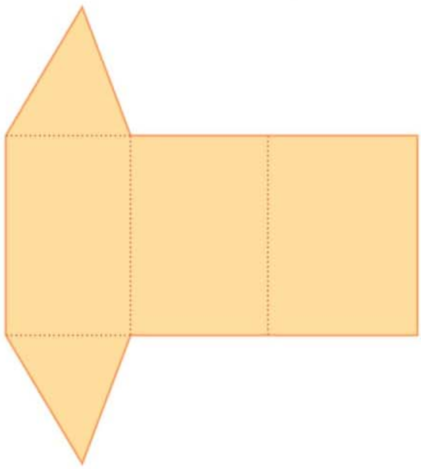
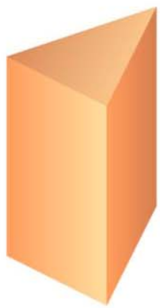
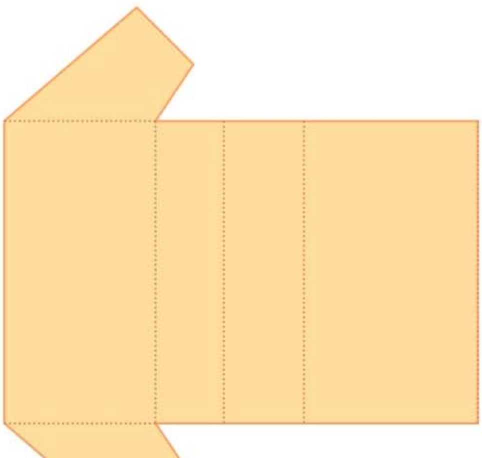
5 ഘനരൂപങ്ങൾ

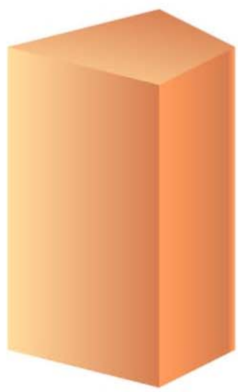
സ്തൂപികകൾ

പല രീതിയിൽ കടലാസ് വെട്ടിയെടുത്ത്, മടക്കി ഒട്ടിച്ച്, സ്തംഭ ങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കി നോക്കിയല്ലോ:









അവയെക്കുറിച്ചു പലതും പഠിക്കുകയും ചെയ്തു.

ഇനി വേറൊരു രൂപമുണ്ടാക്കി നോക്കാം. ആദ്യം ചുവടെക്കാണി ച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു ചിത്രം കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുക്കുക:

രൂപങ്ങൾ

ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളിൽ, ത്രികോണം, ചതുരം, വൃത്തം തുടങ്ങിയ ഒരു തല ത്തിലൊതുങ്ങുന്ന പരന്ന രൂപങ്ങ ളുണ്ട്; ചതുരസ്തംഭം, വൃത്തസ്തംഭം എന്നിങ്ങനെയുള്ള, ഒരു തലത്തിലു മൊതുങ്ങാതെ ഉയർന്നു നിൽക്കുന്ന ഘനരൂപങ്ങളുമുണ്ട്.

പെട്ടികളായും, കട്ടകളായും, തൂണു കളായുമെല്ലാം സ്തംഭങ്ങൾ പ്രത്യ ക്ഷപ്പെടുന്നു:

സ്തംഭങ്ങളല്ലാത്ത ഘനരൂപങ്ങളുമു ണ്ടല്ലോ.

ഈജിപ്റ്റിലെ പിരമിഡുകൾ

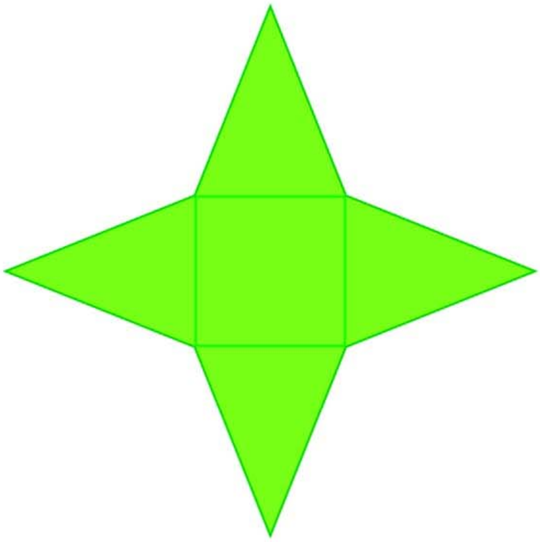
പിരമിഡ് എന്നു പറയുമ്പോൾത്തന്നെ മനസിലെത്തുന്ന ചിത്രം, ഈജിപ്റ്റിലെ പിരമിഡുകളാണ്.

ഈജിപ്റ്റിലെ പലഭാഗങ്ങളിലായി 138 പിരമിഡുകളാണ് കണ്ടെത്തിയിട്ടുള്ളത്. ബി.സി. രണ്ടായിരത്തോടടുപ്പിച്ചാണ് ഇവയിൽ പലതും നിർമിച്ചത്.

ഇവയിൽ ഏറ്റവും വലുത്, ഗിസയിലെ മഹാസ്തൂപിക *(Great Pyramid of Giza)* എന്ന പേരിലാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്.

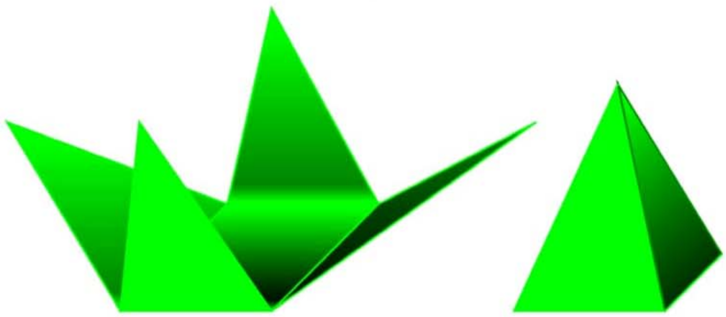
ഇതിന്റെ പാദമായ സമചതുരത്തിന് ഏതാണ്ട് അര ലക്ഷത്തോളം ചതുരശ്രമീറ്റർ പരപ്പുണ്ട്; ഉയരം ഏതാണ്ട് 140 മീറ്ററും. ഇതു നിർമിക്കാൻ ഇരുപതു കൊല്ലത്തോളം വേണ്ടിവന്നിട്ടുണ്ടാകും എന്നാണ് കണക്കുകൂട്ടിയിരിക്കുന്നത്.

കൃത്യമായ സമചതുരത്തിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ഭീമാകാരമായ കല്ലുകൾ മേൽപ്പോട്ട് പടുത്തുയർത്തി, ഒരു ബിന്ദുവിൽ അവസാനിക്കുന്ന ഈ രാജകീയ ശവക്കല്ലറകൾ, മനുഷ്യാധ്വാനത്തിന്റേയും, നിർമാണ വൈദഗ്ധ്യത്തിന്റേയും, ഗണിതവിജ്ഞാനത്തിന്റേയും ജീവിക്കുന്ന പ്രതീകങ്ങളായി ഉയർന്നു നിൽക്കുന്നു.



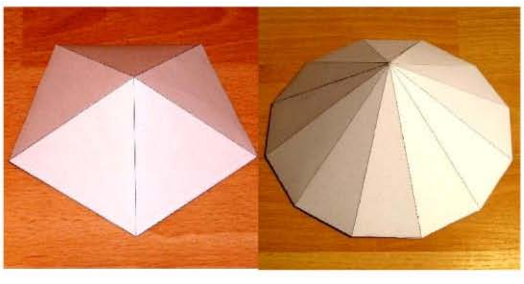
നടുക്കു സമചതുരം. ചുറ്റും നാലു ത്രികോണങ്ങൾ; ഇവ നാലും ഒരേപോലെയുള്ള (സർവസമമായ) സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളായിരിക്കണം.

ഇനി ഇത് ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മടക്കി ഒട്ടിക്കുക:



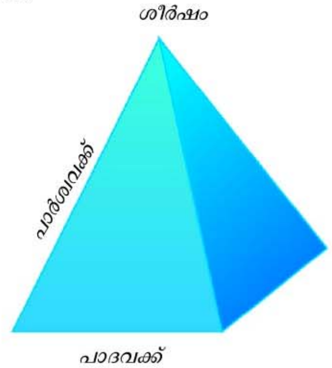
എന്തു രൂപമാണിത്? സ്തംഭമെന്നു വിളിക്കാൻ വയ്യ; സ്തംഭങ്ങൾക്ക് ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ടു പാദങ്ങളും, വശങ്ങളിൽ ചതുരങ്ങളുമാണ്. ഇപ്പോഴുണ്ടാക്കിയ രൂപത്തിലാണെങ്കിൽ, ചുവടെ സമചതുരം, മുകളിലൊരു മുന, ചുറ്റും ത്രികോണങ്ങൾ.

ചുവടെയുള്ള സമചതുരത്തിനു പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും ചതുരമാവാം; അതുമല്ലെങ്കിൽ ത്രികോണമോ, മറ്റേതെങ്കിലും ബഹുഭുജമോ ആവാം. പരീക്ഷിച്ചുനോക്കൂ. (പാദം സമബഹുഭുജമാകുമ്പോഴാണ് ഭംഗി)

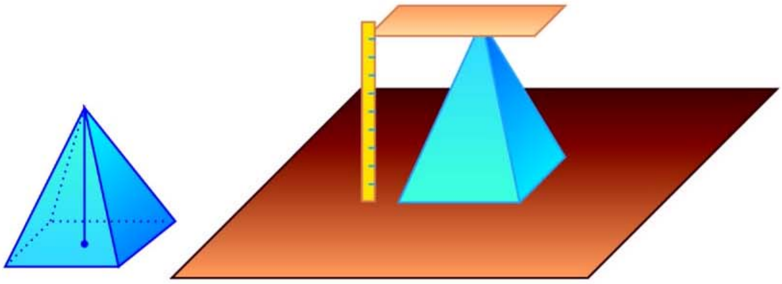


ഇത്തരം രൂപങ്ങൾക്കെല്ലാം പൊതുവായ പേരാണ് സ്തൂപികകൾ. *(pyramids)*

സ്തൂപികയുടെ പാദമായ ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളെ, സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കുകൾ (*base edges*) എന്നും, ത്രികോണങ്ങളുടെ മറ്റു വശങ്ങളെ പാർശ്വവക്കുകൾ (*lateral edges*) എന്നുമാണ് പറയുന്നത്. സ്തൂപികയുടെ മുകളറ്റത്തെ അതിന്റെ ശീർഷം (*apex*) എന്നാണ് പറയുന്നത്.



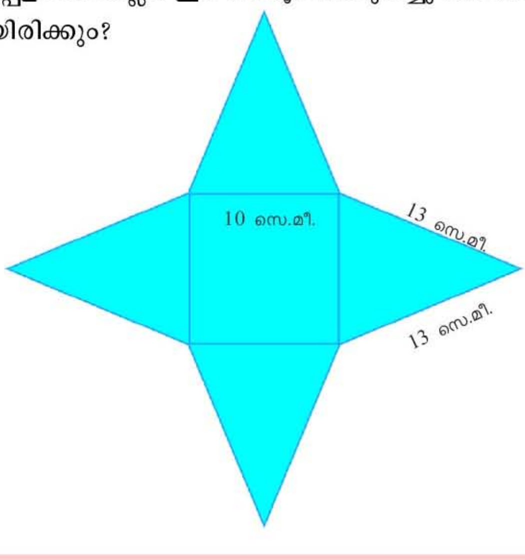
ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരമെന്നത്, അതിന്റെ പാദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലമാണല്ലോ. ഒരു സ്തൂപികയുടെ ഉയരമെന്നാൽ, ശീർഷത്തിൽനിന്ന് പാദത്തിലേക്കുള്ള ലംബദൂരമാണ്.



പരപ്പളവ്

പാദവക്കുകൾ 10 സെന്റിമീറ്ററും, പാർശ്വവക്കുകൾ 13 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

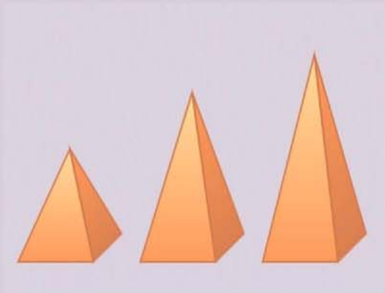
ഉപരിതലപരപ്പളവെന്നാൽ, ഇതുണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ കടലാസ്സിന്റെ പരപ്പളവാണല്ലോ. ഈ സ്തൂപിക മുറിച്ചു നിവർത്തി വച്ചാൽ എങ്ങനെയിരിക്കും?



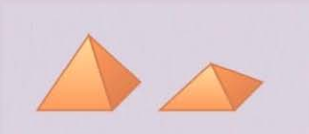
കോണും ഉയരവും

സമചതുരസ്തൂപികയുണ്ടാക്കാൻ, ആദ്യം പാദം നിശ്ചയിക്കണം. അതോടെ വശങ്ങളിൽ വരുന്ന സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെ പാദവും നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ടു. ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ മുകളിലത്തെ മൂലയിലെ കോണും തീരുമാനിച്ചാൽ, ത്രികോണം മുഴുവനായി.

ഈ കോൺ ചെറുതാകുന്തോറും. ത്രികോണങ്ങൾ നേർത്തുവരും; മെലിഞ്ഞുനീണ്ട സ്തൂപികകൾ കിട്ടും:



കോൺ വലുതാകുമ്പോഴോ? പരന്നു തടിച്ച സ്തൂപികകളാണ് കിട്ടുക:

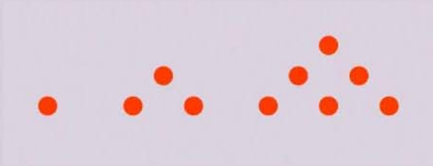


ഈ കോൺ പരമാവധി എത്ര വരെയാകാം? 90° ആകാമോ?

ഷഡ്ഭുജസ്തൂപികയ്ക്ക് ഈ കോൺ എത്ര വരെയാകാം? മറ്റു സ്തൂപികകൾക്കോ?

സ്തൂപികാസംഖ്യകൾ

ത്രികോണാകൃതിയിൽ പൊട്ടുകളിട്ട്, ത്രികോണസംഖ്യകളുണ്ടാക്കിയത് ഓർമയില്ലേ? (ഏഴാംക്ലാസിലെ **സമചതുരസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണസംഖ്യകൾ** എന്ന ഭാഗം)

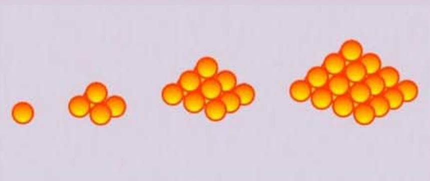


ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന 1, 3, 6, 10, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ n-ാം പദം,

$$1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

ആണെന്ന് സമാന്തരശ്രേണികൾ എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ.

ഇതുപോലെ ചെറുഗോളങ്ങൾ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിൽ കൂട്ടിവച്ച് സംഖ്യകളുണ്ടാക്കാം:



1, 5, 14, ... എന്നു തുടരുന്ന ഈ ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾക്ക്, സ്തൂപികാസംഖ്യകൾ *(pyramidal numbers)* എന്നാണ് പേര്. ഇതിലെ n-ാം പദം

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

എന്ന് കാണാൻ വിഷമമില്ലല്ലോ (**സമാന്തരശ്രേണി** എന്ന പാഠത്തിലെ **വർഗങ്ങളുടെ തുക** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക)

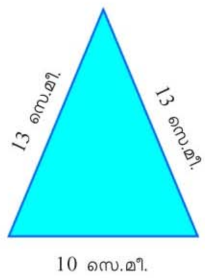
ഇതിലെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററെന്ന് പെട്ടെന്നു പറയാം; ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവോ?

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 10, 13, 13 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഇതിൽ നിന്ന് പരപ്പളവു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഹെറോണിന്റെ സഹായമുണ്ടല്ലോ. ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയിൽ നിന്ന് വശങ്ങളോരോന്നും കുറച്ച്,

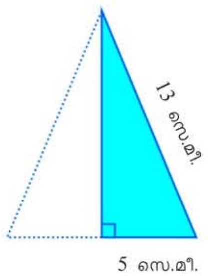
$$\sqrt{18\times8\times5\times5}=\sqrt{9\times16\times5\times5}=60$$

അതായത്, ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്, 60 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണ്. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് $100+(4\times60)=340$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇതിൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് മറ്റൊരു രീതിയിലും കണ്ടുപിടിക്കാം.



ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം കൂടി കിട്ടിയാൽ മതിയല്ലോ. സമപാർശ്വത്രികോണമായതിനാൽ, ഈ ലംബം താഴത്തെ വശത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യും.

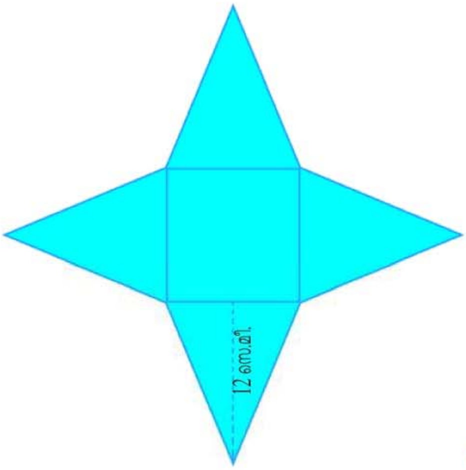


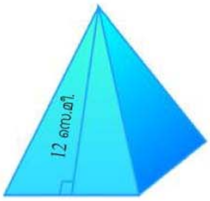
പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ച്, ലംബത്തിന്റെ നീളം

$$\sqrt{13^2-5^2}=12 \text{ സെ.മീ.}$$

എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുകയും ചെയ്യാം. അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $5\times12=60$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

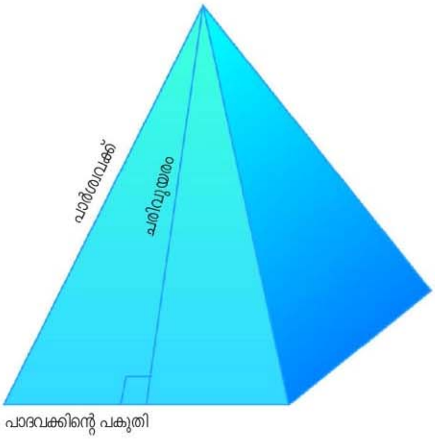
കടലാസ് സ്തൂപികയായിക്കഴിയുമ്പോൾ, ഇപ്പോൾ കണ്ടുപിടിച്ച ഉയരം എന്താകും?





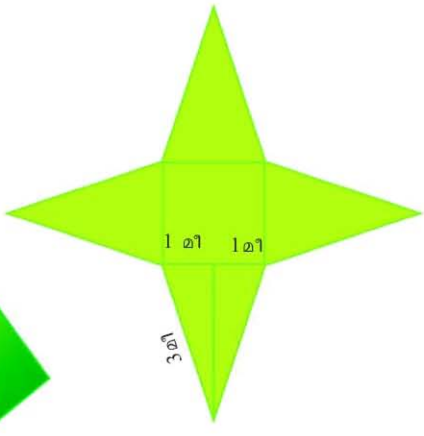
ഈ നീളത്തെ സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം, അല്ലെങ്കിൽ, പാർശ്വോന്നതി (*slant height*) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

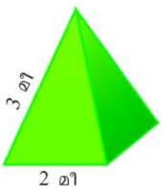
ഇപ്പോൾ ചെയ്ത കണക്കിൽ സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കും, പാർശ്വവക്കും, ചരിവുയരവും തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധം കണ്ടല്ലോ; ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയുള്ള ഒരു മട്ടത്രികോണം, സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഓരോ വശത്തുമുണ്ട്. ലംബവശങ്ങൾ ചരിവുയരവും പാദത്തിന്റെ പകുതിയും; കർണം പാർശ്വവക്കും.



ഇനി ഈ കണക്ക് ചെയ്തുകൂടേ?

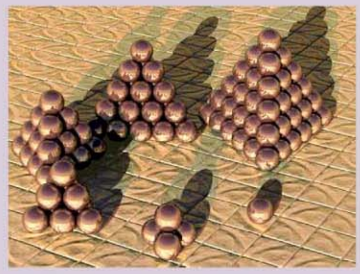
പാദവക്കുകൾ 2 മീറ്ററും, പാർശ്വവക്കുകൾ 3 മീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവെത്രയാണ്?





ചതുർമുഖസംഖ്യകൾ

ചെറുഗോളങ്ങളടുക്കി സമഭുജത്രികോണസ്തൂപികകളുമുണ്ടാക്കാം:



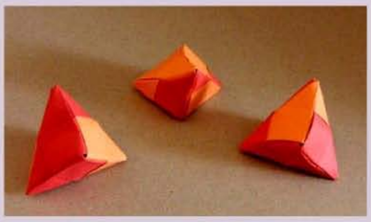
ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യാശ്രേണി 1, 4, 10, … എന്നാണല്ലോ; അതായത്, തുടർച്ചയായ ത്രികോണസംഖ്യകളുടെ തുകയാണ്, ഈ ശ്രേണിയിലെ ഓരോ പദവും. ഇതിലെ n-ാം പദം

$$1+3+6+\ldots+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

ആണെന്നു തെളിയിക്കാം. (ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ) ഈ സംഖ്യകളെ ചതുർമുഖസംഖ്യകൾ (*tetrahedral numbers*) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

നാലു ത്രികോണമുഖങ്ങൾ ചേർന്ന ഘനരൂപങ്ങൾക്കെല്ലാം പൊതുവായി പറയുന്ന പേരാണ് ചതുർമുഖം (*tetrahedron*).



ഇവയിലെ ഒരു സവിശേഷ രൂപമാണ് സമഭുജത്രികോണസ്തൂപിക.

പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 4 ചതുരശ്രമീറ്റർ. പാർശ്വവശങ്ങളുടെ പരപ്പളവു കാണാൻ ചരിവുയരംവേണം. നേരത്തെ പറഞ്ഞ മട്ടത്രികോണത്തിൽ പാദത്തിന്റെ പകുതി 1 മീറ്ററും, കർണമായ പാർശ്വവക്ക് 3 മീറ്ററും; അതിനാൽ ചരിവുയരം

$$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \text{ മീറ്റർ}$$

ഇതുപയോഗിച്ച് ഓരോ ത്രികോണവശത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്,

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ ചതുരശ്രമീറ്റർ}$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്, $4 + (4 \times 2\sqrt{2}) = 4 + 8\sqrt{2}$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

ഇതുകൊണ്ടു തൃപ്തിയായില്ലെങ്കിൽ, കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച് (അല്ലെങ്കിൽ $\sqrt{2}$ ന്റെ ഏകദേശവില ഓർത്തെടുത്ത്), ഇത് ഏകദേശം 15.31 ചതുരശ്രമീറ്ററാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ:

- വശങ്ങൾക്കെല്ലാം 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരം; ഒരു വശം 5 സെന്റിമീറ്ററും അതിൽനിന്നു എതിർമൂലയിലേക്കുള്ള ഉയരം 8 സെന്റിമീറ്ററും ആയ നാലു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ; ഇവ ചേർത്തുവച്ച് ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. അതിന് എത്ര ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസു വേണം?
- സമചതുരസ്തൂപികയിലുള്ള ഒരു കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ പാദവക്ക് 16 സെന്റിമീറ്ററും ചരിവുയരം 10 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇത്തരം 500 കളിപ്പാട്ടങ്ങൾ ചായം പൂശുന്നതിന് ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 80 രൂപ നിരക്കിൽ എത്ര രൂപ ചെലവാകും?
- ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖങ്ങൾ സമഭുജത്രികോണങ്ങളാണ്. പാദവക്കിന്റെ നീളം 30 സെന്റിമീറ്റർ. അതിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

ഉയരവും ചരിവുയരവും

സ്തൂപികകളുടെ അളവുകളിൽ പലപ്പോഴും ഉയരം പ്രധാനമാണ്. ഈ കണക്കുനോക്കൂ.

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിൽ ഒരു കൂടാരം ഉണ്ടാക്കണം. പാദത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 6 മീറ്റർ വേണം; കൂടാരത്തിന്റെ ഉയരം 4 മീറ്ററും. ഇതിന് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്റർ കാൻവാസ് വേണം?

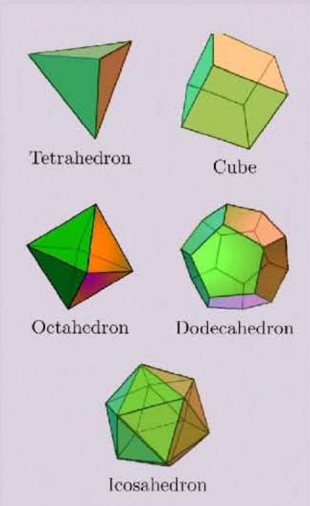
കൂടാരത്തിന്റെ വശങ്ങളായ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, ചരിവുയരം വേണ്ടേ? തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ വച്ച്, അതെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ബഹുമുഖങ്ങൾ

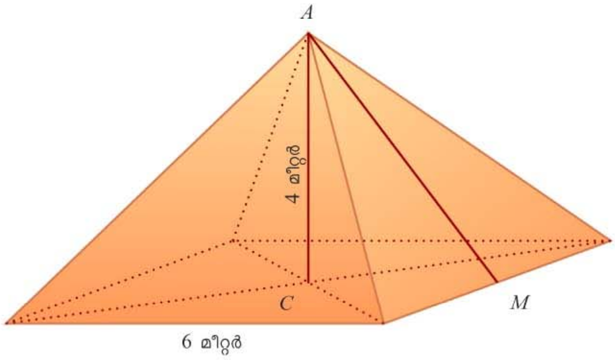
നാലു ത്രികോണങ്ങൾ മുഖങ്ങളായ ഘനരൂപങ്ങളുടെ പേര് ചതുർമുഖം എന്നു പറഞ്ഞല്ലോ. മുഖങ്ങളെല്ലാം ബഹുഭുജങ്ങളായ ഘനരൂപങ്ങളുടെ പൊതുവായ പേര് ബഹുമുഖം *(polyhedron)* എന്നാണ്.

ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളും, ബഹുഭുജസ്തൂപികകളുമെല്ലാം ബഹുമുഖങ്ങളാണ്; വൃത്തസ്തംഭവും, വൃത്തസ്തൂപികയും ബഹുമുഖങ്ങളല്ല.

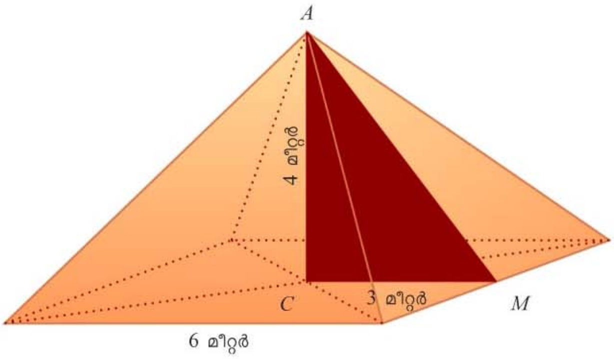
ഒരു ബഹുമുഖത്തിലെ മുഖങ്ങൾ സർവസമമായ സമബഹുഭുജങ്ങളായിരിക്കുകയും, ഓരോ മൂലയിലും കൂടിച്ചേരുന്ന മുഖങ്ങളുടെ എണ്ണം തുല്യമായിരിക്കുകയും ചെയ്താൽ, അതിനെ സമബഹുമുഖം *(regular polyhedron)* എന്നു വിളിക്കും. ഇത്തരം അഞ്ചെണ്ണമേയുള്ളുവെന്ന് യൂക്ലിഡ് തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്.



ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



നമുക്കുവേണ്ട ചരിവുയരം AM ആണ്. CM യോജിപ്പിച്ചാൽ, AM കർണമായ ഒരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടില്ലേ? അതിൽ CMന്റെ നീളം എത്രയാണ്?



ചിത്രത്തിൽനിന്ന് $AM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കാം.

അപ്പോൾ കൂടാരമുണ്ടാക്കാൻ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 6 മീറ്ററും, അതിൽനിന്നുള്ള ഉയരം 5 മീറ്ററുമായ നാലു ത്രികോണങ്ങളാണ് വേണ്ടത്. ഇവയുടെ മൊത്തം പരപ്പളവ്,

$$4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 60$$

ചതുരശ്രമീറ്ററാണല്ലോ. കൂടാരമുണ്ടാക്കാൻ ഇത്രയും കാൻവാസ് വേണം.

ഈ കണക്കിൽ കണ്ട കാര്യം എല്ലാ സമചതുരസ്തൂപികയിലും ശരിയാണല്ലോ. ഏതു സമചതുരസ്തൂപികയ്ക്കുള്ളിലും, ചരിവുയരം കർണമായ ഒരു മട്ടത്രികോണം സങ്കല്പിക്കാം; അതിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ, സ്തൂപികയുടെ ഉയരവും പാദവക്കിന്റെ പകുതിയും.

പാർശ്വതലപരപ്പളവ്

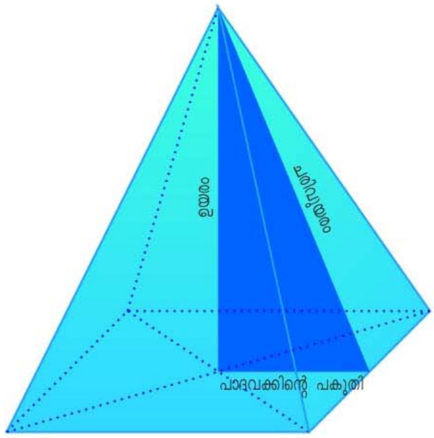
സ്തംഭങ്ങളിലെന്നപോലെ സ്തൂപികകളിലും, വശങ്ങളുടെ മാത്രം പരപ്പളവുകളുടെ തുകയെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് എന്നാണ് പറയുന്നത്.

സ്തൂപികയുടെ പാദം സമബഹുഭുജമാണെങ്കിൽ, വശങ്ങളിലെ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണ്. അതിനാൽ, പാർശ്വതലപരപ്പളവു കണക്കാക്കാൻ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ, പാദത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി.

ഇതു ബീജഗണിതത്തിലാക്കാം. പാദം n വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജമാണെന്നും, അതിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റെയും നീളം a ആണെന്നും എടുക്കാം. സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം l എന്നുമെടുത്താൽ, പാർശ്വതലപരപ്പളവ്

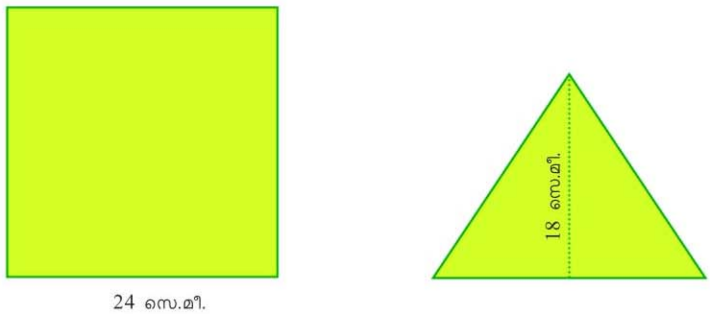
$$n \times \frac{1}{2} \times a \times l$$

ആണല്ലോ. ഇതിൽ $n \times a$ എന്നത്, പാദത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, പാദപരപ്പളവിന്റേയും ചരിവുയരത്തിന്റേയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

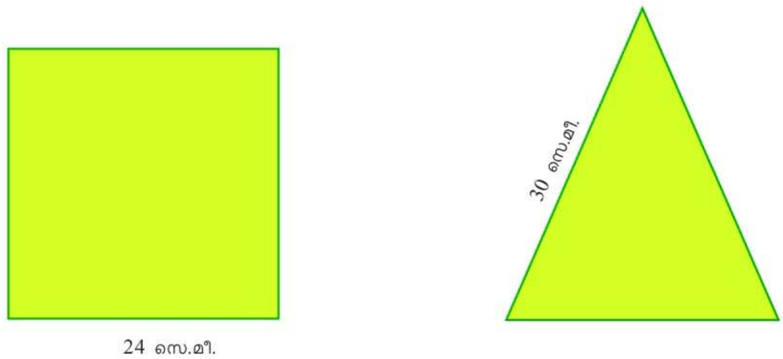


ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്യാമല്ലോ:

- ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ ഒരു സമചതുരവും, നാലു ത്രികോണങ്ങളും ഉപയോഗിച്ചു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കി.



സ്തൂപികയുടെ ഉയരം എത്രയാണ്? സമചതുരവും ത്രികോണങ്ങളും ഇങ്ങനെ ആയാലോ?

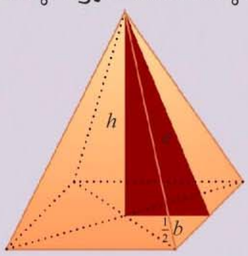


- കടലാസ് മുറിച്ച് ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. പാദവക്ക് 10 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററും വേണം. ത്രികോണങ്ങളുടെ അളവുകൾ എത്ര ആയിരിക്കണം?
- ഏതു സമചതുരസ്തൂപികയിലും ഉയരം, ചരിവുയരം, പാർശ്വവക്ക് എന്നിവയുടെ വർഗങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

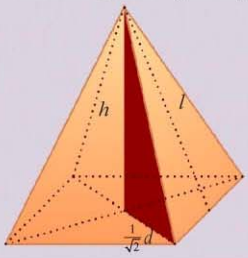
ത്രികോണബന്ധങ്ങൾ

ഒരു ത്രികോണസ്തൂപികയുടെ ഓരോ ത്രികോണമുഖത്തിലും, ചുവടെക്കാണുന്നപോലെ ഒരു മട്ടത്രികോണമുണ്ടെന്നു കണ്ടല്ലോ:

കൂടാതെ സ്തൂപികയ്ക്കുള്ളിൽ ഇങ്ങനെയൊരു മട്ടത്രികോണവും കണ്ടു:



മൂന്നാമതൊരു മട്ടത്രികോണവും, ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ കിട്ടും.



ഇവയിൽ നിന്ന് സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം b, പാർശ്വവക്കിന്റെ നീളം e, ചരിവുയരം l, ഉയരം h, പാദവികർണം d ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ കിട്ടും:

$$e^2 = l^2 + \frac{1}{4}b^2$$

$$l^2 = h^2 + \frac{1}{4}b^2$$

$$e^2 = h^2 + \frac{1}{2}d^2$$

ഈ സമവാക്യങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ടെണ്ണത്തിൽ നിന്ന്, ബീജഗണിതരീതിയിൽ മൂന്നാമത്തേത് കിട്ടുമെന്നു കാണാം.

സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

ഏതു സ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം പാദപരപ്പളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്ന് കണ്ടല്ലോ. ഒരു സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തമോ?

സമചതുരസ്തൂപിക തന്നെ എടുക്കാം. ആദ്യം ഒരു പരീക്ഷണമാവാം. നല്ല കട്ടിയുള്ള കടലാസുകൊണ്ട്, ഒരു തുറന്ന സമചതുര സ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുക. ഇനി, അതേ പാദവും ഉയരവുമുള്ള ഒരു തുറന്ന സമചതുരസ്തംഭവും ഉണ്ടാക്കുക.

സ്തൂപികയിൽ മണൽ നിറച്ച്, സ്തംഭത്തിലേക്കു പകരുക; സ്തംഭം നിറയാൻ ഇതു മൂന്നു തവണ ചെയ്യേണ്ടി വരും. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണെന്നു കാണാം. (ഇതിന്റെ ഗണിതപരമായ തെളിവ് പാഠത്തിന്റെ അവസാനഭാഗത്ത് കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്).

സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിനെ ഉയരംകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണല്ലോ.

അപ്പോൾ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തത്തെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണ്.

ഉദാഹരണമായി, പാദവക്കുകൾ 10 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 8 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3} \times 10^2 \times 8 = 266\frac{2}{3}$ ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്.

ലോഹം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമചതുരക്കട്ടയുടെ ഒരു വക്കിന്റെ നീളം 15 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഇത് ഉരുക്കി 25 സെന്റിമീറ്റർ പാദവക്കുള്ള ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കി. അതിന്റെ ഉയരം എന്താണ്?

സമചതുരക്കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം 15^3 ഘനസെന്റിമീറ്ററാണല്ലോ.

സ്തൂപികാപീഠം

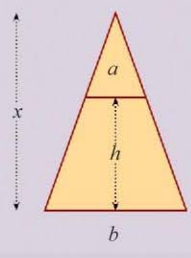
ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയെ പാദത്തിനു സമാന്തരമായി മുറിച്ചാൽ, മുകളിൽ നിന്നൊരു കൊച്ചു സമചതുര സ്തൂപിക കിട്ടും.

താഴെയോ?

ഇത്തരമൊരു രൂപത്തിന് സമചതുര സ്തൂപികാപീഠം (frustum of a square pyramid) എന്നാണ് പേര്.

ഇങ്ങനെയൊരു പീഠത്തിന്റെ മുകളിലും താഴെയുമുള്ള സമചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങളും, പീഠത്തിന്റെ ഉയരവും അറിയാമെങ്കിൽ, അതു മുറിച്ചെടുത്ത വലിയ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുമോ?

സ്തൂപികയുടെ ശീർഷത്തിലൂടെ കുത്തനെ മുറിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ത്രികോണം നോക്കുക:



ചിത്രത്തിലെ രണ്ടു സദൃശത്രികോണങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{a}{b} = \frac{x-h}{x}$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ നിന്ന്

$$x = \frac{bh}{b-a}$$

എന്നു കിട്ടും (ചെയ്തുനോക്കൂ).

ഉരുക്കി ഉണ്ടാക്കുന്ന സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തവും ഇതു തന്നെ. പാദപരപ്പളവിനെ ഉയരത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം.

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന്, പാദപരപ്പളവ് 25^2 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആയതിനാൽ, ഉയരത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്ന് $\frac{15^3}{25^2}$ എന്നും, അതിൽ നിന്ന് ഉയരം

$$3 \times \frac{15^3}{25^2} = 16.2 \text{ സെ.മീ.}$$

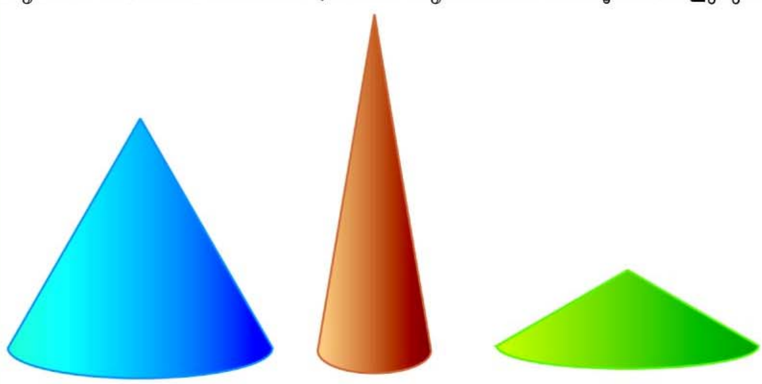
എന്നും കാണാം.

ഇതുപോലെ ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

- പാദവക്ക് 10 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?
- രണ്ടു സമചതുരസ്തൂപികകളുടെ വ്യാപ്തം തുല്യമാണ്. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ പകുതിയാണ് രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ ഉയരത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം?
- രണ്ടു സമചതുരസ്തൂപികകളുടെ പാദവക്കുകൾ $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ $1 : 3$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലും. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം 180 ഘന സെന്റിമീറ്ററാണ്. രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

വൃത്തസ്തൂപിക

വൃത്തസ്തംഭങ്ങൾ പോലെ, പാദം വൃത്തമായ സ്തൂപികകളുമുണ്ട്:

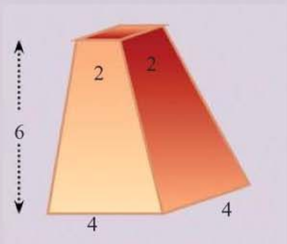


ഇവയെ വൃത്തസ്തൂപികകൾ (*cones*) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.

ചതുരം വളച്ച് വൃത്തസ്തംഭമുണ്ടാക്കിയതുപോലെ, ഒരു വൃത്താംശം വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപികയുമുണ്ടാക്കാം. (അടഞ്ഞ സ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണമെങ്കിൽ, ഒരു കൊച്ചു വൃത്തം വേറെയും വേണം.)

സ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

ഏതാണ്ട് ബി.സി. 1850 ലേതെന്ന് കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്ന, ഈജിപ്റ്റിലെ ഒരു പപ്പൈറസ് മോസ്കോയിലെ പുഷ്കിൻ മ്യൂസിയത്തിലുണ്ട്. അതിലെ പതിനാലാമത്തെ ചോദ്യം, ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കാനാണ്. സ്തൂപികയുടെ രണ്ടു സമചതുരമുഖങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ 2 ഉം 4ഉം; ഉയരം 6.



വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള രീതി പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്:

4 ന്റെ വർഗം, 4 ന്റെ രണ്ടുമടങ്ങ്, 2 ന്റെ വർഗം ഇവ കൂട്ടിയാൽ, 28. ഇതിനെ 6 ന്റെ $\frac{1}{3}$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ 56.

ഇതാണ് പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം.

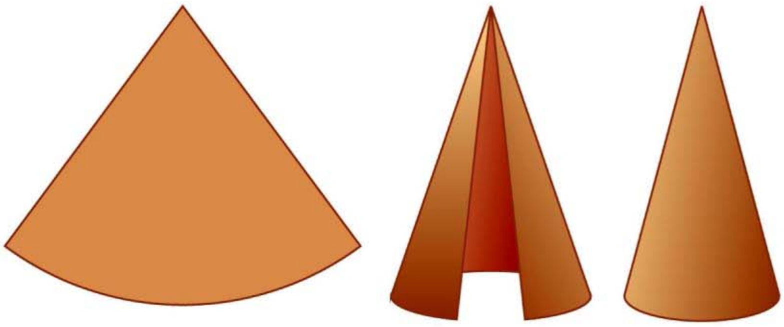
ഇതിന്റെ ബീജഗണിതം ആലോചിച്ചു നോക്കാം: പീഠത്തിന്റെ മുകളിലേയും, ചുവട്ടിലേയും സമചതുരങ്ങളുടെ വശത്തിന്റെ നീളം a, b എന്നും, പീഠത്തിന്റെ ഉയരം h എന്നും എടുക്കാം. പീഠം മുറിച്ചെടുത്ത വലിയ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം x എന്നെടുത്താൽ , പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{3}((b^2x - a^2(x-h))$$

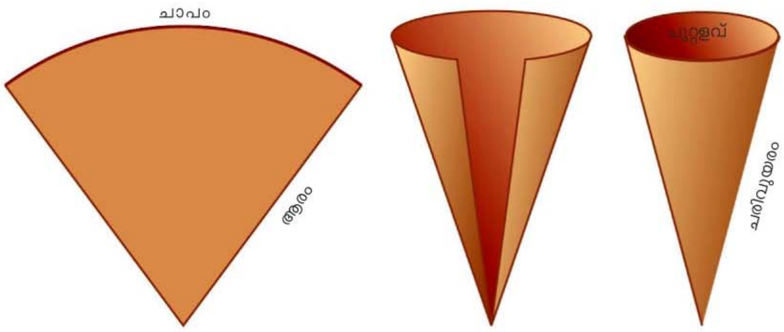
എന്നു കിട്ടും. $x = \frac{bh}{b-a}$ ഇതിൽ എന്നു നേരത്തെ കണ്ടതുപയോഗിച്ചു ലഘൂകരിച്ചാൽ,

$$\frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$$

എന്നും കാണാം. ഇതു തന്നെയല്ലേ പപ്പൈറസിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതും?



ഇതിൽ വളയ്ക്കുന്ന വൃത്താംശത്തിന്റെ അളവുകളും, ഉണ്ടാക്കിയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ അളവുകളും തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?



വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം, സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരമാകും; വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപനീളം, സ്തൂപികയുടെ പാദ ചുറ്റളവുമാകും.

വൃത്താംശത്തിന്റെ വലിപ്പം കേന്ദ്രകോണിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് പലപ്പോഴും പറയുന്നത്. ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

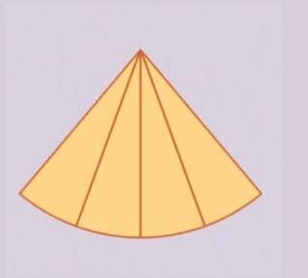
ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു വൃത്തത്തിൽനിന്ന് $45°$ കേന്ദ്രകോണുള്ള വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുത്തു. ഇതു വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരവും പാദത്തിന്റെ ആരവും എത്രയാണ്?

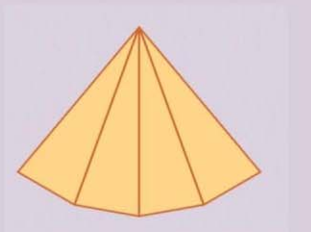
സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം, വൃത്തത്തിന്റെ ആരമായ 12 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ. പാദത്തിന്റെ ആരമോ?

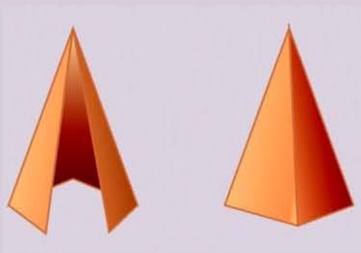
$45°$ എന്നത്, $360°$ യുടെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണല്ലോ. വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം, കേന്ദ്രകോണിന് ആനുപാതികവുമാണ്. അപ്പോൾ ഈ വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം, മൊത്തം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണ്. ഈ ചാപമാണ് സ്തൂപികയുടെ പാദവൃത്തം. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുത്ത വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണ്. ആരങ്ങൾ, ചുറ്റളവുകൾക്ക് ആനുപാതികമായതിനാൽ,

വൃത്താംശവും സ്തൂപികകളും

സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നതുപോലെ, വൃത്തത്തിനു ചുറ്റും ത്രികോണങ്ങൾ ഒട്ടിച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. എന്നാൽ, വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നപോലെ വൃത്താംശം വളച്ച് സമചതുരസ്തൂപികയുണ്ടക്കാം. ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:







വൃത്താംശത്തിനെ കൂടുതൽ സമഭാഗങ്ങളാക്കി, മറ്റു ബഹുഭുജസ്തൂപികകളും ഉണ്ടാക്കാമല്ലോ.

ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗംതന്നെയാണ്. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം $12 \times \frac{1}{8} = 1.5$ സെന്റിമീറ്റർ.

മറിച്ചൊരു ചോദ്യമായാലോ?

പാദത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ, വൃത്താംശം വേണം. ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്റർ വേണമെന്നുള്ളതിനാൽ, 15 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ നിന്നു തന്നെ വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുക്കണം. അതിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയായിരിക്കണം?

സ്തൂപികയുടെ പാദമായ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം, വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുക്കുന്ന വലിയവൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ഭാഗമാണല്ലോ (അതെങ്ങനെ?). അപ്പോൾ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്. ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപനീളമാണല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപം, അതു വെട്ടിയെടുത്ത വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്. അതിനാൽ, അതിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $360 \times \frac{1}{3} = 120°$.

ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തു നോക്കൂ:

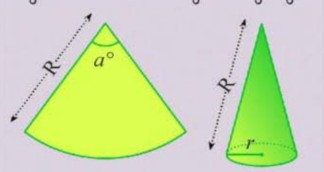
- ആരം 10 സെന്റിമീറ്ററും കേന്ദ്രകോൺ 60° ഉം ആയ വൃത്താംശം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരവും ചരിവുയരവും എത്രയാണ്?
- പാദത്തിന്റെ ആരം 10 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപിക നിർമിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയാണ്?
- ഒരു അർധവൃത്തം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരവും ചരിവുയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

വക്രതലപരപ്പളവ്

വൃത്തസ്തംഭത്തിലെന്നപോലെ, വൃത്തസ്തൂപികയ്ക്കും ഒരു വക്രതലമുണ്ട്; അതിന്റെ ചരിഞ്ഞുയരുന്ന ഭാഗം. വൃത്തസ്തൂപിക വളച്ചുണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ്

ആരവും ചരിവുയരവും

ആരം R ഉം, കേന്ദ്രകോൺ $a°$ യുമായ ഒരു വൃത്താംശം വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപികയുണ്ടാക്കിയെന്നു കരുതുക.



സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം R. പാദത്തിന്റെ ആരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആദ്യം വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം $\frac{a}{360} \times 2\pi R$ ആണെന്ന് കാണാം; ഇതാണ് സ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ്. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ

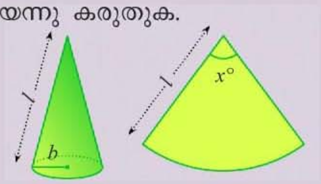
$$2\pi r = \frac{a}{360} \times 2\pi R$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$r = \frac{a}{360} \times R$$

എന്നു കിട്ടും.

മറിച്ച്, പാദത്തിന്റെ ആരം b യും, ചരിവുയരം l ഉം ആയ ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക മുറിച്ചു നിവർത്തി വൃത്താംശമാക്കിയെന്നു കരുതുക.



വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം l. കേന്ദ്രകോൺ $x°$ എന്നെടുത്താൽ

$$\frac{x}{360} \times 2\pi l = 2\pi b$$

എന്നുകാണാം. ഇതിൽ നിന്ന്

$$x = \frac{b}{l} \times 360$$

എന്നും കിട്ടും.

ഈ വക്രതലത്തിന്റെ പരപ്പളവ്. (വൃത്തസ്തംഭത്തിലും, അതിന്റെ വക്രതലം ചുരുട്ടിയുണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവാണല്ലോ, വക്രതലപരപ്പളവ്.)

ഈ കണക്കു നോക്കുക.

ആരം 8 സെന്റിമീറ്ററും ചരിവുയരം 30 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു തൊപ്പി ഉണ്ടാക്കാൻ എത്ര ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് വേണം?

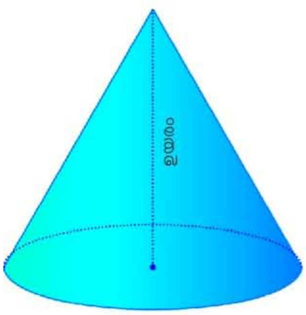
ഇത്തരമൊരു തൊപ്പിയുണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്. ചരിവുയരം 30 സെന്റിമീറ്റർ വേണ്ടതിനാൽ, ഇത്രയും ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ നിന്നു വേണം, വൃത്താംശം മുറിച്ചെടുക്കാൻ.

കൂടാതെ, സ്തൂപികയുടെ പാദമായ കൊച്ചുവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 8 സെന്റിമീറ്ററായിരിക്കണം. അതായത്, വെട്ടിയുണ്ടാക്കുന്ന വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ ഭാഗം. അപ്പോൾ, ചെറുവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, വൻവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ ഇതേ ഭാഗമാണ്. ചെറുവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്, വെട്ടിയെടുക്കേണ്ട വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം. ഇങ്ങനെ നോക്കുമ്പോൾ, വെട്ടിയെടുക്കേണ്ട വൃത്താംശം, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{4}{15}$ ഭാഗമാണെന്നു കാണാം. അതിനാൽ, അതിന്റെ പരപ്പളവ്, ഈ വൃത്തത്തിന്റെ ഇതേ ഭാഗമാണ്. അതായത്

$$\pi \times 30^2 \times \frac{4}{15} = \pi \times 2 \times 30 \times 4 = 240\pi$$

അപ്പോൾ തൊപ്പിയുണ്ടാക്കാൻ 240π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസു വേണം. (ക്രിയചെയ്ത്, ഇത് ഏതാണ്ട് 754 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണെന്നു കാണാം.)

സമചതുരസ്തൂപികയിലെന്നപോലെ വൃത്തസ്തൂപികയിലും, പാദത്തിൽ നിന്ന് ശീർഷത്തിലേക്കുള്ള ലംബദൂരമാണ് ഉയരം. വൃത്തസ്തൂപികയിൽ, ഇത്, പാദമായ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, ശീർഷവും തമ്മിലുള്ള അകലമാണ്.



വക്രതലപരപ്പളവ്

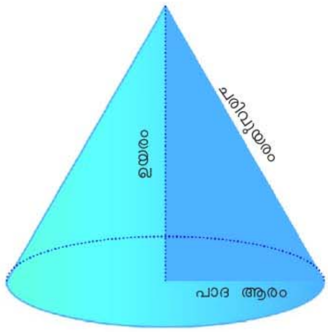
ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതലപരപ്പളവ്, അതുണ്ടാക്കാനുപയോഗിച്ച വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവുതന്നെയാണല്ലോ. സ്തൂപികയുടെ പാദ ആരം r എന്നും, ചരിവുയരം l എന്നുമെടുത്താൽ, വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം l എന്നും, കേന്ദ്രകോൺ $\frac{r}{l} \times 360$ എന്നും കിട്ടും. അപ്പോൾ അതിന്റെ പരപ്പളവ്,

$$\frac{1}{360} \times \left(\frac{r}{l} \times 360\right) \times \pi l^2 = \pi r l$$

എന്നു കണക്കാക്കാം. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിച്ചത് ഓർക്കുക.)

അതായത്, വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതലപരപ്പളവ്, പാദചുറ്റളവിന്റേയും ചരിവുയരത്തിന്റേയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

സമചതുരസ്തൂപികയിലെന്നപോലെ വൃത്തസ്തൂപികയിലും, ഉയരവും ചരിവുയരവും തമ്മിലൊരു മട്ടത്രികോണബന്ധമുണ്ട്:



ഉദാഹരണമായി പാദത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്ററും ആയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം $\sqrt{5^2+10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ സെന്റിമീറ്ററാണ്.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്യാമല്ലോ.

- പാദത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?
- പാദത്തിന്റെ വ്യാസം 30 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 40 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?
- വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു പൂക്കുറ്റിയുടെ പാദവ്യാസം 10 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇത്തരം 10000 പൂക്കുറ്റികളുടെ പുറംഭാഗം മുഴുവൻ വർണക്കടലാസ് ഒട്ടിക്കണം. ഒരു ചതുരശ്രമീറ്റർ വർണക്കടലാസിന് 2 രൂപയാണ് വില. ഇതിന് ആകെ എത്ര രൂപ ചെലവാകും?
- ഒരു അർധവൃത്തം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതലപരപ്പളവ് അതിന്റെ പാദപരപ്പളവിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

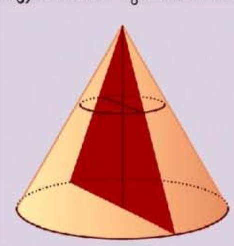
സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണാൻ ചെയ്തതുപോലെ ഒരു പരീക്ഷണം ഇവിടെയുമാകാം. ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുക. അതേ പാദവും ഉയരവുമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തംഭവും. സ്തൂപികയിൽ മണൽ നിറച്ച് വൃത്തസ്തംഭത്തിലേക്ക് പകർന്നുനോക്കൂ. ഇവിടെയും സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണെന്ന് കാണാം. അതായത്

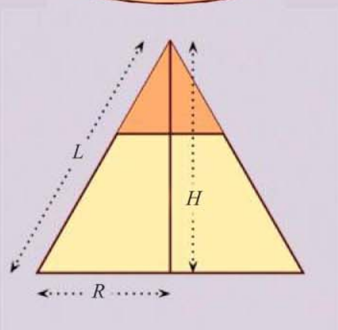
വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിന്റേയും ഉയരത്തിന്റേയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണ്.

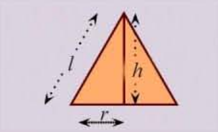
ചെറുതും വലുതും

ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയെ പാദത്തിനു സമാന്തരമായി മുറിച്ചാൽ, മുകളിലൊരു കൊച്ചു വൃത്തസ്തൂപിക കിട്ടും.

ചെറിയ സ്തൂപികയുടെ അളവുകളും വലിയ സ്തൂപികയുടെ അളവുകളും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?







പാദത്തിന്റെ ആരം, ഉയരം, ചരിവുയരമിവയെല്ലാം വലിയ സ്തൂപികയ്ക്ക് R, H, L എന്നും ചെറുതിന് r, h, l എന്നുമെടുത്താൽ, ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{l}{L}$$

എന്നു കാണുന്നില്ലേ?

(ഇതിന്റെയും ഗണിതപരമായ തെളിവ്, പാഠത്തിന്റെ അവസാനം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്). ഉദാഹരണമായി, പാദത്തിന്റെ ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 6 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 6 = 32\pi$$

ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്.

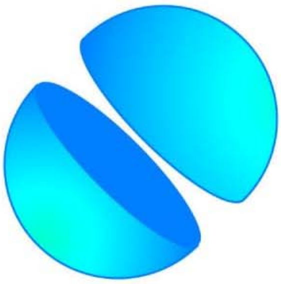
ഈ കണക്കുകൾ നിങ്ങൾക്കാണ്:

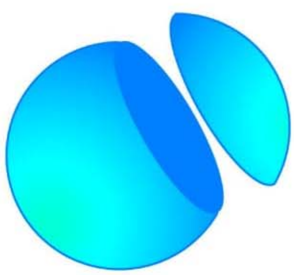
- വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തടിക്കഷണത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം 15 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 40 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇതിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?
- പാദത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 20 സെന്റിമീറ്ററുമായ കട്ടിയായ ഒരു വൃത്തസ്തംഭം ഉരുക്കി, പാദത്തിന്റെ ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമായ എത്ര വൃത്തസ്തൂപികകൾ ഉണ്ടാക്കാം?
- 216° കേന്ദ്രകോണും 25 സെന്റിമീറ്റർ ആരവുമുള്ള ഒരു വൃത്താംശം വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക ആക്കിയാൽ അതിന്റെ ആരവും ഉയരവും എത്രയായിരിക്കും? വ്യാപ്തമോ?
- രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികകളുടെ ആരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 3 : 5 അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 അവയുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം എത്രയാണ്?
- തുല്യവ്യാപ്തമുള്ള രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികകളുടെ ആരങ്ങൾ 4 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. അവയുടെ ഉയരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഗോളം

പന്തുകളിയുടെ ഹരമായും, ലഡ്ഡുവിന്റെ മധുരമായുമൊക്കെ ഗോളങ്ങൾ ആസ്വദിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇനി ഗോളത്തിന്റെ ഗണിതമാവാം. (ഇംഗ്ലീഷിൽ ഗോളത്തിന് *sphere* എന്നാണു പേര്.)

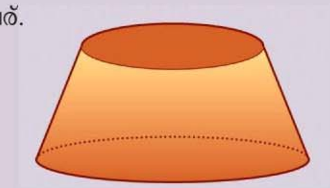
വൃത്തസ്തംഭത്തിനെയോ, വൃത്തസ്തൂപികയെയോ പാദത്തിനു സമാന്തരമായി മുറിച്ചാൽ, വൃത്തം കിട്ടും. ഗോളത്തെ എങ്ങനെ മുറിച്ചാലും വൃത്തം കിട്ടും:



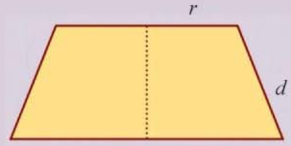


വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠം

ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ മുകളിൽനിന്ന് ഒരു കൊച്ചു വൃത്തസ്തൂപിക വെട്ടിയെടുത്താൽ താഴെ മിച്ചം വരുന്ന ഭാഗത്തിന് വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠം (*frustum of a cone*) എന്നാണ് പേര്.



ഒരു വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ മുകളിലെത്തെയും താഴത്തെയും വൃത്തങ്ങളുടെ ആരവും, ചരിവുയരവും അറിയാമെങ്കിൽ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?



വലിയ സ്തൂപികയുടെയും, ചെറിയ സ്തൂപികയുടെയും ചരിവുയരങ്ങൾ L, l എന്നെടുത്താൽ, ചിത്രത്തിലെ $d = L - l$. അപ്പോൾ പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്,

$$\begin{aligned} \pi RL - \pi rl &= \pi(RL - rl) \\ &= \pi\big(R(l + d) - rl\big) \\ &= \pi(Rl + Rd - rl) \end{aligned}$$

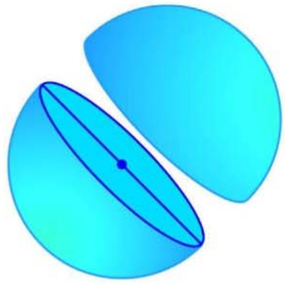
ഇതിൽ നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്,

$\frac{r}{R} = \frac{l}{L}$ ആയതിനാൽ, $Rl = rL$ എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്.

$$\begin{aligned} \pi(rL + Rd - rl) &= \pi\big(r(L - l) + Rd\big) \\ &= \pi(rd + Rd) \\ &= \pi(r + R)d \end{aligned}$$

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് അതിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലേക്കുമുള്ള അകലം തുല്യമാണല്ലോ. ഗോളത്തിനുമുണ്ടൊരു കേന്ദ്രം; അതിൽ നിന്ന് ഗോളോപരിതലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം ഒരേ അകലമാണ്. ഈ അകലത്തെ ഗോളത്തിന്റെ ആരം എന്നു പറയുന്നു; അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിനെ വ്യാസമെന്നും.

ഒരു ഗോളത്തെ കൃത്യം പകുതിയായി മുറിച്ചാൽ ഉണ്ടാകുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ആരവും വ്യാസവുമൊക്കെയാണ്, ഗോളത്തിന്റെയും കേന്ദ്രവും ആരവും വ്യാസവും.



ഇതുവരെക്കണ്ട രൂപങ്ങളിൽ ചെയ്തപോലെ, ഗോളത്തെ മുറിച്ചു നിവർത്തി ഉപരിതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയില്ല. അൽപം ചുളിവോ, വലിച്ചുനീട്ടലോ ഇല്ലാതെ, ഗോളത്തെ മുറിച്ചു നിരപ്പാക്കാൻ കഴിയില്ല എന്നതാണു കാര്യം.

എന്നാൽ ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ, ഉപരിതലപരപ്പളവ് $4\pi r^2$ ആണെന്നു തെളിയിക്കാം. (തെളിവ് പാഠത്തിന്റെ അവസാനം നൽകിയിരിക്കുന്നു).

മറ്റൊരുരീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ

> *ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്, അതിന്റെ ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിനെ 4π കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്.*

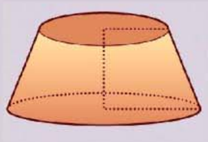
കൂടാതെ ആരം r ആയ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{4}{3}\pi r^3$ എന്ന് തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. (ഇതിന്റെയും തെളിവ് പാഠത്തിന്റെ അവസാനം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്).

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കൂ:

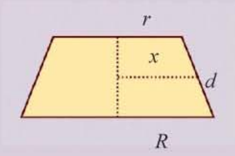
- വക്കുകളുടെയെല്ലാം നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു സമചതുരക്കട്ടയിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

പീഠവും സ്തംഭവും

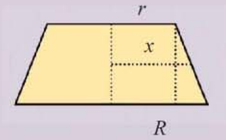
ചിത്രത്തിലെ വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് $\pi(r+R)d$ എന്നു കണ്ടല്ലോ.



ഇതിന്റെ മധ്യത്തുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ആരം x എന്നെടുത്താൽ ഇങ്ങനെയൊരു ചിത്രം കിട്ടും:



ഇങ്ങനെ ഒരു വരകൂടി വരച്ചാലോ?



വലതുവശത്തെ രണ്ടു സദൃശമട്ടത്രികോണങ്ങളിൽനിന്ന്,

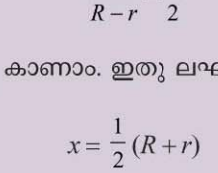
$$\frac{x-r}{R-r}=\frac{1}{2}$$

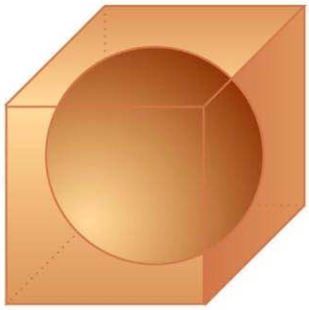
എന്നു കാണാം. ഇതു ലഘൂകരിച്ചാൽ

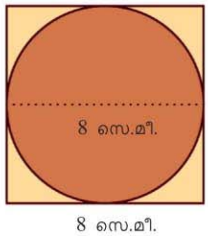
$$x=\frac{1}{2}(R+r)$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്, പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, $2\pi xd$

ഇത്, പാദത്തിന്റെ ആരം x ഉം, ഉയരം d യും ആയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവല്ലേ?







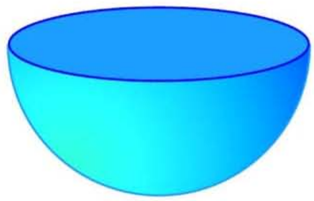
ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസം, സമചതുരക്കട്ടയുടെ വക്കിന്റെ നീളമാണെന്ന് ചിത്രത്തിൽനിന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

$$4\pi \times 4^2 = 64\pi \text{ ച.സെ.മീ}$$

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം:

- 12 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള കട്ടിയായ ഒരു ഗോളത്തെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളായി മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന ഒരു അർധഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിന്റെ പകുതിയും ഒരു വൃത്തവും ചേർന്നതാണല്ലോ അർധഗോളം.



ഗോളത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

$$4\pi \times 12^2 = 576\pi \text{ ച.സെ.മീ}$$

ഇതിന്റെ പകുതിയും വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവും ചേർന്നതാണ് അർധഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്. വൃത്തത്തിന്റെ ആരവും 12 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ പരപ്പളവ്

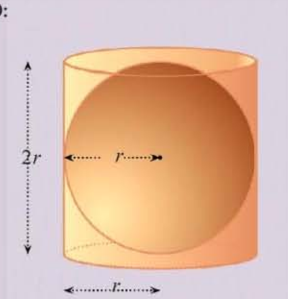
$$\pi \times 12^2 = 144\pi \text{ ച.സെ.മീ}$$

അപ്പോൾ അർധഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2} \times 576\pi + 144\pi = 432\pi \text{ ച.സെ.മീ}$$

ഗോളവും സ്തംഭവും

ഒരു ഗോളത്തിനെ കൃത്യമായി പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആരം, ഗോളത്തിന്റെ തന്നെ ആരവും ഉയരം, ഈ ആരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങുമാണല്ലോ:



അതായത്, ഗോളത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആരം r, ഉയരം $2r$. അപ്പോൾ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ്.

$$(2\pi r \times 2r) + (2 \times \pi r^2) = 6\pi r^2$$

ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് $4\pi r^2$. ഈ രണ്ടു പരപ്പളവുകളും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $2 : 3$

മാത്രവുമല്ല, സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

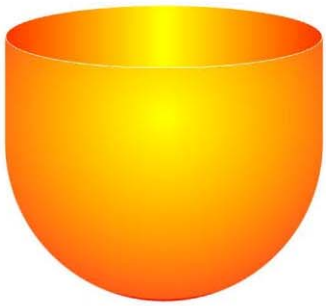
$$\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$$

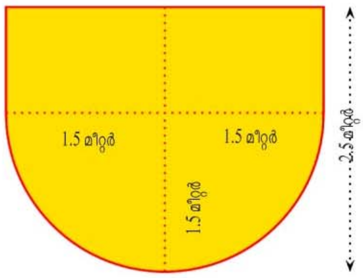
ഉം, ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{4}{3}\pi r^3$ ഉം ആയതിനാൽ, വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും $2 : 3$ തന്നെ.

അതായത്, ഗോളത്തിന്റേയും അതിനെ കൃത്യമായി പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റേയും ഉപരിതലപരപ്പളവും വ്യപ്തവും $2 : 3$ എന്ന ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

ഒരു ഉദാഹരണം കൂടിയാകാം:

വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഒരറ്റത്ത് അർധഗോളം ഘടിപ്പിച്ച രൂപത്തിലുള്ള ഒരു ജലസംഭരണിയുടെ ആകെ ഉയരം 2.5 മീറ്ററും, പാദത്തിന്റെ ആരം 1.5 മീറ്ററുമാണ്. ഇതിൽ എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും?





ടാങ്കിലെ അർധഗോളഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\frac{2}{3}\pi \times 1.5^3 = 2.25\pi \text{ ഘനമീറ്റർ}$$

വൃത്തസ്തംഭഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\pi \times 1.5^2(2.5 - 1.5) = 2.25\pi \text{ ഘനമീറ്റർ}$$

അപ്പോൾ ആകെ ടാങ്കിന്റെ വ്യാപ്തം

$$2.25\pi + 2.25\pi = 4.5\pi \approx 14.13 \text{ ഘനമീറ്റർ}$$

ഒരു ഘനമീറ്റർ എന്നത്, 1000 ലിറ്ററായതിനാൽ, ടാങ്കിൽ ഏകദേശം 14130 ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും.

ഇനി നിങ്ങൾക്കായി കുറെ കണക്കുകൾ:

- രണ്ടു ഗോളങ്ങളുടെ വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 27 : 64 ആണ്. അവയുടെ ആരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

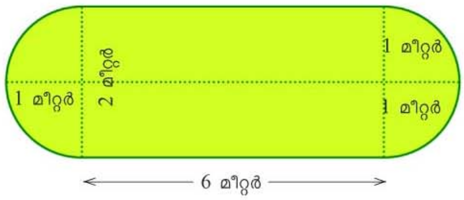
ആർക്കിമിഡിസ്

ഗോളത്തിന്റേയും അതിനെ പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റേയും ഉപരിതലപരപ്പളവും വ്യാപ്തവും 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണെന്ന് കണ്ടെത്തിയത് ആർക്കിമിഡിസ് ആണ്. അദ്ദേഹത്തിന് വളരെ പ്രിയപ്പെട്ട ഈ തത്വം, സ്വന്തം കല്ലറയിൽ കൊത്തി വയ്ക്കണമെന്ന് ആവശ്യപ്പെട്ടിരുന്നുവത്രേ.

സിറാക്കൂസിനെ ആക്രമിച്ച റോമൻ പട്ടാളത്തെ ആർക്കിമിഡിസ് ചെറുത്ത കഥ എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. ബി.സി. 212 ൽ റോമാക്കാർ സിറക്കൂസ് കീഴടക്കി. പേരറിയാത്ത ഏതോ സൈനികൻ ആർക്കിമിഡിസിനെ വധിച്ചു.

ഏതാണ്ട് നൂറ്റമ്പതു വർഷങ്ങൾക്കു ശേഷം സിസെറോ എന്ന റോമൻ പണ്ഡിതൻ ആർക്കിമിഡീസിന്റെ ശവകുടീരം കണ്ടുപിടിച്ചു. മുള്ളും കുറ്റിച്ചെടിയും വളർന്നുനിന്നിരുന്ന ഒരു സ്ഥലത്ത് കല്ലിൽ കൊത്തിവച്ചിരുന്ന ഒരു വൃത്തസ്തംഭവും ഗോളവുമാണ് ഇതു കണ്ടുപിടിക്കാൻ സഹായിച്ചത്. ഒരു പ്രായശ്ചിത്തമെന്നോണം അവിടമെല്ലാം വൃത്തിയാക്കി, ആദരാഞ്ജലി കളർപ്പിച്ചതിനു ശേഷമാണ് സിസെറോ മടങ്ങിപ്പോയത്.

- ലോഹം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്ററും, ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇതുരുക്കി, 2 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള എത്ര ഗോളങ്ങളുണ്ടാക്കാം?
- ഒരു പെട്രോൾ ടാങ്കിന്റെ ചിത്രമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്:



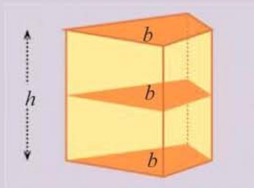
ഇതിൽ എത്ര ലിറ്റർ പെട്രോൾ കൊള്ളും?

ഒറ്റമൂലി

സ്തംഭം, സ്തൂപിക, ഗോളം ഇവയുടെയെല്ലാം വ്യാപ്തത്തിന്റെ കണക്ക് വ്യത്യസ്തമാണല്ലോ. ഇവയ്ക്കെല്ലാം പറ്റിയ ഒറ്റക്കണക്കുണ്ട്. ചുവട്ടിലെ പരപ്പളവ് b, നടുവിലെ പരപ്പളവ് m, മുകളിലെ പരപ്പളവ് t, ഉയരം h എന്നെടുത്താൽ, വ്യാപ്തം.

$$\frac{1}{6}h(b+4m+t)$$

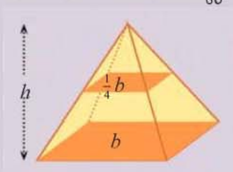
സ്തംഭങ്ങൾക്ക് താഴെയും, നടുക്കും, മുകളിലുമെല്ലാം ഒരേ പരപ്പളവാണല്ലോ. അതായത് $b=m=t$



അപ്പോൾ മേൽപ്പറഞ്ഞ കണക്കനുസരിച്ച്, സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{6}h(b+4b+b)=\frac{1}{6}h\times 6b=bh$$

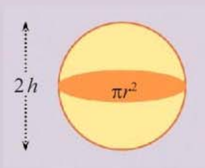
സ്തൂപികകൾക്കോ? $m=\frac{1}{4}b,\ t=0$ എന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല.



അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{6}h(b+b+0)=\frac{1}{6}h\times 2b=\frac{1}{3}bh$$

ഇനി ഗോളത്തിനോ? ആരം r എന്നെടുത്താൽ $m=\pi r^2, b=t=0, h=2r$



അപ്പോൾ വ്യാപ്തം

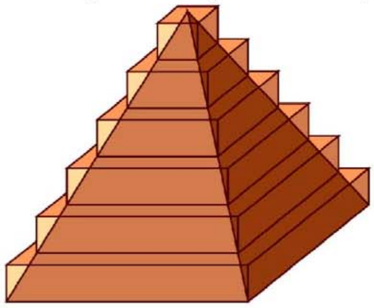
$$\frac{1}{6}\times 2r\times 4\pi r^2=\frac{4}{3}\pi r^3$$

അനുബന്ധം

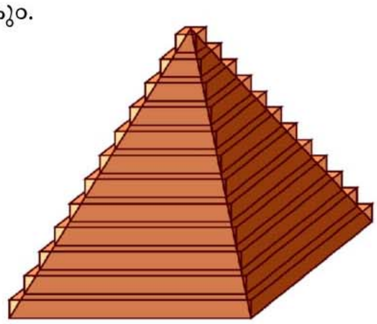
സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തവും, ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവും, വ്യാപ്തവും എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ക്രിയകൾ മാത്രമാണല്ലോ കണ്ടത്. ഇവ എങ്ങനെ കിട്ടി എന്നറിയാൻ താത്പര്യമുള്ളവർക്ക് വേണ്ടി, അവയുടെ തെളിവുകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഏകദേശരൂപമായി കുറെ സമചതുരപ്പലകകളുടെ കൂട്ടം സങ്കൽപിക്കാം.



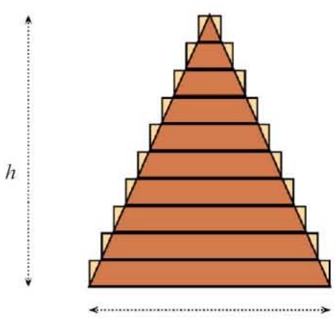
പലകകളുടെ കനം കുറയുകയും, എണ്ണം കൂടുകയും ചെയ്യുന്നതിനനുസരിച്ച്, അവയുടെ അടുക്ക് കൂടുതൽ സ്തൂപികാസമാനമാകും.



അപ്പോൾ ഈ പലകകളുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുക, സ്തൂപികയടെ വ്യാപ്തത്തോട് അടുത്തടുത്തു വരും.

ഉദാഹരണമായി, 10 പലകകളാണ് ഉപയോഗിച്ചതെന്നു കരുതുക. ഓരോ പലകയും ഒരു സമചതുര സ്തംഭമാണല്ലോ; ഇവയുടെ ഉയരം തുല്യമായിട്ടെടുക്കാം. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം h എന്നെടുത്താൽ, ഒരു പലകയുടെ ഉയരം $\frac{1}{10}h$ ഇനി ഓരോ പലകയുടേയും പാദം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

സ്തൂപികയേയും അതിനെ പൊതിഞ്ഞു നിൽക്കുന്ന പലകകളുടെ അടുക്കിനേയും കുത്തനെ മുറിച്ചാൽ, ഇത്തരമൊരു രൂപം കിട്ടും:



മുകളിൽനിന്നു തുടങ്ങി, സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ വലുതായി വരുന്നുണ്ടല്ലോ; ഇവയുടെ ഉയരം വർധിക്കുന്നത്, ഓരോ പലകയിലും $\frac{1}{10}h$ എന്ന നിരക്കിലാണ്. ഇവയെല്ലാം സദൃശമായതിനാൽ

(എന്തുകൊണ്ട്?) പാദങ്ങളും ഇതേ നിരക്കിൽത്തന്നെ കൂടണം. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദം b എന്നെടുത്താൽ, മുകളിൽനിന്നുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ പാദം $\frac{1}{10}b$, $\frac{2}{10}b$, ..., b എന്നിങ്ങനെയാണ്.

അപ്പോൾ ഈ പലകകളുടെ വ്യാപ്തം

$$\left(\frac{1}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, \left(\frac{2}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, ...b^2 \times \frac{1}{10}h$$

എന്നിങ്ങനെയാണ്, അവയുടെ തുകയോ?

$$\frac{1}{10}b^2h\left(\frac{1}{10^2}+\frac{2^2}{10^2}+...+\frac{9^2}{10^2}+\frac{10^2}{10^2}\right) \quad = \frac{1}{1000}b^2h\left(1^2+2^2+3^2+...+10^2\right)$$

ഇത്തരം തുകകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനൊരു മാർഗം, **സമാന്തരശ്രേണികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വർഗങ്ങളുടെ തുകകൾ** എന്ന ഭാഗത്തു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2 = \frac{1}{6} \times 10 \times (10 + 1) \times (2 \times 10 + 1)$$

അപ്പോൾ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുക

$$\frac{1}{1000}b^2h\times\frac{1}{6}\times10\times11\times21=\frac{1}{6}b^2h\times\frac{10}{10}\times\frac{11}{10}\times\frac{21}{10}=\frac{1}{6}b^2h\times1.1\times2.1$$

ഇനി ഇതുപോലെ 100 പലകകൾ സങ്കൽപ്പിച്ചു നോക്കൂ (അതേതായാലും വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല).

പലകകളുടെ കനം $\frac{1}{100}h$ ആകും; പാദങ്ങളുടെ വശം $\frac{1}{100}b, \frac{2}{100}b, \frac{3}{100}b,...$ എന്നിങ്ങനെയാകും. വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{100^3}b^2h\left(1^2+2^2+3^2+...+100^2\right) \quad = \frac{1}{100^3}b^2h\times\frac{1}{6}\times100\times101\times201$$

$$=\frac{1}{6}b^2h\times\frac{100}{100}\times\frac{101}{100}\times\frac{210}{100}$$

$$=\frac{1}{6}b^2h\times1.01\times2.01$$

പലകകളുടെ എണ്ണം 1000 ആക്കിയാലോ? കണക്കുകൂട്ടാതെ തന്നെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{6}b^2h\times1.001\times2.001$$

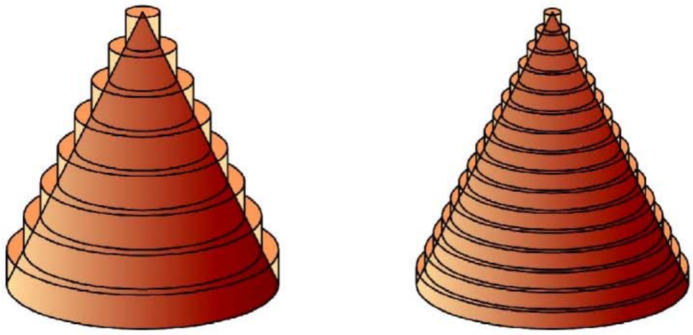
എന്നു കാണാമല്ലോ. ഈ തുകകൾ ഏതു സംഖ്യയോടാണ് അടുത്തടുത്തു വരുന്നത്?

ഇതാണ് സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം. അതായത്

$$\frac{1}{6}b^2h\times1\times2=\frac{1}{3}b^2h$$

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യപ്തം

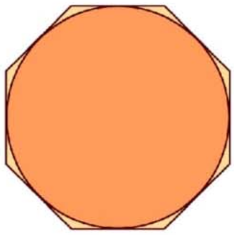
ചതുരപ്പലകകളടുക്കി, സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഏകദേശം രൂപങ്ങളുണ്ടാക്കിയതുപോലെ, വട്ടപ്പല കകളടുക്കി വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഏകദേശരൂപങ്ങൾ ചമയ്ക്കാം:



ഇതിലൂടെ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യപ്തവും കണ്ടുപിടിക്കാം (ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ)

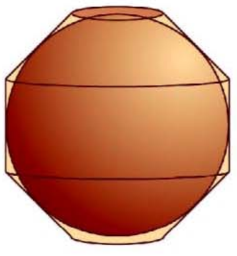
ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

ഇതിന്, ആദ്യം ഗോളത്തിന്റെ മധ്യത്തുകൂടിയുള്ള ഒരു വൃത്തവും അതിനെ കൃത്യമായി പൊതിയുന്ന ഒരു സമബഹുഭുജവും സങ്കൽപ്പിക്കുക. (ഗണിതഭാഷയിൽ, സമബഹുഭുജത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തമാണ് നമ്മുടെ വൃത്തം)

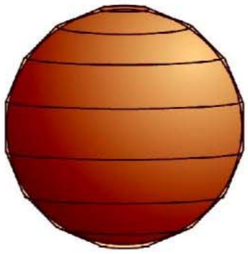


ഇനി ഈ രൂപം ഒന്നു കറങ്ങിയാൽ, ഉള്ളിലൊരു ഗോളവും, പുറത്തു മറ്റൊരു രൂപവും കിട്ടും;

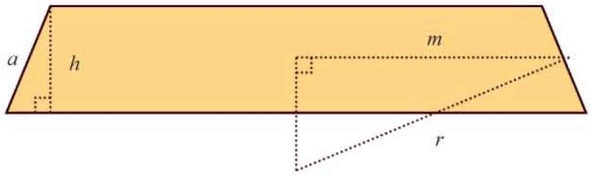
ഈ ചിത്രത്തിൽ, പുറത്തുള്ള രൂപത്തിനെ രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികാപീഠവും, ഒരു വൃത്തസ്തംഭവു മായി ഭാഗിക്കാം:



ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതനുസരിച്ച്, പുറത്തെ രൂപം, ഗോളത്തോട് കൂടുതൽ അടുക്കും:



ഈ സ്തൂപികാപീഠങ്ങളുടെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ, അവയിൽ ഒന്നെടുത്തു നോക്കാം. ഇതിന്റെ മധ്യത്തുകൂടിയുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ആരം m എന്നും, ഉയരം h എന്നുമെടുക്കാം. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നും, അതിനെ പൊതിയുന്ന ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശം a എന്നുംകൂടി എടുത്താൽ, ചുവടെക്കാണുന്ന ചിത്രം കിട്ടും.



ഇതിലെ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാകയാൽ

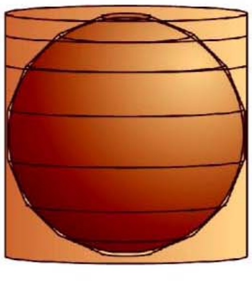
$$\frac{m}{r} = \frac{h}{a}$$

എന്നു കാണാം. അതായത്

$$am = rh$$

ഇതു കറങ്ങിയുണ്ടാകുന്ന പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് $2\pi ma$ ആണെന്ന് **പീഠവും സ്തംഭവും** എന്ന ഭാഗത്തു കണ്ടല്ലോ. മുകളിലെ സമവാക്യപ്രകാരം, ഇത് $2\pi rh$ നു തുല്യമാണ്. അതായത്, പാദത്തിന്റെ ആരം r ഉം, ഉയരം h ഉം ആയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്.

അപ്പോൾ എന്തുകിട്ടി? മുകളിൽ കണ്ട ഗോളത്തിന്റെ ഏകദേശരൂപത്തിലെ ഓരോ സ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെയും പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, അതേ ഉയരവും, ഗോളത്തിന്റെ ആരവുമായ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്. അതിനാൽ, ഈ ഏകദേശരൂപത്തിന്റെ ആകെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, ഈ വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ ആകെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്. ഈ വൃത്തസ്തംഭങ്ങൾ കൂട്ടിവച്ചാൽ കിട്ടുന്നതോ? വലിയൊരു വൃത്തസ്തംഭം:



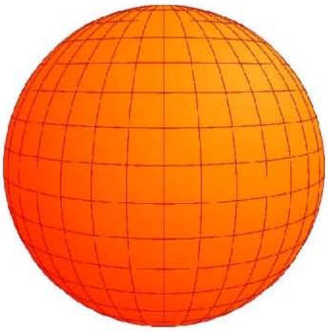
വൃത്തത്തെ പൊതിയുന്ന ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതനുസരിച്ച് അത് കൂടുതൽ വൃത്തസമാനമാകും; ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന രൂപം, ഗോളസമാനമാകും. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, വശങ്ങൾ എത്ര കൂടിയാലും, ഈ രൂപത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന വൃത്ത സ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്. അപ്പോൾ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവും, അതിനെ പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് തന്നെ. വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം r ഉം, ഉയരം $2r$ ഉം ആയതിനാൽ അതിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്

$$2\pi \times r \times 2r = 4\pi r^2$$

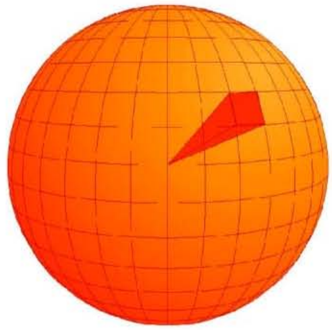
ഇതുതന്നെയാണ് ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവും.

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



നെടുകെയും കുറുകെയുമുള്ള വൃത്തങ്ങൾ കൊണ്ട് ഗോളത്തിനെ കളങ്ങളായി തിരിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇത്തരമൊരു കളത്തിന്റെ മൂലകളെ ഗോളകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ, സമചതുരസ്തൂപിക പോലുള്ള ഒരു രൂപം കിട്ടും:



ഇത്തരം രൂപങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് ഗോളം; അതിനാൽ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ഈ രൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുകയാണ്. ഇനി ഗോളത്തിലെ കളങ്ങളോരോന്നിനേയും, ഗോളത്തെ തൊടുന്ന ചെറു സമചതുരങ്ങളാക്കിമാറ്റിയാൽ, ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന ഒരു രൂപം കിട്ടും; അത് ശരിയായ സമചതുരസ്തൂപികകൾ യോജിപ്പിച്ചതാണ്. ഈ സ്തൂപികകളുടെയെല്ലാം ഉയരം, ഗോളത്തിന്റെ ആരം തന്നെയാണ്. ഇത് r എന്നും, ഒരു സ്തൂപികയുടെ പാദപരപ്പളവ് a എന്നുമെടുത്താൽ, അതിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3}ar$ എന്നു കിട്ടും. ഗോളത്തെ പൊതിഞ്ഞുനിൽക്കുന്ന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം. ഈ സ്തൂപികകളുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുകയാണല്ലോ. സ്തൂപികകളുടെയെല്ലാം പാദങ്ങൾ ചേർന്നാൽ, ഈ രൂപത്തിന്റെ ഉപരിതലവുമാകും. അപ്പോൾ ഈ രൂപത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് s എന്നെടുത്താൽ, അതിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3}sr$ എന്നുകിട്ടും.

ഗോളത്തിലെ കളങ്ങൾ ചെറുതാകുകയും അവയുടെ എണ്ണം കൂടുകയും ചെയ്യുന്തോറും ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന രൂപം കൂടുതൽ ഗോളത്തോടടുക്കും; s എന്നത്, ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവിനോടും. അത് $4\pi r^2$ ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3$$