട്ടിയിൽ 1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ, രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ; ഇപ്പോൾ മേൽപ്പറഞ്ഞ സാധ്യതകൾ എത്രയാണ്?

ഇപ്പോൾ ആകെ എത്ര സംഖ്യാജോടികളുണ്ട്? ആദ്യം ചെയ്തതു പോലെ എല്ലാം എഴുതി എണ്ണുക ബുദ്ധിമുട്ടല്ലേ? (അതിലൊരു രസവുമില്ലതാനും) എണ്ണം കണക്കുകൂട്ടിയെടുക്കാമോ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം. ആദ്യത്തെ (പെട്ടിയിൽ നിന്നു കിട്ടുന്ന) സംഖ്യ 1 ആകുന്ന എത്ര ജോടികളുണ്ട്? ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 2 ആകുന്നവയോ?

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 5 തരത്തിലാകാം. ഇതോരോന്നിലും, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 10 തരത്തിലും. ഇവയെ മുമ്പെഴുതിയതുപോലെ വരിയിലും നിരയിലുമായി സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 1 ആയ 10 ജോടികളുടെ ഒരു വരി, അടുത്തത്, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 2 ആയ 10 ജോടികളുടെ വരി, എന്നിങ്ങനെ 5 വരി. (ഓരോന്നിലും 10 ജോടികൾ)

അപ്പോൾ ആകെ 50 ജോടികളായി. ഇവയിൽ രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളാകുന്ന എത്ര ജോടികളുണ്ട്?

അത്തരം ജോടികളിൽ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 1, 3, 5 ഇവ മൂന്നിൽ ഏതെങ്കിലുമാകണം. രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയോ?

അങ്ങനെ ഇത്തരം ജോടികൾ ആകെ $3 \times 5 = 15$ എന്നും കിട്ടി. (ഇതു മനസിലായോ? വേണമെങ്കിൽ വരിയും നിരയുമായി സങ്കൽപിച്ചു നോക്കൂ).

അപ്പോൾ ഇവിടെ രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകൾ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$

ഇതുപോലെ, രണ്ടും ഇരട്ടസംഖ്യകളാകാനുള്ള സാധ്യതയും, ഒന്ന് ഒറ്റയും മറ്റേത് ഇരട്ടയും ആകാനുള്ള സാധ്യതയും കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം: രണ്ടു കുട്ടികൾ തമ്മിലുള്ള കളിയാണ്. രണ്ടുപേരും രണ്ടു കയ്യിലെയും കുറേ വിരലുകൾ ഉയർത്തിപ്പിടിക്കും. രണ്ടുപേരും കൂടി ആകെ ഉയർത്തിയ വിരലുകളുടെ എണ്ണം ഒറ്റസംഖ്യയായാൽ ആദ്യത്തെയാൾ ജയിച്ചു; ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, രണ്ടാമത്തെയാളും. ആർക്കാണ് വിജയസാധ്യത കൂടുതൽ?

ഇതിൽ ഓരോരുത്തരും ഉയർത്തുന്ന വിരലുകളുടെ എണ്ണം, ഒന്നു മുതൽ പത്തു വരെയുള്ള ഏത് (എണ്ണൽ) സംഖ്യയും ആവാം. അപ്പോൾ രണ്ടുപേരും ഉയർത്തുന്ന വിരലുകളുടെ എണ്ണം ജോടിയാക്കിയാൽ, ആകെ എത്ര സംഖ്യാജോടികളായി?

ഈ 100 എണ്ണത്തിൽ (എങ്ങനെയാണ് നൂറു കിട്ടിയത്?) എത്രയെണ്ണത്തിലാണ് തുക ഒറ്റസംഖ്യയാകുക?

തുക ഒറ്റസംഖ്യ ആകണമെങ്കിൽ, ഒരു സംഖ്യ ഒറ്റയും, മറ്റേ സംഖ്യ ഇരട്ടയും ആയാലല്ലേ പറ്റൂ?

ആദ്യത്തെ സംഖ്യ ഒറ്റയും, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ ഇരട്ടയും ആയി എത്ര ജോടികളുണ്ട്? $5 \times 5 = 25$ (അതെങ്ങനെ?) മറിച്ചായാലോ?

അങ്ങനെ തുക ഒറ്റസംഖ്യയാകുന്ന $25 + 25 = 50$ ജോടികളുണ്ടെന്നു കണ്ടുപിടിച്ചു. അപ്പോൾ ഒറ്റസംഖ്യക്കാരന്റെ വിജയസാധ്യത $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

ഇരട്ടസംഖ്യക്കാരന്റെ വിജയസാധ്യതയും ഇതുതന്നെയാണെന്ന് കണക്കു കൂട്ടാതെതന്നെ പറയാമല്ലോ. (അതെങ്ങനെ?)

ഒരു കണക്കു കൂടി: ഒരു കുട്ടയിൽ 50 മാങ്ങയുണ്ട്; അതിൽ 20 എണ്ണം പഴുത്തിട്ടില്ല. മറ്റൊരു കുട്ടയിൽ 40 മാങ്ങയുണ്ട്; 15 എണ്ണം പഴുത്തിട്ടില്ല. ഓരോ കുട്ടയിൽ നിന്നും ഓരോ മാങ്ങയെടുത്താൽ ഒന്നെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

ഓരോ കുട്ടയിൽ നിന്നും ഒരു മാങ്ങ വീതം എത്ര വ്യത്യസ്ത വിധത്തിൽ രണ്ടു മാങ്ങയെടുക്കാം? (വേണമെങ്കിൽ, ഓരോ കുട്ടയിലേയും മാങ്ങകളെ 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നതായി സങ്കൽപ്പിക്കാം.)

ഈ 2000 മാങ്ങാജോടികളെ ഇങ്ങനെ മൂന്നു കൂട്ടമായി തരംതിരിക്കാം:

(i) രണ്ടും പഴുക്കാത്തത്

(ii) രണ്ടും പഴുത്തത്

(iii) ഒന്നു പഴുത്തതും മറ്റത് പഴുക്കാത്തതും

രണ്ടു മാങ്ങയും പഴുക്കാത്തതായി എത്ര ജോടികളുണ്ട്?

$20 \times 15 = 300$, അല്ലേ?

രണ്ടും പഴുത്തതോ? ആദ്യത്തെ കുട്ടയിൽ, $50 - 20 = 30$ പഴുത്ത മാങ്ങയുണ്ട്; രണ്ടാമത്തെ കുട്ടയിൽ, $40 - 15 = 25$ എണ്ണം പഴുത്തതാണ്. അപ്പോൾ രണ്ടും പഴുത്തതായി $30 \times 25 = 750$ ജോടി.

ഒന്നാമത്തെ (കുട്ടയിൽ നിന്നുള്ള) മാങ്ങ പഴുത്തതും, രണ്ടാമത്തേത് പഴുക്കാത്തതുമായി, $30 \times 15 = 450$ ജോടികളുണ്ട്. മറിച്ചായാലോ? ആദ്യത്തേത് പഴുക്കാത്തതും, രണ്ടാമത്തേത് പഴുത്തതുമായി $20 \times 25 = 500$. അപ്പോൾ മൂന്നാമത്തെ കൂട്ടത്തിൽ ആകെ എത്ര ജോടിയായി? $450 + 500 = 950$

സാധ്യതയും ആവൃത്തിയും

സാധാരണ ഒരു നാണയം കുറേ തവണ എറിയുമ്പോൾ, തലയോ വാലോ വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം ഏതാണ്ടു തുല്യമായിരിക്കുമെന്നു പറഞ്ഞല്ലോ. എന്നാൽ, നാണയം ഉണ്ടാക്കുന്നതിലെ അപാകത കൊണ്ടോ മറ്റോ, ചിലപ്പോൾ തലവശം വീഴാൻ സാധ്യത കൂടുതലായി എന്നു വരാം. ഇതെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

നാണയം ആവർത്തിച്ച് എറിയുമ്പോൾ ഓരോ വശവും വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം, പകുതിയിൽ നിന്ന് വല്ലാതെ മാറിയിട്ടുണ്ടെങ്കിലാണ് ഇത്തരമൊരു സംശയം ഉണ്ടാകേണ്ടത്. അപ്പോൾ കൂടുതൽ തവണ എറിഞ്ഞ് ഓരോ വശവും വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം വെവ്വേറെ പട്ടികപ്പെടുത്തുകയാണ് രീതി. ഉദാഹരണമായി ഈ പട്ടിക നോക്കുക.

ഏറ്	തല	വാൽ
10	6	4
100	58	42
1000	576	424
10000	5865	4135

ഇതിൽ നിന്ന് തലയുടെ സാധ്യത 0.6 എന്നും, വാലിന്റെ സാധ്യത 0.4 എന്നും എടുക്കുന്നതാണ്, രണ്ടും 0.5 എന്നെടുക്കുന്നതിനേക്കാൾ ശരി എന്നു കാണാമല്ലോ.

ഇത്തരം കണക്കുകൂട്ടലുകൾ കൂടുതൽ കൃത്യമാക്കാനുള്ള ഗണിതരീതികൾ, സാധ്യതാസിദ്ധാന്തം (Probability theory) എന്ന ഗണിതശാഖയുടെ തുടർന്നുള്ള പഠനത്തിൽ കാണാം.

ഒന്നെങ്കിലും പഴുത്തത് രണ്ടാമത്തേയും, മൂന്നാമത്തേയും കൂട്ടത്തിലാണല്ലോ. അവ ആകെ 750 + 950 = 1700. അപ്പോൾ ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത.

$$\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$$

ഇത് 0.85 എന്നുമെഴുതാം.

ഇതിൽ മൂന്നു കൂട്ടത്തിലേയും എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കാതെ, ആദ്യത്തെ കൂട്ടത്തിലെ എണ്ണം മാത്രം ഉപയോഗിച്ചും, ഈ സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കാമായിരുന്നില്ലേ? എങ്ങനെയാണിത്?

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തു നോക്കൂ.

- രണ്ടു പെട്ടികൾ; ഓരോന്നിലും 1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള സംഖ്യകളെഴുതിയ കടലാസുകഷണങ്ങൾ. ഓരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്ത്, അതിലെ സംഖ്യകൾ കൂട്ടുന്നു. തുകയായി വരാവുന്ന സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്? ഇവയോരോന്നും കിട്ടാനുള്ള സാധ്യതകൾ കണക്കാക്കുക.
- വിരലുകളുയർത്തി കൂട്ടുന്ന കളിയിൽ, ഏതു സംഖ്യ തുകയായി വരാനാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ സാധ്യത? ആ സാധ്യത എത്രയാണ്?
- ഒരാളോട് ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യ പറയാനാവശ്യപ്പെടുന്നു.
  - ഇതിലെ രണ്ടക്കങ്ങളും തുല്യമാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?
  - ആദ്യത്തെ അക്കം, രണ്ടാമത്തെ അക്കത്തേക്കാൾ വലുതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?
  - ആദ്യത്തെ അക്കം, രണ്ടാമത്തെ അക്കത്തേക്കാൾ ചെറുതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

അനിശ്ചിതത്വത്തിന്റെ അളവ്

കലണ്ടറിൽ ഓരോ ദിവസത്തേയും സൂര്യൻ ഉദിക്കുന്ന സമയവും, അസ്തമിക്കുന്ന സമയവും കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിച്ചിട്ടുണ്ടോ? കൃത്യമായ ചില ഗണിതനിയമങ്ങളനുസരിച്ചു ഭൂമിയും സൂര്യനുമെല്ലാം ചലിക്കുന്നതുകൊണ്ടാണ് ഇതെല്ലാം കണക്കാക്കാൻ പറ്റുന്നത്.

ഇതുപോലെതന്നെ മഴക്കാലവും വേനൽക്കാലവുമെല്ലാം ഏതു മാസങ്ങളിലാണെന്നും കണക്കു കൂട്ടാം. പക്ഷേ വേനൽക്കാലത്ത് പെട്ടെന്നൊരു മഴ വരുന്നത് മുൻകൂട്ടി കണക്കാക്കാൻ കഴിഞ്ഞില്ല എന്നു വരും. മഴയെ സ്വാധീനിക്കുന്ന ഘടകങ്ങളുടെ പെരുപ്പവും, അവ തമ്മിലുള്ള പരസ്പരബന്ധങ്ങളുടെ സങ്കീർണതയുമാണ് ഇത്തരം പ്രവചനങ്ങൾ വിഷമമാക്കുന്നത്.

പക്ഷേ ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിലും, സാഹചര്യങ്ങളുടെ ഗണിതപരമായ വിശകലനത്തിലൂടെ സാധ്യതകൾ കണക്കുകൂട്ടാം. അതുകൊണ്ടുതന്നെയാണ് ദൈനംദിന അന്തരീക്ഷസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ചുള്ള പ്രവചനങ്ങൾ, സാധ്യതകളായി പറയുന്നത്. അപ്രതീക്ഷിതമായി സാഹചര്യങ്ങളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റങ്ങളാണ് ഈ പ്രവചനങ്ങളെ ചിലപ്പോൾ തെറ്റിക്കുന്നതും.

യാതൊരു ശാസ്ത്രീയമായ അടിസ്ഥാനവുമില്ലാതെ, കൃത്യമെന്നപോലെ നടത്തുന്ന പ്രവചനങ്ങളേക്കാൾ, ഇത്തരം സാധ്യതാ പ്രവചനങ്ങൾക്ക് വിശ്വാസ്യത കൂടുമെന്ന് ശരിയായി നോക്കിയാൽ കാണുകയും ചെയ്യാം.