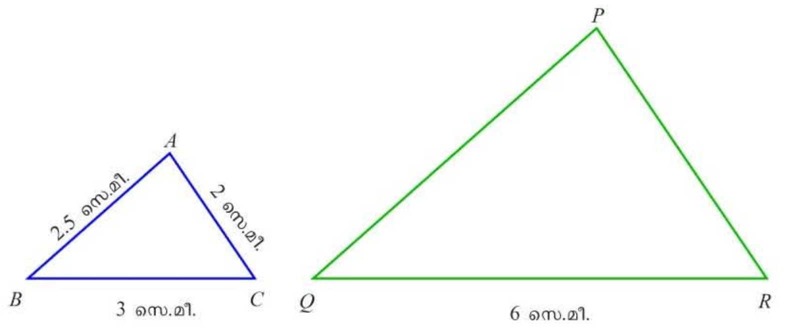
4 ത്രികോണമിതി

വശങ്ങളും കോണുകളും

ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കൂ:



ΔABC യിലെ കോണുകൾ തന്നെയാണ് ΔXYZ ലേതും; വ്യക്തമായിപ്പറഞ്ഞാൽ,

$$\angle P = \angle A \qquad \angle Q = \angle B \qquad \angle R = \angle C$$

ഇവിടെ BC യുടെ 2 മടങ്ങാണല്ലോ QR.

ΔPQR ലെ മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

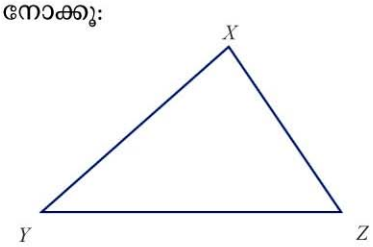
$\angle P$ യുടെ എതിർവശം, $\angle A$ യുടെ എതിർവശത്തിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങായതിനാൽ, തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള മറ്റു വശങ്ങളുടെ ജോടികളും ഇതേ അംശബന്ധം പാലിക്കണം. അല്ലേ?

അതായത്

$$PQ = 2 \times AB = 5 \text{ സെ.മീ.}$$

$$RP = 2 \times CA = 4 \text{ സെ.മീ.}$$

ഇനി ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:



ഇതിലും

$$\angle X = \angle A \qquad \angle Y = \angle B \qquad \angle Z = \angle C$$

ഇതിന്റെ വശങ്ങളെക്കുറിച്ചെന്തെങ്കിലും പറയാൻ കഴിയുമോ?

ഭൂമിയും മാനവും

ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളുടെ അളവും, വശങ്ങളുടെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനമാണ് ത്രികോണമിതി (*trignometry*)

ചരിവിന്റെയും വിരിവിന്റെയും തിരിവിന്റെയുമെല്ലാം അളവായിട്ടാണ് കോണളവുകൾ ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നതെന്നു കണ്ടല്ലോ (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങളുടെ അളവുകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ചരിവും വിരിവും തിരിവും** എന്ന ഭാഗം). ചരിത്രത്തിൽ ചരിവിന്റെ അളവുകൾ ആദ്യം വരുന്നത് ഭൂമിയിലെ പലതരം നിർമാണങ്ങളിലാണ്; തിരിവിന്റെ അളവുകൾ, ആകാശഗോളങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിലും.

ഭൂമിയിലെ ആവശ്യങ്ങൾക്കുവേണ്ടിത്തന്നെയാണ് ആദ്യകാല വാനശാസ്ത്ര പഠനങ്ങളും നടന്നത്. ഭക്ഷണമാണല്ലോ മനുഷ്യന്റെ പ്രധാന ആവശ്യം. ഭക്ഷണോല്പാദനം, അതായത് കൃഷി, കാലാവസ്ഥയെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. കാലാവസ്ഥയെ നിയന്ത്രിക്കുന്ന ഒരു ഘടകം, സൂര്യനു ചുറ്റുമുള്ള ഭൂമിയുടെ കറക്കമാണ്. ഇത് ശരിയായി അറിയണമെങ്കിൽ, മറ്റു ഗ്രഹങ്ങളുടെയും, നക്ഷത്രങ്ങളുടെയുമെല്ലാം സ്ഥാനം നിശ്ചയിക്കാനറിയണം. പ്രാചീന കാർഷിക സംസ്കാരങ്ങളിലെല്ലാം വാനശാസ്ത്രം ഒരു പ്രധാന പഠനവിഷയമായത് ഇതുകൊണ്ടാണ്. അതിനാകട്ടെ ഗണിതം, വിശേഷിച്ചും ജ്യാമിതി, അത്യാവശ്യമാണുതാനും.

ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമെങ്കിലും അറിയാതെ എന്തു പറയാൻ കഴിയും?

ചിലതെല്ലാം പറയാം:

$$\frac{XY}{2.5} = \frac{YZ}{3} = \frac{ZX}{2}$$

ആണല്ലോ. ദശാംശങ്ങൾ ഒഴിവാക്കി (അല്ലെങ്കിൽ ΔABC യ്ക്ക് പകരം ΔPQR ഉപയോഗിച്ച്) ഇത് ഇങ്ങനെയാക്കാം

$$\frac{XY}{5} = \frac{YZ}{6} = \frac{ZX}{4}$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$\frac{XY}{YZ} = \frac{5}{6}; \quad \frac{YZ}{ZX} = \frac{6}{4}$$

എന്നെല്ലാം പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ, ഒറ്റ (സമ) വാക്യത്തിൽ

$$XY : YZ : ZX = 5 : 6 : 4$$

എന്നും പറയാം.

മറ്റു രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടേയും വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ അംശബന്ധം ഇതുതന്നെയല്ലേ?

ഇത്തരം ചിന്തകളിലൂടെ എത്തിച്ചേരുന്ന സാമാന്യതത്വം എന്താണ്? ഒരേ കോണുകളുള്ള പലപല ത്രികോണങ്ങളുണ്ട്. അവയുടെ വശങ്ങളുടെ യഥാർത്ഥ നീളം, ത്രികോണത്തിനനുസരിച്ച് മാറും; പക്ഷേ ഈ നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധം മാറില്ല.

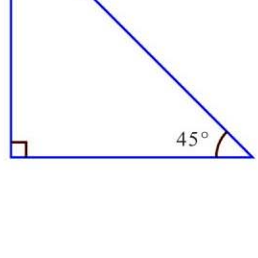
ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

ഇതിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു ചിന്ത വരും; ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളെല്ലാം അറിയാമെങ്കിൽ; അവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുമോ?

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം:

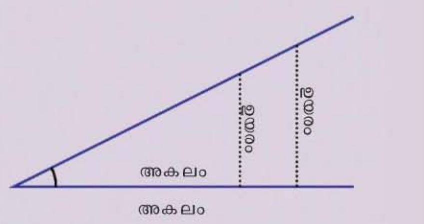
- ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണം നോക്കുക:



ചരിവിന്റെ അളവ്

വൃത്തത്തെ 360 സമഭാഗങ്ങളാക്കി കോണളക്കുന്ന ബാബിലോണിയക്കാരുടെ രീതിയും, അതിന് വാനശാസ്ത്രവുമായുള്ള ബന്ധവും നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ട്. (ആറാം ക്ലാസിലെ **ചരിവും വിരിവും** എന്ന പാഠത്തിലെ **കോണളവിന്റെ ചരിത്രം** എന്ന ഭാഗം) ഏതാണ്ട് ബി.സി മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടുമുതൽ ബാബിലോണിൽ ഈ രീതി ഉപയോഗിച്ചിരുന്നതായി കാണാം. ഇതാണ് ഇന്നത്തെ ഡിഗ്രി അളവ്.

എന്നാൽ ഭൂമിയിലെ നിർമാണങ്ങളിൽ, ചരിവളക്കാൻ മറ്റൊരു രീതിയാണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, കോണിന്റെ വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനങ്ങളിൽ "അകലവും ഉയരവും" മാറുമെങ്കിലും, ഉയരത്തെ അകലംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഒരേ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടുമല്ലോ. (കാരണം?) ഓരോ കോണിനും, അതിന്റെ വലിപ്പമനുസരിച്ച്, ഈ സംഖ്യ മാറുകയും ചെയ്യും. ഈ സംഖ്യയെയാണ്, ചരിവിന്റെ അളവായി എടുത്തിരുന്നത്.

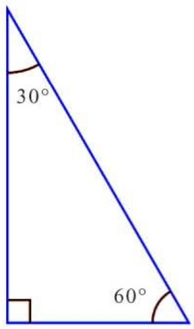
പുരാതന ഈജിപ്റ്റിലെ ആഹ്മോസ് പപ്പൈറസിൽ (എട്ടാംക്ലാസിലെ **സമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **പ്രാചീന ഗണിതം** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക) ഇത്തരം ചില കണക്കുകൂട്ടലുകൾ കാണാം. സമചതുരസ്തൂപികകളിൽ, പാദവും ഒരു മുഖവും തമ്മിലുള്ള ചരിവാണ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നത്.

പുരാതന ബാബിലോണിയായിലെ ഒരു കളിമൺ പലകയിൽ, പലപല മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ, കർണത്തെ മറ്റൊരു വശം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽകിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ പട്ടികപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നതും കാണാം.

ഈ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ തുല്യമാണ് (കാരണം?) ആ നീളം x എന്നെടുത്താൽ, കർണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}\,x$ ആകണമല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?)

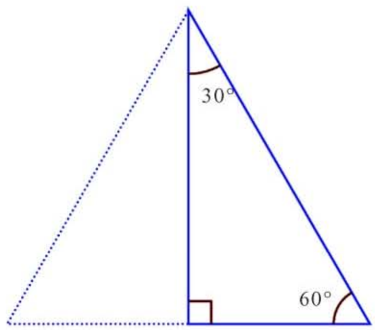
അതായത്, ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $1 : 1 : \sqrt{2}$

- ഇനി മറ്റൊരു മട്ടത്രികോണം:

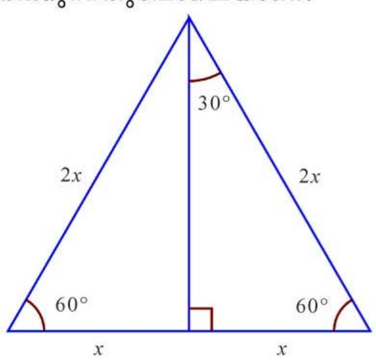


ഇതിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നെടുക്കാം. മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ആദ്യം കണ്ട മട്ടത്രികോണം ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ പകുതിയാണെങ്കിൽ, ഈ ത്രികോണം ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ. (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **വരകൾക്കിടയിൽ** എന്ന പാഠത്തിലെ **മട്ടഭംഗികൾ** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)



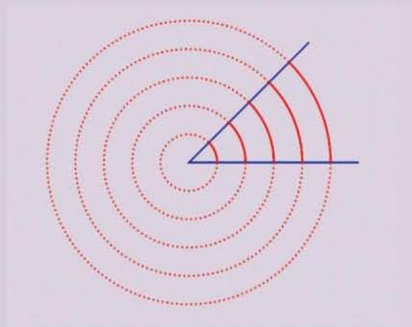
ഈ സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയാണ്:



ഡിഗ്രി അളവ്

ഒരു കോണിന്റെ അളവ് 45° എന്നാൽ എന്താണർത്ഥം?

ഈ അളവുള്ള ഒരു കോണിന്റെ ശീർഷം കേന്ദ്രമായി പലപല വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം; അവയിലെല്ലാം ഈ കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുന്ന ചാപങ്ങളുടെ നീളവും പലതാണ്;



പക്ഷേ ഈ ചാപങ്ങളോരോന്നും അതതു വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണെന്നതിൽ മാറ്റമില്ല. ഈ $\frac{1}{8}$ നെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് 45.

കോണിന്റെ അളവ് 60° ആയാലോ? ശീർഷം കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന ഏതു വൃത്തത്തിന്റെയും $\frac{1}{6}$ ഭാഗമാണ് കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുക. അതിനെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് 60.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഏതു കോണിന്റേയും ഡിഗ്രി അളവ് എന്നത് അതിന്റെ ശീർഷം കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിൽ, കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുന്ന ചാപത്തിന്റെ നീളത്തെ മൊത്തം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവു കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, കിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണ്.

അപ്പോൾ നമ്മുടെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം $2x$ എന്നും, ഒരു ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നും കിട്ടി. മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം എന്താണ്?

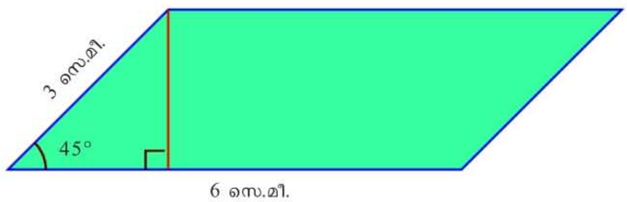
$$\sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$$

അപ്പോൾ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം, വലിപ്പക്രമത്തിൽ, $1 : \sqrt{3} : 2$

ഇക്കാര്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചില കണക്കുകൾ ചെയ്യാം:

- ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ സമീപവശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും 3 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ 45°. ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഒരു ജോടി സമാന്തരവശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം അറിയണമല്ലോ. ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:

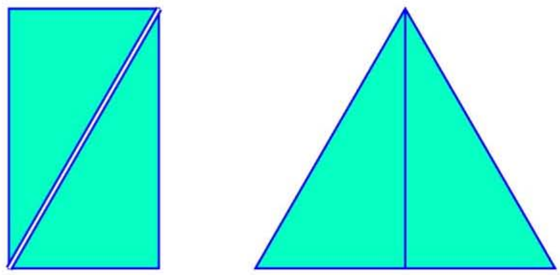


ഇതിലെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബം, കർണത്തിന്റെ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ഭാഗമാണല്ലോ (കാരണം?) അതിനാൽ, സാമാന്തരികത്തിന്റെ ഉയരം $\frac{3}{\sqrt{2}}$ സെന്റിമീറ്ററാണ്. അപ്പോൾ പരപ്പളവ് $\frac{18}{\sqrt{2}}$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ. അൽപംകൂടി കണക്കുകൂട്ടിയാൽ

$$\frac{18}{\sqrt{2}} = 18 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 9 \times 1.414 = 12.726$$

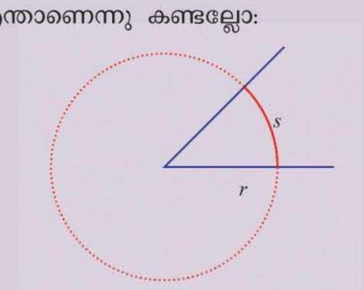
അതായത്, രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി, പരപ്പളവ് 12.73 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണ്.

- ഒരു ചതുരപ്പലക വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ച്, ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മാറ്റിയടുക്കി, ഒരു സമഭുജത്രികോണമുണ്ടാക്കണം:



കോണിനു മറ്റൊരളവ്

ഒരു കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവെന്നാൽ എന്താണെന്നു കണ്ടല്ലോ:



വിവിധ വലിപ്പത്തിലുള്ള വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചാൽ, ചിത്രത്തിലെ s ഉം r ഉം മാറുമെങ്കിലും, $\frac{s}{2\pi r}$ മാറുന്നില്ലെന്നും, അതിനെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് ഡിഗ്രി അളവെന്നും പറഞ്ഞു. അതായത്,

കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവ് $= \frac{s}{2\pi r} \times 360$.

ഇതിലെ s, r ഇവ മാറിയാലും 2π, 360 എന്നീ സംഖ്യകൾ മാറുന്നില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ കോണളക്കാൻ $\frac{s}{r}$ എടുത്താൽപ്പോരേ?

ശരിയാണ്. ഈ അളവിനെയാണ് കോണിന്റെ റേഡിയൻ (radian) അളവ് എന്നു പറയുന്നത്. അതായത്, മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ,

കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ് $= \frac{s}{r}$.

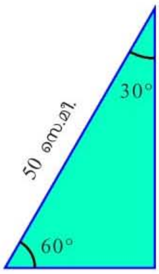
ഡിഗ്രി അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ° എന്ന ചിഹ്നമാണല്ലോ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. റേഡിയൻ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ rad എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

ഈ ആശയം ആദ്യമായി അവതരിപ്പിച്ചത്, പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന റോജർ കോട്സ് (Roger Cotes) എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനാണ്. റേഡിയൻ എന്ന പേരു കൊടുത്തത്, പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിലെ ജെയിംസ് തോംസൺ (James Thomson) എന്ന ഭൗതിക ശാസ്ത്രജ്ഞനും.

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 50 സെന്റിമീറ്ററുമാകണം. ചതുര പ്പലകയുടെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം?

ഇങ്ങനെ ഒരു സമഭുജത്രികോണമുണ്ടാക്കണമെങ്കിൽ, ചതുരം മുറിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകൾ $30°$, $60°$, $90°$ ആയിരിക്കണം. ഇത്തരമൊരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ മാണ്, ഉണ്ടാക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശമാകു ന്നത്. അതിന്റെ നീളം 50 സെന്റിമീറ്ററാണെന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്.

അപ്പോൾ പ്രശ്നമെന്താണ്? ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോ ണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കണം:



ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം (വലിപ്പക്രമത്തിൽ) $1 : \sqrt{3} : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലായതിനാൽ, ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം

$$50 \times \frac{1}{2} = 25$$

എന്നും, അടുത്തവശം

$$50 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$$

എന്നും കാണാം. അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 25 സെന്റിമീറ്ററും, $25\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്ററും ആകണം. വേണമെങ്കിൽ, ഇവ മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണ്ടുപിടിക്കാം (ചെയ്തു നോക്കൂ).

കുറേ കണക്കുകൾ കൂടി ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ:

- 30 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു വശം 6 സെന്റിമീറ്ററും, ഒരു കോൺ $60°$ യും ആണ്. അതിന്റെ മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?
- ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീ റ്ററാണ്. അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?
- ഒരു കോൺ $30°$ ആയ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം 6 സെന്റിമീറ്ററാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

ഡിഗ്രിയും റേഡിയനും

നീളമളക്കാൻ സെന്റിമീറ്റർ, ഇഞ്ച് മുത ലായ പല ഏകകങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കു ന്നതുപോലെ, കോൺ അളക്കാൻ ഉപ യോഗിക്കുന്ന രണ്ടു പ്രധാന ഏകക ങ്ങളാണ് ഡിഗ്രിയും റേഡിയനും. SI എന്ന ചുരുക്കപ്പേരിലറിയപ്പെടുന്ന അന്താരാഷ്ട്ര ഏകക വ്യവസ്ഥയിൽ (International System of Units) കോണിന്റെ ഏകകമായി എടുത്തിരി ക്കുന്നത്, റേഡിയനാണ്.

ഡിഗ്രിയും റേഡിയനും കണക്കാക്കാ നുപയോഗിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ്

$$= \text{കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവ്} \times \frac{180}{\pi}$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57.2958°$$

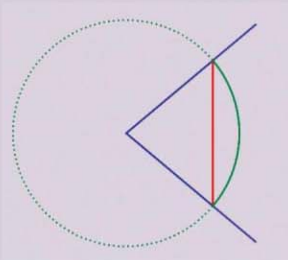
ഓർക്കാൻ കൂടുതൽ എളുപ്പം

$$\pi \text{ rad} = 180°$$

എന്ന സമവാക്യമാണ്.

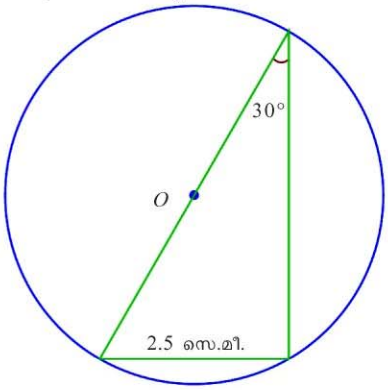
നേർവഴി?

ഡിഗ്രി അളവായാലും, റേഡിയൻ അളവായാലും, കോണിന്റെ വലിപ്പം സൂചിപ്പിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നത് ഒരു ചാപത്തിന്റെ നീളത്തെയാണല്ലോ. അതിനു പകരം ഞാണിന്റെ നീളം ഉപയോഗിച്ചുള്ള കണക്കുകൂട്ടലുകളാണ്, ബി.സി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ഗ്രീസിലെ ഹിപ്പാർക്കസ് (Hipparchus) എന്ന വാനശാസ്ത്രജ്ഞൻ നടത്തിയത്.



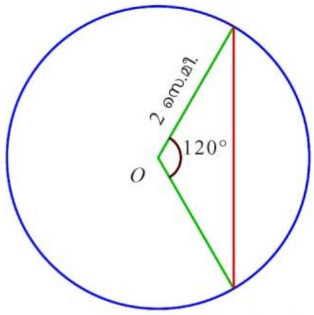
വ്യത്യസ്ത കേന്ദ്രകോണുകളുള്ള ഞാണുകളുടെ നീളങ്ങൾ കാണിക്കുന്ന ഒരു വലിയ പട്ടിക ഇദ്ദേഹം എഴുതിയിട്ടുള്ളതായി പിൽക്കാലത്തെ പല ഗണിതകാരന്മാരും പറയുന്നുണ്ടെങ്കിലും, അതു കണ്ടു കിട്ടിയിട്ടില്ല. ഏ.ഡി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ഈജിപ്റ്റിലെ ക്ലോഡിയസ് ടോളമി (Claudius Ptolemy) ഇത്തരത്തിൽ ഒരു പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയത് കിട്ടിയിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽ, ആരം 60 ആയ ഒരു വൃത്തത്തിൽ $\frac{1}{2}^\circ$ ഇടവിട്ട്, 180° വരെയുള്ള കേന്ദ്രകോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഞാണുകളുടെ നീളം വളരെ കൃത്യമായി അദ്ദേഹം കണക്കുകൂട്ടിയിട്ടുണ്ട്.

- ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ്

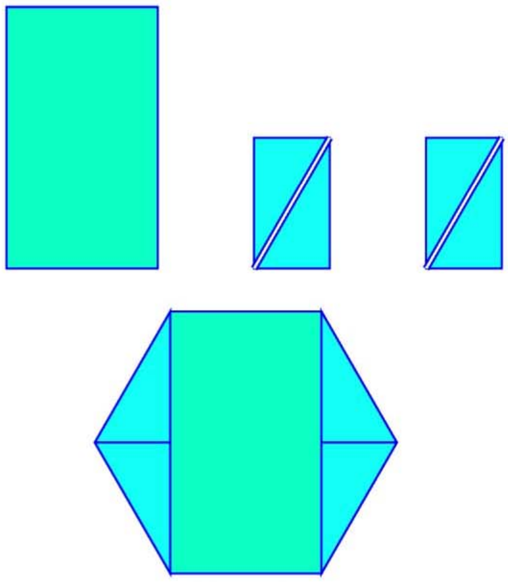


വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമെത്രയാണ്?

- ചിത്രത്തിലെ O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിൽ വരച്ചിരിക്കുന്ന ഞാണിന്റെ നീളമെന്താണ്?

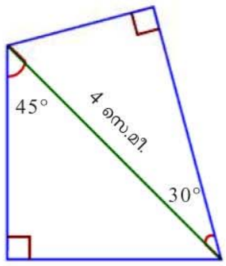


- ഒരേ വലിപ്പമുള്ള രണ്ടു ചതുരങ്ങൾ വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ച് ത്രികോണങ്ങളാക്കി, മറ്റൊരു ചതുരത്തോടു ചേർത്തുവച്ച്, ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു സമഷഡ്ഭുജമുണ്ടാക്കണം:

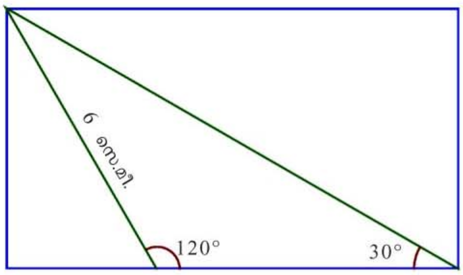


ചതുരങ്ങളുടെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം?

- ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടേയും നീളം കണക്കാക്കുക.



- ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

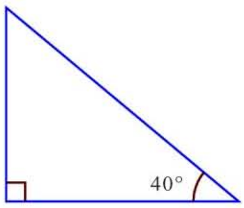


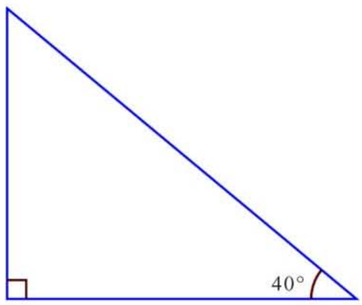
പുതിയ കോണളവുകൾ

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളിൽ നിന്ന് അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക എന്നതാണല്ലോ നമ്മുടെ ലക്ഷ്യം. ചിലതരം മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ ഇതു സാധിക്കുകയും ചെയ്തു. മറ്റു ത്രികോണങ്ങളിൽ ഇതത്ര എളുപ്പമല്ല. ഇതു കണ്ടുപിടിക്കാൻ സഹായിക്കുന്ന ചില പട്ടികകൾ വളരെക്കാലം മുമ്പു തന്നെ ഗണിതകാരന്മാർ ഉണ്ടാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അവ എന്താണെന്നും, ഉപയോഗിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നും നോക്കാം.

ആദ്യമായി, മട്ടകോണിനേക്കാൾ ചെറുതായ ഏതു കോൺ എടുത്താലും അതുൾക്കൊള്ളുന്ന അനേകം മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാമെന്നും, അവയിലെയെല്ലാം കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നും കാണണം.

ഉദാഹരണമായി, 40° കോൺ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന കുറേ മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:

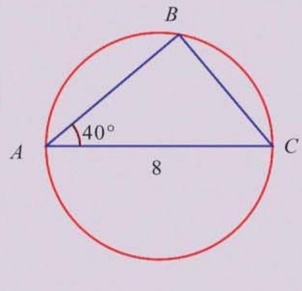




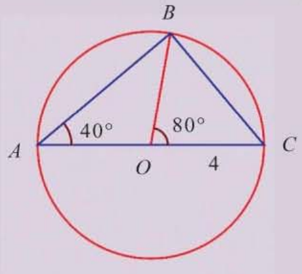
പഴയ രീതി

ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണവും, ഒരു കോണും അറിയാമെങ്കിൽ, ടോളമിയുടെ ഞാൺപട്ടിക ഉപയോഗിച്ച്, ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാം.

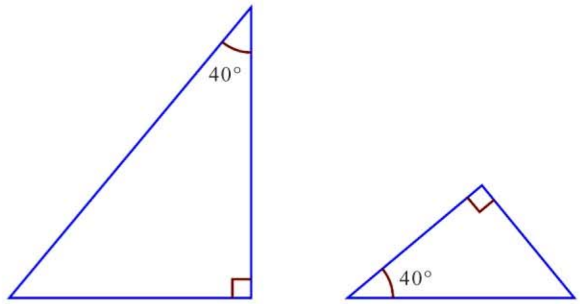
ഉദാഹരണമായി, കർണം 8 ഉം ഒരു കോൺ 40° ഉം ആയ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കണമെന്നു കരുതുക. ഹിപ്പാർക്കസും, ടോളമിയും ചെയ്യുന്നത്, ഇത്തരം ഒരു ത്രികോണം ഒരു വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ സങ്കൽപിക്കുകയാണ്:



ഇതിന്റെ മട്ടമൂലയിലേക്ക് ആരം വരച്ചാൽ ഇങ്ങനെ ഒരു ചിത്രം കിട്ടും.



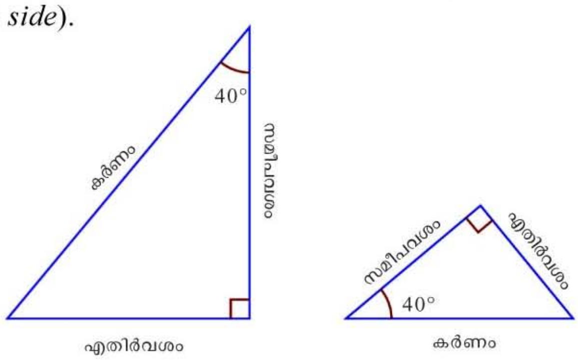
ഇനി പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച്, ആരം 1 ആയ വൃത്തത്തിലെ 80° കേന്ദ്രകോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഞാണിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കണം. ഇതിനെ 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമായി; മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം.



ഇവ പല വലിപ്പത്തിലുള്ളവയാണെങ്കിലും, ഇവയിലെയെല്ലാം കോണുകൾ 40°, 50°, 90° തന്നെയാണ്. അതിനാൽ ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം, വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

മറ്റൊരു വിധത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഇക്കൂട്ടത്തിലെ ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം, മറ്റെല്ലാ ത്രികോണത്തിന്റേയും അതേ സ്ഥാനത്തുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം തന്നെയാണ്.

ഇതു കുറേക്കൂടി ചുരുക്കിയെഴുതാൻ, 40° കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന വശങ്ങളിൽ ചെറുതിനെ, അതിന്റെ സമീപവശം (*adjacent side*) എന്നു വിളിക്കാം. വലിയ വശം കർണം (*hypotenuse*) ആണല്ലോ. ഈ കോണിന് എതിരെയുള്ളത്, അതിന്റെ എതിർവശവും (*opposite side*).

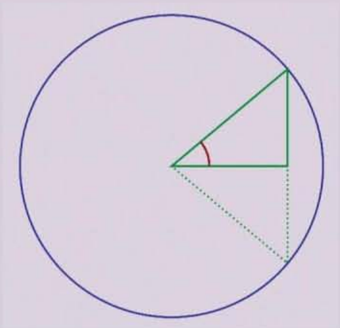


അപ്പോൾ ഈ വരച്ച ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം 40° കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ കർണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ഒരേ സംഖ്യയാണ്. ഇത് ഏകദേശം 0.6428 എന്നു കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അതുപോലെ ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം, 40° കോണിന്റെ സമീപവശത്തെ കർണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നതും ഒരേ സംഖ്യയാണ്. ഇത് ഏകദേശം 0.7660 എന്നും കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

ഈ സംഖ്യകൾക്കു പ്രത്യേക പേരുകളുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, 40° കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിൽ, ഈ കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ കർണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യയ്ക്ക് 40° കോണിന്റെ സൈൻ (sine of 40°) എന്നാണ് പറയുന്നത്; സമീപവശത്തെ കർണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യയ്ക്ക് 40° കോണിന്റെ കോസൈൻ (cosine of 40°) എന്നും. ഇവ ചുരുക്കി sin 40°, cos 40° എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

അര ഞാൺ

ടോളമിയുടെ പട്ടികയുപയോഗിച്ച്, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കർണത്തെ പകുതിയാക്കുകയും, കോണിനെ ഇരട്ടിപ്പിക്കുകയും വേണം. ഇതൊഴിവാക്കാൻ, ഓരോ കോണും, അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായ കോണിന്റെ പകുതി ഞാണും, ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയാൽ മതി.



എ.ഡി. അഞ്ചാംനൂറ്റാണ്ടിൽ ഭാരതത്തിൽ രചിക്കപ്പെട്ട *സൂര്യസിദ്ധാന്തം* എന്ന ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്ര ഗ്രന്ഥത്തിൽ ഇത്തരം ഒരു പട്ടിക കാണാം. ഇക്കാലത്തുതന്നെ ഭാരതത്തിലെ പ്രസിദ്ധ ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ആര്യഭടൻ രചിച്ച *ആര്യഭടീയം* എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിലും ഇത്തരം പട്ടികകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ക്രിയകൾ കാണാം. ഈ കോണളവിനെ അദ്ദേഹം *അർധജ്യാ* എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. (ഞാണിന്, സംസ്കൃതത്തിൽ *ജ്യാ* എന്നാണ് പറയുന്നതെന്ന്, ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഞാണും ചരടും** എന്ന ഭാഗത്തു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.)

അപ്പോൾ മുമ്പേ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്

$$\sin 40° \approx 0.6428$$

$$\cos 40° \approx 0.7660$$

ഇതുപോലെ 90° യിൽക്കുറവായ കോണുകളുടെയെല്ലാം sin ന്റേയും cos ന്റേയും ഏകദേശവിലകൾ പട്ടികപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. അതിന്റെ ഒരു ഭാഗം ഇങ്ങനെയാണ് (മുഴുവൻ പട്ടിക, പാഠത്തിന്റെ അവസാനം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്):

കോൺ	sin	cos
35°	0.5736	0.8192
36°	0.5878	0.8090
37°	0.6018	0.7986
38°	0.6157	0.7880
39°	0.6293	0.7771
40°	0.6428	0.7660

ഈ പട്ടികയിൽ നിന്ന്

$$\sin 35° \approx 0.5736$$

$$\cos 35° \approx 0.8192$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. എന്താണിതിന്റെ അർത്ഥം? ഒരു കോൺ 35° ആയി ഏതു മട്ടത്രികോണം വരച്ചാലും, ഈ കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ കർണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഏകദേശം 0.5736 കിട്ടും. സമീപവശത്തെ കർണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 0.8192 ഉം കിട്ടും.

ഈ പേരുകളുപയോഗിച്ച്, നേരത്തെ കണ്ട മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ കാര്യം ഇങ്ങനെ പറയാം:

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2}$$

ഇതുപോല sin 30°, cos 30° എഴുതാമോ?

ഇനി ഈ പട്ടികകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില സന്ദർഭങ്ങൾ നോക്കാം:

- ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം 6 സെന്റിമീറ്ററും, ഒരു കോൺ 40° യും ആണ്. ഇതിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

പേരു വന്ന വഴി

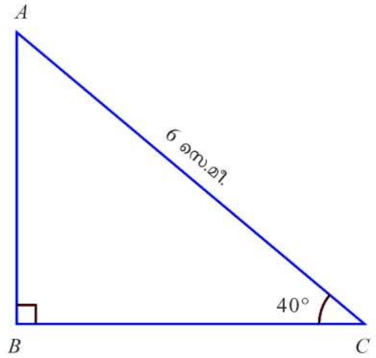
ആര്യഭടൻ, കോണിന്റെ *അർധജ്യാ* എന്നു വിളിച്ചിരുന്ന അളവു തന്നെയാണ് ഇന്നു sin എന്ന പേരിൽ ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നത്. ഈ പേരു വന്നതിന്റെ കഥ ഇങ്ങനെയാണ്.

ആര്യഭടൻ തന്നെ പിൽക്കാലത്ത്, *അർധ* എന്ന വിശേഷണം ഉപേക്ഷിച്ച്, *ജ്യാ* എന്നു മാത്രമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. എ.ഡി ഏഴാം നൂറ്റാണ്ടുമുതലുള്ള കാലത്ത്, അറബ് രാജ്യങ്ങളിലെ ഭരണാധികാരികൾ, ഗ്രീസിലേയും ഭാരതത്തിലേയും പ്രധാന ശാസ്ത്രഗ്രന്ഥങ്ങളെല്ലാം അറബിഭാഷയിലേക്ക് പരിഭാഷപ്പെടുത്തുന്നത് പ്രോത്സാഹിപ്പിച്ചിരുന്നു. *ആര്യഭടീയം* വിവർത്തനം ചെയ്തവർ, *ജ്യാ* എന്ന പദം വലിയ മാറ്റമൊന്നും വരുത്താതെ *ജിബ* എന്നുപയോഗിച്ചു. അറബ് ഭാഷ എഴുതുമ്പോൾ പൊതുവേ സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ എഴുതാറില്ലാത്തതിനാൽ, ഇത് എഴുതുന്നത് *ജ്ബ്* എന്നു മാത്രമായിരുന്നു.

പിൽക്കാലത്ത്, എ.ഡി. പതിമൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടോടെ, ഈ അറബ് ഗ്രന്ഥങ്ങളെല്ലാം യൂറോപ്പിലെത്തുകയും, ലാറ്റിനിലേക്ക് വിവർത്തനം ചെയ്യപ്പെടുകയുമുണ്ടായി. *ജ്ബ്* എന്ന് അറബിയിൽ എഴുതിയിരുന്നത്, *ജൈബ്* എന്ന വാക്കാണെന്ന് അവർ തെറ്റിദ്ധരിച്ചു. ഈ വാക്കിന് അറബിയിൽ, വളവ്, മടക്ക് എന്നെല്ലാമാണ് അർത്ഥം. ഈ അർത്ഥം വരുന്ന ലാറ്റിൻ വാക്കായ sinus എന്നു പരിഭാഷപ്പെടുത്തി. കാലക്രമത്തിൽ, ഇതു ലോപിച്ച് sine എന്നു മാത്രമായി.

കോടിജ്യാ എന്നു ആര്യഭടൻ വിളിച്ചിരുന്ന അളവ് cosine എന്നുമായി.

ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:



ചിത്രത്തിൽനിന്ന്,

$$\frac{AB}{AC} = \sin 40° \qquad \frac{BC}{AC} = \cos 40°$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽനിന്ന്

$$AB = AC \times \sin 40°$$

$$BC = AC \times \cos 40°$$

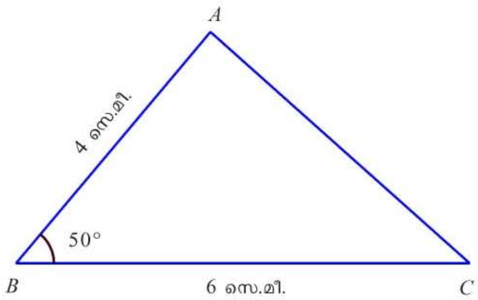
എന്നും എഴുതാം. ഇനി $AC = 6$ എന്നു പറഞ്ഞതും, പട്ടിക യിൽനിന്നു കിട്ടുന്ന $\sin 40°$, $\cos 40°$ ഇവയും ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$AB \approx 6 \times 0.6428 = 3.8568$$

$$BC \approx 6 \times 0.7660 = 4.596$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്, ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം ഏകദേശം 3.9 സെന്റിമീറ്ററും, 4.6 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്.

- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്; അവയുടെ ഇടയിലുള്ള കോൺ 50°. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?



പരപ്പളവു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഏതെങ്കിലും വശത്തുനിന്നുള്ള ഉയരവും കൂടി വേണമല്ലോ. ചിത്രത്തിൽ, മുകളിലെ മൂലയിൽ നിന്നു ലംബം വരയ്ക്കാം :

കേരളഗണിതം

കേരളത്തിൽ പതിനാലാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന മാധവൻ എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനെക്കുറിച്ച് കേട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങളുടെ അളവുകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **π കേരളത്തിൽ** എന്ന ഭാഗം). വൃത്തത്തിലെ ചാപത്തിന്റെ നീളത്തിൽനിന്ന് അതിന്റെ ഞാണിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു ശ്രേണി അദ്ദേഹം കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടുണ്ട്. സംസ്കൃത ശ്ലോകമായി അദ്ദേഹം എഴുതിയത് ഇന്നത്തെ ഗണിതഭാഷ യിലെഴുതിയാൽ ഇങ്ങനെയാകും:

$$x,$$

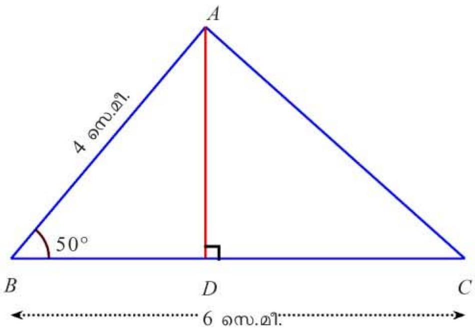
$$x - \frac{x^3}{1\times2\times3},$$

$$x - \frac{x^3}{1\times2\times3} + \frac{x^5}{1\times2\times3\times4\times5}$$

എന്നു തുടരുന്ന ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ, x റേഡിയൻ അളവുള്ള കോണിന്റെ sin അളവിനോട് അടുത്തടുത്തുവരും. കുറേക്കൂടി ചുരുക്കി എഴുതിയാൽ,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\times2\times3} + \frac{x^5}{1\times2\times3\times4\times5} - \cdots$$

പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിലെ ന്യൂട്ടൻ, ജർമനിയിലെ ലിബ്നീസ് *(Lebinitz)* എന്നിവർ ഈ വസ്തുത തന്നെ വീണ്ടും കണ്ടുപിടിക്കുകയുണ്ടായി.



ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 6 \times AD = 3 \times AD$$

ആണല്ലോ. ഇതിൽ AD എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ചിത്രത്തിലെ ABD എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$\frac{AD}{AB} = \sin 50°$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ നിന്ന്

$$AD = AB \times \sin 50° = 4 \sin 50°$$

ഇനി പട്ടികയിൽ നിന്ന്

$$\sin 50° \approx 0.7660$$

എന്നു കണ്ടുപിടിക്കാം. അപ്പോൾ

$$AD \approx 4 \times 0.7660 = 3.064$$

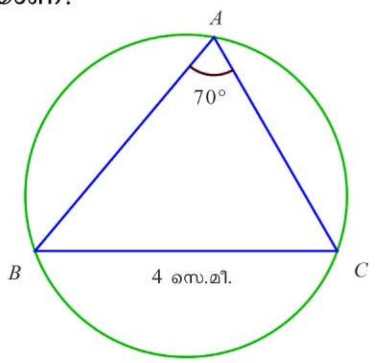
ഇനി പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ

$$3 \times AD \approx 3 \times 3.064 \approx 9.19$$

അതായത്, പരപ്പളവ് ഏകദേശം 9.19 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണ്.

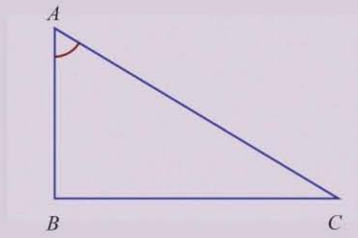
B യിലെ കോൺ 50° യ്ക്കു പകരം 130° എന്നെടുത്ത് പരപ്പളവ് കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

- ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഒരു കോൺ 70° യും അതിന്റെ എതിർവശം 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം എത്രയാണ്?



പൈഥഗോറസ് ബന്ധം

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഈ മട്ടത്രികോണത്തിൽ, പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ചാൽ

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. ഈ സമവാക്യത്തെ AC^2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = 1$$

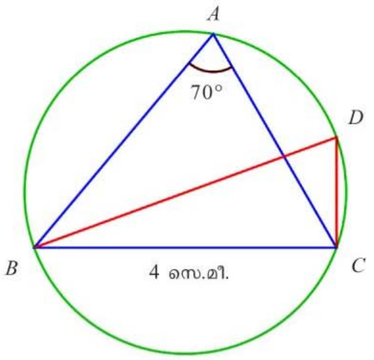
എന്നു കിട്ടും. ഇനി $\angle A$ യെ അടിസ്ഥാനമാക്കി നോക്കിയാൽ, ഇത്

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

എന്നാകും. ഇത് ഏതു കോണിനും ശരിയാണല്ലോ. ($\cos A$, $\sin A$ എന്നിവയുടെ വർഗങ്ങൾ $\cos^2 A$, $\sin^2 A$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.)

ഇതുപോലെ വ്യാസം കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട ഒരു കണക്ക് അടുത്തിടെ ചെയ്തിട്ടുണ്ടോ? ഈ പാഠത്തിൽ മുമ്പു ചെയ്ത ചോദ്യങ്ങളെല്ലാം മറിച്ചുനോക്കൂ.

ഈ ചിത്രത്തിൽ, B യിൽക്കൂടിയുള്ള വ്യാസം വരച്ച്, അതിന്റെ മറ്റേ അറ്റം C യുമായി യോജിപ്പിച്ചുനോക്കാം:



BCD ഒരു മട്ടത്രികോണമാണല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?) കൂടാതെ D യിലും A യിലും ഉള്ള കോണുകൾ തുല്യവുമാണ് (കാരണം?) അതായത്, $\angle BDC = 70°$. ഇനി BDC എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$\frac{BC}{BD} = \sin 70°$$

എന്നും അതിൽനിന്ന്

$$BD = \frac{BC}{\sin 70^\circ} = \frac{4}{\sin 70^\circ}$$

എന്നും കാണാമല്ലോ. ഇനി പട്ടിക നോക്കി $\sin 70° \approx 0.9397$ എന്നു കണ്ടുപിടിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ

$$BD = \frac{4}{0.9397} \approx 4.3$$

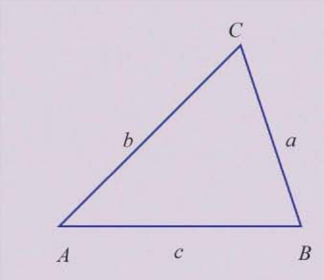
എന്നു (കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച്) കിട്ടും. അതായത്, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം ഏകദേശം 4.3 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

A യിലെ കോൺ $110°$ ആണെങ്കിൽ വ്യാസം എത്രയായിരിക്കും?

- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടുവശങ്ങൾ 7 സെന്റിമീറ്ററും 6 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്; അവയുടെ ഇടയിലുള്ള കോൺ $40°$. ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

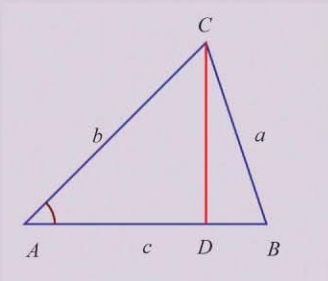
പരപ്പളവ്

ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:



ഇതിന്റെ പരപ്പളവു കണ്ടുപിടിക്കണം.

അതിന് C യിൽ നിന്ന് AB യിലേക്കു ലംബം വരയ്ക്കാം



$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2} \times AB \times CD$$

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$CD = AC \sin A = b \sin A$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ

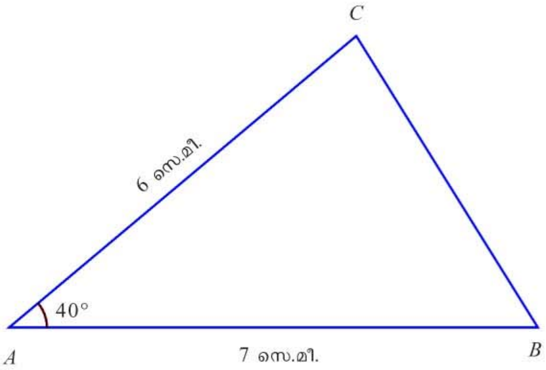
$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2}\, bc \sin A$$

എന്നാകും. മറ്റു മൂലകളിൽ നിന്നു ലംബം വരച്ചാൽ

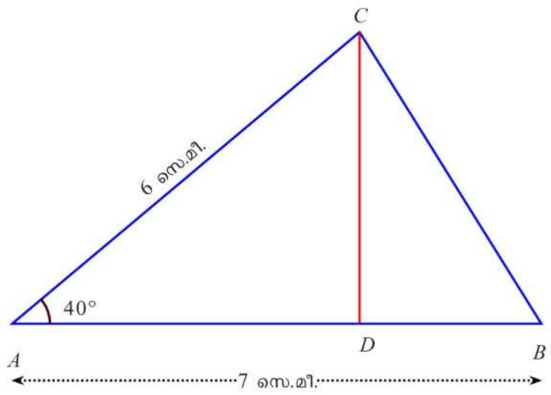
$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2}\, ca \sin B = \frac{1}{2}\, ab \sin C$$

എന്നും കിട്ടും.

ഇതെല്ലാം ഒരേ സംഖ്യയാണല്ലോ. ഇക്കാര്യം ഉപയോഗിച്ച് വശങ്ങളും കോണുകളും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?



BC യുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, C യിൽനിന്ന് AB യിലേക്കു ലംബം വരയ്ക്കുക എന്നതാണ് സൂത്രം.



ഇപ്പോൾ BCD എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$

ഇനി BD യും DC യും കണ്ടുപിടിക്കാം.

ACD എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$DC = AC \sin 40° \approx 6 \times 0.6428 \approx 3.86$$

എന്നു കണ്ടുപിടിക്കാം. കൂടാതെ ഇതേ ത്രികോണത്തിൽനിന്നു തന്നെ

$$AD = AC \cos 40° \approx 6 \times 0.7660 \approx 4.60$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ

$$BD = AB - AD \approx 7 - 4.6 = 2.4$$

ഇനി

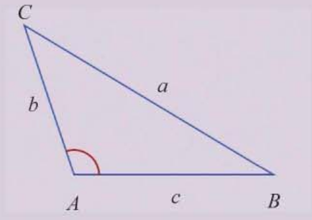
$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} \approx \sqrt{3.86^2 + 2.4^2} = 4.54$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്, BC യുടെ നീളം ഏകദേശം 4.5 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

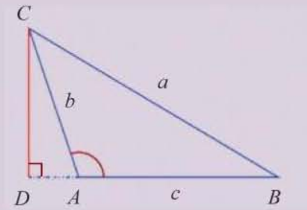
A യിലെ കോൺ 110° ആണെങ്കിൽ, BC യുടെ നീളം എത്രയായിരിക്കും?

വലിയ കോണുകൾ

ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



ഇതിൽ C യിൽ നിന്ന് ലംബം വരച്ചാൽ ഇങ്ങനെയാണ് കിട്ടുക



ഇവിടെയും

$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2} \times AB \times CD$$

എന്നു കിട്ടും. പക്ഷേ, CD യെ $b \sin A$ എന്നെഴുതാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. (എന്തുകൊണ്ട്?)

എന്നാൽ ADC എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ

$$\angle CAD = 180° - \angle CAB$$

എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ,

$$CD = b \sin (180° - \angle CAB)$$

ഇനി $\angle CAB$ യെ $\angle A$ എന്നെഴുതിയാൽ (ഇതാണല്ലോ നമ്മുടെ ത്രികോണത്തിനകത്തെ കോൺ)

$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2}\, bc \sin (180 - A)$$

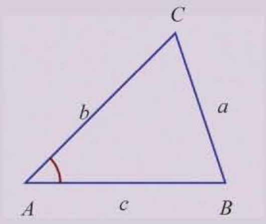
എന്നു കിട്ടും

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ ΔABC യിൽ $\angle A < 90°$ ആണെങ്കിൽ, പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}\, bc \sin A$; അതല്ല, $\angle A > 90°$ ആണെങ്കിൽ, പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}\, bc \sin (180 - A)$

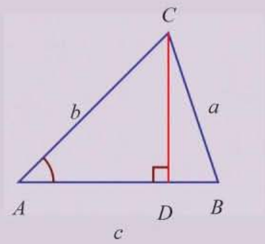
ഇനി $\angle A = 90°$ ആണെങ്കിലോ?

മൂന്നാം വശം

ഈ ത്രികോണത്തിൽ b, c എന്നീ നീളങ്ങളും, A എന്ന കോണും അറിയാമെങ്കിൽ a എന്ന വശം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?



അതിനും, C യിൽനിന്നുള്ള ലംബം വരച്ചാൽ മതി.



ADC എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$AD = b \cos A$, $\quad CD = b \sin A$

എന്നു കാണാം. ഇനി BDC എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$a^2 = b^2 \sin^2 A + (c - b \cos A)^2$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതിൽ

$$(c - b \cos A)^2 = c^2 + b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A$$

എന്നെഴുതി,

$$b^2 \sin^2 A + b^2 \cos^2 A = b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) = b^2$$

എന്നും കണ്ടാൽ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

എന്നു കിട്ടും.

ഇനിയുള്ള കണക്കുകൾ നിങ്ങൾക്കുള്ളതാണ്.

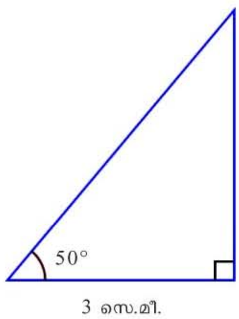
- പടം വരയ്ക്കാതെ, പട്ടിക നോക്കാതെ

  $$\sin 1°, \cos 1°, \sin 2°, \cos 2°$$

  എന്നീ സംഖ്യകളെ വലിപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതാമോ?
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്; അവയുടെ ഇടയിലുള്ള കോൺ 130°. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ 110° യും അതിന്റെ എതിർവശം 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം എത്രയാണ്?
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടുവശങ്ങൾ 7 സെന്റിമീറ്ററും 6 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അവയുടെ ഇടയിലുള്ള കോൺ 140°. ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?
- ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ 6 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്; അവ തമ്മിലുള്ള കോൺ 35° യും ആണ്. ഈ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

മറ്റൊരളവ്

ഒരു മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കണം. ചെറുവശങ്ങളിലൊന്നിന്റെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ. അതിന്മേലുള്ള ഒരു കോൺ 50°



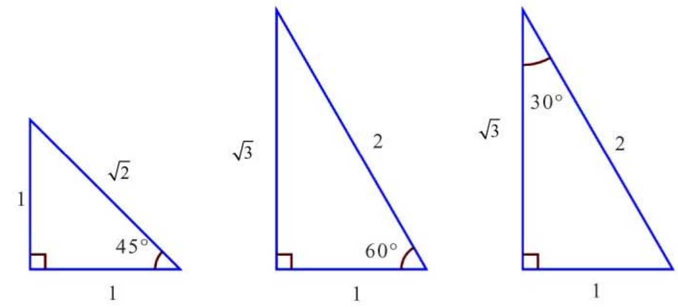
വരയ്ക്കാൻ വിഷമമില്ല, അല്ലേ? ഇതിന്റെ രണ്ടാം ചെറുവശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

പട്ടികനോക്കി $\cos 50°$ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ, കർണം കണ്ടുപിടിക്കാം; തുടർന്ന് പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ചു മൂന്നാംവശവും കണ്ടുപിടിക്കാം.

കുറച്ചുകൂടി എളുപ്പത്തിൽ ഇതു ചെയ്യാൻ മറ്റൊരു പട്ടിക ഉപയോഗിക്കാം. മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ, ഒരു കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ സമീപവശം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യകളും പട്ടികപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

ഈ സംഖ്യയെ കോണിന്റെ ടാൻജെന്റ് (tangent) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ചുരുക്കി tan എന്ന് എഴുതാം.

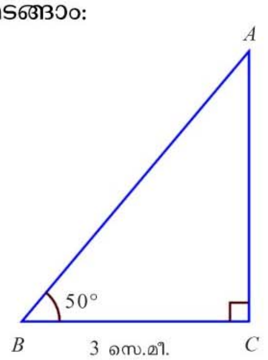
ഉദാഹരണമായി,നാം നേരത്തെ കണ്ട ചില ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കാം:



$\tan 45° = 1$ $\tan 60° = \sqrt{3}$ $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

എന്നെല്ലാം കാണാമല്ലോ.

നമ്മുടെ പ്രശ്നത്തിലേക്കു മടങ്ങാം:



ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്,

$$\frac{AC}{BC} = \tan 50°$$

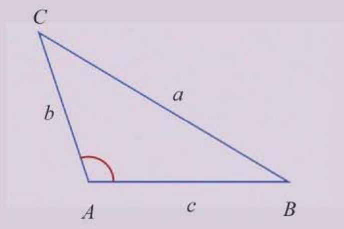
എന്നു കാണാം. ഇതിൽനിന്ന്

$$AC = BC \times \tan 50° \approx 3 \times 1.1918 = 3.5754 \approx 3.6$$

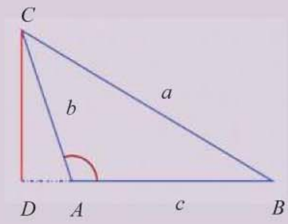
എന്ന് പടവും പട്ടികയും ഉപയോഗിച്ചു കണ്ടുപിടിക്കാം. അതായത്, നമുക്കാവശ്യമായ വശത്തിന്റെ നീളം 3.6 സെന്റിമീറ്റർ.

കോണിന്റെ tan അളവുപയോഗിക്കുന്ന ഒരു സന്ദർഭംകൂടി നോക്കൂ:

കോൺ വലുതായാൽ



b, c എന്നീ വശങ്ങളും $\angle A$ യും അറിയാമെങ്കിൽ, മൂന്നാംവശം a കണ്ടുപിടിക്കാൻ നേരത്തെ ഉപയോഗിച്ച മാർഗം, ഈ ചിത്രത്തിലും ശരിയാകുമോ?



എന്തൊക്കെ മാറ്റങ്ങളുണ്ടാകും? ADC എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$AD = b\cos\ (180 - A)$$

$$CD = b\sin\ (180 - A)$$

എന്നാകും; കൂടാതെ BDC എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ

$$BD = c + b\cos(180 - A)$$

എന്നാകും, ഈ മാറ്റങ്ങൾ വരുത്തിയാൽ, നേരത്തെ കണ്ട സമവാക്യം

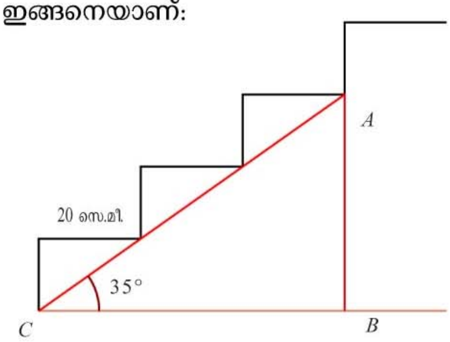
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(180 - A)$$

എന്നാകും.

$\angle A > 90°$ ആയ ത്രികോണമാണ് ഇവിടെ കണ്ടത്. $\angle A = 90°$ ആയാലോ?

ചിത്രത്തിലെ ആൾ നിൽക്കുന്നത്, എത്ര ഉയരത്തിലാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കണം.

പടിക്കെട്ടിന്റെ അളവുകൾ ഇങ്ങനെയാണ്:



കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട ഉയരം AB യാണല്ലോ.

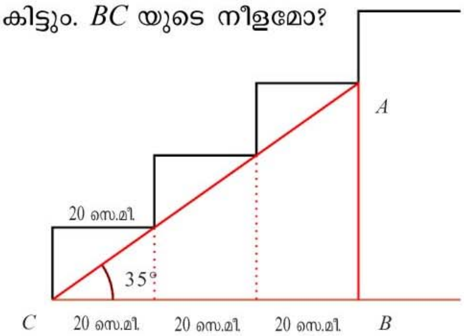
ചിത്രത്തിൽനിന്ന്

$$AB = BC \times \tan 35°$$

ഇതിൽ

$$\tan 35° \approx 0.7002$$

എന്നു പട്ടികയിൽ നിന്നു കിട്ടും. BC യുടെ നീളമോ?



ഈ ചിത്രത്തിൽനിന്നു BC യുടെ നീളം 60 സെന്റിമീറ്ററാണെന്നു കാണാം. അപ്പോൾ

$$AB = BC \times \tan 35° \approx 60 \times 0.7002 = 42.012$$

പുതിയ അർത്ഥങ്ങൾ

ഒരു കോണിന്റെ sin, cos, tan എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആദ്യം ആ കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കണം. കോൺ 90° യേക്കാൾ ചെറുതാണെങ്കിലേ ഇതു സാധിക്കൂ. അതിനാൽ, ഇത്തരം കോണുകൾക്കു മാത്രമാണ് തൽക്കാലം ത്രികോണമിതി അളവുകളുള്ളത്.

അതുകൊണ്ടു തന്നെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവു കണ്ടുപിടിക്കാനും, വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാനുമെല്ലാം കോണിന്റെ വലിപ്പമനുസരിച്ച്, വ്യത്യസ്ത സൂത്രവാക്യങ്ങൾ വേണ്ടിവരുന്നു. ഇതൊഴിവാക്കാൻ, 90° യേക്കാൾ വലിയ കോണുകൾക്കും ത്രികോണമിതി അളവുകൾ പുതുതായി നിർവചിക്കണം. അത് ഇങ്ങനെയാണ്.

$$\sin(180° - x) = \sin x$$

$$\cos(180° - x) = -\cos x$$

കൂടാതെ

$$\sin 90° = 1$$

$$\cos 90° = 0$$

എന്നും നിർവചനം നീട്ടും. (കോൺ 90° യോട് അടുക്കുന്തോറും, അതിന്റെ എതിർവശത്തിനും സമീപവശത്തിനും എന്തു സംഭവിക്കുന്നു എന്നു നോക്കുക)

അപ്പോൾ കോണുകൾ A, B, C യും, വശങ്ങൾ a, b, c യും ആയ ഏതുതരം ത്രികോണത്തിനും

$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2} bc \sin A$$

എന്നും

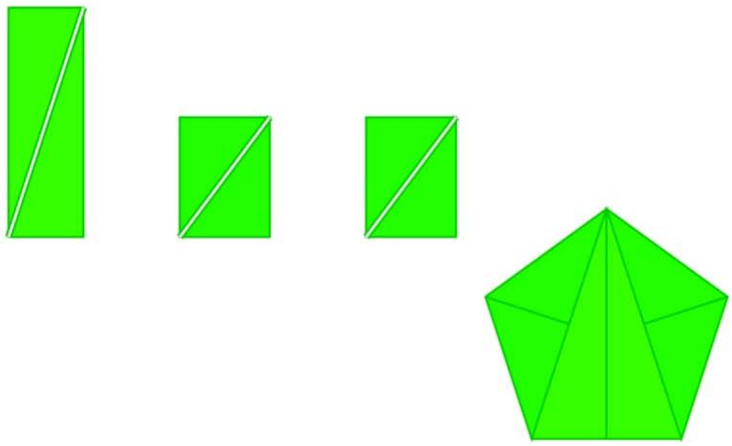
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

എന്നുമെല്ലാം ഒറ്റ സൂത്രവാക്യത്തിൽ കാര്യങ്ങൾ ഒതുക്കാം.

അതായത്, ഉയരം ഏകദേശം 42 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

സ്വയം ചെയ്തുനോക്കാനായി ചില കണക്കുകളിതാ :

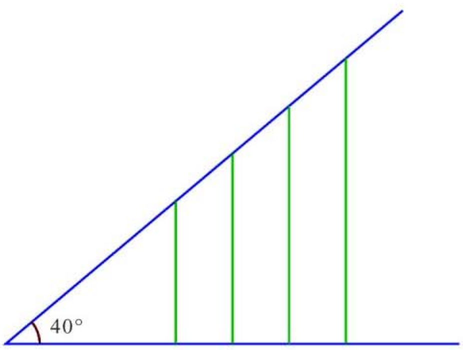
- ഒരു കോൺ $50°$ യും ഒരു വികർണം 5 സെന്റിമീറ്ററുമായി എത്ര സമഭുജസാമാന്തരികം ഉണ്ട്? അവയുടെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?
- മതിലിന്മേൽ ഒരു കമ്പ് ചാരി വച്ചിരിക്കുന്നു. കമ്പിന്റെ ചുവട് മതിലിൽ നിന്ന് 2 മീറ്റർ അകലെയാണ്; കമ്പും തറയുമായുള്ള കോൺ $40°$ ആണ്. കമ്പിന്റെ മുകളറ്റം, തറയിൽനിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലാണ്?
- മൂന്നു ചതുരങ്ങൾ വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ചു ത്രികോണങ്ങളാക്കി, ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ചേർത്തു വച്ച്, ഒരു സമപഞ്ചഭുജമുണ്ടാക്കണം:



30 സെ.മീ.

ചതുരങ്ങളുടെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം?

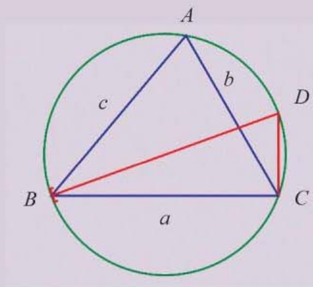
- ചിത്രത്തിലെ കുത്തനെയുള്ള വരകൾ 1 സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ടാണ് വരച്ചിരിക്കുന്നത്:



അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക. പൊതുവ്യത്യാസം എത്രയാണ്?

ത്രികോണവും വൃത്തവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



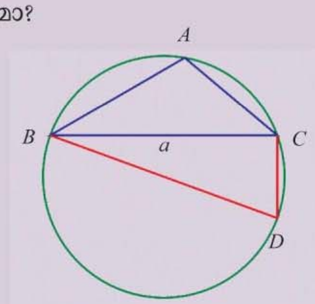
BD വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണ്. അപ്പോൾ $\angle BCD = 90°$ യും $\angle D = \angle A$ യും ആണല്ലോ. വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം d എന്നെടുത്താൽ, BCD എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$a = d \sin D = d \sin A$$

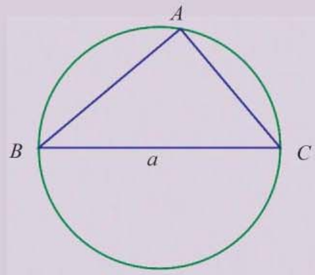
ഇതുപോലെ $b = d \sin B$, $c = d \sin C$ എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = d$$

ത്രികോണത്തിലെ ഒരു കോൺ $90°$യിൽ കൂടുതലായാൽ ഇതു ശരിയാകുമോ?

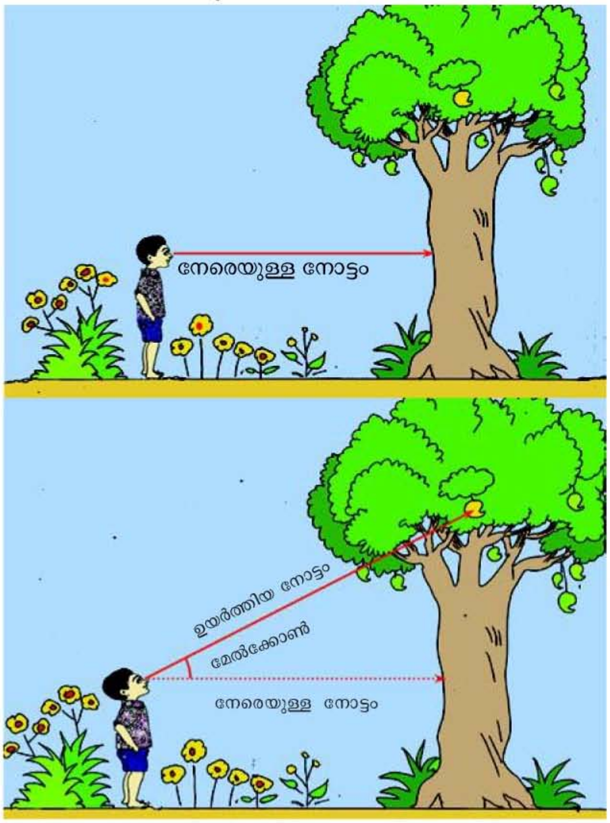


ഒരു കോൺ മട്ടമായാലോ?



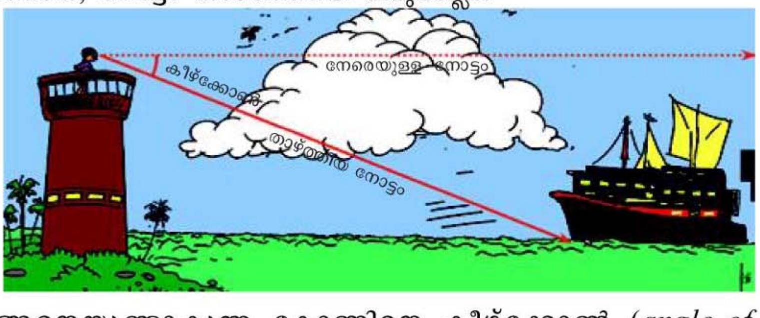
അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളും

നമ്മേക്കാൾ ഉയരത്തിലുള്ളവ കാണാൻ, തല അൽപം ഉയർത്തണമല്ലോ; ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



സാധാരണയായി നമ്മുടെ നോട്ടത്തിന്റെ പാത നിലത്തിനു സമാന്തരമാണ്; ഉയരത്തിലുള്ളവയെ നോക്കുമ്പോൾ, ഇത് മേൽപ്പോട്ടുയരും. ഈ രണ്ടു വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണിനെ മേൽക്കോൺ (*angle of elevation*) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇതുപോലെ ഉയരത്തിൽ നിൽക്കുമ്പോൾ താഴെയുള്ളവയെ കാണാൻ, നോട്ടം താഴ്ത്തേണ്ടി വരുമല്ലോ.



ഇങ്ങനെയുണ്ടാകുന്ന കോണിനെ കീഴ്ക്കോൺ (*angle of depression*) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇത്തരം കോണുകൾ അളക്കുന്നത് ക്ലൈനോമീറ്റർ (*clinometer*) എന്ന ഉപകരണം ഉപയോഗിച്ചാണ്. നേരിട്ടളക്കാൻ കഴിയാത്ത അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളുമെല്ലാം ക്ലൈനോമീറ്ററുപയോഗിച്ചു കോണളന്നും, sin ഉം cos ഉം എല്ലാം ഉപയോഗിച്ചു കണക്കുകൂട്ടിയുമാണ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്.

പ്രശ്നപരിഹാരം

കോണുകളുടെ അളവുകൾ A, B, C യും വശങ്ങളുടെ നീളം a, b, c യും ആയ ത്രികോണത്തിൽ (അത് ഏതു തരത്തിൽപ്പെട്ടതായാലും)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ. മറ്റൊരു തരത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

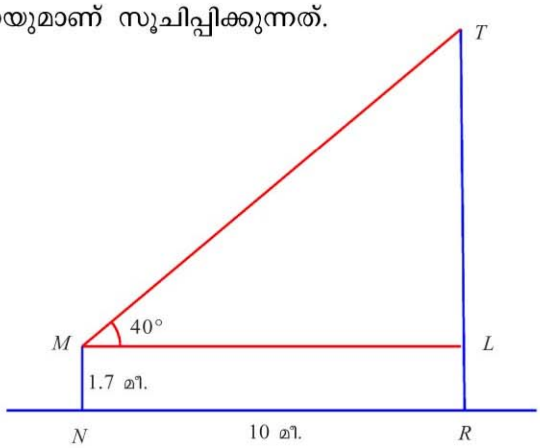
അതായത്, ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ അംശബന്ധം, കോണുകളുടെ sin അളവുകളുടെ അംശബന്ധത്തിനു തുല്യമാണ്.

ഒരേ കോണുകളുള്ള പല പല ത്രികോണങ്ങളിൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള (മാറാത്ത) അംശബന്ധം എന്താണ് എന്ന അന്വേഷണത്തിലാണല്ലോ തുടങ്ങിയത്. ഇപ്പോൾ അതിന് ഉത്തരം കിട്ടിയില്ലേ?

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം:

- ഒരു മരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് 10 മീറ്റർ അകലെ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ, മരത്തിന്റെ മുകളറ്റം $40°$ മേൽക്കോണിൽ കാണുന്നു, അയാളുടെ ഉയരം 1.7 മീറ്ററാണ്. മരത്തിന് എന്തുയരമുണ്ട്?

  ചിത്രത്തിൽ MN എന്ന വര നോക്കുന്ന ആളിനെയും TR മരത്തിനെയുമാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.



ചിത്രത്തിൽനിന്ന് (പട്ടികയും ഉപയോഗിച്ച്),

$$TL = ML \tan 40° \approx 10 \times 0.8390 = 8.39$$

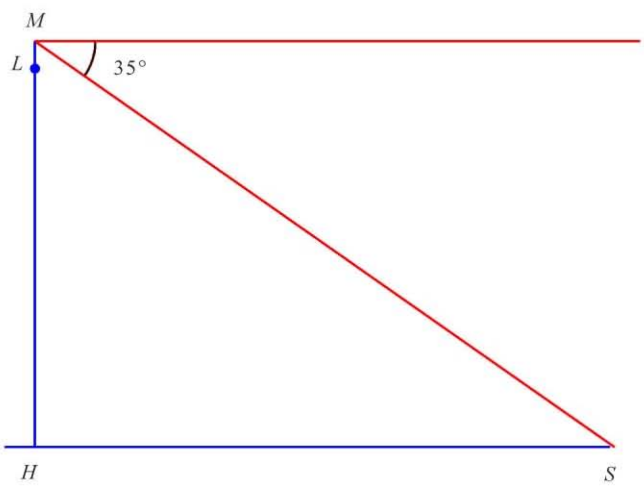
എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ

$$TR = TL + LR = TL + MN \approx 8.39 + 1.7 = 10.09$$

അതായത്, മരത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം 10.09 മീറ്ററാണ്.

- 1.8 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ 25 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു ലൈറ്റ്ഹൗസിന്റെ മുകളിൽനിന്ന് നോക്കിയപ്പോൾ, $35°$ കീഴ്ക്കോണിൽ ഒരു കപ്പൽ കണ്ടു. അത് ലൈറ്റ്ഹൗസിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് എത്ര അകലെയാണ്?

  ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:



ഇതിൽ LH ലൈറ്റ്ഹൗസും, ML അതിനു മുകളിൽ നിൽക്കുന്ന ആളുമാണ്. S ആണു കപ്പൽ. കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് HS

സർവസമത

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളോ, രണ്ടു വശങ്ങളും ഒരു ഉൾക്കോണുമോ, ഒരു വശവും അതിലെ രണ്ട് കോണുകളുമോ പറഞ്ഞു കഴിഞ്ഞാൽ, മറ്റെല്ലാ അളവുകളും നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ടു കഴിഞ്ഞു എന്ന് എട്ടാംക്ലാസിലെ **സർവസമത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ?

ഇവ എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നുവശങ്ങൾ a, b, c അറിയാമെങ്കിൽ

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

തുടങ്ങിയ ബന്ധങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് A, B, C എന്നീ കോണുകൾ കണക്കാക്കാം.

രണ്ട് വശങ്ങൾ a, b യും, ഉൾക്കോൺ C യും അറിയാമെങ്കിൽ

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് c യും തുടർന്ന് ആദ്യം പറഞ്ഞത് പോലെ മറ്റു കോണുകളും കണക്കാക്കാം.

a എന്ന വശവും അതിലെ B, C എന്നീ കോണുകളുമാണ് അറിയുന്നതെങ്കിൽ ആദ്യം $A = 180 - (B + C)$ എന്നും തുടർന്ന്

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

തുടങ്ങിയ ബന്ധങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് b യും c യും കണ്ടുപിടിക്കാം. അങ്ങനെ ത്രികോണമിതിയുടെ സഹായത്തോടെ ത്രികോണനിശ്ചയം പൂർണമാക്കാം.

പറഞ്ഞിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളനുസരിച്ച്

$$MH = ML + LH = 25 + 1.8 = 26.8$$

കൂടാതെ $\angle HMS = 55°$

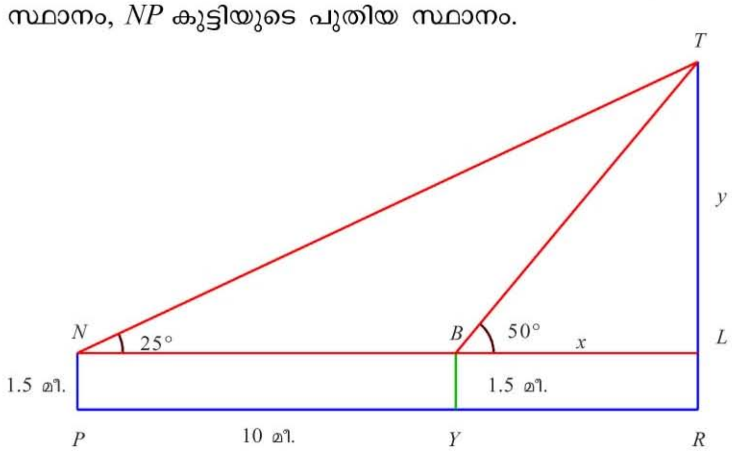
അപ്പോൾ MHS എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$HS = MH \tan 55° \approx 26.8 \times 1.4281 \approx 38.27$$

അതായത്, ലൈറ്റ് ഹൗസിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് ഏകദേശം 38.27 മീറ്റർ അകലെയാണ് കപ്പൽ.

- പുഴയോരത്തു നിൽക്കുന്ന ഒരു കുട്ടി, അക്കരയോടു ചേർന്നു നിൽക്കുന്ന ഒരു മരത്തിന്റെ മുകളറ്റം 50° മേൽക്കോണിൽ കണ്ടു. 10 മീറ്റർ പുറകോട്ടു മാറി നോക്കിയപ്പോൾ അത് 25° മേൽക്കോണിലാണ് കണ്ടത്. കുട്ടിയുടെ ഉയരം 1.5 മീറ്റർ. പുഴയുടെ വീതിയും, മരത്തിന്റെ ഉയരവും കണക്കാക്കുക.

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ TR മരം, BY കുട്ടി ആദ്യം നിന്ന സ്ഥാനം, NP കുട്ടിയുടെ പുതിയ സ്ഥാനം.



കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്, YR ഉം TR ഉം ആണ്. ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

ചരിവും വിരിവും

കോണുകളെ വിരിവിന്റെ അളവുകളായി കാണുന്ന ആവശ്യങ്ങളിൽ നിന്നാണ് sin, cos എന്നീ അളവുകളുണ്ടായതെന്ന് കണ്ടല്ലോ. ചരിവിന്റെ അളവായി കോണിനെ കാണുന്ന രീതിയെ ഇതുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തുമ്പോഴാണ് tan ഉണ്ടാകുന്നത്. (ഉയരത്തെ അകലം കൊണ്ടു ഹരിച്ചു ചരിവളക്കുന്ന പഴയ രീതി തന്നെയാണല്ലോ അതിന്റെ നിർവചനം)

ഏ.ഡി. ഒമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിലെ അഹമ്മദ് ഇബിൻ അബ്ദുള്ള അൽ മൊർവാസി എന്ന അറബ് ഗണിതകാരനാണ് ഇത്തരമൊരു ബന്ധം അവതരിപ്പിച്ചതും, tan ന്റെ ഒരു പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയതും.

ഇതിന് tangent എന്ന പേരു വന്നത് പതിനാറാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ്.

$YR = BL \qquad TR = TL + LR = TL + 1.5$

ആയതിനാൽ, BL ഉം TL ഉം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി.

$BL = x \qquad TL = y$

എന്നെടുത്താൽ BTL എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$y = x \tan 50° \approx 1.1918x$$

എന്നും, NTL എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$y = (x + 10) \tan 25° \approx 0.4663\ (x + 10) = 0.4663x + 4.663$$

എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ

$$1.1918x \approx 0.4663x + 4.663$$

എന്നാകുമല്ലോ.

ഇതിൽനിന്ന്

$$x \approx \frac{4.663}{0.7255} \approx 6.427$$

എന്ന് (കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച്) കണ്ടുപിടിക്കാം. ഇതുപയോഗിച്ച്

$$y \approx 1.1918 \times 6.427 \approx 7.659$$

എന്നും കാണാം. അതായത്, പുഴയുടെ വീതി ഏകദേശം 6.43 മീറ്ററും, മരത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം 7.66 മീറ്ററുമാണ്.

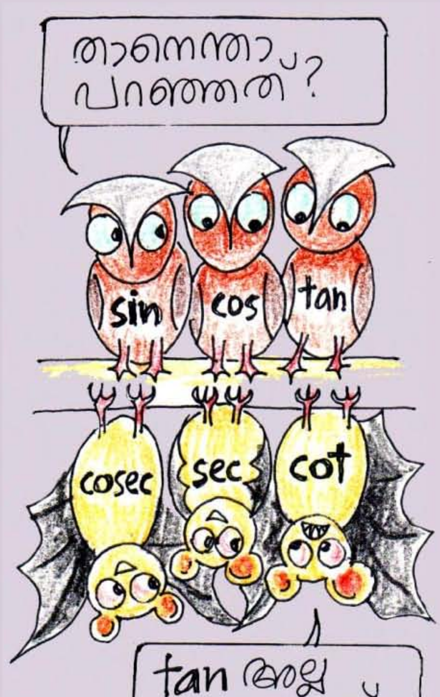
ഇനി ചില കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കാമല്ലോ:

- സൂര്യൻ 40° മേൽക്കോണിൽ കാണപ്പെടുമ്പോൾ, ഒരു മരത്തിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം 18 മീറ്ററാണ്. മരത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?
- ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിൽക്കുന്ന 1.75 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ, 40 മീറ്റർ അകലെയുള്ള ഒരു കുന്നിന്റെ മുകളറ്റം 60° മേൽക്കോണിൽ കാണുന്നു. ഗോപുരത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നു നോക്കിയപ്പോൾ, അത് 50° മേൽക്കോണിലാണ് കണ്ടത്. കുന്നിന്റെയും, ഗോപുരത്തിന്റെയും ഉയരം കണക്കാക്കുക.
- പണിതുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകൾഭാഗം, 1.5 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു കുട്ടി 30° മേൽക്കോണിൽ കണ്ടു. 10 മീറ്റർകൂടി ഉയർത്തി, കെട്ടിടം പണിതീർത്തപ്പോൾ, അയാൾ അതേ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 60° മേൽക്കോണിലാണ് മുകൾഭാഗം കണ്ടത്. കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?
- 1.8 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ, ഒരു ടെലിഫോൺ ടവറിന്റെ മുകളിൽനിന്നു നോക്കുമ്പോൾ, 10 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളറ്റം 40° കീഴ്ക്കോണിലും. അതിന്റെ ചുവട് 60° കീഴ്ക്കോണിലും കണ്ടു. ടവറിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്? അത് കെട്ടിടത്തിൽനിന്ന് എത്ര അകലെയാണ്?

മറ്റളവുകൾ

ഒരു കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന മട്ടത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിൽ പല രീതികളിൽ ഹരിച്ചു sin, cos, tan എന്നീ അളവുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നതു കണ്ടു. വശങ്ങൾ തമ്മിൽ വേറെയും ഹരണം ബാക്കിയുണ്ടല്ലോ. അവയ്ക്കും ത്രികോണമിതിയിൽ പേരുകളുണ്ട്.

ഒരു കോണിന്റെ sin, cos എന്നിവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾക്ക്, കൊസീക്കന്റ് (cosecant), സീക്കന്റ് (secant) എന്നിങ്ങനെയാണ് പേരുകൾ; tan ന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്, കോടാൻജെന്റ് (cotangent) എന്നും. ഇവയെ ചുരുക്കി, cosec, sec, cot എന്നിങ്ങനെയാണ് എഴുതുന്നത്.



ത്രികോണമിതി അളവുകൾ

കോൺ	sin	cos	tan	കോൺ	sin	cos	tan
0°	0.0000	1.0000	0.0000	46°	0.7193	0.6947	1.0355
1°	0.0175	0.9998	0.0175	47°	0.7314	0.6820	1.0724
2°	0.0349	0.9994	0.0349	48°	0.7431	0.6891	1.1106
3°	0.0523	0.9986	0.0524	49°	0.7547	0.6561	1.1504
4°	0.0698	0.9976	0.0699	50°	0.7660	0.6428	1.1918
5°	0.0872	0.9962	0.0875	51°	0.7771	0.6293	1.2349
6°	0.1045	0.9945	0.1051	52°	0.7880	0.6157	1.2799
7°	0.1219	0.9925	0.1228	53°	0.7986	0.6018	1.3270
8°	0.1392	0.9903	0.1405	54°	0.8090	0.5878	1.3764
9°	0.1564	0.9877	0.1584	55°	0.8192	0.5736	1.4281
10°	0.1736	0.9848	0.1763	56°	0.8290	0.5592	1.4826
11°	0.1908	0.9816	0.1944	57°	0.8387	0.5446	1.5399
12°	0.2079	0.9781	0.2126	58°	0.8480	0.5299	1.6003
13°	0.2250	0.9744	0.2309	59°	0.8572	0.5150	1.6643
14°	0.2419	0.9703	0.2493	60°	0.8660	0.5000	1.7321
15°	0.2588	0.9659	0.2679	61°	0.8746	0.4848	1.8040
16°	0.2756	0.9613	0.2867	62°	0.8829	0.4695	1.8807
17°	0.2924	0.9563	0.3057	63°	0.8910	0.4540	1.9626
18°	0.3090	0.9511	0.3249	64°	0.8988	0.4384	2.0503
19°	0.3256	0.9455	0.3443	65°	0.9063	0.4226	2.1445
20°	0.3420	0.9397	0.3640	66°	0.9135	0.4067	2.2460
21°	0.3584	0.9336	0.3839	67°	0.9205	0.3907	2.3559
22°	0.3746	0.9272	0.4040	68°	0.9272	0.3746	2.4751
23°	0.3907	0.9205	0.4245	69°	0.9336	0.3584	2.6051
24°	0.4067	0.9135	0.4452	70°	0.9397	0.3420	2.7475
25°	0.4226	0.9063	0.4663	71°	0.9455	0.3256	2.9042
26°	0.4384	0.8988	0.4877	72°	0.9511	0.3090	3.0777
27°	0.4540	0.8910	0.5095	73°	0.9563	0.2924	3.2709
28°	0.4695	0.8829	0.5317	74°	0.9613	0.2756	3.4874
29°	0.4848	0.8746	0.5543	75°	0.9659	0.2588	3.7321
30°	0.5000	0.8660	0.5774	76°	0.9703	0.2419	4.0108
31°	0.5150	0.8572	0.6009	77°	0.9744	0.2250	4.3315
32°	0.5299	0.8480	0.6249	78°	0.9781	0.2079	4.7046
33°	0.5446	0.8387	0.6494	79°	0.9816	0.1908	5.1446
34°	0.5592	0.8290	0.6745	80°	0.9848	0.1736	5.6713
35°	0.5736	0.8192	0.7002	81°	0.9877	0.1564	6.3138
36°	0.5878	0.8090	0.7265	82°	0.9903	0.1392	7.1154
37°	0.6018	0.7986	0.7536	83°	0.9925	0.1219	8.1443
38°	0.6157	0.7880	0.7813	84°	0.9945	0.1045	9.5144
39°	0.6293	0.7771	0.8098	85°	0.9962	0.0872	11.4301
40°	0.6428	0.7660	0.8391	86°	0.9976	0.0698	14.3007
41°	0.6561	0.7547	0.8693	87°	0.9986	0.0523	19.0811
42°	0.6691	0.7431	0.9004	88°	0.9994	0.0349	28.6363
43°	0.6820	0.7314	0.9325	89°	0.9998	0.0175	57.2900
44°	0.6947	0.7193	0.9657	90°	1.0000	0.0000	....
45°	0.7071	0.7071	1.0000				