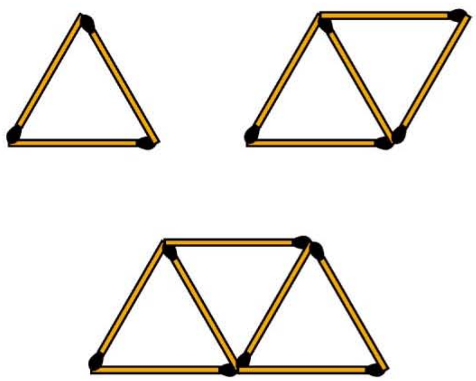
1 സമാന്തരശ്രേണികൾ

കോൽക്കണക്ക്

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:

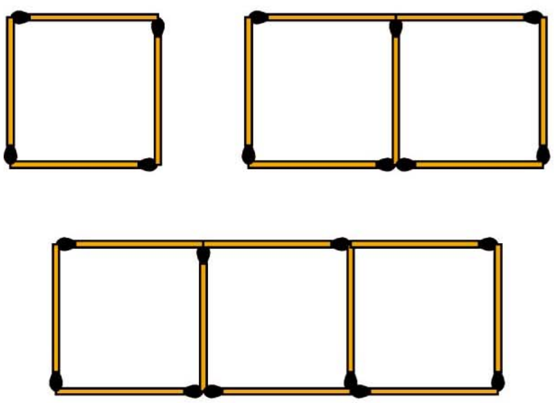


ഓരോന്നിലും എത്ര തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾ ഉപയോഗിച്ചു?

ഈ ക്രമത്തിൽ അടുത്തത് ഉണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോല് വേണം?

(ആറാംക്ലാസിലെ **അക്ഷരഗണിതം** എന്ന പാഠത്തിലെ **തീപ്പെട്ടിക്കണക്ക്** നോക്കുക.)

ഇനി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ :



ഇതിലെ ഓരോന്നിലും എത്ര തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾ ഉപയോഗിച്ചു?

ഒരു കളി

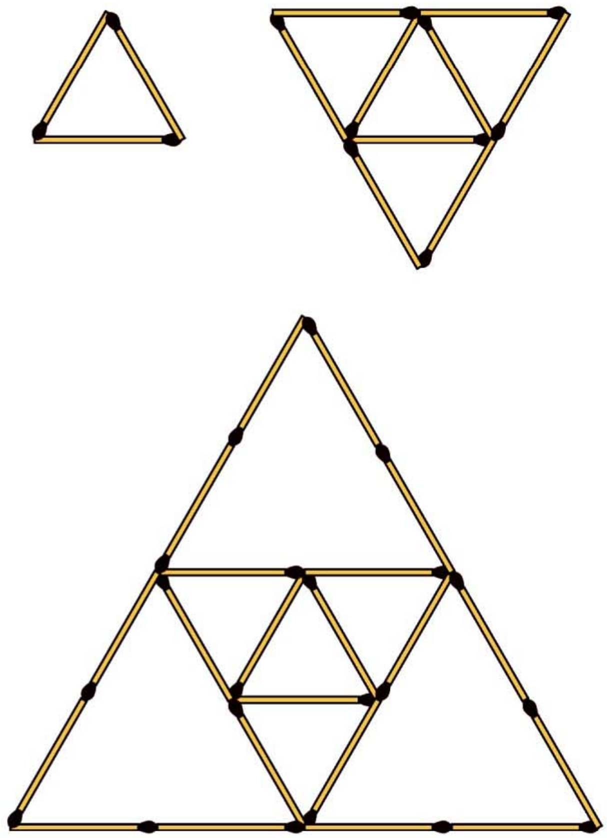
രണ്ടുപേർ തമ്മിലുള്ള ഒരു കളി. ആദ്യത്തെയാൾ പത്തോ പത്തിനേക്കാൾ കുറവോ ആയ ഒരു സംഖ്യ പറയുന്നു. രണ്ടാമൻ ഇതിനോട് പത്തോ അതിനേക്കാൾ കുറവോ ആയ ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടിപ്പറയുന്നു. ആദ്യത്തെയാൾ വീണ്ടും പത്തോ അതിനേക്കാൾ കുറവോ ആയ സംഖ്യ കൂട്ടി വലുതാക്കുന്നു. ആദ്യം നൂറിലെത്തുന്നയാളാണ് ജയിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി, ആദ്യത്തെയാൾ 6 ആണ് പറഞ്ഞതെങ്കിൽ, രണ്ടാമത്തെയാൾക്ക് അതിനെ 16 വരെയാക്കാം. അയാൾ പറഞ്ഞത് 16 തന്നെയാണെങ്കിൽ, ആദ്യത്തെയാൾക്ക് അതിനെ 26 വരെയാക്കാം.

ഈ കളിയിൽ ആദ്യം പറയുന്നയാൾക്ക് ജയിക്കാൻ ഒരു മാർഗമുണ്ട്. ഏതൊക്കെ സംഖ്യകൾ പറഞ്ഞാലാണ് വിജയം ഉറപ്പിക്കാൻ കഴിയുക? (100 ൽ നിന്ന് താഴോട്ട് ആലോചിച്ചു നോക്കൂ.)

അടുത്തത് ഉണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോലു വേണം?

ഇതുപോലെ ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങളിൽ ഓരോന്നിലും എത്ര തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ടെന്നും, ഈ ക്രമത്തിലെ അടുത്തതിന് എത്ര കോലുകൾ വേണമെന്നും കണ്ടുപിടിക്കാമോ?



സംഖ്യാക്രമങ്ങൾ

ഇപ്പോൾ ചെയ്ത കണക്കുകളിൽ, ഓരോ കൂട്ടം ചിത്രങ്ങളിലും ആവശ്യമായി വന്ന തീപ്പെട്ടിക്കോലുകളുടെ എണ്ണം ക്രമമായി എഴുതി നോക്കാം:

ആദ്യത്തെ ത്രികോണക്കണക്കിൽ,

3, 5, 7, 9, ...

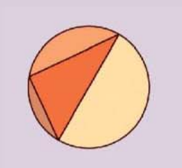
രണ്ടാമത്തെ ചതുരക്കണക്കിൽ,

4, 7, 10, 13, ...

വൃത്തവിഭജനം

ഒരു വൃത്തത്തിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് ഒരു വര കൊണ്ട് യോജിപ്പിച്ചാൽ, അത് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ:

വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളെടുത്തു യോജിപ്പിച്ചാൽ, നാലു ഭാഗങ്ങളാകും:



നാലു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് എല്ലാ ജോടികളേയും യോജിപ്പിച്ചാലോ?

ബിന്ദുക്കൾ അഞ്ചായാൽ?

ആറു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ എത്ര ഭാഗങ്ങളാകുമെന്നാണ് പ്രതീക്ഷിക്കുന്നത്? ഇതു ശരിയാണോ എന്നു വരച്ചു നോക്കൂ.

അവസാനത്തെ ത്രികോണക്കണക്കിലോ?

$$3, 9, 21, 45, \ldots$$

ഇതുപോലെ ഏതെങ്കിലും നിയമമനുസരിച്ച്, ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത്, മൂന്നാമത്തേത്, ... എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എഴുതുന്ന ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളെ, സംഖ്യാശ്രേണി (number sequence) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ശ്രേണികൾ പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്ന മറ്റു ചില സന്ദർഭങ്ങൾ നോക്കാം:

- 1000 രൂപ ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിച്ചു എന്നു കരുതുക. ഓരോ വർഷവും 6% നിരക്കിൽ സാധാരണ പലിശയാണു ലഭിക്കുന്നതെങ്കിൽ, ഓരോ വർഷാരംഭത്തിലും തുക എന്താകും?

  ഒന്നാം വർഷത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ 1000 രൂപ, രണ്ടാം വർഷത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ 1060 രൂപ, മൂന്നാം വർഷത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ 1120 രൂപ, എന്നിങ്ങനെയല്ലേ?

അതായത്,

$$1000, 1060, 1120, 1180, \ldots$$

എന്ന സംഖ്യാശ്രേണി.

കൂട്ടുപലിശയാണെങ്കിലോ?

$$1000, 1060, 1124, 1191, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണിയാണ് കിട്ടുന്നത്.

- മുകളിൽ നിന്ന് ഭൂമിയിലേയ്ക്കു വീഴുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ വേഗം, ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കൂടുമെന്ന് അറിയാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഉയരത്തിൽ നിന്ന് താഴേക്കിടുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ വേഗം, ഒരു സെക്കന്റു കഴിഞ്ഞാൽ 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്, രണ്ടു സെക്കന്റു കഴിഞ്ഞാൽ 19.6 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്, മൂന്നു സെക്കന്റു കഴിഞ്ഞാൽ 29.4 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്, എന്നിങ്ങനെയാണ്. അതായത് ഇവിടെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യാശ്രേണി

  $$9.8, 19.6, 29.4, \ldots$$

  ഇതേ വസ്തു തന്നെ ഓരോ സെക്കന്റു കഴിയുമ്പോഴും ആകെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരമോ?

  അത് $s = 4.9t^2$ എന്ന സമവാക്യമനുസരിച്ചാണല്ലോ മാറുന്നത്. അതായത്, ഒരു സെക്കന്റുകൊണ്ടും, രണ്ടു സെക്കന്റുകൊണ്ടും, മൂന്നു സെക്കന്റു കൊണ്ടുമെല്ലാം ഈ വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം മീറ്ററിലെഴുതിയാൽ കിട്ടുന്ന ശ്രേണി

  $$4.9, 19.6, 44.1, \ldots$$

പലതരം ശ്രേണികൾ

കൂട്ടം, നിര എന്നെല്ലാം അർത്ഥം വരുന്ന സംസ്കൃതപദമാണ് "ശ്രേണി". ഗണിതത്തിൽ ഈ വാക്കു പയോഗിക്കുന്നത്, ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത് എന്നിങ്ങനെ കൃത്യമായ സ്ഥാനങ്ങളിൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നവയെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ്. ഇങ്ങനെ ക്രമീകരിക്കുന്നത് സംഖ്യകൾ തന്നെ ആവണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ഒരു ശ്രേണിയാണ് ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:

ബഹുപദങ്ങളുടെ ഒരു ശ്രേണിയാകാം:

$$1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3, \ldots$$

ഒരു ഭാഷയിലെ പദങ്ങളെ അക്ഷരമാലാക്രമത്തിൽ അടുക്കുന്നതും ഒരു ശ്രേണിതന്നെ.

സംഖ്യാശ്രേണികൾ

സംഖ്യാശ്രേണികൾ പലതരത്തിൽ വരാം. ഉദാഹരണമായി, π യുടെ ദശാംശ രൂപത്തിലെ അക്കങ്ങൾ ക്രമമായി എടുത്താൽ,

$$3, 1, 4, 1, 5, 9, \dots$$

എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സംഖ്യാശ്രേണി കിട്ടും. ഇതിൽ ഒരു നിശ്ചിത സ്ഥാനത്തെ സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് എളുപ്പമാർഗങ്ങളൊന്നുമില്ല.

ഒരു ശ്രേണിയിൽ, സംഖ്യകൾ ആവർത്തിച്ചു വരാം. $\frac{10}{11}$ ന്റെ ദശാംശ രൂപത്തിലെ അക്കങ്ങൾ ക്രമമായി എഴുതിയാൽക്കിട്ടുന്നത്,

$$0, 9, 0, 9, \dots$$

എന്ന ശ്രേണിയാണ്. 2 ന്റെ കൃതികളായ $2, 2^2, 2^3, \dots$ എന്നിവയുടെ അവസാന അക്കം മാത്രം ക്രമമായി എടുത്താൽ കിട്ടുന്നത്,

$$2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \dots$$

എന്നിങ്ങനെ ആവർത്തിക്കുന്ന സംഖ്യാശ്രേണിയാണ്.

- 1000 ലിറ്റർ വെള്ളമുള്ള ഒരു സംഭരണിയിൽ നിന്ന്, മിനിറ്റിൽ 5 ലിറ്റർ എന്ന കണക്കിൽ വെള്ളം പുറത്തേക്കൊഴുകുകയാണ്. അപ്പോൾ ഒരു മിനിറ്റു കഴിഞ്ഞാൽ സംഭരണിയിലെ വെള്ളം 995 ലിറ്ററാകും; രണ്ടു മിനിട്ട് കഴിഞ്ഞാൽ 990 ലിറ്റർ, മൂന്നു മിനിട്ട് കഴിഞ്ഞാൽ 985 ലിറ്റർ... എന്നിങ്ങനെ തുടരും. ഇവിടെ കിട്ടുന്നത്,

$$1000, 995, 990, 985, \dots$$

എന്ന ശ്രേണിയാണ്.

ഇനി ചുവടെപ്പറയുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യാശ്രേണികൾ എഴുതി നോക്കൂ:

- വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 1 സെന്റിമീറ്റർ, 2 സെന്റിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ; ഇതേ ചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ.
- വശങ്ങളുടെ എണ്ണം 3, 4, 5 എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ആന്തരകോണുകളുടെ തുക; ഇവയുടെ ബാഹ്യകോണുകളുടെ തുക.
- 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ;

  3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന സംഖ്യകൾ;

  3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 2 ശിഷ്ടം വരുന്ന സംഖ്യകൾ.
- 1, 6 എന്നീ അക്കങ്ങളിൽ അവസാനിക്കുന്ന തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ.

  ഈ ശ്രേണിയെ മറ്റേതെങ്കിലും തരത്തിൽ വിവരിക്കാമോ?

കൂട്ടിക്കൂട്ടി മുന്നോട്ട്

പലതരം ശ്രേണികൾ കണ്ടല്ലോ. ഇവയെല്ലാമൊന്നു പരിശോധിക്കാം:

- 3, 5, 7, 9, ...
- 4, 7, 10, 13, ...
- 3, 9, 21, 45, ...
- 1000, 1060, 1120, 1180, ...
- 1000, 1060, 1124, 1191, ...
- 9.8, 19.6, 29.4, 39.2, ...
- 4.9, 19.6, 44.1, 78.4, ...
- 1000, 995, 990, 985, ...
- 4, 8, 12, 16, ...

- 1, 4, 9, 16, ...
- 180, 360, 540, 720, ...
- 360, 360, 360, 360, ...
- 3, 6, 9, 12, ...
- 1, 4, 7, 10, ...
- 2, 5, 8, 11, ...
- 1, 6, 11, 16, ...

ആദ്യത്തെ കോൽക്കണക്കിൽ നിന്നു കിട്ടിയതാണ് 3, 5, 7, 9, ... എന്ന ശ്രേണി. ഇതിൽ ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ മൂന്നു തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾ വേണം. തുടർന്ന്, ഓരോ പുതിയ ത്രികോണം കൂട്ടിച്ചേർക്കുമ്പോഴും, രണ്ടു കോലുകൾ കൂടി വേണ്ടിവരും. അങ്ങനെ മൂന്നിനോട് രണ്ടു കൂട്ടി, വീണ്ടും രണ്ടു കൂട്ടി, എന്നിങ്ങനെയാണ് 3, 5, 7, 9, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ കിട്ടുന്നത്.

രണ്ടാമത്തെ ശ്രേണിയിലോ? തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾകൊണ്ട് സമചതുരങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുമ്പോൾ, ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന് നാലു കോല് വേണം. തുടർന്ന് ഓരോ സമചതുരം ചേർക്കുന്നതിനും മൂന്നുകോല്. അങ്ങനെ നാലിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും മൂന്നു കൂട്ടിയാണ് 4, 7, 10, 13, ... എന്ന ശ്രേണി ഉണ്ടാകുന്നത്.

ഇനി അടുത്ത ശ്രേണി നോക്കൂ. ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന് മൂന്നു കോല്. ഇതിന്റെ ഓരോ വശത്തിലും ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ $3 \times 2 = 6$ കോലുകൂടി വേണം; ആകെ $3 + 6 = 9$ കോല്. ഇനി ഈ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തിലും ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ $3 \times 4 = 12$ കോലു കൂടി വേണം; ആകെ $9 + 12 = 21$. ഇങ്ങനെ, 3 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ആദ്യം 6 കൂട്ടി, പിന്നെ 12 കൂട്ടി ഇങ്ങനെയാണ് ഈ ശ്രേണി തുടരുന്നത്.

*ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ വീണ്ടും വീണ്ടും കൂട്ടി കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയുടെ പേര്, സമാന്തരശ്രേണി (**arithmetic sequence**) എന്നാണ്.*

അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയവയിൽ, ആദ്യത്തെ രണ്ടെണ്ണം സമാന്തരശ്രേണിയാണ്; മൂന്നാമത്തേത് സമാന്തരശ്രേണിയല്ല.

1000, 995, 990, ... എന്ന ശ്രേണി നോക്കുക. ഇതിൽ സംഖ്യകൾ 5 വീതം കുറയുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്.

5 കുറയ്ക്കുക എന്നതിനെ -5 കൂട്ടുക എന്നും പറയാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ 1000 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും -5 കൂട്ടിയാണ് കിട്ടുന്നതെന്നു പറയാം. അതായത്, ഇതും ഒരു സമാന്തരശ്രേണിതന്നെ.

ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ബാഹ്യകോണുകളുടെ തുകയിൽനിന്നു കിട്ടുന്ന 360, 360, 360, ... എന്ന ശ്രേണിയോ? ഇതിൽ ഓരോ സംഖ്യയും

എണ്ണൽസംഖ്യാശ്രേണികൾ

എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ പല പല ശ്രേണികൾ സംഭരിക്കാനുള്ള കുറെ ഗണിതശാസ്ത്രകാരന്മാരുടെ കൂട്ടായ ശ്രമഫലമാണ് The Online Encyclopedia of Integer Sequences (http://oeisf.org). ഏതാണ്ട് ഒന്നേമുക്കാൽ ലക്ഷം എണ്ണൽ സംഖ്യാശ്രേണികൾ ഇതിൽ ശേഖരിച്ചിട്ടുണ്ട്. www.research.att.com/njas/sequences/index.html എന്ന വെബ്പേജിൽപ്പോയി, അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന സ്ഥലത്ത് ചില എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ കൊടുത്താൽ, ഈ സംഖ്യകൾ അതേ ക്രമത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന കുറേയധികം ശ്രേണികളും, അവ ഉണ്ടാകുന്ന സന്ദർഭങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ചെറു വിവരണങ്ങളും കിട്ടും.

ഉദാഹരണമായി, 1, 2, 3, 4, 5, 7 എന്ന സംഖ്യകൾ കൊടുത്താൽ, ഈ സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന 455 ശ്രേണികൾ കിട്ടും. അവയിൽ ചിലത്;

- 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, ...

  അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികൾ, ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതിയത്.

- 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, ...

  6 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, 1 കുറച്ചാൽ അഭാജ്യസംഖ്യകളാകുന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ.

- 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, ...

  1 അല്ലാതെ, അടുത്തടുത്ത രണ്ട് എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ ഘടകങ്ങളായി ഇല്ലാത്ത സംഖ്യകൾ.

കിട്ടുന്നത് 360 നോട് വീണ്ടും വീണ്ടും 0 കൂട്ടിയിട്ടാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഇതുമൊരു സമാന്തരശ്രേണി തന്നെ.

ഇനി മുകളിലെഴുതിയവയിൽ മറ്റേതൊക്കെയാണ് സമാന്തരശ്രേണികൾ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക. അതുകഴിഞ്ഞാൽ, ചുവടെയുള്ള ഈ കണക്കുകൾ നോക്കുക:

- 2 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ, 2, 4, 6, 8, ... എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എഴുതിയാൽ, സമാന്തരശ്രേണിയാണോ? 2 ന്റെ കൃതികളായ 2, 4, 8, ... ആയാലോ?
- എണ്ണൽസംഖ്യകളെ ക്രമമായി 2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ എന്നീ സംഖ്യകളാണല്ലോ. ഇത് സമാന്തരശ്രേണിയാണോ?
- നാലിലൊന്നിനോട് നാലിലൊന്നുതന്നെ ആവർത്തിച്ചു കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ എവിടെയെങ്കിലും പത്ത് ഉണ്ടാകുമോ? പതിനൊന്നോ?
- എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എഴുതിയാൽ, അതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയാണോ?
- അടുത്തടുത്ത രണ്ട് പൂർണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ (വലുതിൽനിന്ന് ചെറുത് കുറച്ചതിന്റെ) ശ്രേണി എഴുതുക. ഇതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയാണോ?

കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും

പലിശക്കണക്കിൽനിന്നു കിട്ടിയ ശ്രേണികൾ നോക്കുക. രണ്ടു ശ്രേണിയിലും കൂടിക്കൂടി വരുന്നത് പലിശയാണല്ലോ. സാധാരണ പലിശയാണെങ്കിൽ, ഓരോ വർഷവും കൂടുന്നത്, 1000 രൂപയുടെ പലിശതന്നെയാണ്. (അതായത്, 60 രൂപ.) അപ്പോൾ, ഇതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയാണെന്ന് കണക്കു കൂട്ടാതെതന്നെ പറയാം.

കൂട്ടുപലിശയാണെങ്കിലോ? ഓരോ വർഷവും കിട്ടുന്ന പലിശ മാറും. അപ്പോൾ തുകകൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലല്ല.

വേഗത്തിന്റെ കണക്കിലോ? 9.8 നോട് ഏതു സംഖ്യകൂട്ടിയാലാണ് 19.6 ആക്കുക?

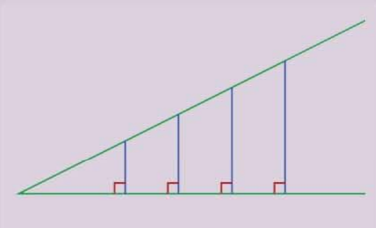
$$19.6 - 9.8 = 9.8$$

19.6 നോട് ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ് 29.4 ആകുന്നത്?

$$29.4 - 19.6 = 9.8$$

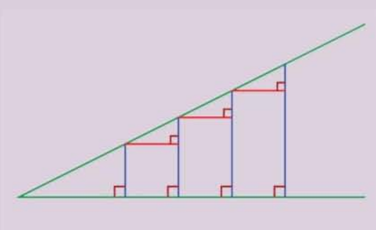
അതായത് 9.8 നോട് വീണ്ടും വീണ്ടും 9.8 കൂട്ടിയാണ് ശ്രേണി മുന്നേറുന്നത്. അപ്പോൾ വേഗങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിതന്നെ. ദൂരങ്ങളോ?

സമാന്തരം പലവിധം



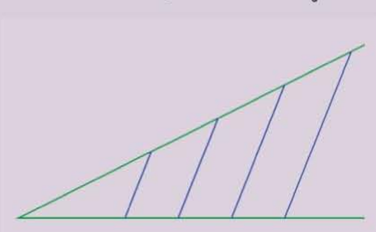
ചിത്രത്തിലെ അടുത്തടുത്ത ലംബങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം തുല്യമാണ്. അവയുടെ ഉയരം സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കാമോ?

ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.



ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ ചെറിയ മട്ടത്രികോണങ്ങളെല്ലാം സർവസമമാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?) അതിനാൽ, അവയുടെ കുത്തനെയുള്ള വശങ്ങൾ തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ, ആദ്യചിത്രത്തിൽ, അടുത്തടുത്തുള്ള ലംബങ്ങളുടെ ഉയരത്തിന്റെ വളർച്ച തുല്യമാണ്. അതായത്, ഈ ലംബങ്ങളുടെ ഉയരം സമാന്തര ശ്രേണിയിലാണ്.

ലംബങ്ങൾക്കു പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും കോണിൽ വരകൾ വരച്ചാലും നീളങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാകുമോ?



4.9 നോട്, ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ് 19.6 ആകുക?

$$19.6 - 4.9 = 14.7$$

ഇതുപോലെ, 19.6 നോട്, ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ് 44.1 ആകുക?

$$44.1 - 19.6 = 24.5$$

അതായത്, 4.9 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ആദ്യം 14.7 കൂട്ടി, പിന്നെ 24.5 കൂട്ടി,

അപ്പോൾ ഇത് സമാന്തരശ്രേണിയല്ല (എന്തുകൊണ്ട്?)

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ മറ്റൊരു കാര്യം ശ്രദ്ധിച്ചോ?

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഏതു സംഖ്യയിൽ നിന്നും തൊട്ടുപുറകിലുള്ള സംഖ്യ കുറച്ചാൽ, ഒരേ സംഖ്യ തന്നെയാണ് കിട്ടുന്നത്.

ഈ സംഖ്യയെ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം *(common difference)* എന്നാണ് പറയുന്നത്. അതായത്, സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ കിട്ടാൻ വീണ്ടും വീണ്ടും കൂട്ടുന്ന സംഖ്യ യാണ് പൊതുവ്യത്യാസം.

3 കൊണ്ടുള്ള ഹരണത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ,

3, 6, 9, 12, ...

1, 4, 7, 10, ...

2, 5, 8, 11, ...

എന്നീ മൂന്നു സമാന്തരശ്രേണികൾ കണ്ടല്ലോ. ഇവയോരോന്നി ന്റേയും പൊതുവ്യത്യാസം എന്താണ്?

ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 10 ഉം, മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ 24 ഉം ആണ്. ഇതിലെ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ എന്താണ്?

  തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളനുസരിച്ച്, 10 നോട് ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടി, വീണ്ടും അതേ സംഖ്യതന്നെ കൂട്ടിയപ്പോഴാണ് 24 കിട്ടുന്നത്. (കാരണം?)

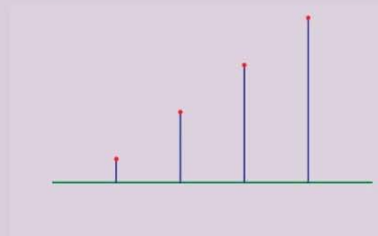
  അപ്പോൾ ഈ കൂട്ടിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് $24 - 10 = 14$ ആണ്. അതായത്, കൂട്ടിയ സംഖ്യ 7.

  അതിനാൽ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ $10 + 7 = 17$

  മറ്റൊരു രീതിയിലും ഇതു ചെയ്യാം. രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് ആദ്യസംഖ്യ കുറച്ചാലും, മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ കുറച്ചാലും ഒരേ സംഖ്യ കിട്ടണമല്ലോ. (പൊതുവ്യത്യാസം എന്നതിന്റെ അർത്ഥം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ)

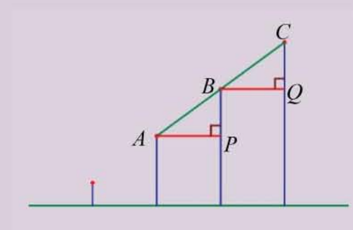
സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ജ്യാമിതി

പദങ്ങളെല്ലാം അധിസംഖ്യകളായ ഒരു സമാന്തരശ്രേണി എടുക്കുക. ഒരു വര വരച്ച്, അതിനു ലംബമായി, ഒരേ അകലം ഇടവിട്ട്, ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യ കൾ ഉയരമായ ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.



ഈ ലംബങ്ങളുടെ മുകളറ്റങ്ങൾ ചേർത്തു വരച്ചു നോക്കൂ; ഒരേ വരയിലല്ലേ? എന്തുകൊണ്ടാണിത്?

ചിത്രത്തിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള ഏതെങ്കിലും മൂന്നു വരകളെടുത്ത്, അവയുടെ മുകളറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുക; ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ലംബങ്ങളും വരയ്ക്കുക:



ABP, BCQ എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?) അതിനാൽ അവയുടെ കോണുകളും തുല്യമാണ്.

അപ്പോൾ $\angle ABP = x^\circ$ എന്നെടുത്താൽ

$$\angle ABC = x + 90 + (90 - x) = 180^\circ$$

എന്നും കിട്ടും. അതായത് A, B, C ഇവ ഒരേ നേർവരയിലാണ്.

അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ,

$$x - 10 = 24 - x$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$2x = 24 + 10 = 34$$

എന്നും, തുടർന്ന്

$$x = 17$$

എന്നും കാണാം.

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു സംഖ്യകളിൽ, ആദ്യത്തേതിന്റെയും അവസാനത്തേതിന്റേയും തുകയുടെ പകുതിയാണ് നടുവിലത്തേത് എന്നു തെളിയിക്കുക.

സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു സംഖ്യകളെ a, b, c എന്നെടുക്കാം.

അപ്പോൾ, മുകളിലത്തെ കണക്കു ചെയ്ത രണ്ടാമത്തെ മാർഗ ത്തിലേതുപോലെ

$$b - a = c - b$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$2b = a + c$$

എന്നും, തുടർന്ന്

$$b = \frac{1}{2}(a + c)$$

എന്നും കിട്ടും.

ഇനി ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ.

- ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയിലും ചില സംഖ്യകൾ എഴുതിയിട്ടില്ല. അവയുടെ സ്ഥാനം ◯ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

    - 24, 42, ◯, ◯, ...
    - ◯, 24, 42, ◯, ...
    - ◯, ◯, 24, 42, ...
    - 24, ◯, 42, ◯, ...
    - ◯, 24, ◯, 42, ...
    - 24, ◯, ◯, 42, ...

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ രണ്ടാമത്തെയും, നാലാമത്തെയും സംഖ്യകൾ 8, 2 ഇവയാണ്. ഇതിലെ ആദ്യത്തെയും, മൂന്നാമ ത്തെയും സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

മുന്നോട്ടും പിന്നോട്ടും

അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് എണ്ണൽ സംഖ്യ കളുടെ തുക നടുവിലത്തെ സംഖ്യ യുടെ മൂന്നു മടങ്ങാണെന്നു കണ്ടിട്ടു ണ്ടല്ലോ. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ബഹുപ ദങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വാചകത്തെ ളിമ** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക)

ഇതു മറ്റൊരു വിധത്തിലും കാണാം, നടുക്കുള്ള സംഖ്യയിൽ നിന്ന് ഒന്നു കുറവാണ് ഇടത്തെ സംഖ്യ; വലത്തെ സംഖ്യ ഒന്നു കൂടുതലും. അപ്പോൾ ഇവയെല്ലാം തമ്മിൽ കൂട്ടുമ്പോൾ, കുറച്ച ഒന്നും കൂട്ടിയ ഒന്നും പരസ്പരം ഇല്ലാതാകും; നടുവിലെ സംഖ്യ മാത്രം മൂന്നെണ്ണമുണ്ടാകും.

ബീജഗണിതഭാഷയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, നടുവിലെ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, ഇടത്തെ സംഖ്യ $x - 1$, വലത്തെ സംഖ്യ $x + 1$. ഇവ കൂട്ടുമ്പോൾ,

$$(x-1) + x + (x+1) = 3x$$

എണ്ണൽ സംഖ്യകൾക്കു പകരം, മറ്റേ തെങ്കിലും സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു സംഖ്യകളെടു ത്താലോ? കുറയുന്നതും കൂടുന്നതും, ഒന്നിനുപകരം പൊതുവ്യത്യാസമാ കും. ഫലം പഴയതു തന്നെ.

ഈ ചിന്ത ബീജഗണിതത്തിലാക്കി യാലോ? പൊതുവ്യത്യാസം d എന്നെ ടുക്കാം. നടുവിലെ സംഖ്യ x എന്നെടു ത്താൽ, സംഖ്യകൾ, $x - d, x, x + d$

$$\text{തുക} = (x-d) + x + (x+d) = 3x$$

ഇനി മൂന്നു സംഖ്യകൾക്കു പകരം, അഞ്ചു സംഖ്യകളായാലോ? ഏഴാ യാൽ?

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 5 ആണ്. ഇതിലെ ആദ്യത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും സംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ കണക്കാക്കാനുള്ള ബീജഗണിത വാചകം കണ്ടുപിടിക്കുക.

സ്ഥാനവും പദവും

ഏതു സംഖ്യാശ്രേണിയിലും, ഒന്നാമത്തെ സംഖ്യ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ, എന്നിങ്ങനെയൊരു ക്രമമുണ്ടല്ലോ. ഇവയെ പൊതുവെ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ (terms of sequence) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി, നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ത്രികോണക്കണക്കിൽ, ഒന്നാം പദം 3, രണ്ടാം പദം 5, മൂന്നാം പദം 7 എന്നിങ്ങനെയാണ്.

ഇതിലെ പത്താം പദം എത്രയാണ്?

അതായത്, ഈ കണക്കിൽ 10 ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ എത്ര തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾ വേണം? ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിനോട് 9 ത്രികോണങ്ങൾ കൂടി ചേർത്താൽ ആകെ 10 ആയി. ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന് 3 കോലും, തുടർന്നുള്ള ഓരോ ത്രികോണത്തിനും 2 കോലും എന്നാണല്ലോ കണക്ക്. അപ്പോൾ

10 ത്രികോണങ്ങൾക്കുവേണ്ട കോല് $= 3 + (9 \times 2) = 21$

അതായത് 3, 5, 7, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 10-ാം പദം 21

ഇതുപോലെ രണ്ടാമത്തെ ചതുരക്കണക്കിൽ കിട്ടിയ, 4, 7, 10, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ 15-ാം പദം എന്താണ്?

മറ്റു ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം.

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ പദം 2 ഉം പൊതുവ്യത്യാസം 5 ഉം ആണ്. ഇതിലെ 13-ാം പദം എത്രയാണ്?

  ശ്രേണിയിലെ ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്ന് അടുത്തതിലെത്താൻ കൂട്ടുന്ന സംഖ്യയാണല്ലോ, പൊതുവ്യത്യാസം. ഇവിടെ ഇത് 5 ആണ്. ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 2 ഉം. അതായത് 2, 7, 12, ... എന്നിങ്ങനെയാണ് പദങ്ങൾ മുന്നോട്ടുപോകുന്നത്.

  1-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് 13-ാം പദത്തിലെത്താൻ എത്ര ചുവടു വയ്ക്കണം?

  അതായത്, 2 നോട് എത്ര തവണ 5 കൂട്ടണം?

  അപ്പോൾ

  13-ാം പദം $= 2 + (12 \times 5) = 62$

തുകയും മാധ്യവും

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ തുക, മധ്യത്തിലുള്ള സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങാണെന്നും, അഞ്ചു സംഖ്യകളുടെ തുക അഞ്ചുമടങ്ങാണെന്നും മറ്റും കണ്ടു.

എടുക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം ഇരട്ടസംഖ്യ ആയാലോ? ഒരുതരത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, നടുവിലത്തേത് എന്നു പറയാൻ ഒരു സംഖ്യയില്ല; മറ്റൊരു തരത്തിൽ നോക്കിയാൽ, നടുവിൽ ഒരു ജോടി സംഖ്യകളുണ്ട്. (1, 2, 3, 4, 5, 6 ഇവയിൽ 3 ഉം 4 ഉം നടുക്കാണെന്നു പറയാമല്ലോ.)

അപ്പോൾ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പൊതുവ്യത്യാസം d എന്നും, അടുത്തടുത്ത നാലു സംഖ്യകളിൽ, നടുവിലെ ജോടി x, y എന്നുമെടുത്താൽ, സംഖ്യകൾ $x-d, x, y, y+d$ എന്നാകും; തുക $2(x+y)$ ഉം. ഇതിനെ $4 \times \frac{1}{2}(x+y)$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. നടുവിലെ ജോടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ നാലു മടങ്ങ്, എന്നു ഭാഷയിലുമാക്കാം. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്** ഓർമയുണ്ടല്ലോ?)

സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം ആറായാലും ഇതു ശരിയാകുമോ? എട്ടായാലോ?

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 12-ാം പദം 25 ആണ്; പൊതുവ്യത്യാസം 3 ഉം. ഈ ശ്രേണിയിലെ 17-ാം പദം എന്താണ്?

12-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് 17-ാം പദത്തിലെത്താൻ, പൊതുവ്യത്യാസം എത്ര തവണ കൂട്ടണം?

$$17\text{-ാം പദം} = 25 + (5 \times 3) = 40$$

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 5-ാം പദം 32 ഉം 11-ാം പദം 74 ഉം ആണ്. ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

5-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് 11-ാം പദത്തിലെത്താൻ, പൊതുവ്യത്യാസം 6 തവണ കൂട്ടണം.

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളനുസരിച്ച്, ഇങ്ങനെ കൂട്ടിയ സംഖ്യ, $74 - 32 = 42$

അപ്പോൾ പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ 6 മടങ്ങാണ് 42. അതിനാൽ പൊതുവ്യത്യാസം $42 \div 6 = 7$

ആദ്യത്തെ പദത്തോട് നാലുതവണ പൊതുവ്യത്യാസം കൂട്ടിയാണല്ലോ, അഞ്ചാം പദത്തിലെത്തുന്നത്. അതായത്, ഈ ശ്രേണിയിൽ ആദ്യത്തെ പദത്തോട് $4 \times 7 = 28$ കൂട്ടിയതാണ് അഞ്ചാംപദമായ 32. അപ്പോൾ

$$\text{ഒന്നാംപദം} = 32 - 28 = 4$$

ശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം 4 ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം 7 ഉം ആയതിനാൽ, ശ്രേണി

$$4, 11, 18, \ldots$$

ഇത് ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചും ചെയ്യാം. ആദ്യപദം x എന്നും, പൊതുവ്യത്യാസം y എന്നുമെടുത്താൽ, തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$x + 4y = 32$$

$$x + 10y = 74$$

എന്ന രണ്ടു സമവാക്യങ്ങൾ കിട്ടുമല്ലോ (എങ്ങനെ?) ഇവയിൽ നിന്ന് $x = 4$, $y = 7$ എന്നു കിട്ടും. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **സമവാക്യജോടികൾ** എന്ന പാഠം ഓർക്കുക).

- 3, 7, 11, ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ 101 ഒരു പദമാണോ? 103 ആണെങ്കിലോ?

3 ൽനിന്നു തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും 4 കൂട്ടിയതാണല്ലോ ഇതിലെ പദങ്ങൾ; അതായത്, 3 ൽനിന്ന് തുടങ്ങി 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ 4, 8, 12, ... ഇവ കൂട്ടി കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ.

സ്ഥാനവ്യത്യാസവും പദവ്യത്യാസവും

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത ഏതു രണ്ടു പദത്തിന്റേയും വ്യത്യാസം, പൊതുവ്യത്യാസം തന്നെയാണല്ലോ. ഒന്നിടവിട്ട ഏതു രണ്ടു പദങ്ങളുടേയും വ്യത്യാസമോ? പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ്, അല്ലേ? മൂന്നിടവിട്ട പദങ്ങളായാലോ?

അതായത്, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഏതു രണ്ടു പദങ്ങളുടേയും വ്യത്യാസം, അവയുടെ സ്ഥാനങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തെ പൊതുവ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടും.

ഇതു മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറയാം. ഏതു സമാന്തര ശ്രേണിയിലും, പദവ്യത്യാസം, സ്ഥാനവ്യത്യാസത്തിന് ആനുപാതികമാണ്; ആനുപാതിക സ്ഥിരം, പൊതുവ്യത്യാസവും.

മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഇതിലെ ഏതു പദത്തിൽനിന്നും 3 കുറച്ചാൽകിട്ടുന്നത് 4 ന്റെ ഗുണിതമാണ്. ഇത്തരം സംഖ്യക ളെല്ലാം ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളാണുതാനും. ഇനി 101 ഉം 103 ഉം നോക്കാം.

$$101 - 3 = 98$$

98 എന്ന സംഖ്യ 4 ന്റെ ഗുണിതമല്ലാത്തതിനാൽ, 101 ഈ ശ്രേണി യിലെ പദമല്ല.

$$103 - 3 = 100$$

100 എന്ന സംഖ്യ 4 ന്റെ ഗുണിതമായതിനാൽ, 103 ഈ ശ്രേണി യിലെ പദമാണ്.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ആദ്യപദം 7 ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം -2 ഉം ആയ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ 12-ാം പദം എന്താണ്?
- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 3-ാം പദം 10 ഉം 8-ാം പദം 25 ഉം ആണ്. ഇതിലെ 4-ാം പദം എന്താണ്? 13-ാം പദമോ?
- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 5-ാം പദം 11 ഉം 12-ാം പദം 32 ഉം ആണ്. ഇതിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ എന്താണ്?
- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 5-ാം പദം 9 ഉം, 9-ാം പദം 5 ഉം ആണ്. അതിന്റെ പൊതുവ്യത്യാസം എന്താണ്? 14 -ാം പദമോ?
- പൊതുവ്യത്യാസം -1 ആയ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 4-ാം പദം 7 ആണ്. അതിന്റെ 7-ാം പദം എന്താണ്? 11-ാം പദമോ?
- 4 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 3 ശിഷ്ടം വരുന്ന എത്ര മൂന്നക്ക സംഖ്യ കളുണ്ട്?
- 6 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 3 കിട്ടുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യ കളുടെ ശ്രേണി എഴുതുക. ഈ ശ്രേണിയുടെ 10-ാം പദം എന്താണ്? 100 നും 400 നും ഇടയിലുള്ള എത്ര സംഖ്യകൾ ഈ ശ്രേണിയിൽ ഉണ്ട്?

ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം

ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നത്, ഏതെങ്കിലും നിയമ മനുസരിച്ചാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ത്രികോ ണക്കണക്കിൽ, 3 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, 2 ആവർത്തിച്ചു കൂട്ടിയാണ്,

$$3, 5, 7, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടിയത്.

ശ്രേണിയും ശിഷ്ടവും

ഇരട്ടസംഖ്യകളായ 2, 4, 6, ... ഒരു സമാ ന്തരശ്രേണിയാണ്. ഒറ്റസംഖ്യകളായ 1, 3, 5, ... ഉം സമാന്തരശ്രേണിയാണ്. രണ്ട് ശ്രേണികളുടേയും പൊതുവ്യ ത്യാസം 2 തന്നെ.

2 കൊണ്ടു പൂർണമായി ഹരിക്കാൻ കഴിയുന്ന (അഥവാ, ശിഷ്ടം 0 ആയ) എണ്ണൽ സംഖ്യകളാണല്ലോ, ഇരട്ട സംഖ്യകൾ; ശിഷ്ടം 1 വരുന്നവ ഒറ്റ സംഖ്യകളും.

ഇതുപോലെ 3 കൊണ്ട് എണ്ണൽ സംഖ്യകളെ ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 0, 1, 2 വരുന്ന മൂന്നു സമാന്തര ശ്രേണി കൾ കണ്ടല്ലോ. ഇവയുടെയെല്ലാം പൊതുവ്യത്യാസം എന്താണ്?

ഹരിക്കുന്നത് 4 കൊണ്ടാണെങ്കിൽ, ശിഷ്ടങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ എത്ര സമാന്തരശ്രേണി കിട്ടും? ഏതൊക്കെ? അവയുടെയെല്ലാം പൊതുവ്യത്യാസമോ?

ഇനി മറിച്ചു ചിന്തിക്കാം. പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽ സംഖ്യകളായ ഒരു ശ്രേണി എടുത്താൽ, ഏതു രണ്ടു പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസവും പൊതു വ്യത്യാസത്തിന്റെ ഗുണിതമാണ്; അതി നാൽ, ഈ പദങ്ങളെ പൊതു വ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടങ്ങൾ തുല്യമാണ് (എന്തു കൊണ്ട്?)

അതായത്, പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽ സംഖ്യകളായ ഏതു സമാന്തരശ്രേണി യും, ആദ്യം കണ്ടതുപോലെ, എണ്ണൽ സംഖ്യകളെ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഒരേ ശിഷ്ടം കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളാണ്; ഹരിക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച സംഖ്യ തന്നെയാണ് പൊതുവ്യത്യാസം.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ ഏതു സ്ഥാനത്തെയും പദം കിട്ടാൻ, സ്ഥാനസംഖ്യയിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ച്, അതിനെ 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, 3 നോട് കൂട്ടണം. ഉദാഹരണമായി,

$$15\text{-ാം പദം} = \big((15-1)\times 2\big) + 3 = 31$$

ഈ പൊതുരീതി ബീജഗണിതത്തിലെഴുതിയാലോ?

n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും

$$n\text{-ാം പദം} = \big((n-1)\times 2\big) + 3 = 2n+1$$

അതായത്, $2n+1$ എന്ന ബീജഗണിതവാചകത്തിൽ, $n = 1, 2, 3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എടുത്താൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളായ 3, 5, 7, ... ഇവയെല്ലാം ക്രമമായി കിട്ടും. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ബീജഗണിതവാചകങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)

ശ്രേണികളെക്കുറിച്ചുള്ള ബീജഗണിത ചർച്ചകളിൽ, പദങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ എന്നും, $y_1, y_2, y_3, \ldots$ എന്നുമൊക്കെയാണ്. ഇതനുസരിച്ച്, ഇപ്പോഴത്തെ ഉദാഹരണത്തിലെ ശ്രേണിയെ

$$x_1 = 3,$$
$$x_2 = 5,$$
$$x_3 = 7,$$
$$\ldots\ldots,$$

എന്നെഴുതാം. കുറേക്കൂടി ചുരുക്കി,

$$x_n = 2n+1$$

എന്നും എഴുതാം. (ശ്രേണിയെക്കുറിച്ചുള്ള എല്ലാ വിവരങ്ങളും ഇതിലുണ്ടല്ലോ.)

ചതുരക്കണക്കിലെ ശ്രേണിയെ ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിനോക്കാം. ഇതിൽ ആദ്യസംഖ്യ 4 ഉം, ആവർത്തിച്ചു കൂട്ടുന്നത് 3 ഉം. അപ്പോൾ n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും

$$n\text{-ാം പദം} = \big((n-1)\times 3\big) + 4 = 3n+1$$

കുറേക്കൂടി ചുരുക്കി, ഈ ശ്രേണിയെ

$$x_n = 3n+1$$

എന്ന ബീജഗണിതവാക്യത്തിലൊതുക്കാം.

രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണക്കണക്കിലെ 3, 9, 21, 45, ... എന്ന ശ്രേണിയോ?

ഇതിലെ പദങ്ങൾ

$$x_1 = 3$$

ശ്രേണീ നിയമം

3, 5, 7, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ അടുത്ത പദം എന്താണ്?

ഇവിടെ സമാന്തരശ്രേണി എന്നു പറഞ്ഞിട്ടില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ അടുത്ത പദം 9 തന്നെ ആകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, ഉദ്ദേശിച്ചത് ഒറ്റസംഖ്യകളായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയാണെങ്കിൽ, അടുത്ത പദം 11 ആണ്.

എന്താണിതിന്റെ ഗുണപാഠം? കുറേ സംഖ്യകൾ ക്രമമായി എഴുതിയതിൽ നിന്ന്, ശ്രേണിയിലെ തുടർന്നുള്ള പദങ്ങൾ കൃത്യമായി പറയാൻ കഴിയില്ല. ശ്രേണി ഉണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച നിയമം, അല്ലെങ്കിൽ ശ്രേണി ഉണ്ടാകുന്ന സന്ദർഭം വ്യക്തമാക്കിയാലേ, തുടർന്നുള്ള പദങ്ങളെന്തെന്ന് പറയാൻ സാധിക്കൂ.

1, 2, 3, 4, 5, 7 എന്ന സംഖ്യകളിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, വ്യത്യസ്ത നിയമങ്ങളനുസരിച്ച് വ്യത്യസ്ത ശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കുന്നത്, **എണ്ണൽസംഖ്യാശ്രേണികൾ** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടല്ലോ.

$$x_2 = 9 = 3 \times (2^2 - 1)$$

$$x_3 = 21 = 3 \times (2^3 - 1)$$

$$x_4 = 45 = 3 \times (2^4 - 1)$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം. പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെ

$$x_n = 3(2^n - 1)$$

എന്ന രൂപത്തിലെഴുതാം. (**വളരുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)

പലിശക്കണക്കിൽ, സാധാരണ പലിശ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന 1000, 1060, 1120, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ n-ാം പദം

$$1000 + 60\,(n - 1) = 60n + 940$$

അതായത്, ഈ ശ്രേണിയെ

$$x_n = 60n + 940$$

എന്നെടുക്കാം.

കൂട്ടുപലിശയനുസരിച്ചു കിട്ടുന്ന 1000, 1060, 1124, 1191, ... എന്ന ശ്രേണി കിട്ടാൻ,

$$x_n = 1000\,(1.06)^{n-1}$$

എന്ന ശ്രേണിയിലെ ഓരോ പദത്തിനേയും ഏറ്റവുമടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യയാക്കി മാറ്റണം. (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **പണവിനിമയം** എന്ന പാഠത്തിലെ **കണക്കുകൂട്ടാനൊരു സൂത്രം** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)

ഇനി **കൂട്ടിക്കൂട്ടി മുന്നോട്ട്** എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ശ്രേണികളുടെയെല്ലാം ബീജഗണിതരൂപം എഴുതി നോക്കൂ.

സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം

നാം കണ്ട ചില സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപം നോക്കൂ:

3, 5, 7, 9, ...	$x_n = 2n + 1$
9.8, 19.6, 29.4, 39.2, ...	$x_n = 9.8n$
1000, 995, 990, 985, ...	$x_n = -5n + 1005$
4, 8, 12, 16, ...	$x_n = 4n$
360, 360, 360, 360, ...	$x_n = 360$
1, 4, 7, 10, ...	$x_n = 3n - 2$

വളരുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ

തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾകൊണ്ട് വലിയ വലിയ ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കുന്ന കണക്കിലെ 3, 9, 21, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ഇതിൽ ആദ്യം വശങ്ങളിലെല്ലാം ഓരോ കോല് മാത്രമുള്ള ത്രികോണം, ഇതിനു പുറത്ത്, ഓരോ വശത്തിലും ഈരണ്ട് കോലുള്ള വലിയ ത്രികോണം, അതിനും പുറത്ത്, ഓരോ വശത്തിലും നന്നാലു കോലുള്ള കുറേക്കൂടി വലിയ ത്രികോണം എന്നിങ്ങനെയാണല്ലോ നിർമാണം പുരോഗമിക്കുന്നത്.

അതായത്, ആകെ കോലുകളുടെ എണ്ണം.

$$3,\ 3 + (3 \times 2),\ 3 + (3 \times 2) + (3 \times 2^2), \dots$$

എന്നിങ്ങനെയാണ്. അതായത്

$$3,\ 3(1+2),\ 3(1+2+2^2), \dots.$$

ഇതിൽ

$$\begin{aligned} 1+2 &= 3 \\ &= 2^2 - 1 \\ 1+2+2^2 &= (2^2-1)+2^2 \\ &= (2 \times 2^2) - 1 \\ &= 2^3 - 1 \\ 1+2+2^2+2^3 &= (2^3-1)+2^3 \\ &= (2 \times 2^3) - 1 \\ &= 2^4 - 1 \end{aligned}$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാമല്ലോ. ഇതിൽ നിന്ന്, ഈ ശ്രേണിയിലെ n-ാം പദം

$$3(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) = 3(2^n - 1)$$

എന്നു കാണാം.

അപ്പോൾ ഈ രീതിയിൽ 25 ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ $3(2^{25} - 1) = 100663293$ തീപ്പെട്ടിക്കോലു വേണം. അതായത്, പത്തുകോടിയിലധികം!

ഇവയിലെല്ലാം n-ാം പദമായ x_n കിട്ടുന്നത്, n നെ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടിയാണ്.

മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഇവയുടെയെല്ലാം പൊതുരൂപം

$$x_n = an + b$$

എന്നാണ്, ഇതിൽ a, b ഇവ ഏതു രണ്ടു നിശ്ചിതസംഖ്യകളും ആവാം.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയും ഈ രൂപത്തിലാണോ? ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം f എന്നും, പൊതുവ്യത്യാസം d എന്നും എടുത്താൽ, അതിലെ പദങ്ങൾ,

$$f,\ f + d,\ f + 2d,\ \ldots$$

എന്നിങ്ങനെ ആയിരിക്കുമല്ലോ. അപ്പോൾ, അതിന്റെ n-ാം പദം

$$f + (n-1)\,d = dn + (f - d)$$

അതായത്, ഓരോ n നേയും d എന്ന സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, $f - d$ എന്ന സംഖ്യ കൂട്ടുക.

ഉദാഹരണമായി, ആദ്യപദം 2 ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം 7 ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ n-ാം പദം

$$2 + 7(n-1) = 7n - 5$$

അതായത്, ഈ ശ്രേണിയെ

$$x_n = 7n - 5$$

എന്നെഴുതാം

മറിച്ച്, $x_n = an + b$ എന്ന ഏതു ശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണിയാണെന്നും കാണാൻ വിഷമമില്ല. $n = 1, 2, 3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എടുത്താൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ

$$a + b,\ 2a + b,\ 3a + b,\ \ldots$$

എന്നു കിട്ടും, ഇത് $a + b$ ആദ്യപദവും, a പൊതുവ്യത്യാസവുമായ സമാന്തരശ്രേണിയാണെന്ന് കാണാമല്ലോ.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയേയും $x_n = an + b$ എന്ന രൂപത്തിലെഴുതാം; മറിച്ച്, ഈ രൂപത്തിലുള്ള ഏതു ശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണിയാണ്.

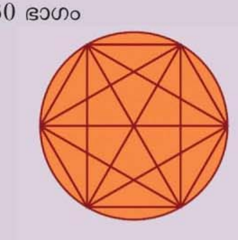
ഇതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ചില കണക്കുകളിതാ:

- ചുവടെ ചില സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ആദ്യപദവും, പൊതുവ്യത്യാസവും നൽകിയിട്ടുണ്ട്. ഓരോന്നിനേയും $x_n = an + b$ എന്ന രൂപത്തിലെഴുതുക. ഓരോന്നിലും ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളും എഴുതുക.
    - ആദ്യപദം -2, പൊതുവ്യത്യാസം 5

നിഗമനങ്ങളിലെ അപകടം

വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന ഭാഗങ്ങളെക്കുറിച്ച്, **വൃത്തവിഭജനം** എന്ന ഭാഗത്തു കണ്ടല്ലോ. ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം 2, 3, 4, 5 എന്നിങ്ങനെയാകുമ്പോൾ, ഭാഗങ്ങളുടെ എണ്ണം 2, 4, 8, 16 എന്നു കിട്ടും. ബിന്ദുക്കൾ 6 എണ്ണമാകുമ്പോഴോ? 32 എന്നാകും ഊഹം. വരച്ചുനോക്കിയാലോ?

ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ അകലത്തിലാണെങ്കിൽ 30 ഭാഗം



അല്ലെങ്കിൽ 31 ഭാഗം

ഏതായാലും, പരമാവധി 31 ഭാഗം

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, വൃത്തത്തിലെ n ബിന്ദുക്കൾ പരസ്പരം യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പരമാവധി ഭാഗങ്ങളുടെ എണ്ണം

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{2}n(n-1)+1$$

ആണെന്നു തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഈ ബീജഗണിതവാചകത്തിലും 2^{n-1} എന്ന വാചകത്തിലും $n = 1, 2, 3, 4, 5$ എന്നി സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നത്, 1, 2, 4, 8, 16 എന്നീ സംഖ്യകൾ തന്നെയാണെന്നതാണ് രസകരം. $n = 6$ മുതൽ, രണ്ടു വാചകത്തിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ വ്യത്യസ്തമാകും.

- ആദ്യപദം 2, പൊതുവ്യത്യാസം -5
- ആദ്യപദം 1, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{2}$

- ചില ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപം ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു. ഓരോന്നും സമാന്തരശ്രേണിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക; സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ആദ്യപദവും പൊതുവ്യത്യാസവും കണ്ടുപിടിക്കുക:
  - $x_n = 4 - 3n$
  - $x_n = n^2 + 2$
  - $x_n = \frac{n+1}{2}$
  - $x_n = \frac{n+2}{n}$
  - $x_n = (n+1)^2 - (n-1)^2$
- തുടർച്ചയായ ഒറ്റസംഖ്യകളെ 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 1 കൂട്ടി കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക. ഇത് സമാന്തരശ്രേണിയാണോ? ഈ ശ്രേണിയിൽ വരാത്ത ഒറ്റസംഖ്യകൾ ക്രമമായി എഴുതിയ ശ്രേണിയുടെ ബിജഗണിതരൂപം എന്താണ്? ഇതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയാണോ?
- ആദ്യപദം $\frac{1}{2}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{4}$ ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ 1 ഒരു പദമാണോ? 2 ആയാലോ?
  ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക. എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഇതിലെ പദങ്ങളായി വരും എന്നു തെളിയിക്കുക.
- ആദ്യപദം $\frac{1}{2}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{3}$ ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ 1 ഒരു പദമാണോ? 2 ആയാലോ?
  ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക. ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയും ഇതിലെ പദമായി വരില്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.
- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ പദവും രണ്ടാമത്തെ പദവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 ആണ്. മൂന്നാമത്തെ പദവും, അഞ്ചാമത്തെ പദവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എത്രയാണ്?

തുകകൾ

തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു സൂത്രം ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ, **ത്രികോണസംഖ്യകൾ** എന്ന ഭാഗത്തിലുണ്ട്. അത് ഒന്നുകൂടി നോക്കാം.

നിയമത്തിന്റെ ഭാഷ

ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിൽ, ശ്രേണിയുടെ നിയമം വ്യക്തമാക്കണമെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഈ നിയമം ബീജഗണിതത്തിൽപ്പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളും കണ്ടു.

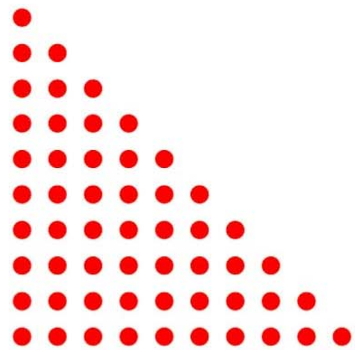
എന്നാൽ, ചില ശ്രേണികളുടെ നിയമം ബീജഗണിതരൂപത്തിലെഴുതാൻ കഴിയില്ല. ഉദാഹരണമായി, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... എന്നു തുടരുന്ന അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയിലെ ഒരു നിശ്ചിത സ്ഥാനത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു ബീജഗണിതവാചകം ഇതുവരെ കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടില്ല.

അതുപോലെ, π യുടെ ദശാംശരൂപത്തിൽ വരുന്ന 3, 1, 4, 1, 5, 9, ... എന്ന ശ്രേണിയിലേയും ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ബീജഗണിതവാചകമൊന്നുമില്ല.

ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ, ശ്രേണിയുടെ നിയമം, സാധാരണ ഭാഷയിൽ പറയാനേ നിവൃത്തിയുള്ളു.

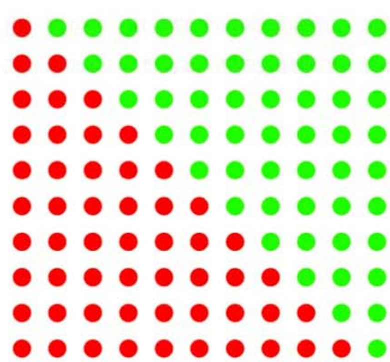
ഉദാഹരണമായി, 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കണമെന്നിരിക്കട്ടെ. (10 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ നേരിട്ടുതന്നെ കൂട്ടാം. 100 വരെയാണെങ്കിലോ? ഇനിപ്പറയുന്ന മാർഗം അതിനും ഉപയോഗിക്കാം)

ഈ തുക, ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിലെ പുള്ളികളുടെ എണ്ണമാണല്ലോ:



ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കുക.

ഇത് കീഴ്മേൽ തിരിച്ച് ആദ്യത്തെ ത്രികോണവുമായി ചേർത്തുവച്ചാലോ?



അപ്പോൾ ഒരു ചതുരമായി, ഇതിൽ ചുവപ്പും പച്ചയുമായി ആകെ എത്ര പുള്ളികളുണ്ട്?

രൂപാന്തരം

സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപം $x_n = an + b$ ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ. എന്താണിതിന്റെ അർത്ഥം?

എണ്ണൽ സംഖ്യകളെയെല്ലാം ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ, ഒരു സമാന്തരശ്രേണി കിട്ടും. ഉദാഹരണമായി, $\frac{1}{2}$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, -1 കൂട്ടിയാൽ, $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ എന്നു തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണി കിട്ടും. (ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം $x_n = \frac{1}{2}n - 1$)

മറിച്ച്, ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയും ഇത്തരത്തിലാണ് ഉണ്ടാകുന്നത്. ഉദാഹരണമായി, 7, 16, 25, ... എന്നു തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം $x_n = 9n - 2$ എന്നാണ്; അതായത്, എണ്ണൽസംഖ്യകളെയെല്ലാം 9 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, -2 കൂട്ടിയാൽ, ഈ ശ്രേണി കിട്ടും.

10 വരികൾ; ഓരോന്നിലും 11 പുള്ളികൾ, ആകെ $10 \times 11 = 110$

ഇത് നമുക്കാവശ്യമായ തുകയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. അപ്പോൾ

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{1}{2} \times 10 \times 11 = 55$$

ഈ ചെയ്തത് സംഖ്യകൾ മാത്രമുപയോഗിച്ചും എഴുതാം:

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

എന്നെടുത്താൽ

$$\begin{aligned} 2s &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + \\ &\quad (10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) \\ &= 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 \\ &= 10 \times 11 \\ &= 110 \end{aligned}$$

അപ്പോൾ

$$s = \frac{1}{2} \times 110 = 55$$

10 നുപകരം ഏതു സംഖ്യ ആയാലും, ഇതേ യുക്തി ഉപയോഗിക്കാമല്ലോ. അതായത്.

ഒന്നിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ഒരു നിശ്ചിത എണ്ണൽസംഖ്യ വരെ കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നത്, ആ സംഖ്യയുടേയും അതിനോട് ഒന്ന് കൂട്ടിയതിന്റേയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

ബീജഗണിതഭാഷയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, മറ്റു സമാന്തര ശ്രേണികളിലെ പദങ്ങളുടെ തുകയും കാണാം. ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കൂ:

- 2, 4, 6, ..., 100 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

  എണ്ണൽസംഖ്യകളെ 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്നവയാണല്ലോ ഇരട്ടസംഖ്യകൾ, അപ്പോൾ

  $$2 + 4 + 6 + \ldots + 100 = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 50)$$

  എന്നെഴുതാം. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്,

  $$1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = \frac{1}{2} \times 50 \times 51$$

  അപ്പോൾ

ഒരു ഗണിതകഥ

ഗൗസ് എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനെക്കുറിച്ച് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കേട്ടല്ലോ. നന്നേ ചെറുപ്പത്തിൽത്തന്നെ ഗണിതത്തിൽ ഇദ്ദേഹം അസാധാരണമായ കഴിവു പ്രകടിപ്പിച്ചിരുന്നുവത്രേ. അതിനെക്കുറിച്ചൊരു കഥയുണ്ട്.

ഗൗസിനു പത്തു വയസ്. ക്ലാസിലെ അധ്യാപകൻ, കുട്ടികളെ അടക്കിയിരുത്താനായി, ഒന്നു മുതൽ നൂറു വരെയുള്ള സംഖ്യകളെല്ലാം കൂട്ടി തുക കാണാൻ പറഞ്ഞു. വളരെപ്പെട്ടെന്നു തന്നെ കൊച്ചു ഗൗസ് ഉത്തരം പറഞ്ഞു: 5050. ഇങ്ങനെ വിശദീകരിക്കുകയും ചെയ്തു: 1 ഉം 100 ഉം 101; അതുപോലെ 2 ഉം 99 ഉം 101; ഇങ്ങനെ 50 ജോടികൾ. ആകെ തുക $50 \times 101 = 5050$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 100 = 2 \times \frac{1}{2} \times 50 \times 51 = 2550$$

- 1, 3, 5, ... എന്നിങ്ങനെ തുടങ്ങി, ഒരു നിശ്ചിത എണ്ണം ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം കണ്ടുപിടിക്കണം.

ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയെ ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതെങ്ങനെ? ഈ ശ്രേണിയിലെ n-ാം പദം

$$1 + (n - 1) \times 2 = 2n - 1$$

ആണല്ലോ. അതിനാൽ ഈ ശ്രേണിയെ

$$x_n = 2n - 1$$

എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ

ആദ്യത്തെ n ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക

$$= x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

$$= (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 3 - 1) \ldots + (2n - 1)$$

$$= 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - \overbrace{(1+1+1+\ldots+1)}^{n \text{ എണ്ണം}}$$

$$= \left(2 \times \frac{1}{2} n(n + 1)\right) - n$$

$$= n(n + 1) - n$$

$$= n^2$$

അതായത്, ആദ്യത്തെ കുറെ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക, കൂട്ടിയ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ വർഗമാണ്. (ഇതേകാര്യം, ഏഴാം ക്ലാസിലെ, **സമചതുരസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലും പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്.)

ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ കാര്യത്തിലെന്നപോലെ, ഏതു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെയും നിശ്ചിത എണ്ണം പദങ്ങളുടെ തുകയുടെ ബീജ ഗണിതരൂപം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയേയും

$$x_n = an + b$$

എന്ന ബീജഗണിതവാക്യം കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

$$= (a \times 1 + b) + (a \times 2 + b) + (a \times 3 + b) + \ldots + (an + b)$$

$$= a(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + \overbrace{(b + b + b + \ldots + b)}^{n \text{ എണ്ണം}}$$

പഴയൊരു ശ്രേണി

പ്രാചീന ഈജിപ്റ്റിലെ ഗണിതരചനയായ ആഹ്മോസ് പപ്പൈറസിനെക്കുറിച്ചു കേട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **സമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **പ്രാചീനഗണിതം** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.) ഇതിലെ 64-ാം പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാണ്.

10 ഹെക്കറ്റ് ബാർളി 10 പേർക്ക് ക്രമമായി വീതിക്കണം. അടുത്തടുത്തു വരുന്നവർക്കു കിട്ടുന്നത് $\frac{1}{8}$ ഹെക്കറ്റ് വ്യത്യാസത്തിലായിരിക്കണം. ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര വീതമാണ് കൊടുക്കേണ്ടത്?

ഇവിടെ ഹെക്കറ്റ് എന്നത് അന്നത്തെ ഒരു അളവാണ്. ഇതിന്റെ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിച്ചിരിക്കുന്ന രീതി ഇങ്ങനെയാണ്.

1. 10 നെ 10 കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. 1 കിട്ടും.
2. 10 ൽ നിന്ന് 1 കുറച്ച്, $\frac{1}{8}$ ന്റെ പകുതി കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക : $\frac{9}{16}$ കിട്ടും.
3. ഇത് ആദ്യം കിട്ടിയ 1 നോടു കൂട്ടുക. ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ $1\frac{9}{16}$ ആണ് ഏറ്റവും വലിയ വിഹിതം.
4. ഇതിൽ നിന്ന് $\frac{1}{8}$ തുടരെ കുറച്ച്, മറ്റു വിഹിതങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഈ കണക്കു കൂട്ടലിന്റെ യുക്തി എന്താണ്?

ഇന്നത്തെ രീതിയിൽ ഈ കണക്ക് എങ്ങനെയാണ് ചെയ്യുക?

$$= \left(a \times \frac{1}{2}n(n+1)\right) + n \times b$$

$$= \frac{1}{2}an(n+1) + bn$$

സൗകര്യത്തിനുവേണ്ടി ഇതൽപം മാറ്റിയെഴുതാം.

$$\frac{1}{2}an(n+1) + bn = \frac{1}{2}n\big(a(n+1) + 2b\big)$$

$$= \frac{1}{2}n\big((an+b) + (a+b)\big)$$

$$= \frac{1}{2}n(x_n + x_1)$$

ഇതിന്റെ അർത്ഥമെന്താണ്?

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങളുടെ തുക, ആദ്യത്തേയും അവസാനത്തേയും പദങ്ങളുടെ തുകയെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഉദാഹരണമായി 3, 5, 7, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 50 പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കണമെന്നു കരുതുക. ഇതിലെ 50-ാം പദം

$$3 + (49 \times 2) = 101$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ തുക

$$\frac{1}{2} \times 50 \times (3 + 101) = 2600$$

എന്നു കണക്കു കൂട്ടാം.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ആദ്യപദം 5 ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം 2 ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുക
- ആദ്യപദം f ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം d യും ആയ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കുകൂട്ടുന്നതിനുള്ള ബീജഗണിതവാചകം കണ്ടുപിടിക്കുക.
- $5^2 \times 5^4 \times 5^6 \times \dots \times 5^{2n} = (0.04)^{-28}$ ആണെങ്കിൽ, n എത്രയാണ്?
- ഒമ്പതിന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ എല്ലാ മൂന്നക്കസംഖ്യകളുടേയും തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങളുടെ

മറ്റൊരു മാർഗം

എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$$

എന്നറിയാമല്ലോ. ഇതിൽ $1, 2, 3, \dots\dots, n$ എന്നു ക്രമമായി എടുത്താൽ

$$2^2 - 1^2 = (2 \times 1) + 1$$

$$3^2 - 2^2 = (2 \times 2) + 1$$

$$4^2 - 3^2 = (2 \times 3) + 1$$

....

$$(n+1)^2 - n^2 = (2 \times n) + 1$$

എന്നു കിട്ടും

ഈ സമവാക്യങ്ങളെല്ലാം തമ്മിൽ കൂട്ടിയാലോ?

$$(n+1)^2 - 1 = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതിൽ നിന്ന്

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$= \frac{1}{2}((n+1)^2 - 1 - n)$$

$$= \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)$$

എന്നു കിട്ടും.

തുക, മൂന്നാമത്തെ പദത്തിന്റെ അഞ്ചു മടങ്ങാണെന്നു തെളിയിക്കുക. ഏഴുപദങ്ങളുടെ തുകയോ?

ഇത്തരം കണക്കുകളിൽ നിന്ന് ഒരു പൊതുനിയമം ഉണ്ടാക്കാമോ?

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $2n^2 + 3n$ ആണ്. ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

ചുവടെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക്, മനക്കണക്കായി ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക

- 3, 5, 7, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുകയേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്, 4, 6, 8, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക?
- 1 മുതൽ 20 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകയേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്, 21 മുതൽ 40 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക?
- $51 + 52 + 53 + ... + 70$
- $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + ... + \frac{25}{2}$
- $\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + ... + 12\frac{1}{2}$

പ്രോജക്ട്

- പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽസംഖ്യകളായ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളിൽ ഒരെണ്ണം പൂർണവർഗമാണെങ്കിൽ, മറ്റനേകം പദങ്ങൾ പൂർണവർഗമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽസംഖ്യകളും, ഒരു പദംപോലും പൂർണവർഗമല്ലാത്തതുമായ സമാന്തരശ്രേണിയുണ്ടോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

വർഗങ്ങളുടെ തുക

സർവസമവാക്യമുപയോഗിച്ച് എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ടുപിടിച്ചതു പോലെ, അവയുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയും കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

എന്ന സർവസമവാക്യം കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **കൃതിയും ക്രമവും** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക) ഇതിൽ നിന്ന്, x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

എന്നു കാണാം. മുമ്പു ചെയ്തതു പോലെ ഇതിൽ $x = 1, 2, 3, ..., n$ എന്നെടുത്തു കൂട്ടിയാൽ

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + ... + n) + n$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

അപ്പോൾ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n(n+1) - n\right)$$

ഈ സമവാക്യത്തിലെ വലതുഭാഗം ലഘൂകരിച്ച്,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

എന്നാക്കാം.