3 രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ

പുതിയ സമവാക്യങ്ങൾ

ഒരു ചോദ്യത്തിൽ നിന്നു തുടങ്ങാം:

- ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 5 സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് 36 സെന്റിമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമെന്തായിരുന്നു?

ഇത്തരം ചോദ്യങ്ങൾ ധാരാളം കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെയാണ്?

പുതിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം, $36 \div 4 = 9$ സെന്റിമീറ്റർ; അപ്പോൾ പഴയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം $9 - 5 = 4$ എന്നു ചിന്തിച്ച് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ചതുരവും ചുറ്റളവുമെല്ലാം മറന്ന്, സംഖ്യകളുടെ മാത്രം അടിസ്ഥാനത്തിൽ ചിന്തിച്ച്, ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

- ഒരു സംഖ്യയോട് 5 കൂട്ടിയതിന്റെ 4 മടങ്ങ് 36 ആണ്. സംഖ്യ എന്താണ്?

വിപരീത ദിശയിൽ, വിപരീതക്രിയകളിലൂടെ, സംഖ്യയോട് 5 കൂട്ടിയത് $36 \div 4 = 9$, അപ്പോൾ സംഖ്യ $9 - 5 = 4$ എന്ന് ഉത്തരവും കിട്ടും.

അൽപംകൂടി കടന്ന്, ബീജഗണിതഭാഷയിൽ, സംഖ്യ x എന്നെടുത്ത്, ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$4(x + 5) = 36$ ആകുന്ന x എന്താണ്?

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x + 5 = \frac{36}{4} = 9$$

എന്നും, തുടർന്ന്

$$x = 9 - 5 = 4$$

എന്ന് ഉത്തരവും കണ്ടെത്താം.

അളവുകളും സമവാക്യങ്ങളും

അളവുകളെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ് സംഖ്യകൾ പ്രധാനമായും ഉപയോഗിക്കുന്നത്. മാറുന്ന അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ബീജഗണിതവാക്യങ്ങളും ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, സമചതുരങ്ങളുടെ വശത്തിന്റെ നീളവും, ചുറ്റളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ.

$$p = 4s$$

എന്നെഴുതാം. വശത്തിന്റെ നീളം എന്തു തന്നെ ആയാലും ചുറ്റളവ് അതിന്റെ നാല് മടങ്ങാണ് എന്നതാണല്ലോ മാറാത്ത ബന്ധം.

ഭൂമിയിൽ നിന്നു u മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ മേലോട്ടെറിയുന്ന വസ്തുവിന്റെ, t സെക്കന്റു കഴിഞ്ഞുള്ള വേഗം,

$$v = u - 9.8t$$

എന്നെഴുതാം.

ചില അളവുകൾ അറിയാമെങ്കിൽ, മറ്റളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഈ സമവാക്യങ്ങളുപയോഗിക്കാം, ഉദാഹരണമായി, 20 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ മുകളിലോട്ടെറിയുന്ന വസ്തുവിന്റെ വേഗം എപ്പോഴാണ് 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ആകുന്നതെന്നറിയാൻ

$$20 - 9.8t = 10$$

എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്നവിധം t എന്ന സംഖ്യ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി.

ചോദ്യം അൽപം മാറ്റിയാലോ?

- ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 5 സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയപ്പോൾ, പരപ്പളവ് 36 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമെന്തായിരുന്നു?

പുതിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

എങ്ങനെയാണ് 6 സെന്റിമീറ്റർ എന്നു കിട്ടിയത്?

അപ്പോൾ, ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $6 - 5 = 1$ സെന്റിമീറ്റർ.

സംഖ്യകൾ മാത്രമാക്കി ചോദ്യത്തെ മാറ്റിയാലോ?

- ഒരു സംഖ്യയോട് 5 കൂട്ടിയതിന്റെ വർഗം 36 ആണ്. സംഖ്യ എന്താണ്?

വർഗത്തിൽ നിന്ന് സംഖ്യ തിരിച്ചുകിട്ടാൻ, വർഗമൂലം കണ്ടാൽ മതിയല്ലോ. (മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, വർഗമെടുക്കുക എന്നതിന്റെ വിപരീതക്രിയയാണ്, വർഗമൂലമെടുക്കുക എന്നത്.)

അപ്പോൾ സംഖ്യയോട് 5 കൂട്ടിയത്, $\sqrt{36} = 6$;

സംഖ്യ $6 - 5 = 1$

ഇനി ചോദ്യം ബീജഗണിതത്തിലാക്കിയാലോ?

$(x + 5)^2 = 36$ ആകുന്ന x എന്താണ്?

ഉത്തരമോ?

$$x + 5 = \sqrt{36} = 6$$

$$x = 6 - 5 = 1$$

മറ്റൊരു ചോദ്യം:

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം 5 ആണ്. രണ്ടാമത്തെ പദത്തിന്റെ വർഗം 36 ആണ്. ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ പദം എന്താണ്?

കഴിഞ്ഞ ചോദ്യത്തിലേതുപോലെ ചിന്തിച്ചാൽ, രണ്ടാമത്തെ പദം, 6 ആണ്. അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ പദം 1 എന്നു കിട്ടും.

അതായത്, ശ്രേണി 1, 6, 11, ...

ഈ കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞ ഗുണങ്ങളുള്ള മറ്റേതെങ്കിലും സമാന്തര ശ്രേണിയുണ്ടോ? $-11, -6, -1, \dots$ ആയാലോ?

ഈ ഉത്തരം കാണാതെ പോയതെന്തുകൊണ്ട്? രണ്ടാമത്തെ പദത്തിന്റെ വർഗം 36, അപ്പോൾ രണ്ടാംപദം 6 എന്നു ചിന്തിച്ചപ്പോൾ, -6 ന്റെ വർഗവും 36 ആണ് എന്നത് മറന്നുപോയി, അല്ലേ?

പലതരം സമവാക്യങ്ങൾ

ഒരു അളവു മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ചില സന്ദർഭങ്ങളും, അവയിൽ നിന്നുണ്ടാകുന്ന സമവാക്യങ്ങളും എട്ടാം ക്ലാസിൽ പരിചയപ്പെട്ടല്ലോ. ഇവയെല്ലാംതന്നെ, ലഘൂകരണങ്ങളെല്ലാം കഴിഞ്ഞാൽ, $2x = 3$ എന്ന രൂപത്തിലോ, $\frac{1}{2}x = -7$ എന്ന രൂപത്തിലോ ഒക്കെ ആയിരുന്നു. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, $ax = b$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ മാത്രമാണ് അവിടെ കണ്ടത്.

എന്നാൽ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും, അളവുകളുടെ വർഗങ്ങളും കൂടി ഉൾപ്പെട്ട പ്രശ്നങ്ങളുണ്ടാകും. ഉദാഹരണമായി,

ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം മറ്റേ വശത്തേക്കാൾ 2 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലായ, 323 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ് എന്ന പ്രശ്നം നോക്കുക.

ഈ പ്രശ്നത്തിന് ഉത്തരം കിട്ടാൻ

$$x(x+2) = 323$$

അഥവാ

$$x^2 + 2x = 323$$

എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന വിധത്തിൽ x എന്ന സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കണം.

അപ്പോൾ, ശരിയായ ചിന്ത എങ്ങനെയാണ്?

രണ്ടാമത്തെ പദം 6 അല്ലെങ്കിൽ -6; രണ്ടാംപദം 6 എങ്കിൽ ആദ്യ പദം $6 - 5 = 1$; രണ്ടാം പദം -6 എങ്കിൽ ആദ്യപദം $-6 - 5 = -11$

ബീജഗണിതരീതിയിലായാലോ?

$$(x + 5)^2 = 36$$

$$x + 5 = 6 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x + 5 = -6$$

$$x = 6 - 5 = 1 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = -6 - 5 = -11$$

ഇത് അൽപംകൂടി ചുരുക്കിയെഴുതാൻ, ഒരു ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. 6 അല്ലെങ്കിൽ -6 എന്നതിനെ ± 6 എന്നാണെഴുതുക. അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാകും:

$$(x + 5)^2 = 36$$

$$x + 5 = \pm 6$$

$$x = -5 \pm 6$$

$$x = -5 + 6 = 1 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = -5 - 6 = -11$$

അപ്പോഴൊരു ചോദ്യം : ചതുരക്കണക്കിലും ഇത്തരമൊരു ചിന്ത വേണ്ടേ?

വേണോ? ചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം ന്യൂനസംഖ്യ ആവില്ലല്ലോ.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഇത്തരം കണക്കുകൾ ബീജഗണിതരീതിയിൽചെയ്യുമ്പോൾ, രണ്ട് ഉത്തരങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുകയും, പിന്നീട് യഥാർത്ഥ കണക്കിലെ സാഹചര്യമനുസരിച്ച് രണ്ടും എടുക്കുകയോ, ഒന്നു മാത്രം എടുക്കുകയോ ചെയ്യുകയുമാണ് നല്ല രീതി.

ഒരു ചോദ്യം കൂടി

- ഒന്നിടവിട്ട രണ്ടു പൂർണ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തോട് 1 കൂട്ടിയപ്പോൾ 169 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

വിപരീതക്രിയകളുപയോഗിച്ച് ചെയ്യാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ? അപ്പോൾ ബീജഗണിതരീതി നോക്കാം.

സംഖ്യകൾ x, $x + 2$ എന്നെടുത്താൽ

$$x(x + 2) + 1 = 169$$

എന്ന സമവാക്യം കിട്ടും. ഇതിനെ

$$x^2 + 2x + 1 = 169$$

എന്നെഴുതാം. ഇനിയെന്തു ചെയ്യും?

പരിഹാരം – ഗണിതവും യാഥാർത്ഥ്യവും

20 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള ചതുരമുണ്ടാക്കണം; വീതി നീളത്തെക്കാൾ 11 സെന്റിമീറ്റർ കുറവായിരിക്കണം.

നീളം x എന്നെടുത്താൽ, ഈ പ്രശ്നത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം.

$$x + (x - 11) = 10$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x = 10.5$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്, നീളം 10.5 സെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ വീതിയോ?

$$10.5 - 11 = -0.5$$

ഇതു സാധ്യമല്ലല്ലോ. അതായത്, ഇത്തരമൊരു ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല.

ഇനി ഈ ചോദ്യം നോക്കൂ.

സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന രണ്ടു സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 11 ആണ്; ഇവയുടെ തുക 10 ഉം. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

വലിയ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യം തന്നെയാണ് കിട്ടുന്നത്. സംഖ്യകൾ $10\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ ഇവ ഈ പ്രശ്നത്തിന്റെ ഉത്തരമാണുതാനും.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, വ്യത്യസ്ത സാഹചര്യങ്ങളിൽ നിന്നുണ്ടാകുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ ഒന്നുതന്നെയാവാം. അവയുടെ പരിഹാരങ്ങൾ എല്ലാ സന്ദർഭങ്ങൾക്കും ഇണങ്ങണമെന്നില്ല.

മുമ്പു ചെയ്ത കണക്കുകളിലെപ്പോലെ, ഇടതുവശത്തുള്ള ബഹു പദത്തിനെ വർഗമായി എഴുതാൻ കഴിയുമോ?

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

എന്നത് ഓർമയുണ്ടല്ലോ?

അപ്പോൾ സമവാക്യം എന്തായി?

$$(x+1)^2 = 169$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x + 1 = \pm\sqrt{169} = \pm 13$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതിനാൽ

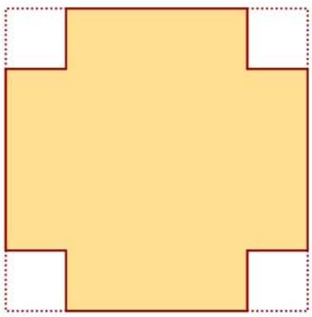
$$x = -1 \pm 13$$

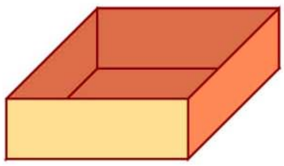
$$x = 12 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = -14$$

അപ്പോൾ സംഖ്യകൾ 12, 14, അല്ലെങ്കിൽ −14, −12.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തു നോക്കൂ:

- 2000 രൂപ, വാർഷികമായി കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്ന ഒരു പദ്ധതിയിൽ നിക്ഷേപിച്ചു രണ്ടു വർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 2205 രൂപയായി. പലിശനിരക്ക് എത്ര ശതമാനമാണ്?
- സമചതുരാകൃതിയായ ഒരു മൈതാനത്തിനുചുറ്റും 2 മീറ്റർ വീതിയിൽ ഒരു പാതയുണ്ട്. മൈതാനവും പാതയും ചേർന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 1225 ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്. മൈതാനത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?
- സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള കട്ടിക്കടലാസിന്റെ നാലുമൂലകളിൽ നിന്നും ഓരോ ചെറിയ സമചതുരം മുറിച്ചുമാറ്റി, മേലോട്ടു മടക്കി, ഒരു പെട്ടി ഉണ്ടാക്കണം.





പെട്ടിയുടെ ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററും, ഉള്ളളവ് $\frac{1}{2}$ ലിറ്ററും വേണം. ആദ്യം എടുക്കേണ്ട സമചതുരത്തിന്റെ വശം എത്രയായിരിക്കണം?

വർഗവിശേഷം

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു സർവസമവാക്യം എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ.

x, y ഏതു സംഖ്യകളായാലും

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

ഇതിൽ y ആയി വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകൾ എടുത്താൽ, പലപല സർവസമവാക്യങ്ങൾ കിട്ടും

x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(x + \tfrac{2}{3})^2 = x^2 + \tfrac{4}{3}x + \tfrac{4}{9}$$

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

ഇവയുടെയെല്ലാം വലതുഭാഗത്തുള്ള വാചകങ്ങൾ നോക്കൂ. എല്ലാം രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളാണ്. x ന്റെ ഗുണകവും, അവസാനത്തെ സംഖ്യയും തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

$x^2 + 8x + 64$ നെ ഏതെങ്കിലും ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ വർഗമായി എഴുതാൻ കഴിയുമോ?

$x^2 + 8x + 16$ ആയാലോ?

- പൊതുവ്യത്യാസം 1 ആയ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെയും, മൂന്നാമത്തെയും സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 143 ആണ്. ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

വർഗത്തികവ്

കഴിഞ്ഞ ഭാഗത്തിലെ അവസാനത്തെ കണക്ക് എങ്ങനെയാണ് ചെയ്തത്? ശ്രേണിയിലെ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെയും, മൂന്നാമത്തെയും സംഖ്യകൾ $x - 1$ ഉം $x + 1$ ഉം ആകും; തന്നിട്ടുള്ള വിവരം

$$(x - 1)(x + 1) = 143$$

എന്നുമാകും, ഇതിൽ

$$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$$

ആണല്ലോ. അതിനാൽ

$$x^2 - 1 = 143$$

എന്നു കിട്ടും. ഇനി

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm 12$$

എന്നും, ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ 11, 12, 13 അല്ലെങ്കിൽ −13, −12, −11 എന്നും കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

ഈ രീതിക്കു പകരം, ശ്രേണിയിലെ ആദ്യസംഖ്യയെ x എന്നെടുത്തു തുടങ്ങിയാലോ?

$$x(x + 2) = 143$$

എന്ന സമവാക്യമാണ് കിട്ടുക. ഇതിനെ

$$x^2 + 2x = 143$$

എന്നെഴുതാം. ഇനിയോ?

ഇടതുവശത്തെ ബഹുപദത്തെ വർഗമായി എഴുതാൻ കഴിയുമോ? അല്ലെങ്കിൽ, വർഗമാക്കി എഴുതാൻ കഴിയുമോ? മുമ്പു ചെയ്ത കണക്കുകളെല്ലാം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ.

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

ആണല്ലോ. അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുവശത്തും 1 കൂട്ടിയാലോ?

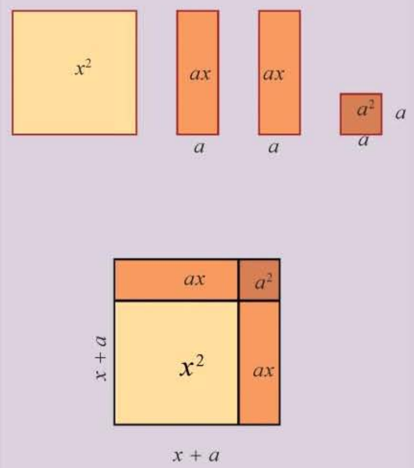
$$x^2 + 2x + 1 = 144$$

ജ്യാമിതീയ വർഗം

x, a ഏതു സംഖ്യകളായാലും,

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ. x, a അധിസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, ഇക്കാര്യത്തിന് ഒരു ജ്യാമിതീയരൂപം കൊടുക്കാം:



അതായത്,

$$(x+1)^2 = 144$$

ഇനി കാര്യങ്ങൾ എളുപ്പമായില്ലേ?

$$x + 1 = \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

$$x = -1 \pm 12$$

$$x = 11 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = -13$$

ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ 11, 12, 13 അല്ലെങ്കിൽ $-13, -12, -11$

ഈ കണക്ക് അൽപം മാറ്റി ഇങ്ങനെയാക്കിയാലോ?

- പൊതുവ്യത്യാസം 6 ആയ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെയും, രണ്ടാമത്തെയും സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 280 ആണ്. ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

ആദ്യത്തെ പദം x എന്നെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സമവാക്യമെന്താണ്?

$$x^2 + 6x = 280$$

ഇതിൽ, ഇടതുവശത്തുള്ള $x^2 + 6x$ നെ വർഗരൂപത്തിലാക്കാൻ ഏതു സംഖ്യയാണ് കൂട്ടേണ്ടത്? (x, a എന്ന ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും, $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ ആണെന്നോർക്കുക)

$x^2 + 6x$ നെ $x^2 + (2 \times 3)x$ എന്നെഴുതാമല്ലോ.

അപ്പോൾ $x^2 + 6x$ നെ $(x+3)^2$ ആക്കാൻ $3^2 = 9$ കൂട്ടിയാൽപ്പോരേ?

അതിനാൽ സമവാക്യത്തെ ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം:

$$x^2 + 6x + 9 = 289$$

അതായത്

$$(x+3)^2 = 289$$

ഇനി

$$x + 3 = \pm 17$$

$$x = 14 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -20$$

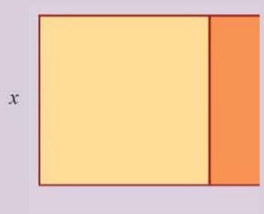
എന്നും, ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ 14, 20, 26; അല്ലെങ്കിൽ $-20, -14, -8$ എന്നും കാണാമല്ലോ.

മറ്റൊരു ചോദ്യം നോക്കാം:

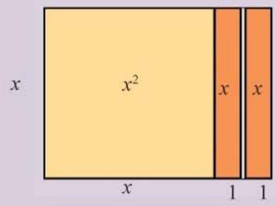
- ഒരു ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ 300 കിലോമീറ്റർ യാത്ര ചെയ്ത് സമ്മേളനത്തിനെത്തി. പ്രസംഗത്തിനിടയിൽ അദ്ദേഹം പറഞ്ഞു.

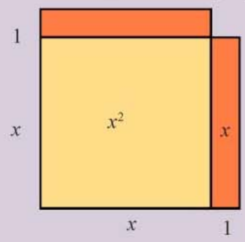
സമചതുരത്തികവ്

$x^2 + 2x$ നെ വർഗമാക്കാൻ 1 കൂട്ടണം എന്ന കാര്യത്തെ ജ്യാമിതീയമായും കാണാം. അതിന് ആദ്യം $x^2 + 2x$ എന്നതിനെ, വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം x ആയ ഒരു സമചതുരവും, വശങ്ങളുടെ നീളം x ഉം 2 ഉം ആയ ഒരു ചതുരവും ചേർത്തുവച്ചതായി കാണണം.

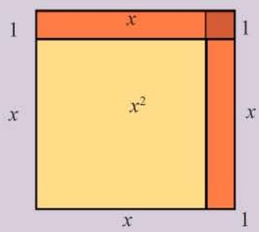


ഇനി ചേർത്തുവച്ച ചതുരത്തെ, താഴെ കാണുന്നതുപോലെ രണ്ടായി ഭാഗിച്ച്, ഒരു ഭാഗം മേൽപോട്ട് മാറ്റിയാലോ?





ഇതിനെ, വശങ്ങളെല്ലാം $x + 1$ ആയ സമചതുരമാക്കാൻ, വലത്തു മുകളിലെ മൂലയിൽ, വശങ്ങൾ 1 ആയ ഒരു സമചതുരം ചേർത്തുവച്ചാൽപോരേ?



"എന്റെ യാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗം മണിക്കൂറിൽ പത്തുകിലോമീറ്റർ കൂട്ടിയിരുന്നെങ്കിൽ, ഒരു മണിക്കൂർ മുമ്പേ എത്താമായിരുന്നു". ശരാശരി വേഗം എത്രയായിരുന്നു?

ശരാശരി വേഗം മണിക്കൂറിൽ x കിലോമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, യാത്രയ്ക്കെടുക്കുന്ന സമയം എത്ര മണിക്കൂറാണ്? $\frac{300}{x}$

യാത്രയുടെ വേഗം മണിക്കൂറിന് പത്ത് കിലോമീറ്റർ കൂട്ടിയാലോ? യാത്രയ്ക്കെടുക്കുന്ന സമയം എത്രയാകും? $\frac{300}{x+10}$

അപ്പോൾ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ പറഞ്ഞ കാര്യം ബീജഗണിത ഭാഷയിൽ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\frac{300}{x} - \frac{300}{x+10} = 1$$

ഇത് ഇങ്ങനെയാക്കാമല്ലോ:

$$\frac{300(x+10) - 300x}{x(x+10)} = 1$$

$$\frac{300(x+10-x)}{x(x+10)} = 1$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x(x + 10) = 3000$$

എന്നു കിട്ടും, അതായത്

$$x^2 + 10x = 3000$$

ഇനി ഇടതുവശത്തെ ബഹുപദം വർഗരൂപത്തിലാക്കാൻ എന്തു കൂട്ടണം?

അപ്പോൾ, നമ്മുടെ സമവാക്യം

$$x^2 + 10x + 25 = 3025$$

എന്നാക്കാം; അതായത്

$$(x + 5)^2 = 3025$$

ഇതിൽനിന്ന് ശരാശരി വേഗം മണിക്കൂറിൽ 50 കിലോമീറ്ററാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ:

വ്യത്യസ്തമാർഗം

$x(x + 6) = 280$ എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. $x + 6$ നെ $(x + 3) + 3$ എന്നും, x നെ $(x + 3) - 3$ എന്നും എഴുതാമല്ലോ.

ഇവ ഉപയോഗിച്ച്

$$x(x+6) = ((x+3)-3)((x+3)+3)$$
$$= (x+3)^2 - 3^2$$

എന്നാക്കാം. അപ്പോൾ തുടങ്ങിയ സമവാക്യം

$$(x+3)^2 - 9 = 280$$

എന്നാകും. ഇതിൽ നിന്ന്

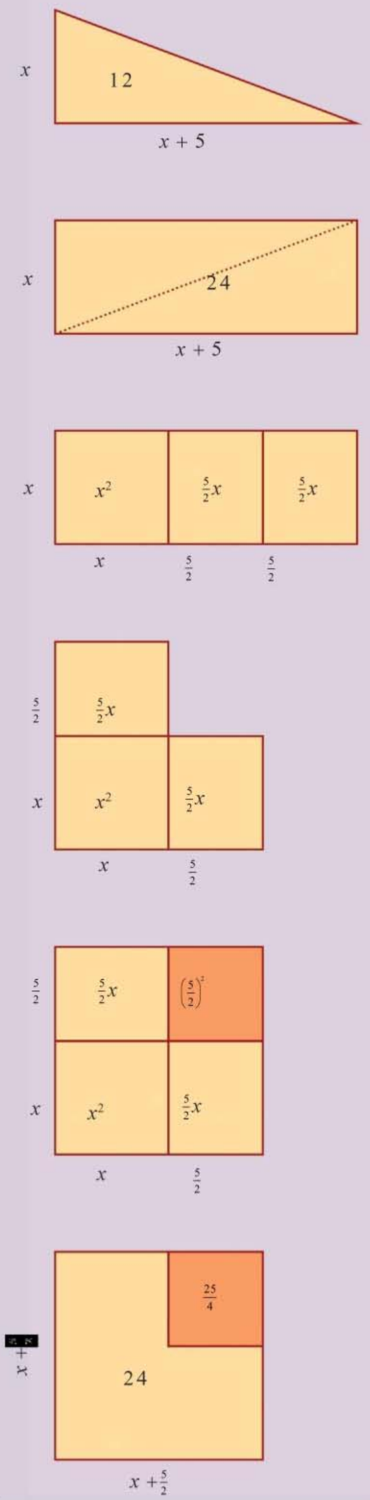
$$(x+3)^2 = 289$$

എന്നെഴുതി നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ x കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

ഈ രീതിയിൽ $x^2 + 10x = 3000$ എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കാമോ എന്നു നോക്കൂ.

ജ്യാമിതീയപരിഹാരം

മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പ്രശ്നം പരിഹരിച്ചതിന്റെ ജ്യാമിതീയരൂപം നോക്കൂ:



മറ്റൊരു ചോദ്യം:

- ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളിൽ ഒന്നിന്, മറ്റേ വശത്തേക്കാൾ 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും ആണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

ലംബവശങ്ങളിൽ ചെറുതിന്റെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $x + 5$ ആകും; പരപ്പളവോ?

അപ്പോൾ തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ ബീജഗണിതത്തിലാക്കിയാൽ

$$\frac{1}{2}x(x+5) = 12$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതു തന്നെ

$$x^2 + 5x = 24$$

എന്നെഴുതാം.

$x^2 + 5x$ നോട് ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ്, $x^2 + 2ax + a^2$ എന്ന രൂപത്തിലാകുക?

$$x^2 + 5x = x^2 + \left(2 \times \frac{5}{2}\right)x$$

എന്നെഴുതി നോക്കൂ.

$$x^2 + 2 \times \left(\frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2$$

ആണല്ലോ.

അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുഭാഗത്തും $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ കൂട്ടാം.

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 24 + \frac{25}{4}$$

അതായത്

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x = -\frac{5}{2} \pm \frac{11}{2}$$

$x = -\frac{5}{2} + \frac{11}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}$

ഇവിടെ $-\frac{5}{2} - \frac{11}{2}$ ന്യൂനസംഖ്യ ആണല്ലോ. നീളം ന്യൂനസംഖ്യ അല്ലാത്തതിനാൽ ഇതു ശരിയാകില്ല. അപ്പോൾ x ആയി $-\frac{5}{2} + \frac{11}{2} = 3$ മാത്രം എടുത്താൽ മതി.

അതായത് ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററും, 8 സെന്റിമീറ്ററും. ഇനി കർണത്തിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാൻ വിഷമമില്ലല്ലോ. ചെയ്തുനോക്കൂ.

ഒരു ചോദ്യം കൂടിയാകാം:

- ചുറ്റളവ് 100 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരം ഉണ്ടാക്കണം. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായിരിക്കണം?

ഈ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും കൂട്ടിയാൽ 50 സെന്റിമീറ്ററാണല്ലോ. (എന്തുകൊണ്ട്?) അപ്പോൾ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $50 - x$. പരപ്പളവ് 525 ആകണം. അതായത്

$$x(50 - x) = 525$$

ഇതിനെ

$$50x - x^2 = 525$$

എന്നെഴുതാം. അൽപം കൂടി മാറ്റി

$$x^2 - 50x = -525$$

എന്നെഴുതുന്നതാണ് സൗകര്യം (എന്തുകൊണ്ട്?)

ഇനിയെന്തു ചെയ്യും?

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

എന്ന സർവസമവാക്യം ഓർത്താൽ, കാര്യങ്ങൾ എളുപ്പമായി. $x^2 - 50x$ നോട് കൂട്ടേണ്ട സംഖ്യ എന്താണ്?

അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമവാക്യത്തെ

$$x^2 - 50x + 25^2 = -525 + 25^2$$

എന്നാക്കാം. അതായത്

$$(x - 25)^2 = 100$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x = 25 \pm 10$$

കൂട്ടിയും കുറച്ചും

ചുറ്റളവ് 100 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമായ ചതുരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്.

100 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം 25 സെന്റിമീറ്ററും, അതിനാൽ പരപ്പളവ് 625 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണ്. നമുക്കാവശ്യമായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് (സ്വാഭാവികമായും) ഇതിൽക്കുറവാണ്. അതു കിട്ടാൻ, ഈ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം അൽപം കുറയ്ക്കണം. ചുറ്റളവ് മാറാത്തതിനാൽ, മറ്റേ വശം അത്ര തന്നെ കൂട്ടണം.

കൂട്ടുന്നതും, കുറയ്ക്കുന്നതും x എന്നെടുത്താൽ, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $25 - x$, $25 + x$. അപ്പോൾ പ്രശ്നത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$(25 - x)(25 + x) = 525$$

അതായത്

$$625 - x^2 = 525$$

ഇതിൽനിന്ന്,

$$x = \pm 10$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ $25 - 10 = 15$, $25 + 10 = 35$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നു കിട്ടും.

$$x = 35 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = 15$$

$x = 35$ എന്നെടുത്താൽ $50 - x = 15$; മറിച്ച്, $x = 15$ എന്നെടുത്താൽ. $50 - x = 35$. ഏതായാലും ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 35 സെന്റിമീറ്ററും, 15 സെന്റിമീറ്ററും ആകണം.

ഇവിടെ കണ്ട കണക്കുകളുടെയെല്ലാം ബീജഗണിതരൂപം നോക്കൂ:

- $x^2 + 2x = 143$
- $x^2 + 10x = 3000$
- $x^2 + 5x = 24$
- $x^2 - 50x = -525$

ഇവയുടെയെല്ലാം പൊതുരൂപം

$$x^2 + ax = b$$

എന്നാണല്ലോ. ഇനി ഓരോ സമവാക്യവും മാറ്റിയതെങ്ങനെയാണ്?

- $x^2 + 2x + 1^2 = 143 + 1^2$ അഥവാ $(x + 1)^2 = 144$
- $x^2 + 10x + 5^2 = 3000 + 5^2$ അഥവാ $(x + 5)^2 = 3025$
- $x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 24 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$ അഥവാ $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$
- $x^2 - 50x + 25^2 = -525 + 25^2$ അഥവാ $(x - 25)^2 = 100$

പൊതുവായ രീതി, $x^2 + ax$ നോട്, x ന്റെ ഗുണകമായ a യുടെ പകുതിയുടെ വർഗം, അതായത്, $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ കൂട്ടി വർഗമാക്കുക:

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2$$

ഈ രീതിക്ക്, "വർഗം തികയ്ക്കുക" (*completing the square*) എന്നാണ് പേര്

ഈ ചോദ്യം നോക്കൂ:

- 3, 7, 11, ... എന്നിങ്ങനെ സമാന്തരശ്രേണിയിലായ എത്ര സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലാണ് 300 കിട്ടുക?

ഈ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളെ x_1, x_2, x_3, ... എന്നെടുത്താൽ

$$x_n = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1$$

അപ്പോൾ

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = \frac{1}{2} n(x_1 + x_n)$$

അൽപം ചരിത്രം

രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതിയ്ക്ക് ഏറെ പഴക്കമുണ്ട്. ഏതാണ്ട് ബി.സി. 1500 ൽ തന്നെ ബാബിലോണിയക്കാർ, ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രശ്നങ്ങളിൽ ഈ രീതി പ്രയോഗിച്ചിരിക്കുന്നതു കാണാം.

എന്നാൽ ഇന്നത്തെപ്പോലെ പ്രശ്നങ്ങളെ ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കുന്ന രീതിയൊന്നും അന്നില്ലായിരുന്നു. (ഈ രീതിയ്ക്ക് ഏറിയാൽ അഞ്ഞൂറു വർഷത്തെ പഴക്കമേയുള്ളൂ.) പ്രശ്നങ്ങളും, അവയുടെ പരിഹാരമാർഗങ്ങളുമെല്ലാം സാധാരണ ഭാഷയിലാണ് പറഞ്ഞിരുന്നത്. ജ്യാമിതീയപ്രശ്നങ്ങളാകുമ്പോൾ, പരിഹാരമാർഗങ്ങളും ജ്യാമിതീയഭാഷയിൽത്തന്നെ ആയിരുന്നു.

അതായത്, ബീജഗണിതരീതികളുടെ ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളായി നാം ഇന്നവതരിപ്പിക്കുന്ന പലതും, ചരിത്രപരമായി നോക്കിയാൽ, ഈ ബീജഗണിതരീതികളുടെ ആദിരൂപമാണ്.

$$= \frac{1}{2}n\left(3 + (4n - 1)\right)$$

$$= 2n^2 + n$$

ഈ തുക 300 ആകണമെങ്കിലോ?

$$2n^2 + n = 300$$

ഇത് $x^2 + ax = b$ എന്ന രൂപത്തിലാണോ?

ഇതിലെ n^2 ന്റെ ഗുണകം 1 ആക്കുന്നതെങ്ങനെ?

നമ്മുടെ സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുവശത്തേയും 2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലോ?

$$n^2 + \frac{1}{2}n = 150$$

അടുത്തത്, വർഗം തികയ്ക്കലാണ്.

$$n^2 + \frac{1}{2}n + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 150 + \frac{1}{16}$$

അതായത്

$$\left(n + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{2401}{16}$$

ഇനി n കണ്ടുപിടിക്കാം:

$$n = -\frac{1}{4} \pm \frac{49}{4}$$

$$n = 12 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } n = -\frac{50}{4}$$

n എണ്ണൽസംഖ്യയായതിനാൽ, $n = 12$ എന്ന ഉത്തരം മാത്രം മതി.

അതായത്, ശ്രേണിയിലെ 12 സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ 300 കിട്ടും.

അപ്പോൾ ചില സമവാക്യങ്ങളിൽ, വർഗം തികയ്ക്കുന്നതിനുമുമ്പ്, x^2 ന്റെ ഗുണകം 1 ആക്കുന്ന ജോലി കൂടിയുണ്ട്.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം വീതിയേക്കാൾ 10 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്. പരപ്പളവ് 144 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും. നീളവും വീതിയും എത്രയാണ്?
- 5, 7, 9, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലുള്ള ആദ്യത്തെ എത്ര സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലാണ് തുക 140 ആകുന്നത്?

വികർണക്കണക്ക് – ബീജഗണിതം

രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ മാത്രമല്ല, വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഏകദേശവിലകൾ കാണാനും, വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതി പണ്ടേ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നതായി കാണാം.

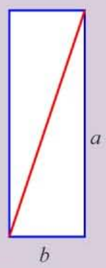
ഉദാഹരണമായി വീതി കുറഞ്ഞ, ഉയരം കൂടിയ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വികർണം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി, പുരാതന ബാബിലോണിലെ ഒരു കളിമൺ പലകയിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്, ഇങ്ങനെയാണ്.

വീതിയുടെ വർഗത്തിനെ ഉയരം കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, അതിന്റെ പകുതി ഉയരത്തോട് കൂട്ടുക.

ഇത്, ഇന്നത്തെ രീതിയിൽ എഴുതിയാൽ

$$\sqrt{a^2 + b^2} \approx a + \frac{b^2}{2a}$$

എന്നാകും.



ഇതിന്റെ യുക്തിയും ഇന്നത്തെ രീതിയിൽത്തന്നെ നോക്കാം:

$$a^2 + b^2 + \left(\frac{b^2}{2a}\right)^2 = \left(a + \frac{b^2}{2a}\right)^2$$

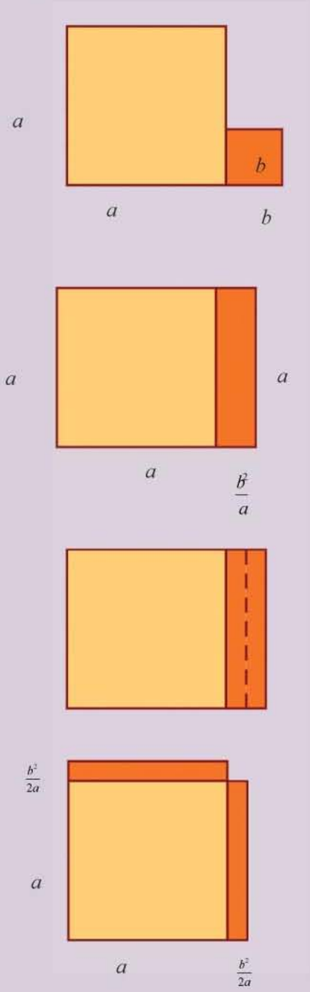
ആണല്ലോ. b എന്ന സംഖ്യ, a എന്ന സംഖ്യയെ അപേക്ഷിച്ചു വളരെച്ചെറുതാണെങ്കിൽ, $\left(\frac{b^2}{2a}\right)^2$ എന്നത്, തീരെച്ചെറിയ ഒരു സംഖ്യയായിരിക്കും. അപ്പോൾ

$$a^2 + b^2 \approx \left(a + \frac{b^2}{2a}\right)^2$$

എന്നെടുക്കാം.

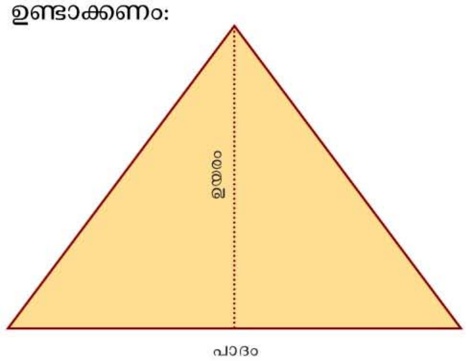
വികർണക്കണക്ക് – ജ്യാമിതി

ബാബിലോണിയക്കാരുടെ വികർണക്കണക്കിന്റെ ജ്യാമിതി നോക്കാം:



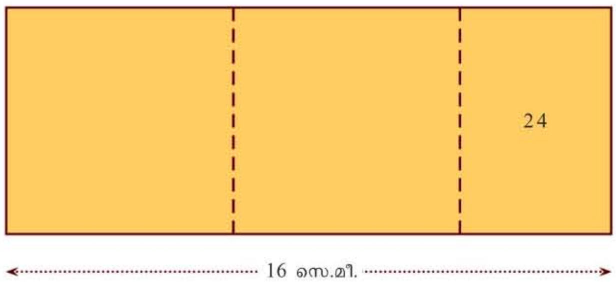
അവസാനത്തെ രൂപത്തിന്, വശങ്ങളുടെ നീളം $a + \frac{b^2}{2a}$ ആയ സമചതുരവുമായി ചെറിയൊരു വ്യത്യാസമല്ലേയുള്ളൂ?

- ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു സമപാർശ്വ ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കണം:



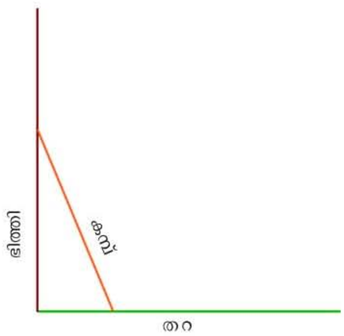
ഉയരം, പാദത്തെക്കാൾ 2 മീറ്റർ കുറവാകണം; പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്രമീറ്ററാകണം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായിരിക്കണം?

- ചതുരാകൃതിയായ ഒരു കടലാസിൽ നിന്നു ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചു മാറ്റുന്നു.



മിച്ചമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 24 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണ്. മുറിച്ചെടുത്ത സമചതുരങ്ങളുടെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

- 2.6 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പ് ചുവരിൽ ചാരിവച്ചിരിക്കുന്നു. കമ്പിന്റെ ചുവട്, ഭിത്തിയിൽ നിന്ന് 1 മീറ്റർ അകലെയാണ്.



കമ്പിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്ന് ഭിത്തിയിലേക്കുള്ള അകലം അൽപം കൂട്ടിയപ്പോൾ, അതിന്റെ മുകളറ്റം അത്രയും തന്നെ കീഴോട്ടു നീങ്ങി. കമ്പ് എത്ര ദൂരമാണ് നീക്കിയത്?

- ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 28 മീറ്ററും, വികർണം 10 മീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?
- തുക 4 ഉം, ഗുണനഫലം 2 ഉം ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുക $2\frac{1}{12}$ ആണ്. സംഖ്യ എന്താണ്?
- മുപ്പതു മിഠായി കുറേ കുട്ടികൾക്കു വീതിച്ചു കൊടുത്തു. മധുരം നുണഞ്ഞുകൊണ്ടൊരു കൊച്ചു കണക്കുകാരൻ പറഞ്ഞു. “നമ്മളിൽ ഒരാൾ കുറവായിരുന്നെങ്കിൽ, എല്ലാർക്കും ഒരു മിഠായി കൂടി കിട്ടുമായിരുന്നു.” കൂട്ടത്തിലെത്ര കുട്ടികളുണ്ടായിരുന്നു?
- ഒരു സംഭരണിയിൽ വെള്ളം നിറയ്ക്കാൻ രണ്ടു കുഴലുകളുണ്ട്. രണ്ടും തുറന്നു വച്ചാൽ, 12 മിനിറ്റുകൊണ്ട് സംഭരണി നിറയും. ചെറിയ കുഴൽ മാത്രം തുറന്നു വച്ചാൽ നിറയാനെടുക്കുന്ന സമയം, വലിയ കുഴൽ മാത്രം തുറന്നുവച്ചാൽ നിറയാനെടുക്കുന്ന സമയത്തേക്കാൾ 10 മിനിറ്റു കൂടുതലാണ്. ചെറിയ കുഴൽ മാത്രം തുറന്നു വച്ചാൽ നിറയാനെടുക്കുന്ന സമയമെത്രയാണ്?

സമവാക്യങ്ങളും ബഹുപദങ്ങളും

ഇതുവരെ ചെയ്ത കണക്കുകളുടെയെല്ലാം ബീജഗണിതരൂപം

$$ax^2 + bx + c = 0$$

എന്നതാണ്. ഉദാഹരണമായി, ആദ്യം ചെയ്ത കണക്കിലെ

$$(x + 5)^2 = 36$$

എന്ന സമവാക്യത്തെ

$$x^2 + 10x - 11 = 0$$

എന്നെഴുതാം; മറ്റൊരു കണക്കിൽ

$$2x^2 + x = 300$$

എന്നു കണ്ടതിനെ

$$2x^2 + x - 300 = 0$$

എന്നാക്കാം.

ഇങ്ങനെ നോക്കിയാൽ, മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി തെളിഞ്ഞുവരും. $ax^2 + bx + c$ എന്നത്, രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ പൊതുരൂപമാണല്ലോ. (a പൂജ്യമാകരുതെന്നു മാത്രം. ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **കൃതിയും രൂപവും** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)

വർഗമൂലം

ചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ ഏകദേശനീളം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ബാബിലോണിയക്കാരുടെ രീതി, പൊതുവേ വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഏകദേശവിലകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കാം: a, x ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളായാലും

$$a^2 + x + \left(\frac{x}{2a}\right)^2 = \left(a + \frac{x}{2a}\right)^2$$

ആണല്ലോ. x എന്ന സംഖ്യ a എന്ന സംഖ്യയെ അപേക്ഷിച്ചു വളരെച്ചെറുതാണെങ്കിൽ,

$$a^2 + x \approx \left(a + \frac{x}{2a}\right)^2$$

എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}$$

എന്നുമെടുക്കാം.

ഉദാഹരണമായി $2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4}$ ആയതിനാൽ

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\approx \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{17}{12}$$

$$\approx 1.4166$$

എന്നു കണ്ടെത്താം

പുരാതന ബാബിലോണിലും, നമ്മുടെ നാട്ടിൽതന്നെയും $\sqrt{2}$ ന്റെ ഏകദേശ വിലയായി $\frac{17}{12}$ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു എന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസ്സിൽ കണ്ടല്ലോ. (**പഴയൊരു രീതി, നാട്ടുക്കണക്ക്** എന്നീ ഭാഗങ്ങൾ)

അപ്പോൾ നാം ചെയ്ത കണക്കുകളെല്ലാം, ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിൽ ഏതു സംഖ്യ ഉപയോഗിച്ചാലാണ് പൂജ്യം കിട്ടുക എന്ന അന്വേഷണമായിരുന്നു എന്നു വേണമെങ്കിൽപ്പറയാം.

ഇനി ഇതെങ്ങനെ ചെയ്തുവെന്നും ബീജഗണിതരൂപത്തിൽത്തന്നെ എഴുതിനോക്കാം:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കാൻ, ആദ്യം സമവാക്യത്തെ ഇതുവരെ കണ്ട രീതിയിൽ

$$ax^2 + bx = -c$$

എന്നു മാറ്റിയെഴുതാം. തുടർന്ന്, നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, ആദ്യം a കൊണ്ടു ഹരിച്ച്

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

എന്ന രൂപത്തിലാക്കാം. ഇനി ഇടതുവശത്തുള്ള വാചകത്തെ വർഗരൂപത്തിലാക്കാൻ, xന്റെ ഗുണകമായ $\frac{b}{a}$ യുടെ പകുതിയുടെ വർഗം കൂട്ടണം:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

ഇതിലെ ഇടതുഭാഗത്തുള്ള വാചകത്തിനെ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

എന്നെഴുതാം. വലതുഭാഗത്തെ വാചകം

$$-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

എന്നാക്കാം. അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമവാക്യം

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

എന്നാകും. ഇതിൽനിന്ന്

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

എന്നും, തുടർന്ന്

$$x = -\frac{b}{2a} \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

എന്നും കണ്ടുപിടിക്കാം.

ബഹുപദവിചാരം

ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ സ്വഭാവങ്ങളറിയാനും വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി,

$$p(x) = x^2 + 6x + 11$$

എന്ന ബഹുപദമെടുക്കാം. വർഗം തികച്ച്

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2+6x+11 \\ &= (x^2+6x+9)+2 \\ &= (x+3)^2+2 \end{aligned}$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ, x ഏതു സംഖ്യ ആയാലും $(x+3)^2$ ന്യൂനസംഖ്യ ആകില്ലല്ലോ. അതിനാൽ $p(x)$ ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യ 2 ൽ കുറയില്ല.

അതായത്, പലപല സംഖ്യകൾ x ആയി എടുക്കുമ്പോൾ $p(x)$ ൽ നിന്നു കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളിൽ ഏറ്റവും ചെറുത് 2 ആണ്; ഇത് കിട്ടുന്നതാകട്ടെ $x = -3$ എന്നെടുക്കുമ്പോഴും.

അതായത്,

$a \neq 0$, b, c എന്ന ഏതു മൂന്നു സംഖ്യകളെടുത്താലും $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

നേരത്തെ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെയും പറയാം.

$p(x) = ax^2 + bx + c$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിൽ,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

എന്നെടുത്താൽ $p(x) = 0$ ആകും.

ഇത്തരം രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ, x^2 ന്റെ ഗുണകം കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, വർഗം തികയ്ക്കുന്നതിനുപകരം, നേരിട്ട് ഈ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം. (എങ്ങനെ ചെയ്താലും, ക്രിയകൾ ഒന്നു തന്നെയാണെന്ന് ഓർക്കുക.)

ഉദാഹരണമായി, നേരത്തെ ചെയ്ത

$$2x^2 + x = 300$$

എന്ന സമവാക്യം നോക്കുക. ഇതിനെ

$$2x^2 + x - 300 = 0$$

എന്നെഴുതിയാൽ, ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-300)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{2401}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm 49}{4}$$

$$= 12 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \frac{-25}{2}$$

എന്നു പരിഹരിക്കാം.

ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കണക്കുകളുടെ ഉത്തരം, കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച്, രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി കണ്ടുപിടിക്കുക:

- 10.75 മീറ്റർ ചുറ്റളവും, 5.8 ചതുരശ്രമീറ്റർ പരപ്പളവും ഉള്ള ചതുരം നിർമിക്കണം. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയായിരിക്കണം?

വിവിധ മാർഗങ്ങൾ

ഒരു രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിൽ, വർഗം തികയ്ക്കുന്നതിനുള്ള ക്രിയകൾ ഓരോന്നായി ചെയ്ത് പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കാം; അല്ലെങ്കിൽ, ഈ ക്രിയകളെല്ലാം ഒരുമിച്ചു ചെയ്ത്, പെട്ടെന്നു പരിഹാരത്തിലെത്തുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം. ഏതാണ് കൂടുതൽ സൗകര്യമെന്നത്, സമവാക്യത്തിന്റെ സ്വഭാവമനുസരിച്ചിരിക്കും.

ഉദാഹരണമായി,

$$x^2 + 12x + 7 = 0$$

പരിഹരിക്കാൻ, വർഗം തികച്ച്

$$(x+6)^2 = -7 + 36$$

എന്നെഴുതി, തുടരുന്നതാണ്,

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2}$$

എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനേക്കാൾ എളുപ്പം.

മറിച്ച്,

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \times 2 \times 3}}{4}$$

എന്നെഴുതി നേരിട്ട് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതാണ്, വർഗം തികച്ച്

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{25}{16}$$

എന്നെഴുതി തുടരുന്നതിനേക്കാൾ എളുപ്പം.

- മുകളിലേക്കെറിഞ്ഞ ഒരു വസ്തു t സെക്കന്റുകൊണ്ടു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം $30t - 4.9t^2$ മീറ്റർ ആണ്. അത് എത്ര സമയം കഴിഞ്ഞാണ് നിലത്തുവീഴുക? ഏതൊക്കെ സമയത്താണ് അതു നിലത്തുനിന്ന് 20 മീറ്റർ ഉയരത്തിലാകുക?

- ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിലും x ഏതൊക്കെ സംഖ്യയായെടുത്താലാണ് പൂജ്യം കിട്ടുന്നത് എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക:

  - $x^2 - 5x + 6$
  - $x^2 - 2x - 1$
  - $x^2 + 5x + 6$
  - $2x^2 - 7x - 15$
  - $x^2 + x - 6$
  - $9x^2 + 12x + 4$
  - $x^2 - x - 6$

സമചതുരം വീണ്ടും!

20 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള പലപല ചതുരങ്ങളിൽ, വശത്തിന്റെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരത്തിനാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവ്, എന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. (**ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമചതുരവിശേഷം** എന്ന ഭാഗം.)

ഇതു മറ്റൊരു രീതിയിലും കാണാം. ഇത്തരത്തിലൊരു സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ, പരപ്പളവ്,

$$p(x) = x(10 - x) = 10x - x^2 = -(x^2 - 10x)$$

ഇത്തരം ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവ്, ഈ ബഹുപദത്തിൽ നിന്നു കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. വർഗം തികച്ച്,

$$p(x) = -\left((x-5)^2 - 25\right) = 25 - (x-5)^2$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ x ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും $(x - 5)^2$ ന്യൂനസംഖ്യയാകില്ല; അതിനാൽ $p(x)$ എന്ന സംഖ്യ 25 നേക്കാൾ കൂടുതലാകില്ല. $x = 5$ എന്നെടുത്താൽ, $p(x) = 25$ എന്നു കിട്ടുകയും ചെയ്യും.

വിവേചനം

പുതിയ അറിവുകളുമായി പഴയതുപോലുള്ള ഒരു കണക്കുനോക്കാം:

- 20 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം; അതിന്റെ പരപ്പളവ് 26 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആകണം. വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാകണം?

ഈ ആവശ്യങ്ങളുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x(10 - x) = 26$$

എന്നാണല്ലോ. ഇതിനെ

$$x^2 - 10x + 26 = 0$$

എന്ന രൂപത്തിലാക്കി, പുതിയ രീതി പരീക്ഷിച്ചു നോക്കാം:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 104}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$\sqrt{-4}$ എന്നാലെന്താണർത്ഥം? ന്യൂനസംഖ്യകൾക്കൊന്നും, വർഗമൂലമില്ലല്ലോ.

ഇങ്ങനെ ഉത്തരം കിട്ടുന്നതിന്റെ അർത്ഥം, $x^2 - 10x + 26 = 0$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന സംഖ്യകളൊന്നും ഇല്ല എന്നാണ്. (മറ്റൊരുവിധത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, x ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും, $x^2 - 10x + 26$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽനിന്ന് പൂജ്യം കിട്ടില്ല.)

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരത്തിൽ, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ എന്നൊരു വർഗമൂലമുണ്ടല്ലോ; ഇതിലെ $b^2 - 4ac$ അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അതിന് രണ്ടു വർഗമൂലമുണ്ട്; ഓരോന്നും സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരം തരികയും ചെയ്യും.

അതല്ല, $b^2 - 4ac$ ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമില്ല.

ഇനി $b^2 - 4ac$ പൂജ്യമായാലോ? അതിന് ഒരു വർഗമൂലമേയുള്ളൂ (പൂജ്യം തന്നെ); അതിനാൽ, സമവാക്യത്തിന് ഒരു പരിഹാരമേയുള്ളൂ.

ഈ $b^2 - 4ac$ എന്ന സംഖ്യയെ $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ വിവേചകം (*discriminant*) എന്നാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ

> *ഒരു രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ വിവേചകം അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അതിന് രണ്ടു പരിഹാരങ്ങളുണ്ട്; വിവേചകം ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, പരിഹാരമൊന്നുമില്ല; വിവേചകം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ ഒരു പരിഹാരം മാത്രമുണ്ടാകും.*

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കുക:

- 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പി വളച്ചു ചതുരമാക്കണം. വികർണത്തിന്റെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു ചതുരം ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ? വികർണത്തിന്റെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ?

ഇത്തരമൊരു ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $4 - x$ ആകണമല്ലോ. അപ്പോൾ വികർണത്തിന്റെ വർഗം

$$x^2 + (4 - x)^2 = 2x^2 - 8x + 16$$

ഇതു 4 ആകാൻ പറ്റുമോ എന്നാണ് ആദ്യത്തെ ചോദ്യം, അതായത്,

$$2x^2 - 8x + 16 = 4$$

ഇതിനെ

$$2x^2 - 8x + 12 = 0$$

എന്നെഴുതാം. ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ വിവേചകം,

$$(-8)^2 - 4 \times 2 \times 12 = 64 - 96 < 0$$

അപ്പോൾ ഇത്തരമൊരു ചതുരം പറ്റില്ല.

ഇനി വികർണം 4 ആക്കാമോ എന്നു നോക്കാം. ഈ ആഗ്രഹത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$2x^2 - 8x = 0$$

ആണല്ലോ.

ഇതിന്റെ വിവേചകം

$$(-8)^2 - 4 \times 2 \times 0 = 8^2 = 64$$

വാക്കും അർത്ഥവും

വിവേചനം എന്ന വാക്കിന്റെ അർത്ഥം, തിരിച്ചറിവ് എന്നാണ്. വ്യത്യസ്തങ്ങളായവയെ തിരിച്ചറിയാനുള്ള കഴിവാണ്, വിവേകം. വേർതിരിച്ചറിയുന്നത്, വിവേചകം.

രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളുടെ ഗുണങ്ങൾ വേർതിരിച്ചറിയാൻ സഹായിക്കുന്നതാണ്, അതിന്റെ വിവേചകം.

ഇംഗ്ലീഷിൽ ഇതിനായുപയോഗിക്കുന്നത് *discriminant* എന്ന വാക്കാണല്ലോ. വ്യത്യാസങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുക എന്നതാണ് *discrimination* എന്ന വാക്കിന്റെ അർത്ഥം.

ശരിയല്ലാത്ത രീതിയിൽ മനുഷ്യരെ വേർതിരിക്കുന്ന രീതിയ്ക്കും ഇംഗ്ലീഷിൽ *discrimination* എന്നുതന്നെയാണ് പറയുന്നത്.

അപ്പോൾ സമവാക്യത്തിനു പരിഹാരമുണ്ട്. അത്

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64}}{4} = 4 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } 0$$

x ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളമായതിനാൽ $x \neq 0$. ഇനി, $x = 4$ എന്നെടുത്താലോ, ചതുരത്തിന്റെ മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $x - 4 = 0$ ആയിപ്പോകും. അപ്പോൾ ഏതായാലും, ഇത്തരമൊരു ചതുരം സാധ്യമല്ല.

ഇവിടെ കണ്ടതെന്താണ്? ഒരു ഭൗതികപ്രശ്നം പരിഹരിക്കാനുണ്ടാക്കുന്ന ഗണിതസമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമുണ്ടായാലും, ചിലപ്പോൾ ആ ഭൗതികപ്രശ്നത്തിന് പരിഹാരമില്ലെന്നു വരാം.

ഇനി ഈ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാമോ എന്നു നോക്കൂ:

- 5, 7, 9, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ തുടർച്ചയായ കുറെ സംഖ്യകളുടെ തുക 140 ആകുമോ? ഇത്തരമൊരു തുക 240 ആകുമോ?
- $p(x) = x^2 + x + 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ x ഏതെങ്കിലും സംഖ്യയായി എടുത്താൽ $p(x) = 0$ എന്നു കിട്ടുമോ? $p(x) = 1$, $p(x) = -1$ ഇവയിലേതെങ്കിലും കിട്ടുമോ?
- $x + \frac{1}{x}$ എന്ന ബീജഗണിതവാചകത്തിൽ, x ഏതെങ്കിലും സംഖ്യയായെടുത്താൽ 0, 1, 2 ഇവയിലേതെങ്കിലും കിട്ടുമോ?
- a, b, c എന്നിവ അധിസംഖ്യകളാണ്. $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമുണ്ടെങ്കിൽ അവ ന്യൂനസംഖ്യകളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ബഹുപദവും വിവേചകവും

ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ചില ഗുണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാനും വിവേചകം ഉപയോഗിക്കാം.

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

എന്നതിനെ വർഗം തികച്ച്,

$$p(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ x ഏതു സംഖ്യ ആയാലും, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ എന്നത്, ന്യൂന സംഖ്യ അല്ല. കൂടാതെ $b^2 - 4ac$ ന്യൂന സംഖ്യയാണെങ്കിൽ, $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ എന്നത്, അധിസംഖ്യയാണ്. ഇനി, a അധിസംഖ്യ ആയാലോ? x ഏതു സംഖ്യയായാലും $p(x)$ അധിസംഖ്യായിരിക്കും. a ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, $p(x)$ ഉം അങ്ങനെതന്നെ.

ഇതിൽ നിന്ന് എന്തു മനസിലാക്കും?

$b^2 - 4ac$ ന്യൂനസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ, a അധിസംഖ്യയാണോ അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനസംഖ്യയാണോ എന്നതിനനുസരിച്ച്, $ax^2 + bx + c$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ നിന്നു കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളെല്ലാം അധിസംഖ്യകളോ, ന്യൂനസംഖ്യകളോ ആയിരിക്കും.

$b^2 - 4ac$ അധിസംഖ്യയാണെങ്കിലോ? പൂജ്യമായാലോ?