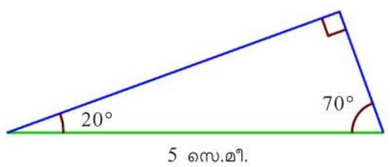
2 വൃത്തങ്ങൾ

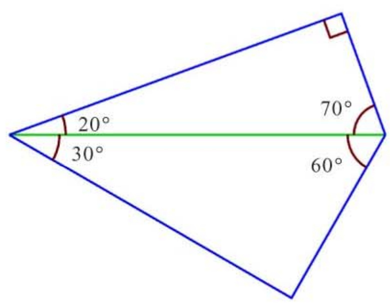
കോൺ ചിത്രങ്ങൾ

ഒരു മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കണം. കർണം 5 സെന്റിമീറ്റർ വേണം. ലംബവശങ്ങൾ എന്തുമാകാം. എങ്ങനെയെല്ലാം വരയ്ക്കാം?

5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വര വരയ്ക്കുക. അതിന്റെ ഒരറ്റത്ത് ഇഷ്ട മുള്ള ഒരു കോണും, മറ്റേ അറ്റത്ത് $90°$ യിൽ നിന്നു ഇതു കുറച്ച കോണും വരച്ച്, ത്രികോണമാക്കാം. ഉദാഹരണമായി,



വരയുടെ ചുവട്ടിലും വരയ്ക്കാം:

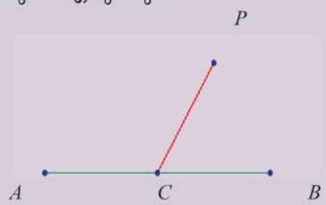


ജ്യാമിതിപ്പെട്ടിയിലെ മട്ടം ഉപയോഗിച്ചു വരയ്ക്കാം: മട്ടമൂല മുക ളിൽ (അല്ലെങ്കിൽ താഴെ) വരുന്നവിധം, അതിന്റെ അരികുകൾ രണ്ടും വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തും ചേർത്തുവച്ച് ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ.

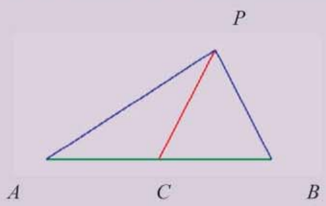
ഇത്തരം കുറേ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച്, അവയുടെ മൂന്നാംമൂലകൾ മാത്രം നോക്കൂ:

വൃത്തത്തിൽനിന്നു മട്ടം

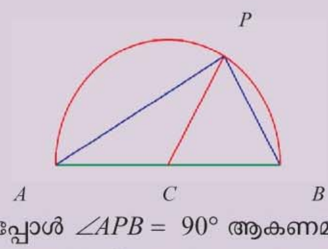
AB കർണമായ മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. AB യുടെ മധ്യബിന്ദു C യിൽ നിന്ന് AB യുടെ നീളത്തിന്റെ പകുതി അകലത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു P എടുക്കുക:



$\angle APB$ മട്ടമാണെന്നു തെളിയിക്കാം.



$CA = CB = CP$ ആയതിനാൽ, C കേന്ദ്രമായി, ഈ നീളം ആരമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം P യിൽക്കൂടി കടന്നുപോകും:



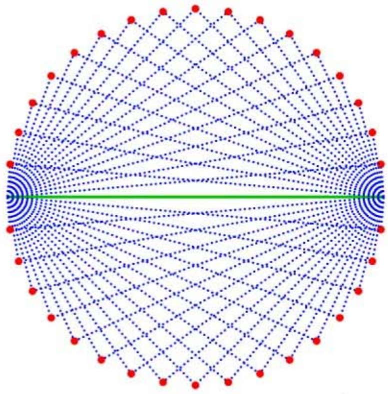
അപ്പോൾ $\angle APB = 90°$ ആകണമല്ലോ. (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **സർവസമത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **അർധവൃത്തത്തിലെ കോൺ** എന്ന ഭാഗം ഓർമയുണ്ടോ?)

മട്ടത്തിൽ നിന്നു വൃത്തം

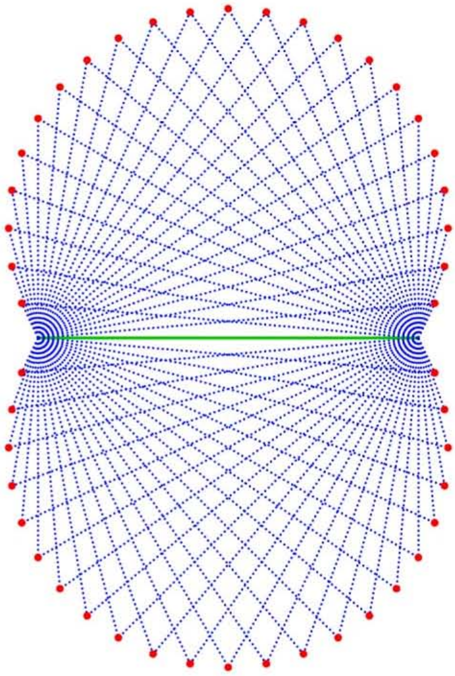
AB എന്ന വര വ്യാസമായ വൃത്തത്തിൽ A, B ഇവയല്ലാതെ ഏതു ബിന്ദു P എടുത്താലും, AB കർണമായ മട്ടത്രികോണം കിട്ടുമെന്നു കണ്ടല്ലോ.

മറിച്ച് AB കർണമായ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാംമൂല P എന്നെടുത്താൽ, APB എന്നത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം AB ആയിരിക്കുകയും ചെയ്യും. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ജ്യാമിതിയിലെ അംശബന്ധങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **മറ്റൊരു ത്രികോണം** എന്ന ഭാഗത്ത് ഇങ്ങനെ ഒരു കണക്കുണ്ടല്ലോ).

അപ്പോൾ AB കർണമായ മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മൂന്നാം മൂലകളെടുത്താൽ, AB വ്യാസമായ വൃത്തത്തിലെ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളൊഴിച്ചുള്ള മറ്റെല്ലാ ബിന്ദുക്കളും കിട്ടും.

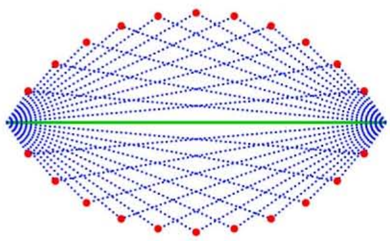


ഇനി കോണുകളെയെല്ലാം മട്ടമാക്കുന്നതിനുപകരം $60°$ ആയി വരച്ചു നോക്കൂ. (ജ്യാമിതിപ്പെട്ടിയിലെ ഒരു മട്ടത്തിന്റെ മൂല ഉപയോഗിക്കാം)



ജ്യാമിതിപ്പെട്ടിയിലെ മട്ടങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്, കോൺ $45°$ആയും $30°$ ആയും വരച്ചാലോ?

ഇനി കട്ടിക്കടലാസിൽ, ഒരു കോൺ $120°$ ആയ ഒരു ത്രികോണം വെട്ടിയെടുക്കുക. അതുപയോഗിച്ച്, കോണുകൾ $120°$ ആയി വരച്ചു നോക്കൂ.

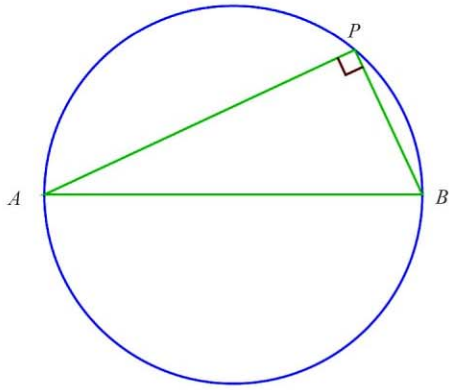


എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇത്തരം ചിത്രങ്ങൾ കിട്ടുന്നത്? പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

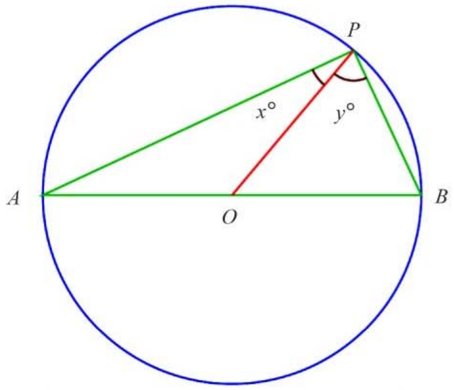
മട്ടവും വൃത്തവും

മട്ടകോൺ ഉപയോഗിച്ചു വരച്ച ചിത്രത്തിൽ, ഒറ്റ വൃത്തമാണ് കിട്ടിയത്. ആദ്യത്തെ വര അതിന്റെ വ്യാസവുമായി. അതായത്, മുകളിലും താഴെയും അർധവൃത്തങ്ങൾ.

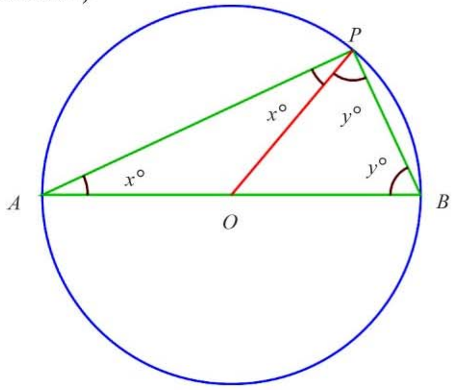
ഇത്തരമൊരു ചിത്രം നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ടോ? (എട്ടാംക്ലാസിലെ **സർവസമത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **അർധവൃത്തത്തിലെ കോൺ** എന്ന ഭാഗം ഓർക്കുക)



AB വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണ്. $\angle P$ മട്ടകോണാണെന്ന് കിട്ടിയത് എങ്ങനെയാണ്?



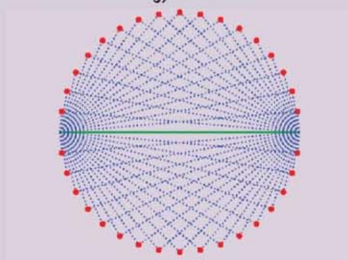
O വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ്. അതിനാൽ OAP യും, OBP യും സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണ് (കാരണം?) $\angle APO = x^\circ$ എന്നും $\angle BPO = y^\circ$ എന്നും എടുത്താൽ $\angle A = x^\circ$ എന്നും, $\angle B = y^\circ$ എന്നും കിട്ടും (അതെങ്ങനെ?)



സഞ്ചാരപാത

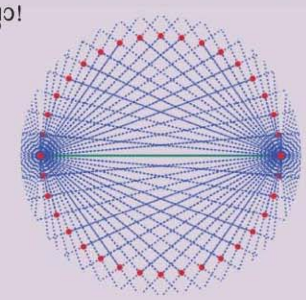
ബിന്ദുക്കളുടെ സഞ്ചാരപാതകളെ പലപ്പോഴും, നീളങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലോ, കോണുകളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലോ വിവരിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജി, ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് തുല്യഅകലം പാലിച്ചുകൊണ്ട് ചലിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയായി കാണാം; ഈ വരയുടെ രണ്ടറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ തുല്യകോണുകൾ വരത്തക്കവിധം സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ പാതയായും കാണാം.

ഒരു നിശ്ചിത വര കർണമായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാംമൂലയുടെ സഞ്ചാരപാത എന്താണ്?



ഈ വര വ്യാസമായ വൃത്തം മുഴുവൻ കിട്ടില്ലെന്നു കണ്ടല്ലോ; വരയുടെ അറ്റങ്ങൾ ഈ പാതയിലില്ല.

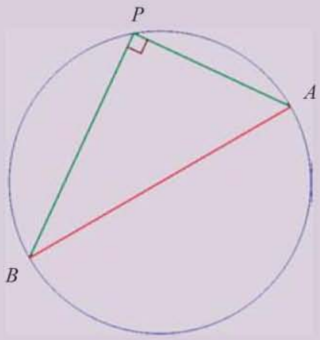
പകരം, ഒരു വരയുടെ അറ്റങ്ങളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന, പരസ്പരം ലംബമായ വരകൾ, തമ്മിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത എന്നാക്കിയാലോ? മുഴുവൻ വൃത്തവും കിട്ടുമല്ലോ!



മട്ടകോണും വ്യാസവും

ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവിനോടു യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ, ഈ ബിന്ദുവിലുണ്ടാകുന്ന കോൺ മട്ടമാണെന്നു കണ്ടു.

മറിച്ച്, ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വരകൾ വരച്ചുവെന്നു കരുതുക. ഈ വരകൾ വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണോ?



ഇവിടെ വൃത്തം, APB എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തമാണ്. ഏതു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെയും കർണം അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണല്ലോ. അപ്പോൾ AB എന്ന വര വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണ്.

(ഏഴാം ക്ലാസിലെ **വരകൾ ചേരുമ്പോൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **മട്ടവും വൃത്തവും** എന്ന ഭാഗത്ത്, വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കാൻ വിവരിച്ച മാർഗം എന്തുകൊണ്ടു ഫലിക്കുന്നു എന്ന് ഇപ്പോൾ മനസിലായില്ലേ?)

ΔABP യിലെ കോണുകളുടെ തുക $180°$ ആയതിനാൽ

$$x + y + (x + y) = 180°$$

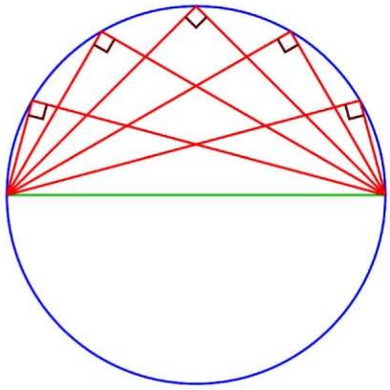
എന്നും കിട്ടും. ഇതിൽനിന്ന് $2x + 2y = 180°$ എന്നും, തുടർന്ന്

$$x + y = 90°$$

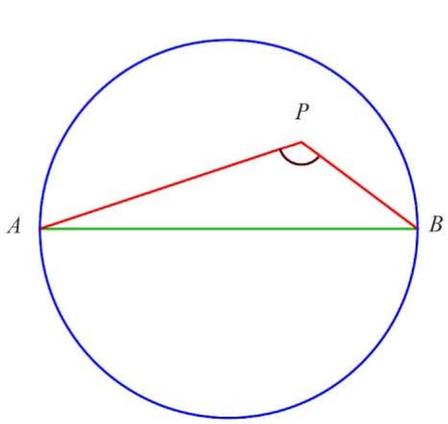
എന്നും കാണാം.

ഇതിൽ നിന്ന് എന്തു മനസ്സിലായി?

വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിലെ മറ്റേതൊരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് മട്ടകോണാണ്.

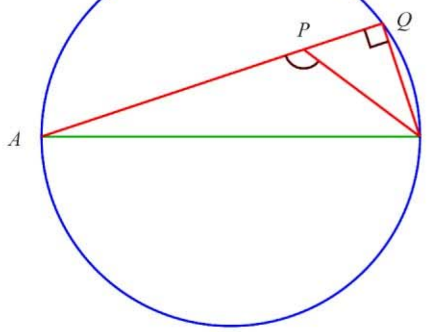


ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി നോക്കാം. വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെതന്നെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുമ്പോഴാണ് മട്ടകോൺ കിട്ടിയത്. വൃത്തത്തിനകത്തെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലോ?



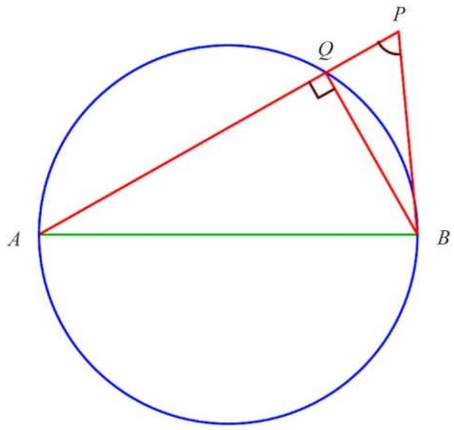
വൃത്തത്തിനകത്തെ ഏതു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലും, ഇതുപോലെ മട്ടത്തേക്കാൾ വലിയ കോൺ കിട്ടുമോ?

ചിത്രത്തിലെ ഒരു വര നീട്ടി, വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുക; ആ ബിന്ദു, വ്യാസത്തിന്റെ മറ്റേ അറ്റവുമായി യോജിപ്പിക്കുക:



ഇപ്പോൾ ΔPQB യിൽ, P യിലെ ബാഹ്യകോണാണ് $\angle APB$. ഇത്, ത്രികോണത്തിലെ Q വിലേയും, B യിലേയും (ആന്തര) കോണുകളുടെ തുകയാണല്ലോ. (ഒമ്പതാംക്ലാസ്സിലെ **ബഹുഭുജങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **മാറാത്ത തുക** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക). ഇതിൽ Q വിലെ കോൺ മട്ടമായതിനാൽ, $\angle APB$ മട്ടത്തേക്കാൾ കൂടുതലാണെന്നു കിട്ടിയില്ലേ?

ഇനി വൃത്തത്തിനു പുറത്ത് ഒരു ബിന്ദു ആയാലോ?



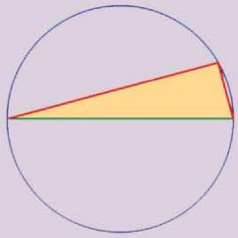
ഇപ്പോൾ ΔPQB യിൽ, $\angle APB$ യാണ് ആന്തരകോൺ; മട്ടകോണായ $\angle AQB$ ബാഹ്യകോണും. അപ്പോൾ $\angle APB$ മട്ടത്തേക്കാൾ ചെറുതാണെന്നു വന്നില്ലേ?

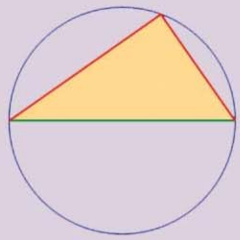
ഇനി, ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ ഏതോ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചപ്പോൾ മട്ടകോൺ കിട്ടിയെന്നു കരുതുക. ഈ ബിന്ദു, വൃത്തത്തിനകത്താകില്ല (അകത്തെ ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം ഈ കോൺ മട്ടത്തേക്കാൾ കൂടുതലല്ലേ?); വൃത്തത്തിനു പുറത്തുമല്ല (പുറത്തെ ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം ഈ കോൺ മട്ടത്തേക്കാൾ കുറവാണല്ലോ). അപ്പോൾ, ഈ ബിന്ദു വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണ്.

മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ മൂലകൾ ചേർത്ത്, ആദ്യം വരച്ച ചിത്രത്തിൽ വൃത്തം കിട്ടിയത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്നു മനസിലായില്ലേ? ഇനി ഈ ആശയങ്ങളുപയോഗിച്ച്, ചില കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.

സമചതുരവിശേഷം

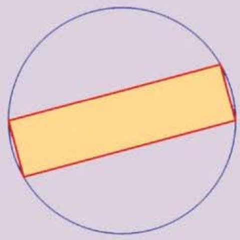
വൃത്തത്തിലെ വിവിധ ബിന്ദുക്കൾ ഏതെങ്കിലും വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിച്ച്, വ്യത്യസ്ത മട്ടത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാമല്ലോ:

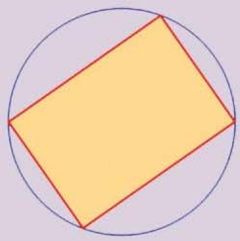




ഇവയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവ്, മുകളിലെ ബിന്ദു ഏതു സ്ഥാനത്തെടുക്കുമ്പോഴാണ്?

അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം: നാലു മൂലകളും വൃത്തത്തിലായ പലപല ചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.





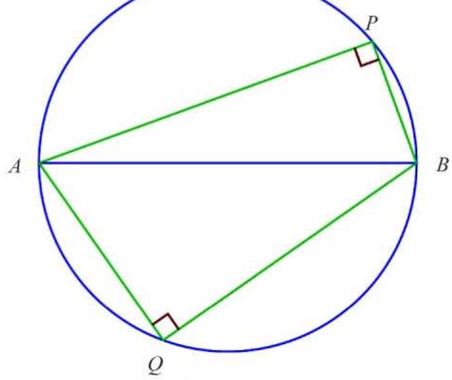
ഇവയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവുള്ള ചതുരത്തിന്റെ സവിശേഷത എന്താണ്?

- ΔABC യിൽ, $\angle A = 60°$ ഉം $\angle B = 70°$ ഉം ആണ്. C എന്ന ശീർഷം, AB വ്യാസമായ വൃത്തത്തിനകത്തോ, പുറത്തോ?
- ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു ജോടി എതിർകോണുകൾ മട്ടമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നു പോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമെന്നു തെളിയിക്കുക.
- $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $AB = 3$ സെന്റിമീറ്റർ, $BC = 4$ സെന്റിമീറ്റർ, $AC = 5$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle A = 120°$, $\angle C = 70°$. ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഏതൊക്കെ മൂലകളാണ്, AC വ്യാസമായ വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ളത്? ഏതൊക്കെയാണ് അകത്ത്? വൃത്തത്തിൽത്തന്നെ ഏതെങ്കിലും ശീർഷമുണ്ടോ? BD എന്ന വികർണം വ്യാസമായ വൃത്തത്തിലോ?

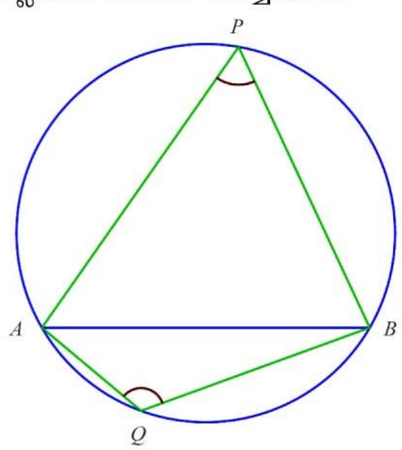
കോണും ചാപവും ഞാണും

മട്ടകോൺ ഉപയോഗിച്ചു വരച്ച ചിത്രത്തിൽ വൃത്തം കിട്ടാനുള്ള കാരണം കണ്ടു. മറ്റു ചിത്രങ്ങളുടെ കാര്യമോ?

വീണ്ടും വൃത്തത്തിൽ നിന്നു തുടങ്ങാം. വൃത്തത്തിന്റെ ഏതു വ്യാസം AB യും, വൃത്തത്തിനെ രണ്ടു തുല്യ ചാപങ്ങളാക്കുന്നു; അവയിലെ ഏതു ബിന്ദുക്കളുമായി വ്യാസാഗ്രങ്ങൾ A, B യോജിപ്പിച്ചാലും മട്ടകോൺ കിട്ടുന്നു.



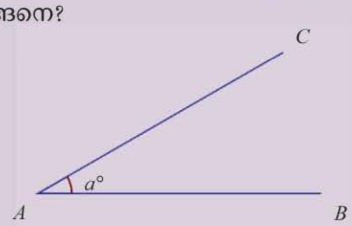
ഇനി വ്യാസമല്ലാത്ത ഞാൺ വരച്ചാലോ?



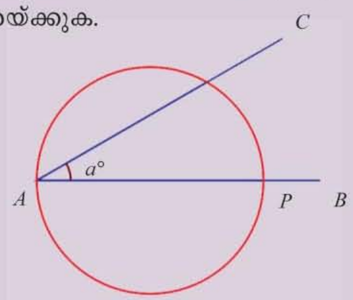
ചാപങ്ങൾ തുല്യവുമല്ല, കോണുകൾ മട്ടവുമല്ല.

കോണിരട്ടിപ്പ്

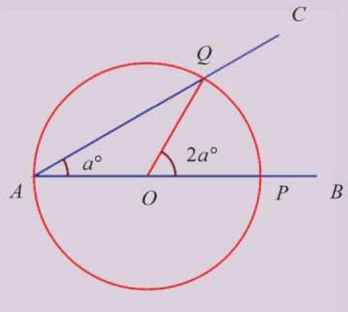
ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജി വരച്ച്, അതിനെ പകുതിയാക്കാനറിയാമല്ലോ. ഒരു കോണിനെ ഇരട്ടിപ്പിക്കുന്നതെങ്ങനെ?



AB യിലൊരു ബിന്ദു P അടയാളപ്പെടുത്തി, AP വ്യാസമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.



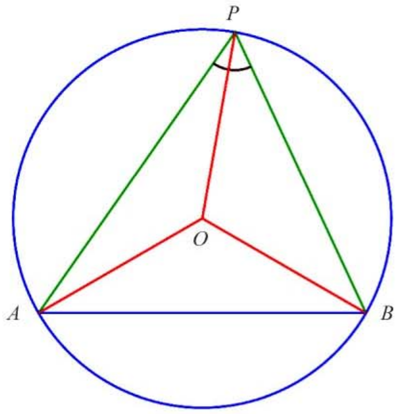
ഈ വൃത്തം AC യെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു Q വും, വൃത്തകേന്ദ്രം O യും യോജിപ്പിക്കുക



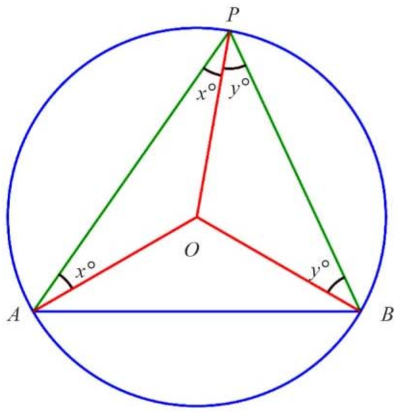
OAQ സമപാർശ്വത്രികോണമായതിനാൽ , $\angle OQA = a°$; അതിനാൽ, O യിലെ ബാഹ്യകോണായ $\angle POQ = 2a°$ എന്നിങ്ങനെ കാണാമല്ലോ.

AP വ്യാസമാക്കി വരക്കാതെയും കോണിരട്ടിപ്പിക്കാം. എങ്ങനെ?

മുകളിലേയും താഴെയുമുള്ള ചാപങ്ങളും കോണുകളും വെവ്വേറേ പരിശോധിക്കാം. ആദ്യം മുകളിലേത്. വ്യാസത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ, P യെ വൃത്തകേന്ദ്രം O യുമായി യോജിപ്പിക്കാം. ഇവിടെ വൃത്തകേന്ദ്രം ഞാണിൽത്തന്നെ അല്ലാത്തതിനാൽ, OA, OB ഇവയും യോജിപ്പിക്കാം.

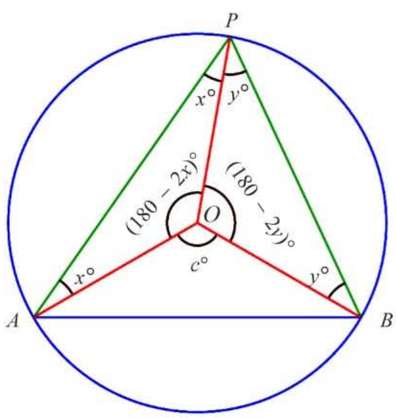


വ്യാസത്തിന്റെ കാര്യത്തിലെന്നപോലെ ഇതിലും OAP, OBP ഇവ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണല്ലോ.



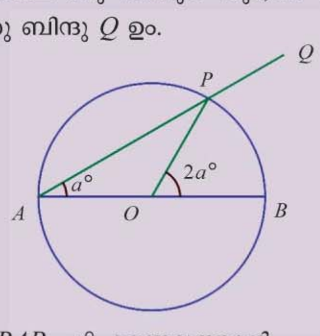
ഇവിടെ മുമ്പുകണ്ടതുപോലെ, ഈ സമപാർശ്വ ത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്ന് ഒറ്റ ത്രികോണമാകുന്നില്ല; അതിനാൽ ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക എടുക്കുന്ന പഴയ സൂത്രം ഫലിക്കില്ല.

പകരം O യുടെ ചുറ്റുമുള്ള കോണുകൾ എഴുതിനോക്കാം:



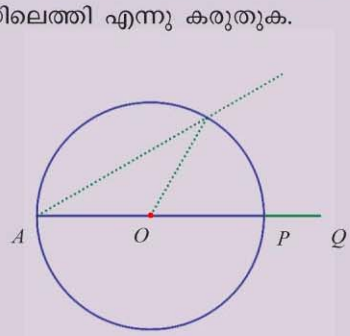
തിരിവു കണക്ക്

ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിൽ AB വ്യാസവും, O കേന്ദ്രവുമാണ്. വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു P യും, AP യിലെ ഒരു ബിന്ദു Q ഉം.

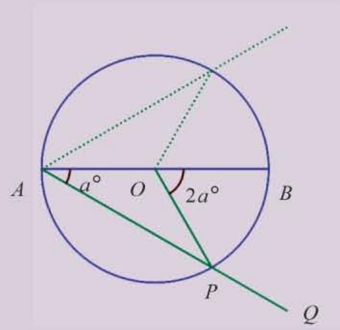


$\angle BAP = a^\circ$ എന്നെടുത്താൽ,
$\angle BOP = 2a^\circ$ ആണല്ലോ.

ഇനി, P വൃത്തത്തിലൂടെ നീങ്ങി B യിലെത്തി എന്നു കരുതുക.



OP എന്ന വര $2a^\circ$ ആണ് കറങ്ങിയത്. AQ എന്ന വര a° യും. വീണ്ടും P നീങ്ങി, ആദ്യ സ്ഥാനത്തിന്റെ നേരെ ചുവട്ടിലെത്തുമ്പോഴോ?



അപ്പോൾ

$$(180 - 2x) + (180 - 2y) + c = 360$$

ആകണമല്ലോ (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ബിന്ദുവിനു ചുറ്റും** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക). അതായത്

$$360 - 2(x + y) + c = 360$$

ഇതിൽ നിന്ന്

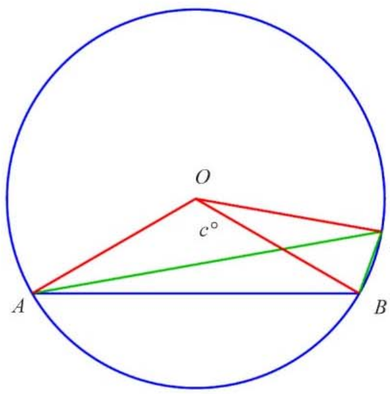
$$x + y = \frac{1}{2}c$$

എന്നു കാണാം. അതായത്

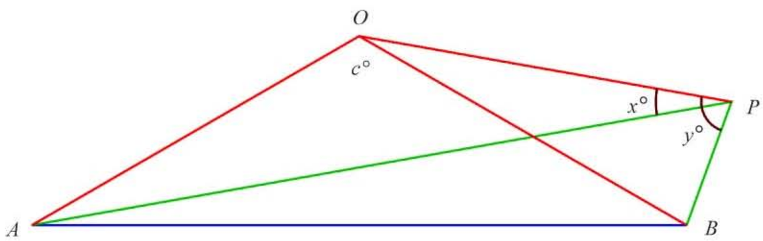
$$\angle APB = \frac{1}{2}c^\circ$$

P മുകളിലെ ചാപത്തിൽ എവിടെയായാലും ഇതു ശരിയാകുമോ?

ഇങ്ങനെ ആയാലോ?



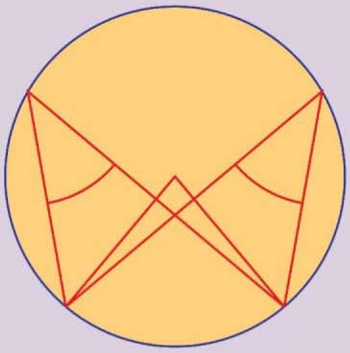
നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ $\angle OPA = x^\circ$ എന്നും $\angle OPB = y^\circ$ എന്നും എടുത്തു നോക്കാം. കാര്യങ്ങൾ വ്യക്തമായി കാണുന്നതിന്, ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം വലുതാക്കിയ ചിത്രം നോക്കാം:

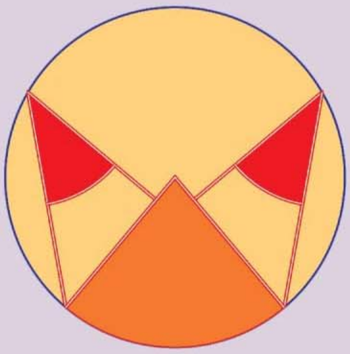


ഇനി നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ OAP, OBP എന്നിവ സമപാർശ്വ ത്രികോണങ്ങളാണെന്നത് ഉപയോഗിച്ച്, മറ്റു കോണുകൾ കണ്ടു പിടിക്കാം:

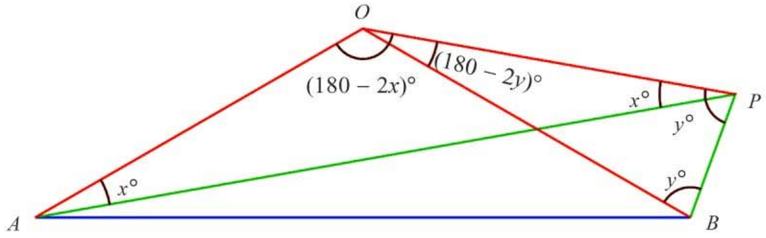
മുറിക്കലും ചേർക്കലും

ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ, ഒരു ചിത്രം വരച്ച്, വൃത്താംശങ്ങൾ വെട്ടിയെടുക്കുക





ഇനി ഇവ ചുവടെക്കാണുന്നപോലെ ചേർത്തു വച്ചു നോക്കൂ:



ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$\angle APB = (y - x)°$$

എന്നും

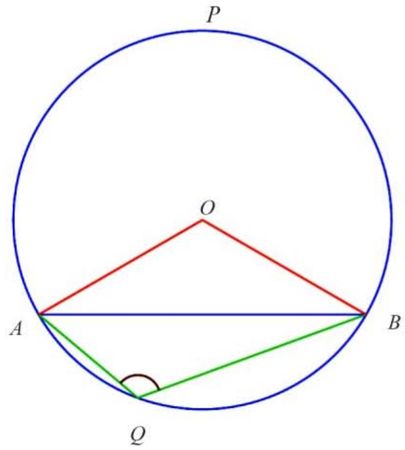
$$\angle AOB = (180 - 2x) - (180 - 2y) = 2(y - x)°$$

എന്നും കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ വീണ്ടും

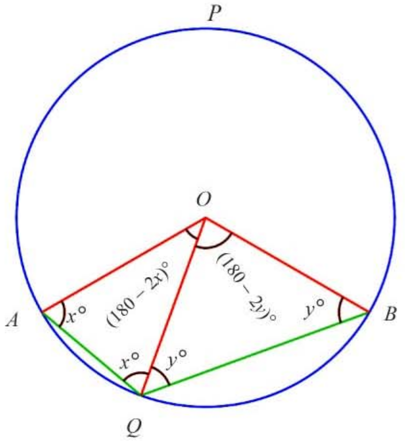
$$\angle APB = \frac{1}{2}c°$$

എന്നുതന്നെ കിട്ടും.

AB യ്ക്കു ചുവടെയുള്ള കോണുകൾക്കും ഇതു ശരിയാണോ?

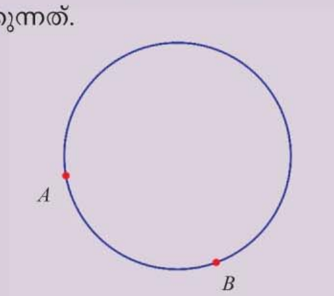


OQ യോജിപ്പിച്ചാൽ ഇവിടെയും രണ്ടു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടും. അപ്പോൾ നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ കോണുകൾ എഴുതാം.



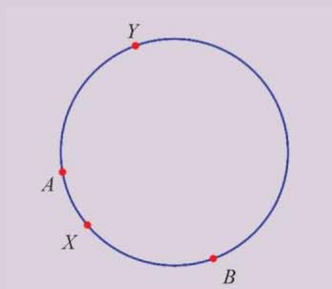
ചാപജോടി

ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അതിനെ രണ്ടു ചാപങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത്.



ചിത്രത്തിൽ, A യിൽ നിന്നു വലത്തോട്ട് വൃത്തത്തിലൂടെ നീങ്ങി B യിലെത്തുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ചെറിയ ചാപവും, A യിൽ നിന്നു ഇടത്തോട്ട് വൃത്തത്തിലൂടെ നീങ്ങി B യിലെത്തുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന വലിയ ചാപവും,

ഓരോ ചാപത്തിലും ഒരു ബിന്ദുകൂടി എടുത്താൽ, അതിന്റെ പേരും ചേർത്ത് ചാപങ്ങൾക്ക് പേരു കൊടുക്കാം:



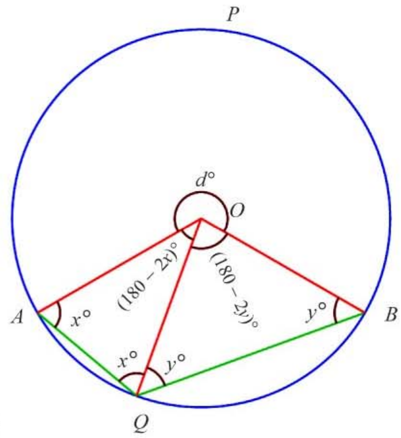
ചിത്രത്തിൽ ചെറിയ ചാപം AXB, വലിയ ചാപം AYB

അപ്പോൾ ഏതു ചാപത്തേയും, വൃത്തമാക്കി പൂർത്തീകരിക്കുന്ന ഒരു ചാപമുണ്ട്; ഒന്നേ ഉള്ളുതാനും. മറ്റൊരു തരത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, എത്ര ചെറിയ വട്ടക്ഷണത്തെയും മുഴുവട്ടമാക്കാം– ഒരേ ഒരു തരത്തിൽ.

ഇനി APB എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ d എന്നെടുത്താൽ

$$(180-2x)+(180-2y)+d=360$$

എന്നു ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ നിന്നു കാണാം.



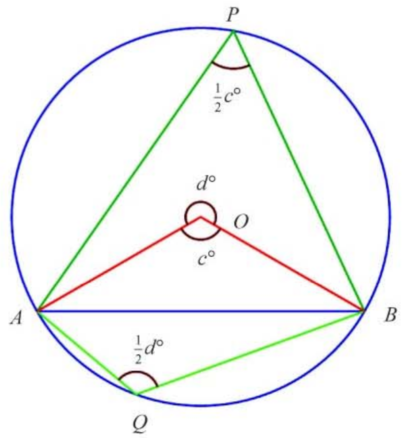
ഇതിൽ നിന്ന്

$$2(x+y)=d$$

എന്നു കിട്ടും, അതായത്

$$\angle AQB = \frac{1}{2}d^\circ$$

ഇക്കണ്ടതെല്ലാം ഒന്നു ചുരുക്കിപ്പറയാം. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

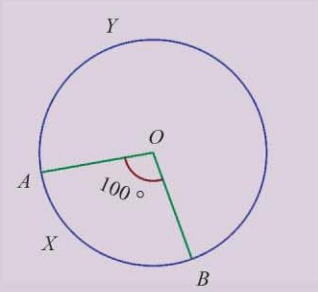


P എന്ന ബിന്ദു, AB യ്ക്കു മുകളിൽ വൃത്തത്തിൽ എവിടെയെടുത്താലും, $\angle APB = \frac{1}{2}c^\circ$ ആയിരിക്കും.

Q എന്ന ബിന്ദു, AB യ്ക്കു താഴെ വൃത്തത്തിൽ എവിടെയെടുത്താലും, $\angle AQB = \frac{1}{2}d^\circ$ ആയിരിക്കും.

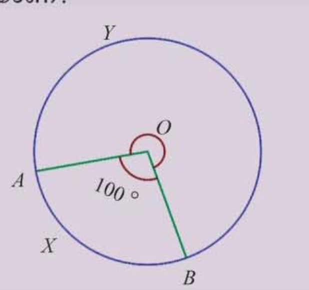
ഇക്കാര്യംതന്നെ AB എന്ന് ഞാൺ ഉപയോഗിക്കാതെ പറയാം: ഒരു വൃത്തത്തിൽ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും, അത് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ചാപങ്ങളായി ഭാഗിക്കുമല്ലോ:

കേന്ദ്രകോൺ



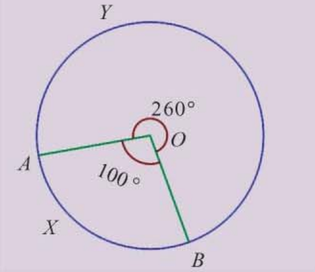
ചിത്രത്തിൽ AXB എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 100° ആണ്.

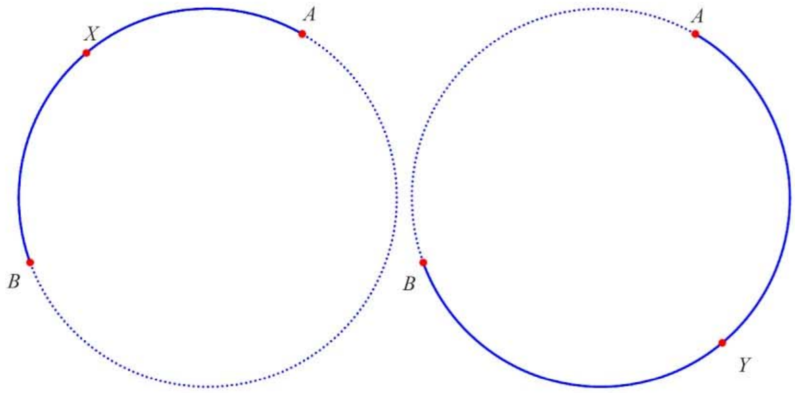
AYB എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയാണ്?



ഡിഗ്രി എന്ന കോണളവിന്റെ അർത്ഥമനുസരിച്ച്, ഈ വൃത്തത്തെ 360 സമഭാഗങ്ങളാക്കിയതിൽ 100 എണ്ണം ചേർന്നതാണ് $OAXB$ എന്ന ഭാഗം. അപ്പോൾ എത്ര ഭാഗം ചേർന്നതാണ്, മിച്ചമുള്ള $OAYB$ എന്ന ഭാഗം?

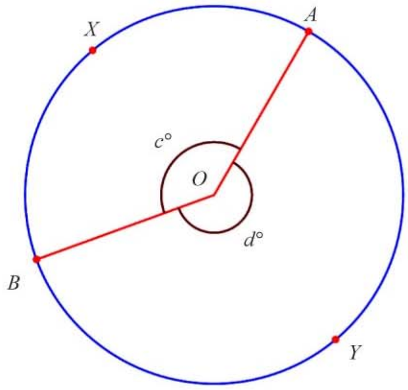
അതായത്, AYB എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 260°.



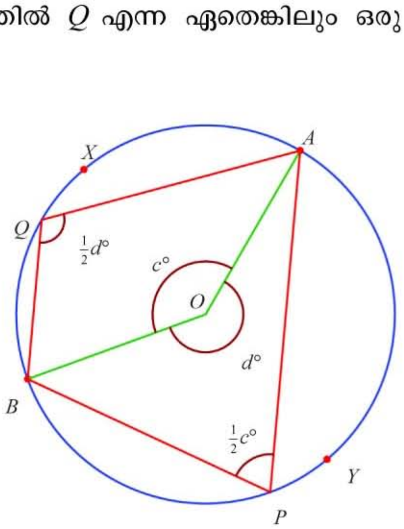


ചിത്രത്തിൽ A, B ഇവ വൃത്തത്തെ, AXB, AYB എന്ന രണ്ടു ചാപങ്ങളാക്കി ഭാഗിക്കുന്നു. AXB യെ AYB യുടെ മറുചാപമെന്നോ, ശിഷ്ട ചാപമെന്നോ, പൂരകചാപമെന്നോ വിളിക്കാം. (മറിച്ചും)

ഇനി A, B ഇവ വൃത്തകേന്ദ്രം O യുമായി യോജിപ്പിച്ചാലോ?

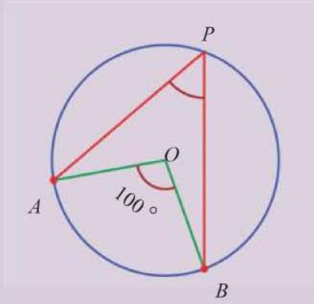


ചിത്രത്തിൽ c° എന്നത്, AXB എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, d° എന്നത് AYB എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണുമാണല്ലോ. ഇനി AYB എന്ന ചാപത്തിൽ P എന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവും, AXB എന്ന ചാപത്തിൽ Q എന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവും എടുത്താലോ?



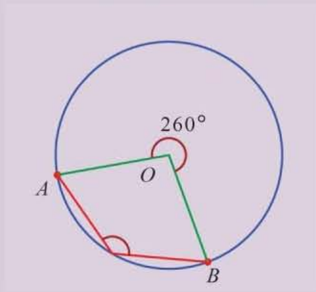
അപ്പോൾ മുമ്പു രണ്ടായിപ്പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങൾ ഒന്നിച്ചെഴുതാം:

കോൺമാറ്റം



ചിത്രത്തിൽ $\angle APB = 50^\circ$ ആണല്ലോ. മാത്രമല്ല A, B ഇവയുണ്ടാക്കുന്ന രണ്ടു ചാപങ്ങളിലെ വലിയ ചാപത്തിൽ എവിടെ P എടുത്താലും ഈ കോൺ 50° തന്നെയായിരിക്കും.

ഇനി ഈ ബിന്ദു, വൃത്തത്തിലൂടെ ഇടത്തോട്ടു നീങ്ങുന്നു എന്നു കരുതുക. A യിലെത്തുന്നതുവരെ കോൺ മാറുന്നില്ല. A യിലെത്തുമ്പോൾ, കോൺ തന്നെയില്ല. വീണ്ടും നീങ്ങി, ചെറിയ ചാപത്തിലാകുമ്പോൾ കോൺ മാറും, എത്രയാകും?



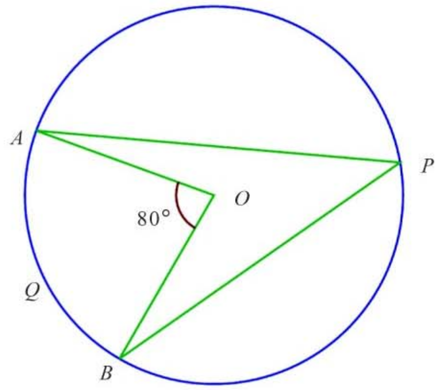
തുടർന്ന് B യിലെത്തും വരെ 130° തന്നെ.

ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തെ രണ്ടു ചാപങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കൾ, ഇതിൽ ഒരു ചാപത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചുകിട്ടുന്ന കോൺ, മറുചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്ര കോണിന്റെ പകുതിയാണ്.

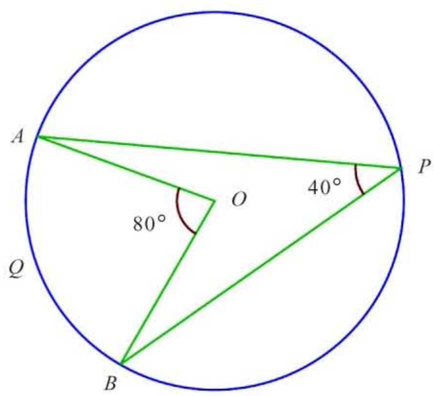
ഇതിൽ, "ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ" എന്നതിനു പകരം "ചാപം കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ" എന്നും പറയാം; അതുപോലെ "ചാപത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന കോൺ" എന്നതിനു പകരം "ചാപം ഒരു ബിന്ദുവിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ" എന്നും പറയാം. അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയത് ഇങ്ങനെയാകും:

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപം കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയാണ്, ആ ചാപം അതിന്റെ മറു ചാപത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ.

ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



AQB എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $80°$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ മറുചാപത്തിലെ P എന്ന ബിന്ദുവിലെ APB എന്ന കോൺ, $80°$ യുടെ പകുതിയായ $40°$ ആണ്.

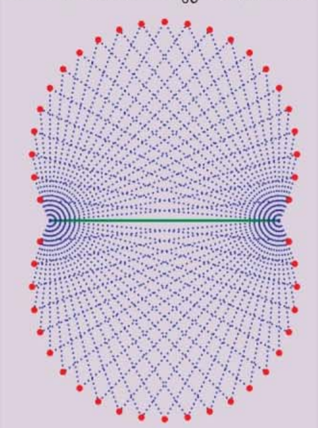


ഈ ചിത്രത്തിൽ നിന്നുതന്നെ APB എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്ര കോൺ $360 - 80 = 280°$ എന്നും കാണാം.

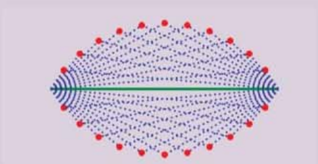
വൃത്തവിദ്യ

ഒരു വരയുടെ മുകളിലും താഴെയും ഒരേകോണുകൾ വരച്ച്, ചില ചിത്രങ്ങൾ കിട്ടിയില്ലേ?

മുകളിലും താഴെയും $60°$ എടുത്തപ്പോൾ ഇങ്ങനെയല്ലേ കിട്ടിയത്:

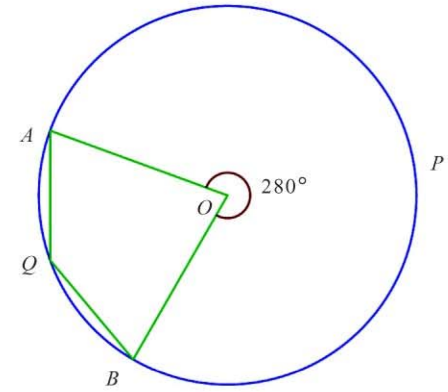


$120°$ എടുത്തപ്പോൾ ഇങ്ങനെയും:



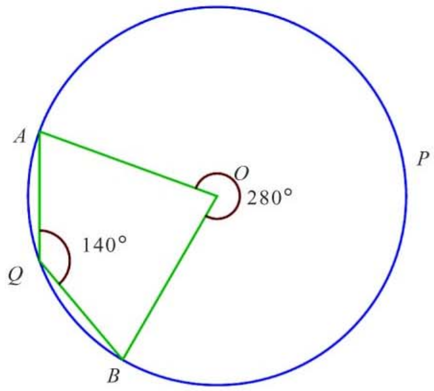
മുകളിൽ $60°$ ഉം, താഴെ $120°$ എടുത്തു നോക്കൂ. ഒരു മുഴുവൻ വൃത്തംതന്നെ കിട്ടിയില്ലേ? എന്തുകൊണ്ടാണിത്?

മുകളിൽ $30°$ കോണുകളാണ് എടുത്തതെങ്കിൽ, മുഴുവൻ വൃത്തമാകാൻ, താഴെ എടുക്കേണ്ട കോൺ എത്രയാണ്?



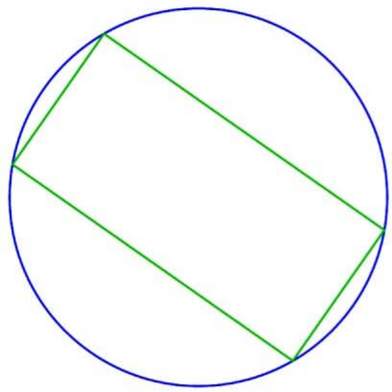
അപ്പോൾ, മറുചാപത്തിലെ Q വിലുണ്ടാകുന്ന

$$\angle AQB = \frac{1}{2} \times 280 = 140°$$



മറ്റു ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം.

- ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളും വൃത്തത്തിലാണ്. ചതുരത്തിന്റെ വികർണം, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

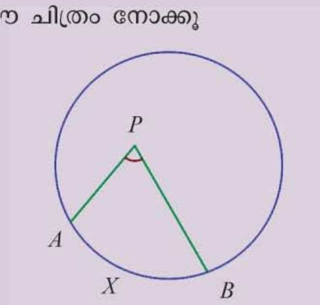


ചതുരത്തിന്റെ ഒരു ജോടി എതിർമൂലകൾ വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുക.

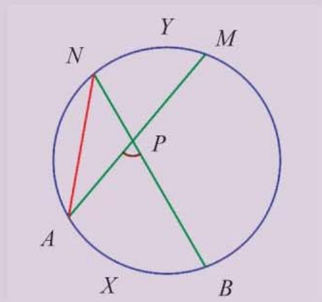
വൃത്തത്തിനകത്ത്

ഒരു ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിനകത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചുകിട്ടുന്ന കോണിനെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ



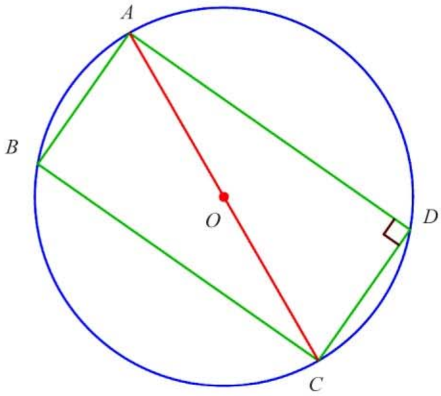
$\angle APB$ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, AP, BP ഈ വരകളെ നീട്ടി വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുക. ഈ ബിന്ദുക്കളിലൊന്നുമായി ചാപത്തിന്റെ ഒരറ്റം യോജിപ്പിക്കുക.



AXB എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $x°$ എന്നും MYN എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $y°$ എന്നുമെടുത്താൽ $\angle ANB = \frac{1}{2}x°$ എന്നും $\angle MAN = \frac{1}{2}y°$ എന്നും കാണാമല്ലോ. ഇവ PAN എന്ന ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളാണ്; $\angle APB$ മൂന്നാം മൂലയിലെ ബാഹ്യകോണും. അപ്പോൾ

$$\angle APB = \frac{1}{2}(x + y)°$$

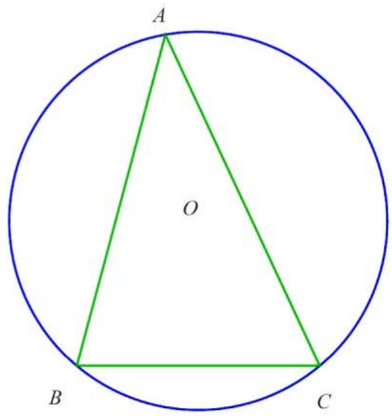
അതായത്, AXB, MYN എന്നീ ചാപങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോണുകളുടെ ശരാശരിയാണ്, $\angle APB$.



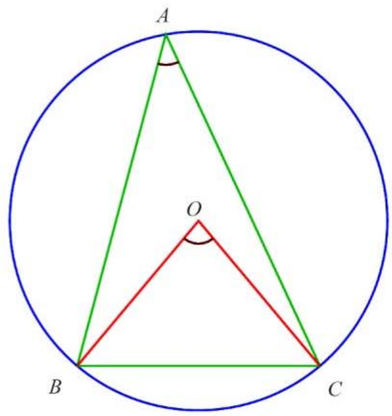
$ABCD$ ചതുരമായതിനാൽ $\angle ADC = 90°$. അപ്പോൾ ADC എന്ന ചാപത്തിന്റെ മറുചാപമായ ABC യുടെ കേന്ദ്രകോൺ $2 \times 90° = 180°$ ആണ്. അതായത്, $\angle AOC = 180°$. ഇതിന്റെ അർത്ഥം, A, O, C ഒരു വരയിലാണെന്നല്ലേ? മറ്റൊരുതരത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ AC വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണ്.

- ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ, കോണുകൾ $40°$, $60°$, $80°$ ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

വൃത്തത്തിൽ, വെറുതെ ഒരു ത്രികോണം വരച്ചു നോക്കാം.

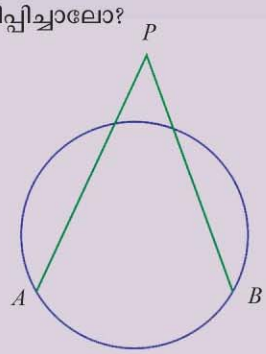


B, C ഇവ വൃത്തകേന്ദ്രം O യുമായി യോജിപ്പിക്കുക.

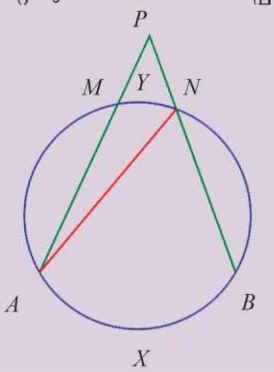


വൃത്തത്തിനുപുറത്ത്

ഒരു ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലോ?



ഈ വരകളിലൊന്ന് വൃത്തത്തിനെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവും, ചാപത്തിന്റെ മറ്റേ അറ്റവും തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുക:



പഴയതുപോലെ, AXB എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $x°$ എന്നും MYN എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $y°$ എന്നുമെടുത്താൽ $\angle ANB = \frac{1}{2}\ x°$ എന്നും $\angle MAN = \frac{1}{2}\ y°$ എന്നും കാണാമല്ലോ. ഇവിടെ ΔPAN ലെ ഒരു ബാഹ്യകോൺ ANB ആണ്. അപ്പോൾ

$$\frac{1}{2}x = \angle APN + \frac{1}{2}\ y$$

എന്നും, അതിൽനിന്ന്

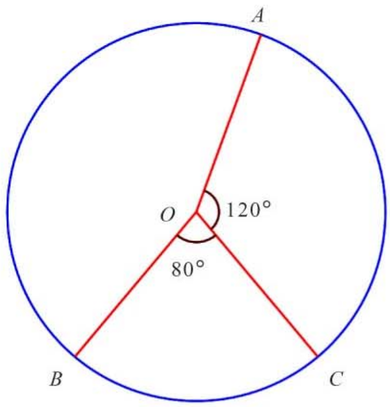
$$\angle APB = \frac{1}{2}\ (x - y)°$$

എന്നു കിട്ടും.

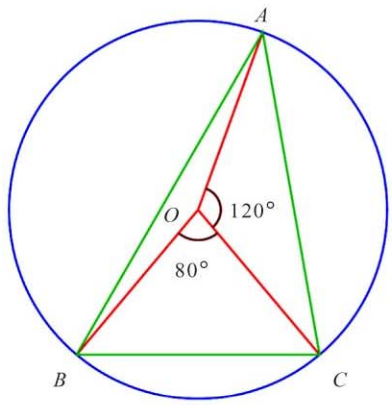
$\angle BAC = 40^\circ$ ആകണമെങ്കിൽ, $\angle BOC$ എത്ര ആയിരിക്കണം?

ഇതുപോലെ മറ്റു മൂലകൾ കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചുണ്ടാകുന്ന കോണുകൾ കണ്ടുപിടിച്ചുകൂടേ?

അപ്പോൾ, ആദ്യം ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ, വൃത്തത്തിൽ A, B, C അടയാളപ്പെടുത്തുക.

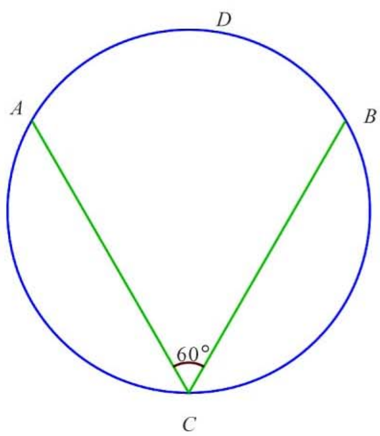


ഇനി A, B, C യോജിപ്പിച്ചാൽ, ഉദ്ദേശിച്ച ത്രികോണമായില്ലേ?



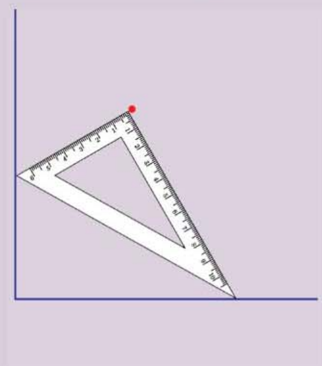
ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ചിത്രത്തിലെ ADB എന്ന ചാപത്തിന്റെ നീളം, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

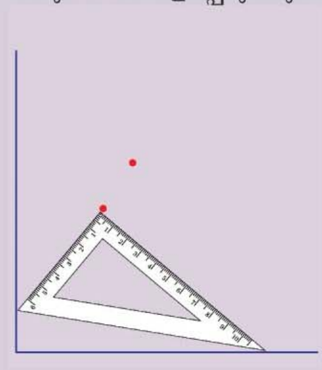


മറ്റൊരു മട്ടക്കണക്ക്

കടലാസിൽ, പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വരകൾ വരച്ച്, ജ്യാമിതിപ്പെട്ടിയിലെ മട്ടം ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ വയ്ക്കുക.



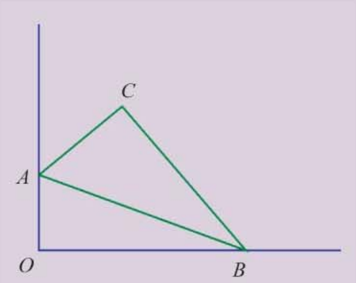
മുകളിലെ മൂലയുടെ സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇനി മൂലകൾ വശങ്ങളിൽ തൊട്ടുകൊണ്ടുതന്നെ മട്ടം അങ്ങോട്ടുമിങ്ങോട്ടും നിരക്കി, ഓരോ സമയത്തും, മുകളിലെ മൂലയുടെ സ്ഥാനവും അടയാളപ്പെടുത്തുക.



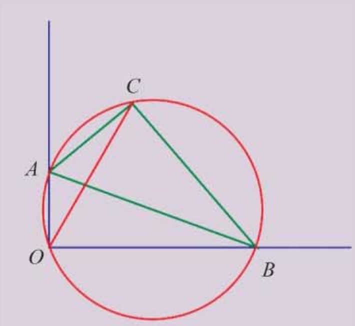
ഈ ബിന്ദുക്കളുടെ കൂട്ടത്തിനെന്തെങ്കിലും സവിശേഷതയുണ്ടോ?

മട്ടവും, വൃത്തവും, വരയും

മട്ടക്കണക്കിൽ, അടയാളപ്പെടുത്തിയ കുത്തുകളെല്ലാം ഒരേ വരയിലല്ലേ? എന്തുകൊണ്ടാണിത്?



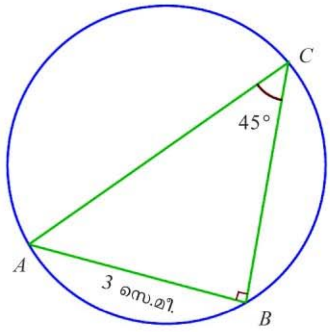
ചിത്രത്തിൽ ABC യാണ് മട്ടം. $\angle ACB$, $\angle AOB$ ഇവ രണ്ടും മട്ടകോണുകളായതിനാൽ, AB വ്യാസമായ വൃത്തം O, C എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും കടന്നുപോകും.



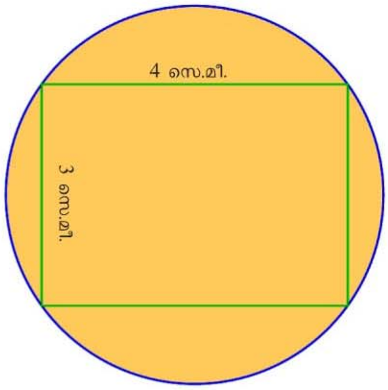
അതിനാൽ $\angle BAC = \angle BOC$. ഇതിൽ $\angle BAC$ നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന മട്ടത്തിന്റെ കോണായതിനാൽ അത് മാറുന്നില്ല. (ഈ ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് അത് $60°$ ആണ്)

അപ്പോൾ മട്ടം നിരക്കുമ്പോൾ C യുടെ സ്ഥാനം മാറിയാലും C യും O യും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര OB യുമായി ഒരേ ചരിവിലാണ്. മറ്റൊരു വിധത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ OB യുമായി ഒരു നിശ്ചിത കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന വരയിൽക്കൂടിയേ C യ്ക്ക് നീങ്ങാൻ കഴിയുള്ളൂ.

- ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?



- ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

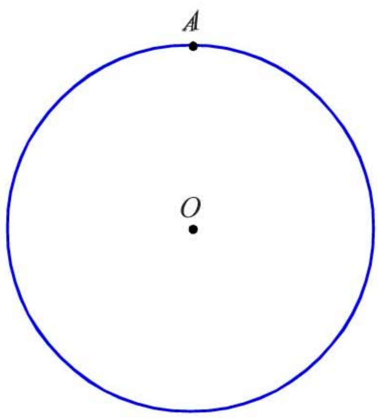


- രണ്ടു കോണുകൾ $40°$, $120°$ ആയ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കണം. പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററായിരിക്കണം. എങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

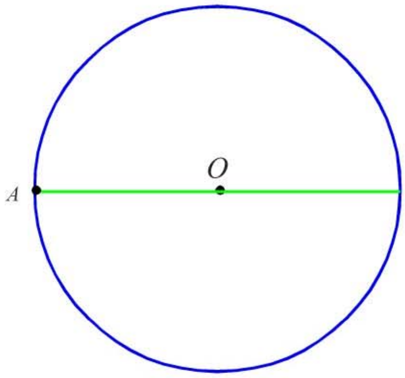
- $22\frac{1}{2}°$ അളവുള്ള ഒരു കോൺ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയാണ്?

- ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിലോരോന്നിലും, നിബന്ധനകൾ അനുസരിച്ച് $22\frac{1}{2}°$ കോൺ വരയ്ക്കുക.

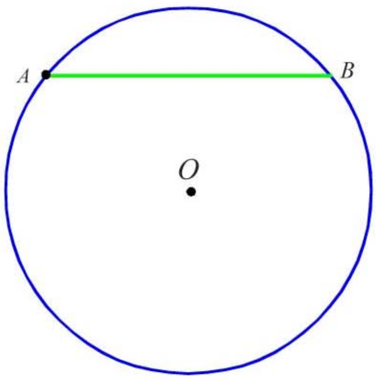
  - A എന്ന ബിന്ദുവിൽ



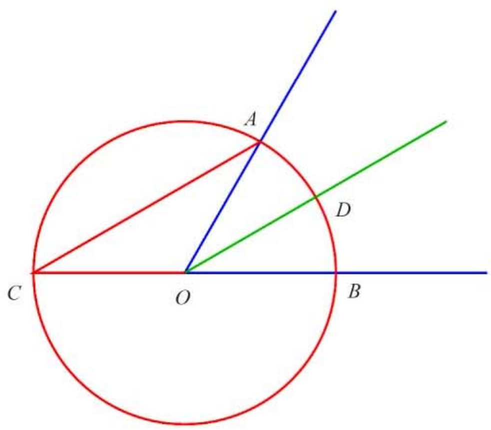
- ഒരു വശം OA ആയി, A എന്ന ബിന്ദുവിൽ



- ഒരു വശം AB ആയി, A എന്ന ബിന്ദുവിൽ



- ചിത്രത്തിൽ O വൃത്ത കേന്ദ്രവും. OD എന്ന വര, AC എന്ന വരയ്ക്കു സമാന്തരവുമാണ്.

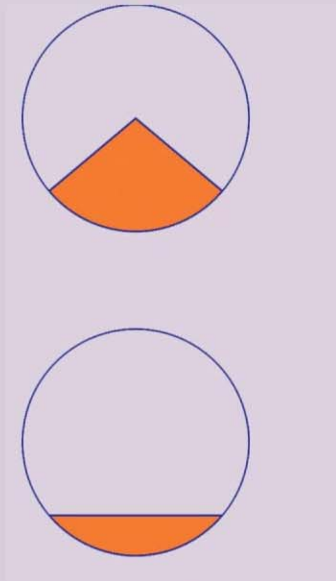


$\angle AOB$ യുടെ സമഭാജിയാണ് OD എന്നു തെളിയിക്കുക.

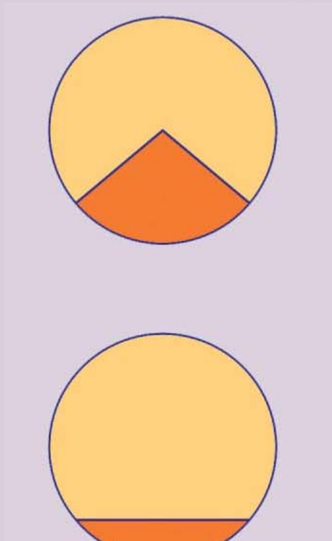
തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജി വരയ്ക്കാൻ ഇത് ഉപയോഗിക്കാൻ കഴിയുമോ? എങ്ങനെ?

വൃത്താംശവും വൃത്തഖണ്ഡവും

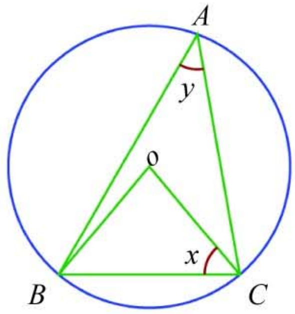
വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപവും അതിന്റെ അറ്റങ്ങൾ കേന്ദ്രത്തോടു യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകളും ചേർന്നതാണ് വൃത്താംശം; ചാപവും, അതിന്റെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഓരോ ഞാണും ചേർന്നത് വൃത്തഖണ്ഡം.



വൃത്തത്തിലെ ചാപങ്ങൾ ജോടികളായാണ് ഉണ്ടാകുന്നത് എന്നതിനാൽ, വൃത്താംശങ്ങളും വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളും ജോടികളായാണ് പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്നത്.

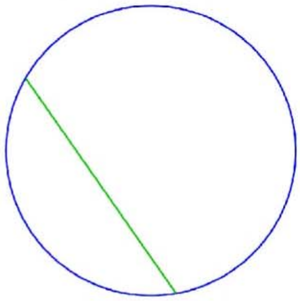


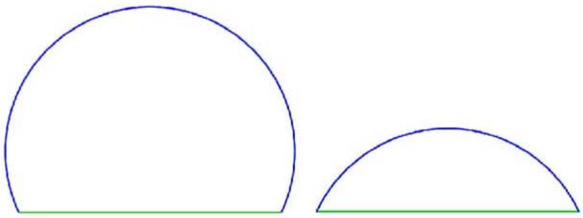
- ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രമാണ്. $x + y = 90^\circ$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.



വൃത്തഖണ്ഡങ്ങൾ

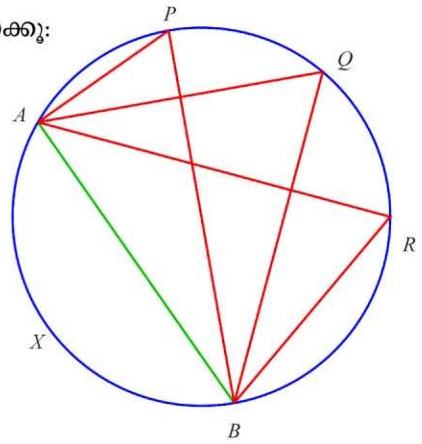
ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണും അതിനെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ.





ഇത്തരം ഭാഗങ്ങളെ വൃത്തഖണ്ഡങ്ങൾ (segments of a circle) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

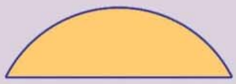


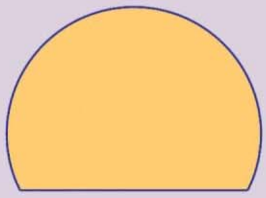
$\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$ ഇവയെല്ലാം AXB എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണ്. അതിനാൽ ഇവയെല്ലാം തുല്യവുമാണ്.

ഭാഗങ്ങളുടെ വലിപ്പം

വൃത്തത്തിലെ ചാപത്തിന്റെ നീളം മാറുന്നതനുസരിച്ച്, അതുകൊണ്ടുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്താംശത്തിന്റെയും വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെയും വലിപ്പം മാറും. ചാപത്തിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാനുപയോഗിക്കുന്നത്, അതിന്റെ കേന്ദ്രകോണും. (ചാപത്തിന്റെ നീളം അളക്കുന്നതിനേക്കാൾ എളുപ്പം, കേന്ദ്രകോൺ അളക്കുന്നതാണല്ലോ.)

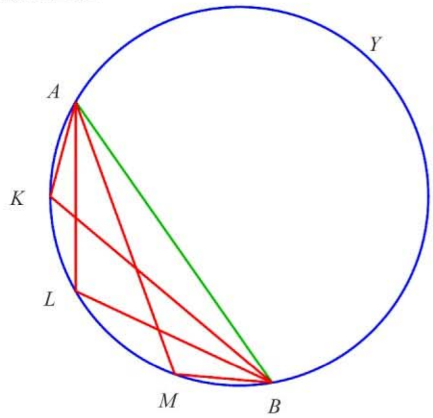
ഒരു വൃത്താംശത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ പ്രകടമാണ്. വൃത്തഖണ്ഡത്തിലോ?





ആദ്യം കേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടിവരും, അല്ലേ? അതെങ്ങനെയാണെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിന്റെ **മറ്റൊരു നോട്ടം** എന്ന ഭാഗം)

ഈ ചിത്രത്തിലോ?



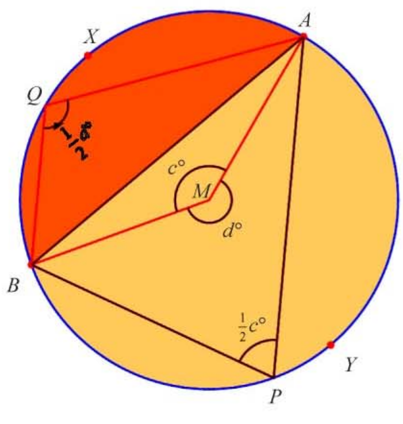
ഇതിൽ $\angle AKB, \angle ALB, \angle AMB$ ഇവയെല്ലാം AYB എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയും, അതിനാൽ തുല്യവുമാണ്.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കി ഇങ്ങനെ പറയാം.

ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്.

ഒരു കാര്യം കൂടി നോക്കാം. ഏതു വൃത്തഖണ്ഡത്തിനും ഒരു മറുഖണ്ഡമുണ്ട്; അതായത്, ഒരു ഞാൺ വൃത്തത്തെ ഒരു ജോടി വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത്. അതിൽ ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണെന്ന് കണ്ടു. ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലേയും, അതിന്റെ മറുഖണ്ഡത്തിലേയും കോണുകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം, ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയും, അതിന്റെ മറുഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം മറുചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയുമാണല്ലോ.



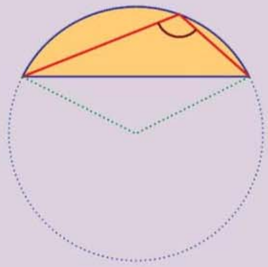
ഇതിൽ $c + d = 360$ ആയതിനാൽ $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = 180$ ആകും.

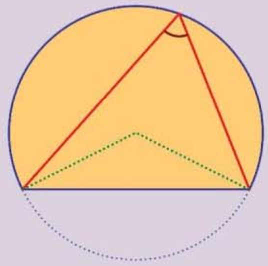
അതായത്,

$$\angle APB + \angle AQB = 180°$$

വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോൺ

വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, വൃത്തകേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കാതെ നേരിട്ടൊരു മാർഗമുണ്ടോ? ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. ആ കോണിൽ നിന്ന് കേന്ദ്രകോൺ കണ്ടുപിടിയ്ക്കാം:





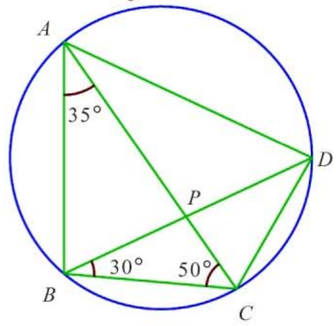
വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോൺ $x°$ എന്നെടുത്താൽ, ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എന്താണ്?

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിപ്പറയാം

മറുഖണ്ഡങ്ങളിലെ കോണുകൾ അനുപൂരകമാണ്

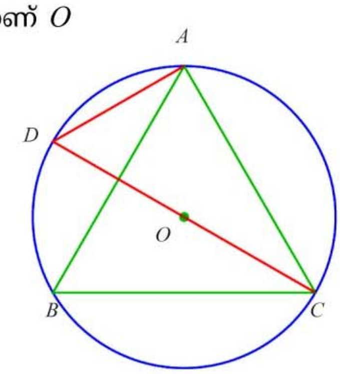
ഈ ആശയങ്ങളുപയോഗിച്ച്, ചുവടെ പറയുന്ന കണക്കുകൾ ചെയ്തു നോക്കൂ:

- ചിത്രത്തിൽ A, B, C, D വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണ്.



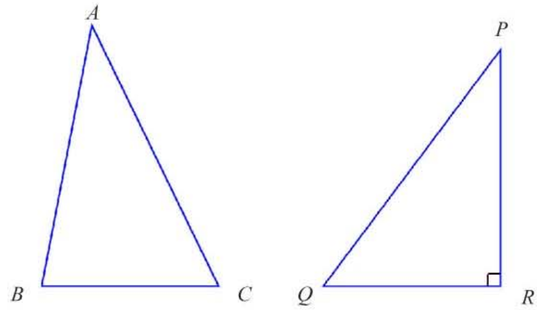
$ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിലെ കോണുകളും, അവയുടെ വികർണങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണുകളും കണ്ടുപിടിക്കുക.

- ചിത്രത്തിൽ ABC ഒരു സമഭുജത്രികോണമാണ്. അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ് O



AD യുടെ നീളം വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന് തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

- ചിത്രത്തിലെ PQR മട്ടത്രികോണമാണ്. $\angle A = \angle P$ യും $BC = QR$ ഉം ആണ്.



ΔABC യുടെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം PQ വിന്റെ നീളത്തിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

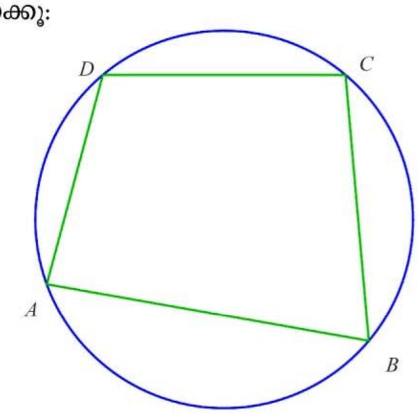
പരിവൃത്തം

ഒരു നേർവരയിലല്ലാത്ത ഏതു മൂന്നു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും, അവയിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമെന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിന്റെ **മൂന്നുബിന്ദുക്കൾ** എന്ന ഭാഗം) മറ്റൊരു വിധത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഏതു ത്രികോണത്തിനും പരിവൃത്തം വരയ്ക്കാം.

ചതുർഭുജങ്ങളുടെ കാര്യമോ? ചതുരത്തിനും, ചിലതരം ലംബകങ്ങൾക്കുമെല്ലാം പരിവൃത്തമുണ്ട്. എന്നാൽ ചതുരമല്ലാത്ത സാമാന്തരികങ്ങൾക്ക് പരിവൃത്തമില്ല. അതായത്, ചതുർഭുജങ്ങളുടെയിടയിൽ, പരിവൃത്തമുള്ളവയും, ഇല്ലാത്തവയും എന്ന രണ്ടു വിഭാഗവുമുണ്ട്.

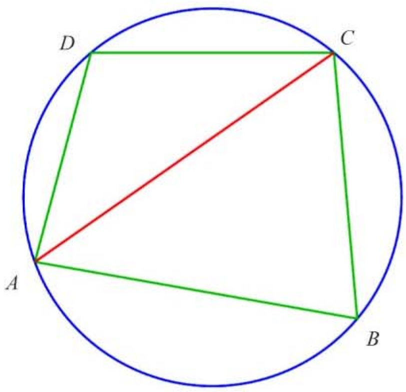
വൃത്തവും ചതുർഭുജവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



A, B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ കോണുകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

കിട്ടിയില്ലെങ്കിൽ AC യോജിപ്പിച്ചു നോക്കൂ.



ഇപ്പോൾ B യിലേയും D യിലേയും കോണുകൾ, AC എന്ന ഞാൺ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചുണ്ടാകുന്ന രണ്ടു വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളിലെ കോണുകളാണ്. അതിനാൽ അവ അനുപൂരകവുമാണ്.

ഇതുപോലെ, BD വരച്ചുനോക്കിയാൽ A യിലേയും C യിലേയും കോണുകൾ അനുപൂരകമാണെന്നും കിട്ടും.

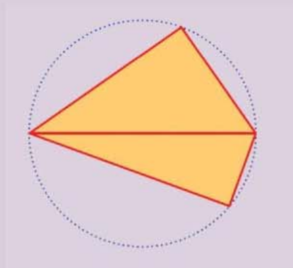
അപ്പോൾ പൊതുവെ എന്തു പറയാം?

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണ്.

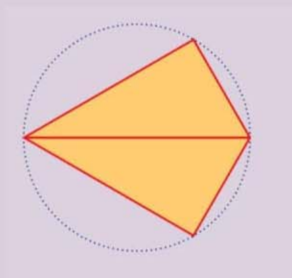
മറിച്ചു പറഞ്ഞാൽ ശരിയാകുമോ? അതായത്, ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ? ഇതിനു ഉത്തരം പറയാൻ, ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാലു മൂലകളും വൃത്തത്തിലാക്കാൻ പറ്റുമോ എന്നു പ്രായോഗികമായി കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

ചതുർഭുജനിർമാണം

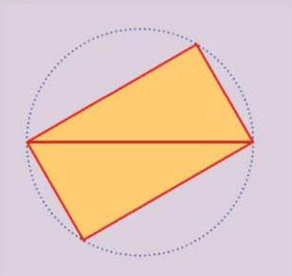
പരിവൃത്തമുള്ള ചിലതരം ചതുർഭുജങ്ങളുണ്ടാക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. ഒരേ കർണമുള്ള രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ ചേർത്തു വച്ചാൽ മതി.



ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണെങ്കിൽ കിട്ടുന്നത്, ഏതുതരം ചതുർഭുജമാണ്?

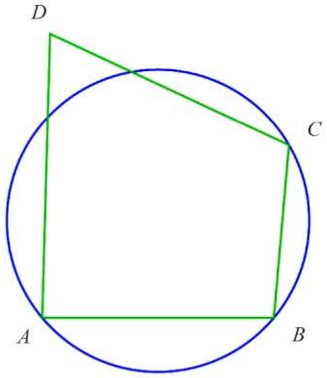


ഇതിൽ താഴത്തെ ത്രികോണം മറിച്ചു വച്ചാലോ?

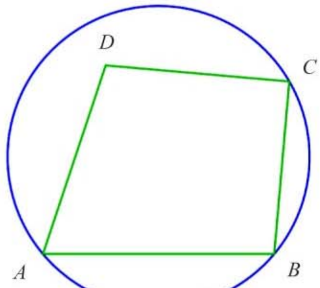


ഇനി മട്ടത്രികോണങ്ങൾക്കു പകരം മറ്റു ത്രികോണങ്ങളുപയോഗിച്ച്, പരിവൃത്തമുള്ള ചതുർഭുജങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ? മുകളിലും താഴേയും വയ്ക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്തായിരിക്കണം?

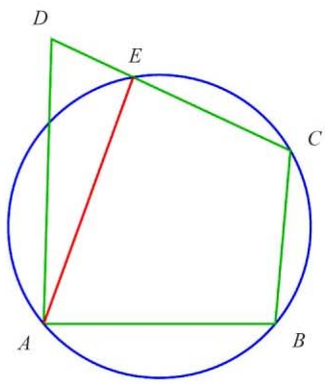
ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി ഏതായാലും വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ. (ഒരു വരയിലല്ലാത്ത ഏതു മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടിയും വൃത്തം വരയ്ക്കാമെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയില്ലേ?) ഇനി നാലാമത്തെ മൂല. അത് ഈ വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണെങ്കിൽ കാര്യം കഴിഞ്ഞു. പക്ഷേ ഈ മൂല ചിലപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്താകാം.



അല്ലെങ്കിൽ വൃത്തത്തിനകത്താകാം.



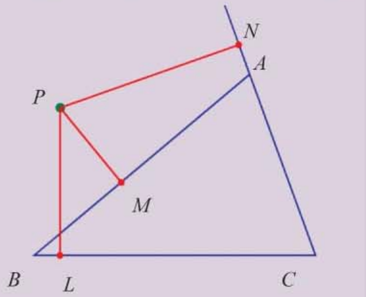
ആദ്യത്തെ ചിത്രം നോക്കാം. വൃത്തം CD യെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവും A യും യോജിപ്പിച്ചാൽ, വൃത്തത്തിനകത്ത് $ABCE$ എന്ന മറ്റൊരു ചതുർഭുജമായി.



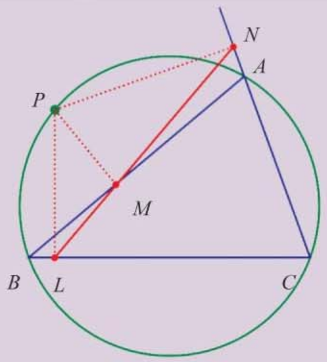
ഇപ്പോൾ A, B, C, E ഇവയെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായതിനാൽ,

വൃത്തവും വരയും

ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദു ഒരു നിശ്ചിത ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിലാണോ എന്നു കോണുകൾ അളന്നു പരിശോധിക്കാം. മറ്റൊരുമാർഗമുണ്ട്; ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളിലേക്കു ലംബം വരയ്ക്കുക:



ഈ ലംബങ്ങളുടെ ചുവടുകൾ ഒരേ വരയിലാണെങ്കിൽ, P പരിവൃത്തത്തിലാണ്; അല്ലെങ്കിൽ പരിവൃത്തത്തിലല്ല.



സിംസൺ സിദ്ധാന്തം (*Simpson's Theorem*) എന്ന പേരിലാണ് ഈ തത്വം അറിയപ്പെടുന്നത്.

(1) $$\angle B + \angle AEC = 180°$$

ഇനി **മട്ടവും വൃത്തവും** എന്ന ഭാഗത്തിൽ, വൃത്തത്തിനകത്തും പുറത്തുമുള്ള ബിന്ദുക്കളെക്കുറിച്ചുള്ള ചർച്ചയിലേതുപോലെ,

$$\angle AEC = \angle EAD + \angle D$$

എന്നും, അതിനാൽ

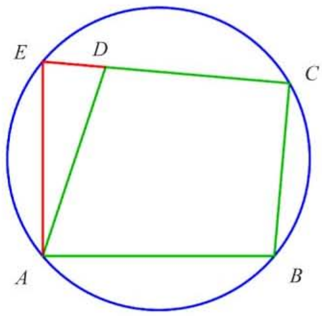
(2) $$\angle D < \angle AEC$$

എന്നും കാണാമല്ലോ. ഇവിടെ (1), (2) എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബീജഗണിതവാക്യങ്ങളുടെ അർത്ഥം ആലോചിച്ചാൽ,

$$\angle B + \angle D < 180°$$

എന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല.

ഇനി രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, CD നീട്ടി, അതു വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവും A യും യോജിപ്പിക്കാം.



ഇതിൽ

(3) $$\angle B + \angle E = 180°$$

എന്നു കാണാം.

കൂടാതെ ΔAED യിൽ നിന്ന്

$$\angle ADC = \angle E + \angle EAD$$

എന്നും അതിനാൽ

(4) $$\angle ADC > \angle E$$

എന്നും കാണാം.

(3), (4) എന്നി വാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\angle B + \angle ADC > 180°$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

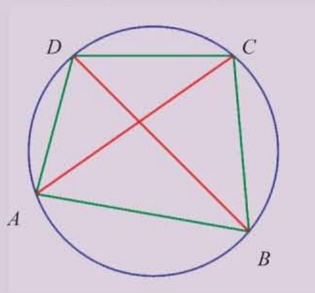
അപ്പോൾ എന്താണ് കണ്ടത്?

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിനു പുറത്താണ് നാലാമത്തെ മൂലയെങ്കിൽ, ആ മൂലയിലേയും, എതിർമൂലയിലേയും കോണുകളുടെ തുക 180° യേക്കാൾ കുറവാണ്; അകത്താണെങ്കിൽ, തുക 180° യേക്കാൾ കൂടുതലും.

മറ്റൊരു സിദ്ധാന്തം

സിംസൺ സിദ്ധാന്തം, പരിവൃത്തമുള്ള ചതുർഭുജങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു തത്വമായും കാണാം. ഇത്തരമൊരു ചതുർഭുജത്തെക്കുറിച്ചുള്ള മറ്റൊരു സിദ്ധാന്തം, അതിന്റെ എതിർവശ ജോടികളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ തുക, വികർണങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിനു തുല്യമാണ് എന്നതാണ്. അതായത് $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിന് പരിവൃത്തമുണ്ടെങ്കിൽ,

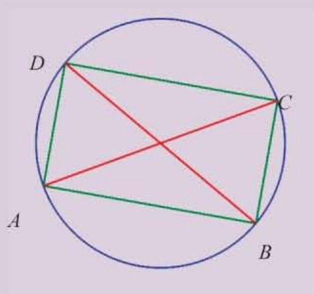
$$(AB \times CD) + (AD \times BC) = AC \times BD$$



മറിച്ച്, ഏതെങ്കിലും ചതുർഭുജത്തിൽ ഇതു ശരിയാണെങ്കിൽ, ആ ചതുർഭുജത്തിന് പരിവൃത്തമുണ്ടായിരിക്കുകയും ചെയ്യും. ടോളമി സിദ്ധാന്തം (*Ptolemy's Theorem*) എന്നാണ് ഇതറിയപ്പെടുന്നത്.

ചതുരം ചക്രീയമാണല്ലോ. ചതുരത്തിൽ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യവുമാണ്; വികർണങ്ങളും തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ $ABCD$ ചതുരമാണെങ്കിൽ, ഈ സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$



ഇത് പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തമല്ലേ?

(നാലാമത്തെ മൂല വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണെങ്കിൽ, ഈ തുക $180°$ തന്നെയായിരിക്കുമെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ.)

ഇനി ഒരു ചതുർഭുജം $ABCD$ യിൽ $\angle B + \angle D = 180°$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. A, B, C ഇവയിൽക്കൂടിയുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

D വൃത്തത്തിനു പുറത്താകുമോ? പുറത്താകണമെങ്കിൽ, $\angle B, \angle D$ ഇവയുടെ തുക $180°$ യേക്കാൾ കുറവാകണമല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്തല്ല.

D അകത്താണോ? അകത്താകണമെങ്കിൽ $\angle B, \angle D$ ഇവയുടെ തുക $180°$ യേക്കാൾ കൂടുതലാകണമല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു അകത്തുമല്ല.

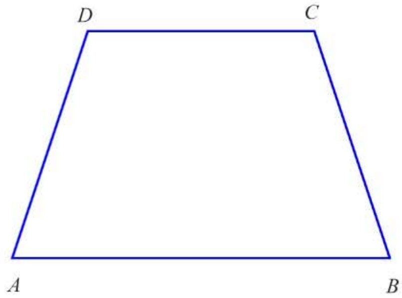
പുറത്തും അകത്തുമല്ലാത്തതുകൊണ്ട്, D വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണ്.

അതായത്,

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

നാലുമൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ചതുർഭുജം എന്നതിനെ ചുരുക്കി ചക്രീയചതുർഭുജം (cyclic quadrilateral) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമായ ചതുർഭുജങ്ങളാണ് ചക്രീയ ചതുർഭുജങ്ങൾ.

ചതുരങ്ങളെല്ലാം ചക്രീയ ചതുർഭുജങ്ങളാണല്ലോ. സമപാർശ്വലംബകങ്ങളും ചക്രീയചതുർഭുജങ്ങൾതന്നെ. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



$ABCD$ ഒരു സമപാർശ്വലംബകമാണ്. അപ്പോൾ

$$\angle A = \angle B$$

(ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **ചതുർഭുജങ്ങളുടെ നിർമിതി** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമപാർശ്വലംബകങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം ഓർക്കുക.) മാത്രമല്ല,

പരപ്പളവ്

ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ, ചക്രീയ ചതുർഭുജങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാനൊരു മാർഗം കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടുണ്ട്: ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം a, b, c, d എന്നും $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ എന്നും എടുത്താൽ, പരപ്പളവ്

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

ഇതുപോലൊരു വാചകം മുമ്പു കണ്ടിട്ടുണ്ടോ? ഇതിൽ $d = 0$ എന്നെടുത്താൽ

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)s}$$

എന്നാകുമല്ലോ. ഇതല്ലേ, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവു കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഹെറോണിന്റെ രീതി?

ചക്രീയമല്ലാത്ത ചതുർഭുജങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ്, വശങ്ങളുടെയും കോണുകളുടെയും അടിസ്ഥാനത്തിൽ കണക്കുകൂട്ടാനുള്ള മാർഗങ്ങൾ ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ പറയുന്നുണ്ട്. ഇതുപയോഗിച്ചാൽ മറ്റൊരു പ്രധാന വസ്തുത കിട്ടും:

വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളെല്ലാം ഒരേപോലെ വരുന്ന വ്യത്യസ്ത ചതുർഭുജങ്ങളിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവ് ചക്രീയ ചതുർഭുജങ്ങൾക്കാണ്.

AB യും CD യും സമാന്തരമായതിനാൽ

$$\angle A + \angle D = 180°$$

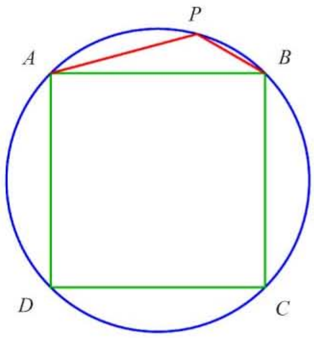
ഈ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\angle B + \angle D = 180°$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്, $ABCD$ ചക്രീയചതുർഭുജമാണ്.

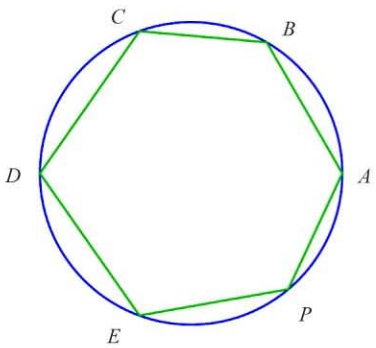
ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജത്തിലെ ഏതു മൂലയിലേയും ബാഹ്യ കോൺ, എതിർമൂലയിലെ ആന്തരകോണിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.
- ചതുരമല്ലാത്ത സാമാന്തരികങ്ങളൊന്നും ചക്രീയമല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.
- സമപാർശ്വമല്ലാത്ത ലംബകങ്ങളൊന്നും ചക്രീയമല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.
- ചിത്രത്തിൽ, $ABCD$ ഒരു സമചതുരമാണ്.



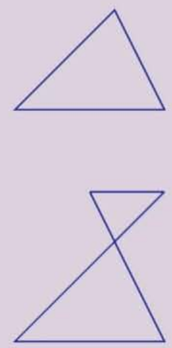
$\angle APB$ എത്രയാണ്?

- ചിത്രത്തിലെ $ABCDEF$ എന്ന ചക്രീയ ഷഡ്ഭുജത്തിൽ $\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

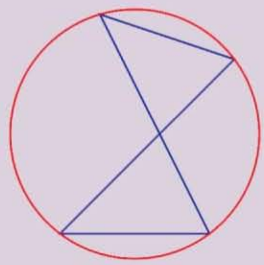


സദൃശത്രികോണങ്ങൾ

ഒരു ത്രികോണത്തിന് സദൃശമായ മറ്റൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ കുറേ മാർഗങ്ങൾ അറിയാമല്ലോ. ഇങ്ങനെയും ഒരു മാർഗം കണ്ടിട്ടുണ്ട്.



ചുവടെയുള്ള വശത്തിന് സമാന്തര വര വരയ്ക്കുന്നതിനുപകരം, അതിന്റെ അറ്റങ്ങളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരച്ചു നോക്കൂ:

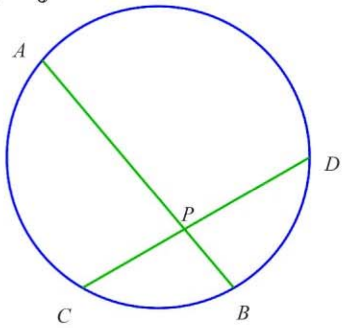


ഇപ്പോൾ മുകളിൽകിട്ടിയ ത്രികോണം, ആദ്യം ചുവട്ടിൽ വരച്ച ത്രികോണത്തിന് സദൃശമാണോ?

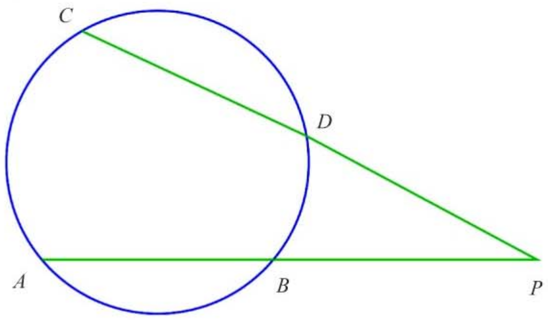
ചാപഖണ്ഡനം

ഒരു വൃത്തത്തിലെ സമാന്തരമല്ലാത്ത രണ്ടു ഞാണുകൾ എടുക്കുക. അവ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുമല്ലോ.

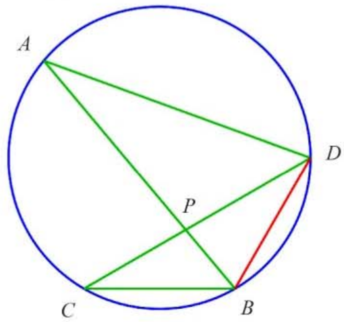
ഖണ്ഡിക്കുന്നത്, വൃത്തത്തിനകത്താകാം.

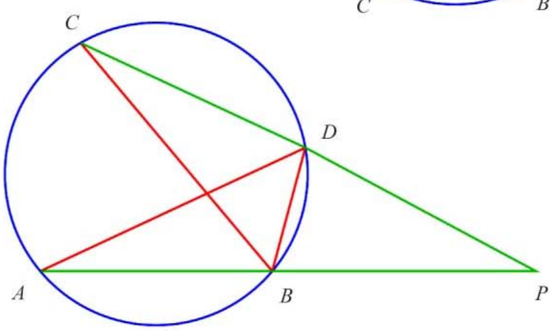


പുറത്തുമാകാം.



എങ്ങനെയായാലും AD, BC ഇവ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണെന്നു തെളിയിക്കാം.



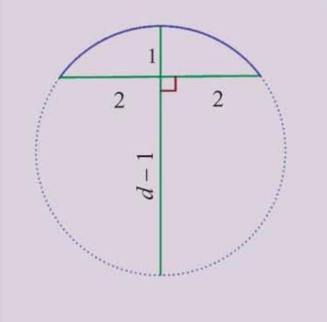


രണ്ടു ചിത്രങ്ങളിലും, ΔAPD, ΔBPC ഇവയിലെ A യിലേയും C യിലേയും, കോണുകൾ നോക്കൂ. ഇവ BD എന്ന ഞാൺ

പഴയ കണക്ക്, പുതിയ രീതി

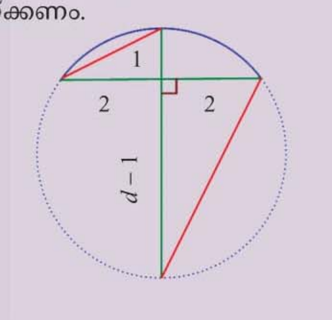
ഒരു വളക്കഷണത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 4 സെന്റിമീറ്ററും, ഏറ്റവും കൂടിയ ഉയരം 1 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്. വളയുടെ ആരം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ഈ പ്രശ്നം, ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ ചെയ്തതോർമയുണ്ടോ? ഇപ്പോൾ അത് കുറേക്കൂടി എളുപ്പം ചെയ്യാം. വള മുഴുവനാക്കിയത് സങ്കൽപിച്ചാൽ ഇങ്ങനെയൊരു ചിത്രം കിട്ടുമല്ലോ.



ഇതിൽ d എന്നത്, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണ്.

ചിത്രത്തിൽ, ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കണം.



ഇവ സദൃശമായതിനാൽ (കാരണം?)

$$\frac{d-1}{2}=\frac{2}{1}$$

അതായത്, $d-1=4$, അഥവാ $d=5$

വൃത്തത്തെ ഭാഗിക്കുന്ന രണ്ടു വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളിൽ വലുതിലെ കോണുകളാണ്; അതിനാൽ അവ തുല്യവുമാണ്.

ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ, P യിലെ കോണുകൾ $\angle APD$, $\angle BPC$ ഇവ AB, CD ഇവ ഖണ്ഡിച്ച് ഉണ്ടായ എതിർകോണുകളാണ്; അതിനാൽ തുല്യവും. രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, ഇവ ഒരേ കോണിന്റെ രണ്ടു പേരുകളാണ്.

അങ്ങനെ ഏതു ചിത്രമായാലും, ΔAPD, ΔBPC ഇവയിൽ, രണ്ടു ജോടി കോണുകൾ തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ മൂന്നാമത്തെ ജോടിയും തുല്യമാണ്. അതായത്, ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണ്.

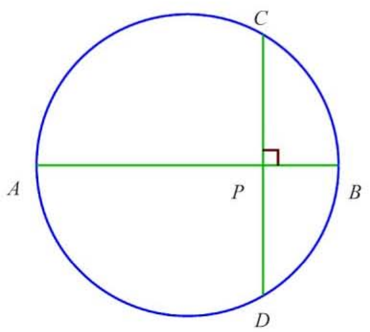
ഇനി സദൃശത്രികോണങ്ങളിൽ, തുല്യമായ കോൺജോടികൾക്ക് എതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലായതിനാൽ, ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$\frac{AP}{CP} = \frac{PD}{PB}$$

എന്നു കിട്ടും. രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും ഇതുതന്നെ കിട്ടുമല്ലോ (നോക്കിയോ?). ഈ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന്

$$AP \times PB = CP \times PD$$

ഇതിന്റെ തന്നെ ഒരു സവിശേഷ സന്ദർഭം നോക്കാം. AB വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു വ്യാസവും, CD അതിനു ലംബമായ ഒരു ഞാണും.



വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള ലംബം ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്നതിനാൽ, ഇവിടെ $CP = PD$ ആണ്. അപ്പോൾ നേരത്തെ കണ്ട ബന്ധം എങ്ങനെയാകും.

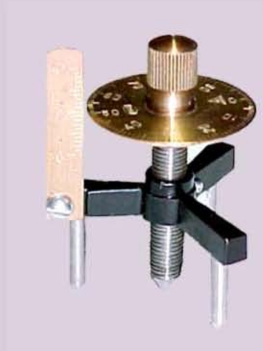
$$AP \times PB = CP^2$$

ഏതു പരപ്പളവിലും സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ ഇതുപയോഗിക്കാം. (ഇതിന് ഒരു മാർഗം, ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **അഭിന്നകസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ബീജഗണിതവും പൈഥഗോറസും** എന്ന ഭാഗത്തു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ)

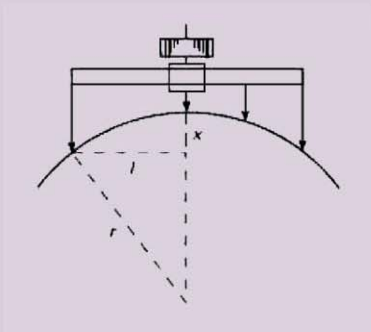
ഉദാഹരണമായി, 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ഒരു സമചതുരം നിർമിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം: നമുക്കു വേണ്ടത്, നീളത്തിന്റെ വർഗം 12 ആയ ഒരു വരയാണ്. മുകളിലത്തെ

ഉപകരണക്കണക്ക്

കാചങ്ങളും മറ്റും ഗോളങ്ങളിൽനിന്നു മുറിച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്നവയാണ്. ഒരു കാചം ഉണ്ടാക്കാനുപയോഗിച്ച ഗോളത്തിന്റെ ആരം കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട ആവശ്യം പലപ്പോഴുമുണ്ടാകും. ഇതിനു സഹായിക്കുന്ന ഒരു ഉപകരണമാണ് ഗോളമാപിനി (*spherometer*)

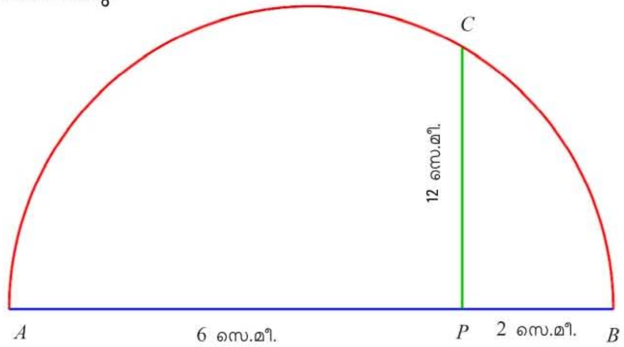


ഇതിന്റെ മൂന്നു കാലുകൾ ഗോളഭാഗത്തിനു മുകളിൽ നടുക്കായി വച്ച്, ഒരു ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം അളക്കാം. മുകളിലെ തിരിയാണി ഉപയോഗിച്ച്, പരമാവധി ഉയരവും കണ്ടുപിടിക്കാം.



ഇതിൽ നിന്ന് നമ്മുടെ വളക്കണക്കിലേതുപോലെ ഗോളത്തിന്റെ ആരം കണ്ടുപിടിക്കാം.

സമവാക്യത്തിൽ, ഒരു നീളത്തിന്റെ വർഗത്തിനെ മറ്റു രണ്ടു നീളങ്ങളുടെ ഗുണനമായിട്ടാണ് എഴുതിയിരിക്കുന്നത്. അപ്പോൾ നമുക്കു വേണ്ട വർഗമായ 12 നെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനമായി ആദ്യം എഴുതാം. $12 = 6 \times 2$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ, $AP = 6$, $PB = 2$ എന്നെടുത്താൽ, $CP^2 = 12$ എന്നു കിട്ടും. ആദ്യം 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ AB വരച്ച്, അതിൽ A യിൽ നിന്ന് 6 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ P അടയാളപ്പെടുത്താം. എന്നിട്ട് AB വ്യാസമായ ഒരു അർധവൃത്തം വരയ്ക്കണം. ഇനി P യിൽക്കൂടി AB യ്ക്കു ലംബം വരച്ച്, അർധവൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിച്ചാൽ കാര്യങ്ങൾ മിക്കവാറും കഴിഞ്ഞു.



ഇനി CP ഒരു വശമായി സമചതുരം വരച്ചാൽ മതിയല്ലോ. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **രേഖീയസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വർഗമൂലം** എന്ന ഭാഗം ഓർമയുണ്ടോ?)

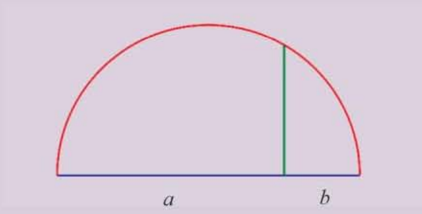
ഇതേ സമചതുരം തന്നെ മറ്റേതെല്ലാം രീതിയിൽ വരയ്ക്കാം?

ചുവടെയുള്ള കണക്കുകളും നിങ്ങൾക്ക്:

- വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററും, 5 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ചതുരം വരയ്ക്കുക. അതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.
- വശങ്ങളുടെ നീളം 4, 5, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. അതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.
- വശങ്ങളുടെ നീളം 2, 3, 4, 6 സെന്റിമീറ്ററും ഒരു വികർണം 5 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. അതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.
- ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ചിത്രം കിട്ടിയാൽ, നീളമൊന്നും അളക്കാതെ, അതേ പരപ്പളവുള്ള ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

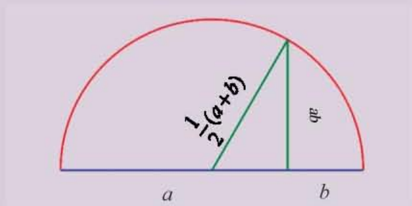
ജ്യാമിതി, ബീജഗണിതം, സംഖ്യകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ലംബത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്? അത് x എന്നെടുത്താൽ $ab = x^2$ എന്നും, അങ്ങനെ $x = \sqrt{ab}$ എന്നു കാണാം.

ഈ അർധവൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്? വ്യാസം $a + b$ ആയതിനാൽ, ആരം $\frac{1}{2}(a+b)$



ചിത്രത്തിൽ, ആരം ലംബത്തെക്കാൾ വലുതാണല്ലോ. ഇവ തുല്യമാകുന്ന സന്ദർഭമുണ്ടോ?

അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

വ്യത്യസ്തമായ ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകൾ a, b എടുത്താലും

$$\frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$$